Versione: 15 febbraio 2011

Università di Pisa
Corso di laurea in Scienze Biologiche

Testi e soluzioni degli scritti d'esame di

Matematica, corso C

a.a. 2009/10

docente: Giovanni Alberti

Giovanni Alberti
Dipartimento di Matematica
Università di Pisa
largo Pontecorvo 5
56127 Pisa
www.dm.unipi.it/~alberti

Avvertenze

Gli scritti d'esame per il corso di Matematica per Scienze Biologiche si compongono di due parti: una prima parte con otto domande o problemi molto semplici a cui si deve dare solo la risposta, ed una seconda con tre o più problemi per cui invece si deve dare una soluzione articolata e spiegata in dettaglio. Il tempo a disposizione è di un'ora per la prima parte e di due ore per la seconda. Per la sufficienza piena sono solitamente richieste almeno quattro risposte corrette nella prima parte, ed un problema completamente risolto nella seconda.

La prima sezione di questa raccolta contiene i testi di tutti gli scritti, incluse le prove in itinere, mentre la seconda contiene una breve traccia delle soluzioni.

Programma del corso.

Sono riportati in corsivo gli argomenti non fondamentali.

1. Funzioni, grafici, numeri
   - 1.1 Funzioni e grafici di funzioni: dominio di definizione, funzione inversa. Funzioni elementari: funzioni lineari, potenze, esponenziali, logaritmi, funzioni trigonometriche (seno, coseno, tangente) e funzioni trigonometriche inverse.
   - 1.2 Operazioni sui grafici di funzioni. Interpretazione di equazioni e disequazioni in termini di grafici di funzioni. Grafici logaritmici e semi-logaritmici.
   - 1.3 Numeri complessi. Coordinate polari di un punto nel piano. Rappresentazione esponenziale dei numeri complessi.
2. Nozioni di statistica descrittiva
   - 2.1 Propagazione degli errori.
   - 2.2 Media e varianza di un insieme finito di dati numerici. Medie pesate. Mediana e moda.
   - 2.3 Rappresentazione grafica di un insieme di dati, diagrammi e istogrammi. Metodo dei minimi quadrati e retta di regressione.
3. Derivate, integrali ed equazioni differenziali
   - 3.1 Derivata di una funzione: significato geometrico ed interpretazione fisica. Derivate delle funzioni elementari e regole per il calcolo delle derivate.
   - 3.2 Applicazione delle derivate allo studio dei grafici di funzioni. Individuazione dei punti di massimo e di minimo di una funzione.
   - 3.3 Calcolo dei limiti di funzioni. Metodo di de l'Hôpital. Confronto tra i comportamenti asintotici di esponenziali, potenze e logaritmi. Notazione di Landau ("o" piccolo).
   - 3.4 Sviluppo di Taylor e parte principale di una funzione. *Rappresentazione delle costanti π ed e come somme infinite tramite gli sviluppi di Taylor di* $\arctan x$ *ed* e^x. Fattoriale, coefficienti binomiali e formula del binomio di Newton.
   - 3.5 Definizione di integrale definito di una funzione in termini di area del sottografico. Teorema fondamentale del calcolo integrale. Primitive delle funzioni elementari e regole per il calcolo delle primitive (integrali indefiniti) e degli integrali definiti. *Calcolo di aree e volumi.*
   - 3.6 Esempi di equazioni differenziali. Significato dei dati iniziali. Equazioni a variabili separabili. Equazioni lineari del primo ordine. Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti, omogenee e non omogenee. *Esempi di equazioni differenziali tratti dalla fisica.*
4. Elementi di probabilità
   - 4.1 Disposizioni, permutazioni, combinazioni.
   - 4.2 Definizione di probabilità su uno spazio di eventi elementari finito; probabilità uniforme. Eventi indipendenti e probabilità condizionata. Probabilità di unione ed intersezione di

un numero finito di eventi indipendenti. Formula di Bayes. Esperimenti ripetuti. Esempi standard di modelli probabilistici (lancio di due dadi, lancio di n monete, etc.).

4.3 Variabili aleatorie. Valore atteso, varianza e covarianza. Indipendenza; valore atteso e varianza per la somma di due o più variabili aleatorie indipendenti. Disuguaglianza di Chebyshev. Media campionaria e legge (debole) dei grandi numeri.

4.4 Principali distribuzioni di probabilità: di Bernoulli, binomiale, geometrica, di Poisson.

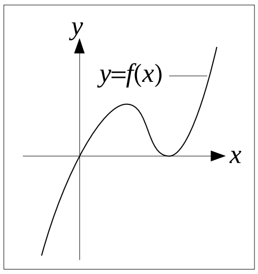
4.5 Variabili aleatorie con distribuzioni continue; valore atteso e varianza. Distribuzione uniforme, esponenziale, normale (o Gaussiana). *Il Teorema del limite centrale.*

Testi

Compitino di prova, 14 gennaio 2010

Prima parte

1. Determinare il dominio di definizione della funzione $\log(2 - e^x)$.
2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\log(1 - x^3)$; b) $\dfrac{x-1}{x+1}$; c) $(\sin(x^3))^4$.
3. Semplificare il più possibile la seguente espressione e calcolarne la derivata: $\log\left(\dfrac{x^3 e^{3x-2}}{2^{x^2}}\right)$.
4. Calcolare media, mediana e varianza dei seguenti numeri: 21 ; 24 ; 20 ; 17 ; 23.
5. Scrivere il numero complesso $1 - i$ in forma esponenziale e calcolare $(1-i)^{-5}$.
6. Calcolare valore ed errore assoluto del prodotto $(2\,\mathrm{m} \pm 1\,\mathrm{cm}) \cdot (4\,\mathrm{m} \pm 5\,\mathrm{cm})$ usando la formula semplificata.
7. Risolvere graficamente l'equazione $f(x) = x/3$, dove il grafico della funzione f è quello dato in figura.
8. Disegnare il grafico di $y = 1 + \dfrac{1}{1+x}$.



Seconda parte

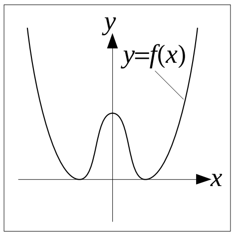
1. Le dimensioni di una scatola sono state misurate come segue: larghezza 10 cm, lunghezza 20 cm, altezza 5 cm, tutte con un errore assoluto di 0,5 mm.
   a) Calcolare l'errore relativo per ciascuna dimensione.
   b) Calcolare il volume e la superficie totale della scatola, ed i corrispondenti errore relativi ed assoluti.
   c) Se si vuole calcolare il volume con un errore relativo pari al 10%, quale errore assoluto ci si può permettere nella misurazione delle dimensioni della scatola?
   [*Usare le formule semplificate per l'errore del prodotto per tutto l'esercizio.*]
2. Si considerino le sequenze di valori di x e y date nella seguente tabella:

x:	-4	0	3	7	9
y:	4,5	1,6	0,8	0,1	0,4

   a) Calcolare la media e la varianza dei numeri x_i e poi degli y_i. Calcolare la covarianza e il coefficiente di correlazione degli x_i e y_i.
   b) Scrivere l'equazione della retta di regressione corrispondente.

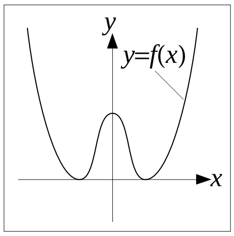
PRIMO COMPITINO, 18 GENNAIO 2010

PRIMA PARTE, GRUPPO A



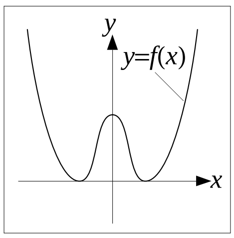
1. Risolvere la disequazione $\dfrac{x^2 - 2x - 3}{x + 2} < 0$.
2. Risolvere graficamente la disequazione $f(x) \geq x$ dove f è la funzione dato nella figura accanto.
3. Calcolare media, mediana e varianza di: 3,1 ; 3,2 ; 2,5 ; 3,5 ; 3,2 .
4. Tra le persone che hanno passato l'esame per la patente in una cittadina, il 65% c'è riuscito al primo tentativo, il 20% ha avuto bisogno di due tentativi, il 5% di tre e le rimanenti di quattro. Qual è il numero medio di tentativi? E la mediana?
5. Scrivere il numero complesso $\dfrac{1+i}{1-i}$ in coordinate cartesiane e in coordinate polari.
6. Calcolare valore ed errore relativo del rapporto $(12\,\mathrm{cm}^2 \pm 36\,\mathrm{mm}^2)/(2,5\,\mathrm{m} \pm 5\,\mathrm{cm})$ utilizzando la formula semplificata.
7. Derivare le seguenti funzioni: a) $\cos(2x + 1)$; b) $(x \log x)^2$; c) $\dfrac{2^{2x^2+x+2}}{4^{x^2+1}}$.
8. Disegnare il grafico della funzione $y = (x + 1)^4 - 1$.

PRIMA PARTE, GRUPPO B



1. Risolvere la disequazione $\dfrac{x^2 + 2x - 3}{x - 2} > 0$.
2. Risolvere graficamente la disequazione $f(x) \leq x$ dove f è la funzione dato nella figura accanto.
3. Calcolare media, mediana e varianza di: 4,2 ; 4,5 ; 3,5 ; 4,2 ; 4,1 .
4. Tra le persone che hanno passato l'esame per la patente in una cittadina, il 75% c'è riuscito al primo tentativo, il 10% ha avuto bisogno di due tentativi, il 10% di tre e le rimanenti di quattro. Qual è il numero medio di tentativi? E la mediana?
5. Scrivere il numero complesso $\dfrac{1}{1+i} + \dfrac{1}{1-i}$ in coordinate cartesiane e in coordinate polari.
6. Calcolare valore ed errore relativo del rapporto $(24\,\mathrm{cm}^2 \pm 48\,\mathrm{mm}^2)/(2,5\,\mathrm{m} \pm 5\,\mathrm{cm})$ utilizzando la formula semplificata.
7. Derivare le seguenti funzioni: a) $(x^2 \log x)^2$; b) $\sin(2x - 1)$; c) $\dfrac{9^{x^2+x+1}}{3^{2x^2+2}}$.
8. Disegnare il grafico della funzione $y = -\cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

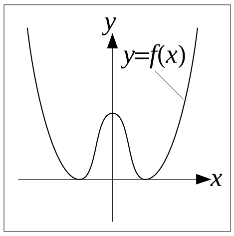
PRIMA PARTE, GRUPPO C



1. Risolvere la disequazione $\dfrac{x^2 - 2x - 3}{x - 2} > 0$.
2. Risolvere graficamente la disequazione $f(x) \geq -x$ dove f è la funzione dato nella figura accanto.
3. Calcolare media, mediana e varianza di: 4,3 ; 4,9 ; 4,1 ; 4,3 ; 2,9 .

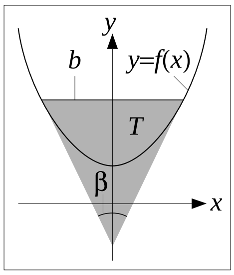
4. Tra le persone che hanno passato l'esame per la patente in una cittadina, il 40% c'è riuscito al primo tentativo, il 25% ha avuto bisogno di due tentativi, il 20% di tre e le rimanenti di quattro. Qual è il numero medio di tentativi? E la mediana?
5. Scrivere il numero complesso $\dfrac{1}{1+i} - \dfrac{1}{1-i}$ in coordinate cartesiane e in coordinate polari.
6. Calcolare valore ed errore relativo del rapporto $(24\,\mathrm{cm}^2 \pm 48\,\mathrm{mm}^2)/(2\,\mathrm{m} \pm 6\,\mathrm{cm})$ utilizzando la formula semplificata.
7. Derivare le seguenti funzioni: a) $\log(2x+1)$; b) $\sin(x \log x)$; c) $\dfrac{3^{2x^2-x+2}}{9^{x^2-x+1}}$.
8. Disegnare il grafico della funzione $y = -\sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

PRIMA PARTE, GRUPPO D



1. Risolvere la disequazione $\dfrac{x^2+2x-3}{x+2} < 0$.
2. Risolvere graficamente la disequazione $f(x) \leq -x$ dove f è la funzione dato nella figura accanto.
3. Calcolare media, mediana e varianza di: 1,9 ; 3,1 ; 3,9 ; 3,3 ; 3,3 .
4. Tra le persone che hanno passato l'esame per la patente in una cittadina, il 45% c'è riuscito al primo tentativo, il 35% ha avuto bisogno di due tentativi, il 15% di tre e le rimanenti di quattro. Qual è il numero medio di tentativi? E la mediana?
5. Scrivere il numero complesso $\dfrac{1-i}{1+i}$ in coordinate cartesiane e in coordinate polari.
6. Calcolare valore ed errore relativo del rapporto $(12\,\mathrm{cm}^2 \pm 36\,\mathrm{mm}^2)/(2\,\mathrm{m} \pm 6\,\mathrm{cm})$ utilizzando la formula semplificata.
7. Derivare le seguenti funzioni: a) $\cos(x \log x)$; b) e^{-2x+1} ; c) $\dfrac{4^{x^2+x+1}}{2^{2x^2+x+2}}$.
8. Disegnare il grafico della funzione $y = (x-1)^4 - 1$.

SECONDA PARTE, GRUPPO A



1. Posto $f(x) := 1 + 2x^4$, consideriamo il triangolo isoscele T con base parallela all'asse delle x, vertici di base sul grafico di f, e i due lati uguali tangenti al grafico di f, e indichiamo con b la lunghezza della base, e con β l'angolo opposto alla base (si confronti la figura accanto).
   a) Calcolare l'area di T in funzione di b;
   b) Calcolare l'area di T in funzione di β.
2. Consideriamo la seguente tabella di dati:

x:	2,72	7,38	$5{,}46 \cdot 10^1$	$4{,}02 \cdot 10^2$	$2{,}98 \cdot 10^3$
y:	$9{,}15 \cdot 10^6$	$1{,}57 \cdot 10^5$	$5{,}60 \cdot 10^1$	$1{,}75 \cdot 10^{-2}$	$6{,}30 \cdot 10^{-6}$

   a) Calcolare media e varianza per i numeri x_i, media e varianza per gli y_i, covarianza e coefficiente di correlazione di x_i e y_i.

b) Scrivere l'equazione della retta di regressione associata a queste coppie di dati.

c) Trovare la legge del tipo $y = b\,x^a$ che meglio interpola queste coppie di dati, e dire se è preferibile alla retta di regressione.

3. Da un sondaggio risulta che in una certa città la percentuale di famiglie con nessuna persona lavorativamente attiva sono il 20%, quelle con una persona attiva il 25%, quelle con due il 45%, e quelle con 3 per il 10%.

   a) Calcolare il numero medio e la varianza di persone attive per famiglia.

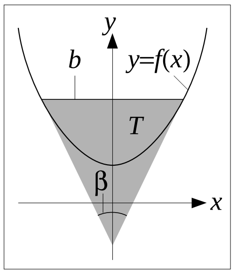
   b) Detta p la percentuale di persone attive della popolazione, far vedere che partendo dai dati a disposizione non è possibile determinare p.

   c) Per ciascuno dei seguenti dati dire se, insieme a quelli già noti, permette o meno di determinare p (motivando la risposta):

   (i) numero totale di abitanti;
   (ii) numero totale di abitanti per ciascuna delle quattro classi di famiglie date sopra;
   (iii) numero medio di componenti per famiglia per ciascuna delle quattro classi;
   (iv) numero totale di famiglie per ciascuna delle quattro classi.

   d) Supponendo di sapere che in ciascuna di queste quattro classi il numero medio di componenti per famiglia sia al massimo 3,5, cosa si può dire su p?

SECONDA PARTE, GRUPPO B



1. Posto $f(x) := 2 + 3x^6$, consideriamo il triangolo isoscele T con base parallela all'asse delle x, vertici di base sul grafico di f, e i due lati uguali tangenti al grafico di f, e indichiamo con b la lunghezza della base, e con β l'angolo opposto alla base (si confronti la figura accanto).

   a) Calcolare l'area di T in funzione di b;

   b) Calcolare l'area di T in funzione di β.

2. Consideriamo la seguente tabella di dati:

x:	1,36	3,69	$2{,}73 \cdot 10^1$	$2{,}01 \cdot 10^2$	$1{,}49 \cdot 10^3$
y:	$9{,}15 \cdot 10^6$	$1{,}57 \cdot 10^5$	$5{,}60 \cdot 10^1$	$1{,}75 \cdot 10^{-2}$	$6{,}30 \cdot 10^{-6}$

   a) Calcolare media e varianza per i numeri x_i, media e varianza per gli y_i, covarianza e coefficiente di correlazione di x_i e y_i.

   b) Scrivere l'equazione della retta di regressione associata a queste coppie di dati.

   c) Trovare la legge del tipo $y = b\,x^a$ che meglio interpola queste coppie di dati, e dire se è preferibile alla retta di regressione.

3. Da un sondaggio risulta che in una certa città la percentuale di famiglie con nessuna persona lavorativamente attiva sono il 30%, quelle con una persona attiva il 25%, quelle con due il 40%, e quelle con 3 per il 5%.

   a) Calcolare il numero medio e la varianza di persone attive per famiglia.

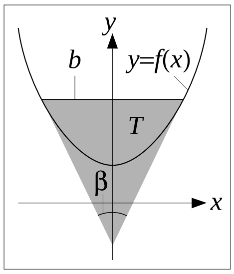
   b) Detta p la percentuale di persone attive della popolazione, far vedere che partendo dai dati a disposizione non è possibile determinare p.

   c) Per ciascuno dei seguenti dati dire se, insieme a quelli già noti, permette o meno di determinare p (motivando la risposta):

   (i) numero totale di abitanti;
   (ii) numero totale di abitanti per ciascuna delle quattro classi di famiglie date sopra;
   (iii) numero medio di componenti per famiglia per ciascuna delle quattro classi;
   (iv) numero totale di famiglie per ciascuna delle quattro classi.

d) Supponendo di sapere che in ciascuna di queste quattro classi il numero medio di componenti per famiglia sia al massimo 3, cosa si può dire su p?

Seconda parte, gruppo C

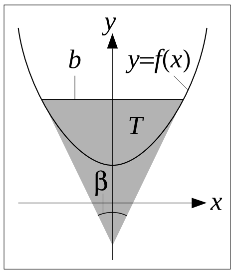


1. Posto $f(x) := 2 + 4x^4$, consideriamo il triangolo isoscele T con base parallela all'asse delle x, vertici di base sul grafico di f, e i due lati uguali tangenti al grafico di f, e indichiamo con b la lunghezza della base, e con β l'angolo opposto alla base (si confronti la figura accanto).
   a) Calcolare l'area di T in funzione di b;
   b) Calcolare l'area di T in funzione di β.
2. Consideriamo la seguente tabella di dati:

x:	1,36	3,69	$2{,}73 \cdot 10^1$	$2{,}01 \cdot 10^2$	$1{,}49 \cdot 10^3$
y:	$1{,}83 \cdot 10^7$	$3{,}14 \cdot 10^5$	$1{,}12 \cdot 10^2$	$3{,}50 \cdot 10^{-2}$	$1{,}26 \cdot 10^{-5}$

   a) Calcolare media e varianza per i numeri x_i, media e varianza per gli y_i, covarianza e coefficiente di correlazione di x_i e y_i.
   b) Scrivere l'equazione della retta di regressione associata a queste coppie di dati.
   c) Trovare la legge del tipo $y = b\,x^a$ che meglio interpola queste coppie di dati, e dire se è preferibile alla retta di regressione.
3. Da un sondaggio risulta che in una certa città la percentuale di famiglie con nessuna persona lavorativamente attiva sono il 20%, quelle con una persona attiva il 35%, quelle con due il 40%, e quelle con 3 per il 5%.
   a) Calcolare il numero medio e la varianza di persone attive per famiglia.
   b) Detta p la percentuale di persone attive della popolazione, far vedere che partendo dai dati a disposizione non è possibile determinare p.
   c) Per ciascuno dei seguenti dati dire se, insieme a quelli già noti, permette o meno di determinare p (motivando la risposta):
      (i) numero totale di abitanti;
      (ii) numero totale di abitanti per ciascuna delle quattro classi di famiglie date sopra;
      (iii) numero medio di componenti per famiglia per ciascuna delle quattro classi;
      (iv) numero totale di famiglie per ciascuna delle quattro classi.
   d) Supponendo di sapere che in ciascuna di queste quattro classi il numero medio di componenti per famiglia sia al massimo 3,5, cosa si può dire su p?

Seconda parte, gruppo D



1. Posto $f(x) := 1 + 6x^6$, consideriamo il triangolo isoscele T con base parallela all'asse delle x, vertici di base sul grafico di f, e i due lati uguali tangenti al grafico di f, e indichiamo con b la lunghezza della base, e con β l'angolo opposto alla base (si confronti la figura accanto).
   a) Calcolare l'area di T in funzione di b;
   b) Calcolare l'area di T in funzione di β.
2. Consideriamo la seguente tabella di dati:

x:	2,72	7,38	$5{,}46 \cdot 10^1$	$4{,}02 \cdot 10^2$	$2{,}98 \cdot 10^3$
y:	$1{,}83 \cdot 10^7$	$3{,}14 \cdot 10^5$	$1{,}12 \cdot 10^2$	$3{,}50 \cdot 10^{-2}$	$1{,}26 \cdot 10^{-5}$

a) Calcolare media e varianza per i numeri x_i, media e varianza per gli y_i, covarianza e coefficiente di correlazione di x_i e y_i.

b) Scrivere l'equazione della retta di regressione associata a queste coppie di dati.

c) Trovare la legge del tipo $y = b\,x^a$ che meglio interpola queste coppie di dati, e dire se è preferibile alla retta di regressione.

3. Da un sondaggio risulta che in una certa città la percentuale di famiglie con nessuna persona lavorativamente attiva sono il 15%, quelle con una persona attiva il 20%, quelle con due il 55%, e quelle con 3 per il 10%.

a) Calcolare il numero medio e la varianza di persone attive per famiglia.

b) Detta p la percentuale di persone attive della popolazione, far vedere che partendo dai dati a disposizione non è possibile determinare p.

c) Per ciascuno dei seguenti dati dire se, insieme a quelli già noti, permette o meno di determinare p (motivando la risposta):

(i) numero totale di abitanti;

(ii) numero totale di abitanti per ciascuna delle quattro classi di famiglie date sopra;

(iii) numero medio di componenti per famiglia per ciascuna delle quattro classi;

(iv) numero totale di famiglie per ciascuna delle quattro classi.

d) Supponendo di sapere che in ciascuna di queste quattro classi il numero medio di componenti per famiglia sia al massimo 3, cosa si può dire su p?

Compitino di recupero, 10 febbraio 2010

Prima parte, gruppo A

1. Risolvere la disequazione $\log(x^2 - 3e^2) \geq 2$.
2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\cos(1 - x^2)$; b) $\dfrac{\cos x}{\sin x}$; c) $\log(e^{3x}x^3)$.
3. Direi quali delle seguenti approssimazioni della grandezza $x = 1{,}115\,\mathrm{m}^2$ sono corrette: a) $(10^2 \pm 2 \cdot 10^1)\,\mathrm{cm}^2$; b) $10^6\,\mathrm{mm}^2 \cdot (1 \pm 15\%)$; c) $11 \cdot 10^5\,\mathrm{mm}^2 \cdot (1 \pm 5\%)$; d) $(10^4 \pm 10^3)\,\mathrm{cm}^2$.
4. Calcolare media, mediana e varianza dei seguenti numeri: 1,7 ; 2,1 ; 2,4 ; 2,0 ; 2,3.
5. Scrivere le coordinate polari per ciascuno dei seguenti punti del piano, dati in coordinate cartesiane: a) $(-2, 0)$; b) $(1, -1)$; c) $(-1, -\sqrt{3})$.
6. Calcolare l'errore *relativo* per il prodotto $(2\,\mathrm{m} \pm 10\,\mathrm{cm}) \cdot (5\,\mathrm{min} \pm 15\,\mathrm{sec})$ usando la formula semplificata.
7. Trovare tutti gli angoli x compresi tra 0 e 2π tali che $\sin x = -1/2$.
8. Disegnare il grafico di $y = \sqrt{x-1}$.

Prima parte, gruppo B

1. Risolvere la disequazione $\log(x^2 - 8e^2) \geq 2$.
2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) e^{x^4-3}; b) $\dfrac{1}{\cos^2 x}$; c) $\log(e^{-3x}x^3)$.
3. Direi quali delle seguenti approssimazioni della grandezza $x = 0{,}1115\,\mathrm{m}^2$ sono corrette: a) $10^5\,\mathrm{mm}^2 \cdot (1 \pm 15\%)$; b) $11 \cdot 10^4\,\mathrm{mm}^2 \cdot (1 \pm 5\%)$; c) $(10 \pm 2)\,\mathrm{cm}^2$; d) $(10^3 \pm 10^2)\,\mathrm{cm}^2$.
4. Calcolare media, mediana e varianza dei seguenti numeri: 3,4 ; 3,0 ; 2,7 ; 3,1 ; 3,3.
5. Scrivere le coordinate polari per ciascuno dei seguenti punti del piano, dati in coordinate cartesiane: a) $(\sqrt{3}, -1)$; b) $(0, -1)$; c) $(-1, -1)$.
6. Calcolare l'errore *relativo* per il prodotto $(2\,\mathrm{m} \pm 4\,\mathrm{cm}) \cdot (5\,\mathrm{min} \pm 15\,\mathrm{sec})$ usando la formula semplificata.
7. Trovare tutti gli angoli x compresi tra $-\pi$ e π tali che $\cos x = -1/2$.
8. Disegnare il grafico di $y = -\sqrt{x}$.

Prima parte, gruppo C

1. Risolvere la disequazione $\log(x^2 - 3e^4) \geq 4$.
2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\cos(2 - x^3)$; b) $\dfrac{1}{\sin^2 x}$; c) $\log(e^{3x}x^{-3})$.
3. Direi quali delle seguenti approssimazioni della grandezza $x = 11{,}15\,\mathrm{m}^2$ sono corrette: a) $11 \cdot 10^6\,\mathrm{mm}^2 \cdot (1 \pm 5\%)$; b) $(10^5 \pm 10^4)\,\mathrm{cm}^2$; c) $(10^3 \pm 2 \cdot 10^2)\,\mathrm{cm}^2$; d) $10^7\,\mathrm{mm}^2 \cdot (1 \pm 15\%)$.
4. Calcolare media, mediana e varianza dei seguenti numeri: 3,4 ; 4,2 ; 4,8 ; 4,0 ; 4,6.
5. Scrivere le coordinate polari per ciascuno dei seguenti punti del piano, dati in coordinate cartesiane: a) $(-2, 2)$; b) $(0, 3)$; c) $(1, -\sqrt{3})$.
6. Calcolare l'errore *relativo* per il prodotto $(2\,\mathrm{m} \pm 10\,\mathrm{cm}) \cdot (10\,\mathrm{min} \pm 15\,\mathrm{sec})$ usando la formula semplificata.

7. Trovare tutti gli angoli x compresi tra 0 e 2π tali che $\cos x = -1/2$.
8. Disegnare il grafico di $y = -1 + \sqrt{x}$.

SECONDA PARTE, GRUPPO A

1. Si devono imbiancare il soffitto e le due pareti lunghe di un magazzino a forma di parallelepipedo che misura 12,5 m × 20 m di base e 4,8 m di altezza.
   a) Tenuto conto che le pareti da imbiancare non contengono né porte né finestre e che il margine di errore nelle varie misurazioni è di 20 cm, calcolare l'area complessiva da imbiancare con il relativo errore.
   b) Sapendo che con 1 litro di pittura si riesce a imbiancare una superficie compresa tra 2 e 2,5 m^2, calcolare quanti litri di pittura occorrono, con il relativo errore.
   c) Quanti bidoni da 10 litri di pittura bisogna acquistare per essere *certi* di riuscire a completare la tinteggiatura?
   [*Utilizzare sempre le formule semplificate per il calcolo dell'errore.*]
2. Indichiamo con d la lunghezza della diagonale di un rettangolo e con α l'angolo acuto compreso tra le due diagonali.
   a) Calcolare l'area e il perimetro del rettangolo in termini di d e di α.
   b) Per quali valori di α l'area risulta maggiore o uguale a $d^2/4$? [*Potrebbe essere utile l'identità* $2\sin x\,\cos x = \sin(2x)$.]

SECONDA PARTE, GRUPPO B

1. Si devono imbiancare il soffitto e le due pareti corte di un magazzino a forma di parallelepipedo che misura 12,5 m × 20 m di base e 5,5 m di altezza.
   a) Tenuto conto che le pareti da imbiancare non contengono né porte né finestre e che il margine di errore nelle varie misurazioni è di 10 cm, calcolare l'area complessiva da imbiancare con il relativo errore.
   b) Sapendo che con 1 litro di pittura si riesce a imbiancare una superficie compresa tra 2 e 2,5 m^2, calcolare quanti litri di pittura occorrono, con il relativo errore.
   c) Quanti bidoni da 10 litri di pittura bisogna acquistare per essere *certi* di riuscire a completare la tinteggiatura?
   [*Utilizzare sempre le formule semplificate per il calcolo dell'errore.*]
2. Indichiamo con d la lunghezza della diagonale di un rettangolo e con α l'angolo acuto compreso tra le due diagonali.
   a) Calcolare l'area e il perimetro del rettangolo in termini di d e di α.
   b) Per quali valori di α l'area risulta maggiore o uguale a $d^2/4$? [*Potrebbe essere utile l'identità* $2\sin x\,\cos x = \sin(2x)$.]

SECONDA PARTE, GRUPPO C

1. Si devono imbiancare il soffitto e tre pareti di un magazzino a forma di parallelepipedo che misura 16 m × 16 m di base e 4,8 m di altezza.
   a) Tenuto conto che le pareti da imbiancare non contengono né porte né finestre e che il margine di errore nelle varie misurazioni è di 20 cm, calcolare l'area complessiva da imbiancare con il relativo errore.
   b) Sapendo che con 1 litro di pittura si riesce a imbiancare una superficie compresa tra 2 e 2,5 m^2, calcolare quanti litri di pittura occorrono, con il relativo errore.

c) Quanti bidoni da 10 litri di pittura bisogna acquistare per essere *certi* di riuscire a completare la tinteggiatura?
[*Utilizzare sempre le formule semplificate per il calcolo dell'errore.*]

2. Indichiamo con d la lunghezza della diagonale di un rettangolo e con α l'angolo acuto compreso tra le due diagonali.
a) Calcolare l'area e il perimetro del rettangolo in termini di d e di α.
b) Per quali valori di α l'area risulta maggiore o uguale a $d^2/4$? [*Potrebbe essere utile l'identità* $2\sin x\,\cos x = \sin(2x)$.]

Secondo compitino, 7 aprile 2010

Prima parte, gruppo A

1. Determinare il dominio di definizione della funzione $\log(e^{-x} - 2)$.
2. Calcolare il valore e l'errore *relativo* del prodotto $(20\,\mathrm{cm} \pm 4\,\mathrm{mm}) \cdot (8\,\mathrm{cm} \pm 4\,\mathrm{mm})$.
3. Calcolare media, mediana e varianza dei seguenti numeri: 23 ; 20 ; 24 ; 20 ; 18 .
4. Calcolare valore e punto di massimo di $f(x) := e^{x^2-2x-2}$ relativamente all'intervallo $[0,3]$.
5. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^{2-x^2}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(4x^4)}{2x^4}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\,\log x$.
6. Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int e^{\cos x} \sin x\, dx$.
7. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\dot{y} = y^2 \sin t$.
8. Disegnare il grafico di $y = e^{-x} - 1$.

Prima parte, gruppo B

1. Determinare il dominio di definizione della funzione $\log(2 - e^{-x})$.
2. Calcolare il valore e l'errore *relativo* del prodotto $(10\,\mathrm{cm} \pm 4\,\mathrm{mm}) \cdot (8\,\mathrm{cm} \pm 4\,\mathrm{mm})$.
3. Calcolare media, mediana e varianza dei seguenti numeri: 16 ; 20 ; 28 ; 26 ; 20 .
4. Calcolare valore e punto di minimo di $f(x) := e^{-x^2+2x}$ relativamente all'intervallo $[0,3]$.
5. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(4x^4)}{2x^3}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \log(x^4 + x + 1)$; c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 2^{-x}$.
6. Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int 4x\, e^{2x}\, dx$.
7. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\dot{y} = y^2/t^2$.
8. Disegnare il grafico di $y = \dfrac{1}{x+1} - 1$.

Prima parte, gruppo C

1. Determinare il dominio di definizione della funzione $\sqrt{e^{2x} - 4}$.
2. Calcolare il valore e l'errore *relativo* del prodotto $(10\,\mathrm{cm} \pm 4\,\mathrm{mm}) \cdot (16\,\mathrm{cm} \pm 4\,\mathrm{mm})$.
3. Calcolare media, mediana e varianza dei seguenti numeri: 18 ; 19 ; 13 ; 15 ; 15.
4. Calcolare valore e punto di massimo di $f(x) := e^{x^2-2x-1}$ relativamente all'intervallo $[-1,2]$.
5. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+2x^4)}{x^4}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{1+x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\log x}$.
6. Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int 3\sqrt{2-x}\, dx$.
7. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\dot{y} = 3t^2 e^{-y}$.
8. Disegnare il grafico di $y = -\log(x+1)$.

Secondo compitino, 7 aprile 2010

Seconda parte, gruppo A

1. Preso a numero reale, si consideri l'equazione differenziale
$$\ddot{y} + 2a\dot{y} + 4y = 4e^{-2t} \ . \qquad (*)$$
Trovare la soluzione generale della $(*)$ nei seguenti casi:
a) $a = 1$;
b) $a = 2$;
c) $a \geq 0$ qualunque.
d) Per quali valori di $a \geq 0$ si ha che tutte le soluzioni di $(*)$ sono $o(e^{-t})$ per $t \to +\infty$?

2. a) Tracciare un disegno approssimativo del grafico di xe^x.
b) Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $xe^x \leq y \leq -2xe^x$.
c) Calcolare l'area di A.

3. Determinare la parte principale per $x \to 0$ delle seguenti funzioni:
a) $x - \sin x$;
b) $x^2 - \sin^2 x$;
c) $x^n - \sin^n x$ con n intero positivo.

Seconda parte, gruppo B

1. Preso a numero reale, si consideri l'equazione differenziale
$$\ddot{y} + 2a\dot{y} + 9y = 6e^{-3t} \ . \qquad (*)$$
Trovare la soluzione generale della $(*)$ nei seguenti casi:
a) $a = 2$;
b) $a = 3$;
c) $a \geq 0$ qualunque.
d) Per quali valori di $a \geq 0$ si ha che tutte le soluzioni di $(*)$ sono $o(e^{-t})$ per $t \to +\infty$?

2. a) Tracciare un disegno approssimativo del grafico di $2xe^x$.
b) Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $2xe^x \leq y \leq xe^x$.
c) Calcolare l'area di A.

3. Determinare la parte principale per $x \to 0$ delle seguenti funzioni:
a) $x - \log(1 + x)$;
b) $x^2 - \log^2(1 + x)$;
c) $x^n - \log^n(1 + x)$ con n intero positivo.

Seconda parte, gruppo C

1. Preso a numero reale, si consideri l'equazione differenziale
$$\ddot{y} + 2a\dot{y} + 16y = 8e^{-4t} \ . \qquad (*)$$
Trovare la soluzione generale della $(*)$ nei seguenti casi:
a) $a = 2$;
b) $a = 4$;
c) $a \geq 0$ qualunque.

d) Per quali valori di $a \geq 0$ si ha che tutte le soluzioni di $(*)$ sono $o(e^{-t})$ per $t \to +\infty$?

2. a) Tracciare un disegno approssimativo del grafico di $xe^{-x^2/2}$.
   b) Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $xe^{-x^2/2} \leq y \leq -xe^{-x^2/2}$.
   c) Calcolare l'area di A.

3. Determinare la parte principale per $x \to 0$ delle seguenti funzioni:
   a) $x - \log(1 + x)$;
   b) $x^2 - \log^2(1 + x)$;
   c) $x^n - \log^n(1 + x)$ con n intero positivo.

TERZO COMPITINO E PRIMO APPELLO, 1 GIUGNO 2010

PRIMA PARTE, GRUPPO A

1. Risolvere la disequazione $\log(e^{2x} - 3) > 0$.
2. Consideriamo un gruppo di nove ragazzi di cui uno ha 18 anni, tre hanno 20 anni e cinque hanno 24 anni. Calcolare media, mediana e varianza dell'età.
3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos(e^{-x})$; b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\,\log x$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2-3x^4}{x^3 - x^{-3}}$.
4. Calcolare $\displaystyle\int_1^e 25\,x^4 \log x\,dx$.
5. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{y} = -4t^3y^2$ che soddisfa $y(2) = 1$.
6. Si scelgono 4 lettere a caso dell'alfabeto italiano (non necessariamente diverse). Qual è la probabilità che le prime due siano entrambe delle vocali?
7. Sia X una variabile aleatoria con valore atteso 2 e varianza 1. Calcolare il valori attesi e le varianze delle variabili aleatorie $Y := 3X - 1$ e $Z := 2 - 6X$.
8. Disegnare il grafico della funzione $y = -1 + e^{-x}$.

PRIMA PARTE, GRUPPO B

1. Risolvere la disequazione $\log(e^{2x} - 15) > 0$.
2. Consideriamo un gruppo di nove bambini di cui cinque hanno 14 anni, tre hanno 12 anni e uno ha 11 anni. Calcolare media, mediana e varianza dell'età.
3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\log x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1+3x^4)}{x^3 \sin x}$: c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{4+e^{2x}}$.
4. Calcolare $\displaystyle\int_1^e 16\,x^3 \log x\,dx$.
5. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{y} = -5t^4y^2$ che soddisfa $y(2) = 1$.
6. Si scelgono 5 lettere a caso dell'alfabeto italiano (non necessariamente diverse). Qual è la probabilità che le prime due siano entrambe delle consonanti?
7. Sia X una variabile aleatoria con valore atteso 2 e varianza 1/3. Calcolare il valori attesi e le varianze delle variabili aleatorie $Y := 3X - 1$ e $Z := 2 - 6X$.
8. Disegnare il grafico della funzione $y = 1 - e^{x}$.

PRIMA PARTE, GRUPPO C

1. Risolvere la disequazione $\log(e^{2x} - 8) > 0$.
2. Consideriamo un gruppo di nove bambini di cui tre hanno 8 anni, uno ha 7 anni e cinque hanno 10 anni. Calcolare media, mediana e varianza dell'età.
3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^4 - x^2}{x\,\sin x}$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \log(2+e^{x})$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}\,2^{-x}$.
4. Calcolare $\displaystyle\int_1^{e^2} 16\,x^3 \log x\,dx$.
5. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{y} = -3t^2y^2$ che soddisfa $y(2) = 1$.

6. Si scelgono 5 lettere a caso dell'alfabeto italiano (non necessariamente diverse). Qual è la probabilità che le prime tre siano tutte delle consonanti?
7. Sia X una variabile aleatoria con valore atteso 2 e varianza 1. Calcolare il valori attesi e le varianze delle variabili aleatorie $Y := 2X + 3$ e $Z := 3 - 4X$.
8. Disegnare il grafico della funzione $y = -\log(x + 1)$.

Prima parte, gruppo D

1. Risolvere la disequazione $\log(e^{4x} - 8) < 0$.
2. Consideriamo un gruppo di nove ragazzi di cui tre hanno 16 anni, uno ha 14 anni e cinque hanno 20 anni. Calcolare media, mediana e varianza dell'età.
3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} e^{-1/x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x \sin x}{3x^3 - 2x^2}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{2^x}{x^{20}}$.
4. Calcolare $\displaystyle\int_1^{e^2} 25\, x^4 \log x\, dx$.
5. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{y} = -8t^3 y^2$ che soddisfa $y(2) = 1$.
6. Si scelgono 4 lettere a caso dell'alfabeto italiano (non necessariamente diverse). Qual è la probabilità che le prime tre siano tutte delle vocali?
7. Sia X una variabile aleatoria con valore atteso 2 e varianza 1/2. Calcolare il valori attesi e le varianze delle variabili aleatorie $Y := 2X + 3$ e $Z := 3 - 4X$.
8. Disegnare il grafico della funzione $y = -\log(-x)$.

Seconda parte, gruppo A

Scritto del primo appello: esercizi 1, 2 e 3. Terzo compitino: esercizi 3, 4 e 5.

1. Il diametro (interno) di un contenitore cilindrico misura 40 cm ± 5 mm, mentre la capacità risulta essere di 100 ± 5 litri.

   a) Calcolare l'altezza del contenitore indicando l'errore assoluto.

   b) Con quale precisione (errore assoluto) bisognerebbe calcolare la capacità per avere un'errore assoluto di 3 cm nella misura dell'altezza?

   [*Usare le formule semplificate per l'errore del prodotto e del rapporto.*]

2. a) Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale

   $$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = 2e^{-2t} \qquad (*)$$

   b) Dire quali delle soluzioni sono asintoticamente equivalenti a e^{-t} per $t \to +\infty$.

3. I signori A e B fanno il seguente gioco: estraggono una pallina a caso da un sacchetto che che ne contiene 3 bianche e 6 nere, e se la pallina è bianca A riceve 8 euro da B; se invece è nera si estrae un altra pallina, e se questa è bianca A riceve 8 euro da B, altrimenti ne dà 10 a B. (Supponiamo che la prima pallina venga rimessa nel sacchetto prima di estrarre la seconda).

   a) Calcolare il guadagno medio di A.

   b) Stimare la probabilità che in 20 partite A guadagni complessivamente 100 euro o più.

   c) Calcolare il guadagno medio di A supponendo che la prima pallina *non* venga rimessa nel sacchetto prima di estrarre la seconda.

4. Gli spettatori di un cinema multisala provengono per il 25% dalla cittadina di X, per il 45% da Y, e per il rimanente 30% da Z. Da statistiche fatte risulta che solo il 10% degli spettatori provenienti da X raggiunge il cinema con i mezzi pubblici, mentre questa percentuale sale al 65% per quelli provenienti da Z e al 90% per quelli provenienti da Y.
   a) Mettendo insieme gli spettatori provenienti dalle cittadine di Y e di Z, qual è la percentuale di quelli che usano i mezzi pubblici?
   b) Preso uno spettatore a caso arrivato in auto, qual è la probabilità che provenga da X?

5. Estraggo 5 carte a caso da un mazzo di 40. Calcolare la probabilità che:
   a) le prime 3 carte estratte siano assi;
   b) le prime 3 carte siano assi e le rimanenti no;
   c) esattamente 3 carte siano assi;
   d) esattamente 3 carte abbiano lo stesso valore.

Seconda parte, gruppo B

Scritto del primo appello: esercizi 1, 2 e 3. Terzo compitino: esercizi 3, 4 e 5.

1. Il raggio (interno) di un contenitore cilindrico misura $25\,\mathrm{cm} \pm 3\,\mathrm{mm}$, mentre la capacità risulta essere di 80 ± 5 litri.
   a) Calcolare l'altezza del contenitore indicando l'errore assoluto.
   b) Con quale precisione (errore assoluto) bisognerebbe calcolare la capacità per avere un'errore assoluto di 3 cm nella misura dell'altezza?
   [*Usare le formule semplificate per l'errore del prodotto e del rapporto.*]

2. a) Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale
   $$\ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = e^{-t} \qquad (*)$$
   b) Dire quali delle soluzioni sono asintoticamente equivalenti a e^{-t} per $t \to +\infty$.

3. I signori A e B fanno il seguente gioco: estraggono una pallina a caso da un sacchetto che che ne contiene 4 bianche e 6 nere, e se la pallina è bianca A riceve 9 euro da B; se invece è nera si estrae un altra pallina, e se questa è bianca A riceve 9 euro da B, altrimenti ne dà 16 a B. (Supponiamo che la prima pallina venga rimessa nel sacchetto prima di estrarre la seconda).
   a) Calcolare il guadagno medio di A.
   b) Stimare la probabilità che in 25 partite A guadagni complessivamente 200 euro o più.
   c) Calcolare il guadagno medio di A supponendo che la prima pallina *non* venga rimessa nel sacchetto prima di estrarre la seconda.

4. Gli spettatori di un cinema multisala provengono per il 30% dalla cittadina di X, per il 50% da Y, e per il rimanente 20% da Z. Da statistiche fatte risulta che solo il 50% degli spettatori provenienti da X raggiunge il cinema con i mezzi pubblici, mentre questa percentuale sale al 80% per quelli provenienti da Z e al 90% per quelli provenienti da Y.
   a) Mettendo insieme gli spettatori provenienti dalle cittadine di X e di Y, qual è la percentuale di quelli che usano l'auto per raggiungere il cinema?
   b) Preso uno spettatore a caso arrivato in auto, qual è la probabilità che provenga da Z?

5. Estraggo 5 carte a caso da un mazzo di 40. Calcolare la probabilità che:
   a) le prime 3 carte estratte siano assi;
   b) le prime 3 carte siano assi e le rimanenti no;
   c) esattamente 3 carte siano assi;
   d) esattamente 3 carte abbiano lo stesso valore.

Seconda parte, gruppo C

Scritto del primo appello: esercizi 1, 2 e 3. Terzo compitino: esercizi 3, 4 e 5.

1. Il diametro (interno) di un contenitore cilindrico misura 40 cm ± 5 mm, mentre la capacità risulta essere di 100 ± 5 litri.
   a) Calcolare l'altezza del contenitore indicando l'errore assoluto.
   b) Con quale precisione (errore assoluto) bisognerebbe calcolare la capacità per avere un'errore assoluto di 3 cm nella misura dell'altezza?
   [*Usare le formule semplificate per l'errore del prodotto e del rapporto.*]

2. a) Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale
$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = e^{-t} \tag{$*$}$$
   b) Dire quali delle soluzioni sono asintoticamente equivalenti a e^{-t} per $t \to +\infty$.

3. I signori A e B fanno il seguente gioco: estraggono una pallina a caso da un sacchetto che che ne contiene 2 bianche e 6 nere, e se la pallina è bianca A riceve 9 euro da B; se invece è nera si estrae un altra pallina, e se questa è bianca A riceve 9 euro da B, altrimenti ne dà 7 a B. (Supponiamo che la prima pallina venga rimessa nel sacchetto prima di estrarre la seconda).
   a) Calcolare il guadagno medio di A.
   b) Stimare la probabilità che in 20 partite A guadagni complessivamente 100 euro o più.
   c) Calcolare il guadagno medio di A supponendo che la prima pallina *non* venga rimessa nel sacchetto prima di estrarre la seconda.

4. Gli spettatori di un cinema multisala provengono per il 25% dalla cittadina di X, per il 45% da Y, e per il rimanente 30% da Z. Da statistiche fatte risulta che solo il 10% degli spettatori provenienti da X raggiunge il cinema con i mezzi pubblici, mentre questa percentuale sale al 65% per quelli provenienti da Z e al 90% per quelli provenienti da Y.
   a) Mettendo insieme gli spettatori provenienti dalle cittadine di Y e di Z, qual è la percentuale di quelli che usano i mezzi pubblici?
   b) Preso uno spettatore a caso arrivato in auto, qual è la probabilità che provenga da X?

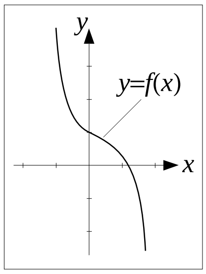
5. Estraggo 5 carte a caso da un mazzo di 40. Calcolare la probabilità che:
   a) le prime 3 carte estratte siano assi;
   b) le prime 3 carte siano assi e le rimanenti no;
   c) esattamente 3 carte siano assi;
   d) esattamente 3 carte abbiano lo stesso valore.

Scritto del secondo appello, 8 luglio 2010

Prima parte, gruppo A

1. Calcolare media, mediana e varianza dei seguenti numeri: 1,2 ; 1,4 ; 1,6 ; 1,2 ; 1,1 .
2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim_{x\to+\infty} xe^x$; b) $\lim_{x\to 0^+} x^2 \log x$; c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^3}{e^{x^3}-1}$.
3. Trovare i *punti* di massimo e di minimo (non i valori!) della funzione $f(x) = \log(4+2x-x^2)$ relativamente all'intervallo $0 \le x \le 3$.
4. Calcolare l'errore *relativo* del rapporto $\dfrac{1\,\mathrm{m}^2 \pm 300\,\mathrm{cm}^2}{20\,\mathrm{cm} \pm 4\,\mathrm{mm}}$ usando la formula semplificata.
5. Calcolare il valore atteso e la varianza per una variabile aleatoria X i cui valori, e le corrispondenti probabilità, sono riportate nella tabella sottostante:

valori:	-1	0	1	2
probabilità:	3/8	3/8	1/8	1/8

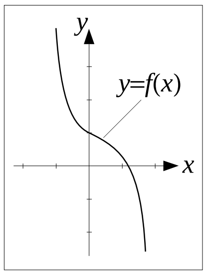


6. Qual è la probabilità di ottenere al più una testa lanciando 4 monete?
7. Calcolare $\dfrac{1}{1-i} + \dfrac{1}{1+i}$.
8. Sia f la funzione descritta nella figura accanto. Risolvere (graficamente) la disequazione $f(x) \ge x$.

Prima parte, gruppo B

1. Calcolare media, mediana e varianza dei seguenti numeri: 1,8 ; 1,6 ; 1,4 ; 1,8 ; 1,9 .
2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim_{x\to-\infty} xe^x$; b) $\lim_{x\to+\infty} x^2 \log x$; c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x^2)}{x^4}$.
3. Trovare i *punti* di massimo e di minimo (non i valori!) della funzione $f(x) = \log(4-2x+x^2)$ relativamente all'intervallo $-1 \le x \le 2$.
4. Calcolare l'errore *relativo* del rapporto $\dfrac{20\,\mathrm{cm} \pm 6\,\mathrm{mm}}{1\,\mathrm{m}^2 \pm 100\,\mathrm{cm}^2}$ usando la formula semplificata.
5. Calcolare il valore atteso e la varianza per una variabile aleatoria X i cui valori, e le corrispondenti probabilità, sono riportate nella tabella sottostante:

valori:	-4	-2	0	2
probabilità:	1/8	1/8	3/8	3/8



6. Qual è la probabilità di ottenere al più una testa lanciando 5 monete?
7. Calcolare $\dfrac{1}{i-1} + \dfrac{1}{i+1}$.
8. Sia f la funzione descritta nella figura accanto. Risolvere (graficamente) la disequazione $f(x) \ge -x$.

Seconda parte, gruppo A

1. Consideriamo le seguenti coppie di dati:

x:	$-1{,}2$	0,1	1,3	5,4	6,3
y:	2,4	2,6	1,0	$-1{,}4$	$-1{,}2$

a) Calcolare media e varianza sia delle x che delle y.

b) Calcolare covarianza e coefficiente di correlazione delle x e delle y.
c) Scrivere la retta di regressione associata a questi dati.

2. Dato α numero reale, consideriamo l'equazione differenziale

$$\ddot{y} + 2\dot{y} - \alpha y = 3t\ . \tag{$*$}$$

a) Trovare la soluzione generale della $(*)$ per $\alpha = -1$.
b) Per quali $\alpha \geq -1$ si ha che ogni soluzione della $(*)$ soddisfa $y(t) = o(t^2)$ per $t \to +\infty$?

3. a) In una fabbrica si produce un certo modello di lavatrice. Da statistiche fatte risulta che il 20% degli esemplari appena usciti dalla catena di montaggio è difettoso, ma che una successiva verifica permette di individuare e riparare il 75% degli esemplari difettosi (la percentuale degli esemplari non riparabili è trascurabile). Qual è la percentuale di esemplari difettosi tra quelli che hanno passato la verifica?
b) Per errore, delle 80 partite di lavatrici spedite in un certo giorno dalla fabbrica, 16 non sono state sottoposte alla verifica di cui sopra. Una di queste 80 partite arriva ad un supermercato, dove viene effettuato un controllo su una lavatrice presa a caso. Sapendo che questa lavatrice si è rivelata difettosa, qual è la probabilità che la partita consegnata al supermercato sia una delle 16 non verificate?
c) Rispondere alla domanda b) supponendo che le lavatrici controllate dal personale del supermercato siano due invece di una, e che una sola delle due sia risultata difettosa.

Seconda parte, gruppo B

1. Consideriamo le seguenti coppie di dati:

x:	$-2{,}7$	$-1{,}4$	$-0{,}2$	$3{,}9$	$4{,}8$
y:	$0{,}6$	$0{,}7$	$-0{,}1$	$-1{,}3$	$-1{,}2$

a) Calcolare media e varianza sia delle x che delle y.
b) Calcolare covarianza e coefficiente di correlazione delle x e delle y.
c) Scrivere la retta di regressione associata a questi dati.

2. Dato α numero reale, consideriamo l'equazione differenziale

$$\ddot{y} + 4\dot{y} - \alpha y = 4t\ . \tag{$*$}$$

a) Trovare la soluzione generale della $(*)$ per $\alpha = -4$.
b) Per quali $\alpha \geq -4$ si ha che ogni soluzione della $(*)$ soddisfa $y(t) = o(t^2)$ per $t \to +\infty$?

3. a) In una fabbrica si produce un certo modello di lavatrice. Da statistiche fatte risulta che il 20% degli esemplari appena usciti dalla catena di montaggio è difettoso, ma che una successiva verifica permette di individuare e riparare il 75% degli esemplari difettosi (la percentuale degli esemplari non riparabili è trascurabile). Qual è la percentuale di esemplari difettosi tra quelli che hanno passato la verifica?
b) Per errore, delle 120 partite di lavatrici spedite in un certo giorno dalla fabbrica, 24 non sono state sottoposte alla verifica di cui sopra. Una di queste 120 partite arriva ad un supermercato, dove viene effettuato un controllo su una lavatrice presa a caso. Sapendo che questa lavatrice si è rivelata difettosa, qual è la probabilità che la partita consegnata al supermercato sia una delle 24 non verificate?
c) Rispondere alla domanda b) supponendo che le lavatrici controllate dal personale del supermercato siano due invece di una, e che una sola delle due sia risultata difettosa.

Scritto del terzo appello, 14 settembre 2010

Prima parte

1. Un esercizio di una prova scritta di Matematica viene valutato da 0 a 3 punti; la distribuzione dei punteggi ottenuti dagli studenti è riportata nella tabella sottostante:

punti:	0	1	2	3
studenti:	8	3	0	9

   Calcolare media, mediana e varianza dei punteggi.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^{-x}\sqrt{x}$; c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^3 x}{\sin(2x^3)}$.
3. Calcolare le coordinate polari dei seguenti punti a) $(-1,1)$; b) $(0,-2)$; c) $(1,-\sqrt{3})$.
4. Calcolare $\displaystyle\int_0^1 \sin(\pi x)\,dx$.
5. Quante sono le sigle formate da due cifre comprese tra 1 e 9 seguite da tre lettere dell'alfabeto italiano (lettere e cifre possono anche essere uguali)?
6. Scrivere la soluzione generale dell'equazione differenziale $\ddot{y} + 4\dot{y} + 5y = 0$.
7. Si lanciano due dadi. Qual è la probabilità che almeno uno dei due sia pari?
8. Disegnare il grafico della funzione $y = \sqrt{1-x}$.

Seconda parte

1. Secondo una prima misurazione approssimativa, la base di una vasca a forma di parallelepipedo per la raccolta di acqua piovana misura $5\,\text{m} \times 3\,\text{m}$ mentre la profondità è di $2\,\text{m}$.
   a) Indichiamo con A la somma delle aree di tutte le pareti e della base della vasca. Tenuto conto che le misurazioni fatte hanno un margine di errore di $10\,\text{cm}$, calcolare il valore di A ed il corrispondente errore relativo.
   b) Con quale margine di errore bisogna rimisurare le dimensioni della vasca se si vuole ottenere A con un errore relativo inferiore al 3%?
   [*Per il calcolo degli errori usare sempre le formule semplificate.*]
2. a) Disegnare il grafico delle funzioni $f(x) := x^3 + x^2$ e $g(x) = x^3 - 2x$.
   b) Disegnare l'insieme A dei punti (x,y) tali che $f(x) \le y \le g(x)$ e calcolarne l'area.
3. Un sacchetto contiene otto palline con sopra il numero 1, quattro con il numero 2, due con il numero 4 e una con il numero 8.
   a) Estraggo due palline a caso: qual è la probabilità che siano entrambe 4?
   b) Estraggo due palline a caso: qual è la probabilità che siano un 4 e un 8 (non necessariamente in quest'ordine)?
   c) Indichiamo con X il numero che si ottiene estraendo una pallina a caso: calcolare il valore atteso e la varianza di X.
   d) Indichiamo con Y il numero che si ottiene estraendo due palline a caso e sommando i numeri così ottenuti: calcolare il valore atteso di Y.

Appello straordinario, 12 novembre 2010

Prima parte

1. Determinare il dominio di definizione della funzione $y = \dfrac{e^x}{\sqrt{3+2x-x^2}}$.
2. Date le grandezze $x = 0{,}5\,\mathrm{m}^2 \pm 50\,\mathrm{cm}^2$ e $y = 40\,\mathrm{cm} \pm 8\,\mathrm{mm}$, calcolare il valore di x/y ed il corrispondente errore *relativo*. [*Usare la formula semplificata per l'errore del rapporto.*]
3. Da un sondaggio risulta che tra gli abitanti di un piccolo paese il 10% non possiede cellulari, il 50% ne possiede uno, il 30% due e il rimanente 10% tre. Calcolare il numero medio di cellulari per persona, la mediana, e la varianza.
4. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^4}{\sin(x^3)}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\log x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \log(2+x^{-2})$.
5. Quante sono le possibili sigle formate da 4 consonanti distinte dell'alfabeto italiano?
6. Calcolare la probabilità di ottenere 3 numeri pari e 3 dispari lanciando 6 dadi.
7. Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\dot y = e^t/y$ che soddisfa $y(0) = 2$.
8. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $y \geq \log(x+1)$.

Seconda parte

1. Si lancia per 5 volte un dado con la lettera A su quattro facce e la lettera B sulle rimanenti due. Calcolare la probabilità dei seguenti eventi:
   a) la lettera A non esce mai;
   b) la lettera A esce *esattamente* una volta;
   c) la lettera A esce *almeno* una volta;
   d) la lettera A esce *almeno* due volte.
2. a) Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale
   $$\ddot y - 4\dot y + 5y = 5t + 6\ . \qquad (*)$$
   b) Per quali valori del parametro s si ha che ogni soluzione y della $(*)$ soddisfa $y(t) = o(e^{st})$ per $t \to +\infty$?
3. Tra tutti i contenitore a forma di parallelepipedo a base quadrata per cui la somma delle lunghezze dei dodici spigoli è pari a 1 m, trovare quello di volume massimo.

Scritto del quarto appello, 31 gennaio 2011

Prima parte

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $\sqrt{2-e^x}$.
2. Calcolare le coordinate polari dei seguenti punti: a) $(-1,-1)$; b) $(0,-2)$; c) $(\sqrt{3},-3)$.
3. Calcolare media, mediana e varianza dei seguenti numeri: 22 ; 41 ; 20 ; 24 ; 23 .
4. Semplificare il più possibile l'espressione $\log\left(\frac{x^4}{e^x}\right)$ e calcolarne la derivata.
5. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\dot{y} = e^{-y}\sin t$.
6. Consideriamo i seguenti eventi inerenti al lancio di un dado: $A :=$ "escono il due o il tre"; $B :=$ "esce un numero pari"; $C :=$ "esce un numero dispari". Dire quali delle seguenti coppie di eventi sono indipendenti: A e B; A e C; B e C.
7. Quante sono le sigle di 4 lettere della forma consonante-vocale-consonante-vocale?
8. Disegnare il grafico della funzione $y = 1 - \cos x$.

Seconda parte

1. a) La misura del lato di un cubo risulta essere di 20 cm con un errore di 1 mm. Calcolare la superficie totale del cubo ed il corrispondente errore assoluto.
   b) Con quel margine d'errore (misurato in millimetri) bisognerebbe misurare il lato del cubo affinché l'errore assoluto nel calcolo della superficie totale sia inferiore a 10 cm^2?
   [*Per il calcolo degli errori usare le formule semplificate.*]
2. La macchina usata per la fabbricazione di un certo oggetto può essere regolata in modo che il tempo t necessario alla produzione di ciascun pezzo (misurato in secondi) sia uguale ad un qualunque valore compreso tra 4 e 10. Tuttavia la probabilità p che il pezzo prodotto sia difettoso è tanto più alta quanto più basso è t, e per la precisione
   $$p = \frac{12}{t^2} \ .$$
   Come si deve scegliere t se si vuole massimizzare la produzione (vale a dire il numero di pezzi non difettosi per unità di tempo)?
3. a) Lancio 10 dadi e chiamo X il numero di sei che ottengo. Calcolare il valor medio e la varianza di X.
   b) Se ricevo 5 euro per ognuno dei sei usciti e devo dare 1 euro per ogni numero diverso da sai, quanto guadagno in media?
   c) Qual è la probabilità di vincere più di 40 euro?

Scritto del quinto appello, 14 febbraio 2011

Prima parte

1. Risolvere la disequazione $2 - \log(2x) \geq 0$.
2. Calcolare $\dfrac{1}{2-3i} + \dfrac{1}{2+3i}$.
3. I lati di una tavola rettangolare misurano 1 m e 2 m, con un errore massimo di 6 mm. Con quale errore *relativo* possiamo calcolare l'area della tavola? [*Usare la formula semplificata.*]
4. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^3}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{\cos x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+2x^3)}{x^3}$.
5. Calcolare $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{2}{1-2x}\, dx$.
6. La variabile aleatoria X ha valore atteso 0 e varianza 1. Determinare il valore atteso e la varianza della variabile aleatoria $Y := 2 - 3x$.
7. Estraggo tre carte da un mazzo di 52. Qual è la probabilità che escano, nell'ordine, un re, una regina e un fante?
8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $e^{-x} \leq y \leq 1$.

Seconda parte

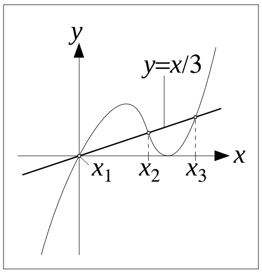
1. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale
$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = 3e^{-t} \qquad (*)$$
che soddisfa le condizioni iniziali $y(0) = 0$ e $\dot{y}(0) = 0$.
2. È stata lanciata una moneta per 10 volte ottenendo 3 teste e 7 croci, ma non si sa in quale ordine. Qual è la probabilità che l'ultimo lancio sia croce?
3. Nel 40% dei computer di un certo modello è stata installata una scheda video con un lieve difetto di fabbricazione, e si è scoperto che il 70% delle schede difettose ha smesso di funzionare entro i primi 5 anni di uso, mentre le schede non difettose durano praticamente tutte 5 anni e più.
Il signor K ha acquistato uno di questi computer, che dopo 5 anni funziona ancora perfettamente. Qual è la probabilità che contenga una scheda difettosa?

Soluzioni

Compitino di prova, 14 gennaio 2010

Prima parte

1. Deve essere $2 - e^x > 0$, e quindi $x < \log 2$.
2. a) $\dfrac{3x^2}{x^3 - 1}$; b) $\dfrac{2}{(x+1)^2}$; c) $12(\sin(x^3))^3 \cos(x^3)\, x^2$.
3. $\left[\log\left(\dfrac{x^3 e^{3x-2}}{2^{x^2}}\right)\right]' = \left[3\log x + 3x - 2 - \log 2\, x^2\right]' = \dfrac{3}{x} + 3 - \log 4\, x$.
4. Media = 21, mediana = 21, varianza = 6.
5. $1 - i = \sqrt{2} e^{-i\pi/4}$.
   $(1-i)^{-5} = 2^{-5/2} e^{i5\pi/4} = -\dfrac{1+i}{8}$.
6. $(8 \pm 0{,}14)\,\mathrm{m}^2$, arrotondabile a $(8 \pm 0{,}2)\,\mathrm{m}^2$.
7. Le soluzioni sono i numeri x_1, x_2, x_3 indicati in figura accanto.
8. Si tratta del grafico di $1/x$ traslato verso sinistra di 1 e poi vero l'alto di 1.



Seconda parte

1. a) Larghezza $10\,\mathrm{cm}(1 \pm 0{,}5\%)$, lunghezza $20\,\mathrm{cm}(1 \pm 0{,}25\%)$, altezza $5\,\mathrm{cm}(1 \pm 1\%)$.
   b) Applicando la formula per l'errore assoluto del prodotto si ottiene

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol} &= (10 \pm 0{,}5)(20 \pm 0{,}5)(5 \pm 0{,}5)\,\mathrm{cm}^3 \\ &= (1000 \pm 17{,}5)\,\mathrm{cm}^3 = 1000\,\mathrm{cm}^3(1 \pm 1{,}75\%)\ ,\end{aligned}$$

   che si può arrotondare a $\mathrm{Vol} = (1000 \pm 20)\,\mathrm{cm}^3 = 1000\,\mathrm{cm}^3(1 \pm 2\%)$. Analogamente

$$\begin{aligned}\mathrm{Sup} &= 2\left[(10 \pm 0{,}5)(20 \pm 0{,}5) + (10 \pm 0{,}5)(5 \pm 0{,}5) + (20 \pm 0{,}5)(5 \pm 0{,}5)\right]\mathrm{cm}^2 \\ &= (700 \pm 6{,}3)\,\mathrm{cm}^2 = 700\,\mathrm{cm}^2(1 \pm 0{,}9\%)\ ,\end{aligned}$$

   che si può arrotondare a $\mathrm{Sup} = (700 \pm 7)\,\mathrm{cm}^2 = 700\,\mathrm{cm}^2(1 \pm 1\%)$.
   c) Detto e l'errore nella misurazione delle dimensioni della scatola (misurato in centimetri), procedendo come al punto b) si ottiene

$$\mathrm{Vol} = (10 \pm e)(20 \pm e)(5 \pm e)\,\mathrm{cm}^3 = (1000 \pm 350 \cdot e)\,\mathrm{cm}^3 = 1000\,\mathrm{cm}^3(1 \pm 0{,}35 \cdot e)\ .$$

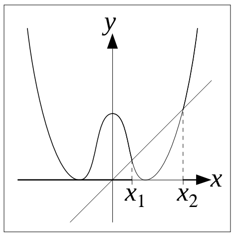
   Imponendo quindi che l'errore relativo nel calcolo del volume sia pari al 10% si ottiene $0{,}35 \cdot e = 10\%$, ovvero $e = 2/7 \simeq 0{,}296$ (che si arrotonda a 0,3).
2. a) Si tratta semplicemente di applicare formule note (i risultati sono approssimati a due cifre decimali): $\mathrm{med}(x_i) = 3$; $\mathrm{var}(x_i) = 22$; $\mathrm{med}(y_i) = 1{,}48$; $\mathrm{var}(y_i) = 2{,}53$; $\mathrm{cov}(x_i; y_i) = -6{,}7$; $\mathrm{corr}(x_i; y_i) = -0{,}9$.
   b) $y = \dfrac{\mathrm{cov}(x_i; y_i)}{\mathrm{var}(x_i)}(x - \mathrm{med}(x_i)) + \mathrm{med}(y_i) = -0{,}3 \cdot x + 2{,}39$.

Commenti

- Prima parte, esercizio 3. Qualcuno si è ostinato a derivare $\log 2\, x^2$ come se fosse il prodotto di due funzioni. Attenzione: $\log 2$ non è una funzione ma una costante (nel senso che non dipende da x) e quindi ha derivata nulla.
- Prima parte, esercizio 5. Per gli studenti degli anni precedenti: al posto della forma esponenziale si può usare quella trigonometrica, vale a dire $1 - i = \sqrt{2}(\cos(-\pi/4) + i \sin(-\pi/4))$, ottenendo alla fine lo stesso risultato.

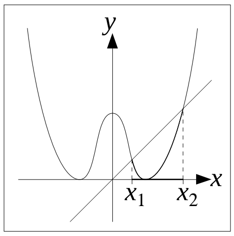
Primo compitino, 18 gennaio 2010

Prima parte, gruppo A



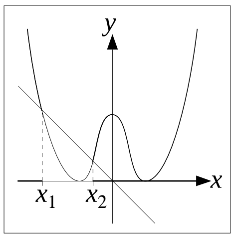
1. Le soluzioni sono $x < -2$ e $-1 < x < 3$.
2. Le soluzioni sono $x \leq x_1$ e $x \geq x_2$ dove x_1e x_2 sono dati nella figura accanto.
3. Media $= 3,1$; mediana = 3,2; varianza = 0,108.
4. Il numero medio di tentativi è $m = 1 \cdot 65\% + 2 \cdot 20\% + 3 \cdot 5\% + 4 \cdot 10\% = 1{,}6$. La mediana è uguale a 1 (cioè la classe mediana è quella delle persone a cui è bastato un solo tentativo).
5. $\dfrac{1+i}{1-i} = i$; le coordinate polari sono $r = 1$ e $\theta = \pi/2$.
6. $\dfrac{12\,\mathrm{cm}^2 \pm 36\,\mathrm{mm}^2}{2{,}5\,\mathrm{m} \pm 5\,\mathrm{cm}} = \dfrac{12\,\mathrm{cm}^2\,(1 \pm 3\%)}{250\,\mathrm{cm}\,(1 \pm 2\%)} = 4{,}8 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{cm}\,(1 \pm 5\%)$.
7. a) $-2\sin(2x+1)$; b) $2x \log x(1 + \log x)$; c) $\left(\dfrac{2^{2x^2+x+2}}{4^{x^2+1}}\right)' = (2^x)' = \log 2 \cdot 2^x$.
8. Si tratta del grafico di $y = x^4$ traslato a sinistra di 1 e in basso di 1.

Prima parte, gruppo B



1. Le soluzioni sono $-3 < x < 1$ e $x > 2$.
2. Le soluzioni sono $x_1 \leq x \leq x_2$ dove x_1e x_2 sono dati nella figura accanto.
3. Media $= 4,1$; mediana = 4,2; varianza = 0,108.
4. Il numero medio di tentativi è $m = 1 \cdot 75\% + 2 \cdot 10\% + 3 \cdot 10\% + 4 \cdot 5\% = 1{,}45$. La mediana è uguale a 1 (cioè la classe mediana è quella delle persone a cui è bastato un solo tentativo).
5. $\dfrac{1}{1+i} + \dfrac{1}{1-i} = 1$; le coordinate polari sono $r = 1$ e $\theta = 0$.
6. $\dfrac{24\,\mathrm{cm}^2 \pm 48\,\mathrm{mm}^2}{2{,}5\,\mathrm{m} \pm 5\,\mathrm{cm}} = \dfrac{24\,\mathrm{cm}^2\,(1 \pm 2\%)}{250\,\mathrm{cm}\,(1 \pm 2\%)} = 9{,}6 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{cm}\,(1 \pm 4\%)$.
7. a) $2x^3 \log x(2\log x + 1)$; b) $2\cos(2x-1)$; c) $\left(\dfrac{9^{x^2+x+1}}{3^{2x^2+2}}\right)' = (9^x)' = \log 9 \cdot 9^x$.
8. Si tratta del grafico di $y = \sin x$.

Prima parte, gruppo C



1. Le soluzioni sono $-1 < x < 2$ e $x > 3$.
2. Le soluzioni sono $x \leq x_1$ e $x \geq x_2$ dove x_1e x_2 sono dati nella figura accanto.
3. Media $= 4,1$; mediana = 4,3; varianza = 0,432.
4. Il numero medio di tentativi è $m = 1 \cdot 40\% + 2 \cdot 25\% + 3 \cdot 20\% + 4 \cdot 15\% = 2{,}1$. La mediana è uguale a 2 (cioè la classe mediana è quella delle persone a cui sono bastati due tentativi).

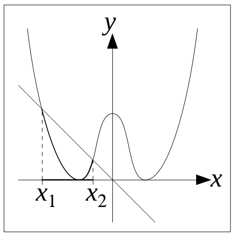
5. $\dfrac{1}{1+i} - \dfrac{1}{1-i} = -i$; le coordinate polari sono $r = 1$ e $\theta = -\pi/2$.

6. $\dfrac{24\,\mathrm{cm}^2 \pm 48\,\mathrm{mm}^2}{2\,\mathrm{m} \pm 6\,\mathrm{cm}} = \dfrac{24\,\mathrm{cm}^2\,(1 \pm 2\%)}{200\,\mathrm{cm}\,(1 \pm 3\%)} = 1{,}2 \cdot 10^{-1}\,\mathrm{cm}\,(1 \pm 5\%)$.

7. a) $\dfrac{2}{2x+1}$; b) $\cos(x \log x) \cdot (1 + \log x)$; c) $\left(\dfrac{3^{2x^2+2}}{9^{x^2+x+1}}\right)' = (3^x)' = \log 3 \cdot 3^x$.

8. Si tratta del grafico di $y = -\cos x$.

Prima parte, gruppo D



1. Le soluzioni sono $x < -3$ e $-2 < x < 1$.

2. Le soluzioni sono $x_1 \le x \le x_2$ dove x_1e x_2 sono dati nella figura accanto.

3. Media = 3, 1; mediana = 3,3; varianza = 0,432.

4. Il numero medio di tentativi è $m = 1 \cdot 45\% + 2 \cdot 35\% + 3 \cdot 15\% + 4 \cdot 5\% = 1{,}8$. La mediana è uguale a 2 (cioè la classe mediana è quella delle persone a cui sono bastati due tentativi).

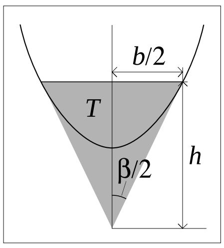
5. $\dfrac{1-i}{1+i} = -i$; le coordinate polari sono $r = 1$ e $\theta = -\pi/2$.

6. $\dfrac{12\,\mathrm{cm}^2 \pm 36\,\mathrm{mm}^2}{2\,\mathrm{m} \pm 6\,\mathrm{cm}} = \dfrac{12\,\mathrm{cm}^2\,(1 \pm 3\%)}{200\,\mathrm{cm}\,(1 \pm 3\%)} = 6 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{cm}(1 \pm 6\%)$.

7. a) $-\sin(x \log x) \cdot (1 + \log x)$; b) $-2e^{-2x+1}$; c) $\left(\dfrac{4^{x^2+x+1}}{2^{2x^2+x+2}}\right)' = (2^x)' = \log 2 \cdot 2^x$.

8. Si tratta del grafico di $y = x^4$ traslato a destra di 1 e in basso di 1.

Seconda parte, gruppo A



1. a) Il vertice destro della base di T ha ascissa $x = b/2$, dunque la pendenza del lato obliquo di T che parte da questo vertice è quella della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa x, vale a dire $f'(x)$. Quindi l'altezza di T è

$$h = x\,f'(x) = 8\,x^4 = \frac{b^4}{2} \tag{1}$$

(si veda la figura accanto) e pertanto

$$\mathrm{Area}(T) = \frac{b^5}{4}\ . \tag{2}$$

b) Dalla figura sopra si vede che $\tan(\beta/2) = (b/2)/h$, da cui si ricava, utilizzando la (1), $\tan(\beta/2) = 1/b^3$, e quindi

$$b = (\tan(\beta/2))^{-1/3}\ .$$

Pertanto dalla (2) si ottiene che

$$\mathrm{Area}(T) = \frac{1}{4}(\tan(\beta/2))^{-5/3}\ .$$

2. a) Si tratta di applicare formule note (i calcoli sono stati fatti con 5 cifre significative, ma i risultati finali sono stati arrotondati a tre cifre significative): $\mathrm{med}(x_i) = 6{,}90 \cdot 10^2$; $\mathrm{var}(x_i) = 1{,}33 \cdot 10^6$; $\mathrm{med}(y_i) = 1{,}86 \cdot 10^6$; $\mathrm{var}(y_i) = 1{,}33 \cdot 10^{13}$; $\mathrm{cov}(x_i; y_i) = -1{,}28 \cdot 10^9$; $\mathrm{corr}(x_i; y_i) = -0{,}304$.
b) $y = \dfrac{\mathrm{cov}(x_i; y_i)}{\mathrm{var}(x_i)}(x - \mathrm{med}(x_i)) + \mathrm{med}(y_i) = -9{,}58 \cdot 10^2 \cdot x + 2{,}52 \cdot 10^6$.
c) Come visto a lezione, la legge $y = b\, x^a$ si scrive anche come $\log y = a \cdot \log x + \log b$, e quindi rappresenta una retta in coordinate bi-logaritmiche. Dobbiamo quindi trovare la retta di regressione per i dati $\log x_i$ e $\log y_i$, vale a dire

$\log x$:	1,0006	1,9987	4,0000	5,9964	7,9996
$\log y$:	16,029	11,964	4,0253	−4,0455	−11,975

Facendo i conti si ottiene $\mathrm{med}(\log x_i) = 4{,}20$; $\mathrm{var}(\log x_i) = 6{,}56$; $\mathrm{med}(\log y_i) = 3{,}20$; $\mathrm{var}(\log y_i) = 1{,}05 \cdot 10^2$; $\mathrm{cov}(\log x_i; \log y_i) = -2{,}62 \cdot 10^1$; $\mathrm{corr}(\log x_i; \log y_i) = -1{,}00$.
La retta di regressione associata a questi dati è quindi $\log y = -4{,}00 \cdot \log x + 2{,}00 \cdot 10^1$, e corrisponde alla legge

$$y = 4{,}85 \cdot 10^8 \cdot x^{-4{,}00} \ .$$

Poiché il coefficiente di correlazione è sostanzialmente -1, quest'interpolazione è nettamente migliore di quella data al punto precedente.

3. a) La media è $m = 0 \cdot 20\% + 1 \cdot 25\% + 2 \cdot 45\% + 3 \cdot 10\% = 1{,}45$, mentre la varianza è data da $\sigma^2 = 0^2 \cdot 20\% + 1^2 \cdot 25\% + 2^2 \cdot 45\% + 3^2 \cdot 10\% - m^2 = 0{,}8475 \simeq 0{,}85$.
b) Supponiamo (per fare un esempio) che le famiglie siano M e abbiano lo stesso numero di componenti n. Allora

$$p = \frac{mM}{nM} = \frac{m}{n}$$

dove m è la media calcolata al punto precedente. Ma allora il risultato dipende da n, e può essere quindi cambiato senza alterare i dati già noti.
c) Dividiamo le famiglie nelle classi $\mathscr{F}_0, \dots, \mathscr{F}_3$ sulla base nel numero di occupati, e indichiamo ora con N il numero di abitanti della città, con $N_0, \dots, N_3$ il numero di abitanti in ciascuna classe, con M il numero di famiglie della città, con $p_0, \dots, p_3$ la percentuale di famiglie in ciascuna classe (queste percentuali sono note: $p_0 = 20\%$, $p_1 = 25\%$, $p_2 = 45\%$ e $p_3 = 10\%$), e con $n_0, \dots, n_3$ il numero medio di componenti per le famiglie di ciascuna classe.
Siccome le percentuali p_i sono note, il dato (iv) equivale semplicemente a conoscere il numero M, e l'argomento usato per il punto b) mostra che anche conoscere M non basta a calcolare p. Analogamente neanche conoscere N (dato (i)) è sufficiente.
Vediamo che invece conoscere il dato (ii) o il dato (iii) ci permette di ottenere p. Per ogni $i = 0, \dots, 3$, il numero di famiglie nella classe $\mathscr{F}_i$ è $p_i M$, il numero di occupati è ip_iM, e il numeri di abitanti è $N_i = n_i p_i M$. Pertanto

$$p := \frac{\text{numero occupati}}{\text{numero abitanti}} = \frac{p_1 M + 2p_2 M + 3p_3 M}{n_0 p_0 M + n_1 p_1 M + n_2 p_2 M + n_3 p_3 M} \ ;$$

semplificando la M ed usando che $p_1 + 2p_2 + 3p_3 = m$ otteniamo infine

$$p = \frac{m}{n_0 p_0 + n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3} \ . \tag{3}$$

Da questo segue che conoscere i numeri n_i (cioè il dato (iii)) è sufficiente a calcolare p. Inoltre è possibile calcolare n_i a partire da N_i, infatti

$$n_i = \frac{N_i}{N} = \frac{N_i}{N_0 + N_1 + N_2 + N_3} ,$$

e quindi anche il dato (ii) è sufficiente a determinare p.

d) Sia dato n tale che $n_i \leq n$ per ogni i (in questo caso $n = 3{,}5$). Allora, tenuto conto che i numeri n_i sono tutti minori di n e maggiori sia di 1 che di i (ogni famiglia ha almeno un componente, e ogni famiglia con i lavoratori ha almeno i componenti)

$$p_0 + p_1 + 2p_2 + 3p_3 \leq n_0p_0 + n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3 \leq n(p_0 + p_1 + p_2 + p_3) ,$$

e siccome $p_0 + \cdots + p_3 = 1$ e $p_1 + 2p_2 + 3p_3 = m$,

$$p_0 + m \leq n_0p_0 + n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3 \leq n .$$

Quindi dalla (3) si ottiene che

$$\frac{m}{n} \leq p \leq \frac{m}{p_0 + m} .$$

Sostituendo a p_0, m e n gli effettivi valori otteniamo infine

$$0{,}41 \leq p \leq 0{,}88 .$$

Seconda parte, gruppo B

1. Analogo al gruppo A.
   a) $h = x\,f'(x) = 18\,x^6 = \frac{9}{32}b^6$ e quindi Area$(T) = \frac{9}{64}b^7$.
   b) $b = 2\,(18\,\tan(\beta/2))^{-1/5}$ e quindi Area$(T) = 18^{-2/5}(\tan(\beta/2))^{-7/5}$.
2. Analogo al gruppo A.
   a) $\mathrm{med}(x_i) = 3{,}45 \cdot 10^2$; $\mathrm{var}(x_i) = 3{,}33 \cdot 10^5$; $\mathrm{med}(y_i) = 1{,}86 \cdot 10^6$; $\mathrm{var}(y_i) = 1{,}33 \cdot 10^{13}$; $\mathrm{cov}(x_i; y_i) = -6{,}39 \cdot 10^8$; $\mathrm{corr}(x_i; y_i) = -0{,}304$.
   b) $y = -1{,}92 \cdot 10^3 \cdot x + 2{,}52 \cdot 10^6$.
   c) $y = 3{,}03 \cdot 10^7 \cdot x^{-4{,}00}$.
3. a) Analogo al gruppo A: $m = 1{,}2$; $\sigma^2 = 0{,}86$.
   b) e c) Uguale al gruppo A.
   d) Analogo al gruppo A: $0{,}4 \leq p \leq 0{,}8$.

Seconda parte, gruppo C

1. Analogo al gruppo A.
   a) $h = x\,f'(x) = 16\,x^4 = b^4$ e quindi Area$(T) = \frac{1}{2}b^5$.
   b) $b = (2\tan(\beta/2))^{-1/3}$ e quindi Area$(T) = 2^{-8/3}(\tan(\beta/2))^{-5/3}$.
2. Analogo al gruppo A.
   a) $\mathrm{med}(x_i) = 3{,}45 \cdot 10^2$; $\mathrm{var}(x_i) = 3{,}33 \cdot 10^5$; $\mathrm{med}(y_i) = 3{,}72 \cdot 10^6$; $\mathrm{var}(y_i) = 5{,}31 \cdot 10^{13}$; $\mathrm{cov}(x_i; y_i) = -1{,}28 \cdot 10^9$; $\mathrm{corr}(x_i; y_i) = -0{,}304$.
   b) $y = -3{,}83 \cdot 10^3 \cdot x + 5{,}04 \cdot 10^6$.
   c) $y = 6{,}06 \cdot 10^7 \cdot x^{-4{,}00}$.
3. a) Analogo al gruppo A: $m = 1{,}3$; $\sigma^2 = 0{,}71$.
   b) e c) Uguale al gruppo A.
   d) Analogo al gruppo A: $0{,}37 \leq p \leq 0{,}87$.

Seconda parte, gruppo D

1. Analogo al gruppo A.
   a) $h = x\,f'(x) = 36\,x^6 = \frac{9}{16}b^6$ e quindi $\text{Area}(T) = \frac{9}{32}b^7$.
   b) $b = 2\,(36\,\tan(\beta/2))^{-1/5}$ e quindi $\text{Area}(T) = 36^{-2/5}(\tan(\beta/2))^{-7/5}$.
2. Analogo al gruppo A.
   a) $\text{med}(x_i) = 6{,}90 \cdot 10^2$; $\text{var}(x_i) = 1{,}33 \cdot 10^6$; $\text{med}(y_i) = 3{,}72 \cdot 10^6$; $\text{var}(y_i) = 5{,}31 \cdot 10^{13}$; $\text{cov}(x_i; y_i) = -2{,}56 \cdot 10^9$; $\text{corr}(x_i; y_i) = -0{,}304$.
   b) $y = -1{,}92 \cdot 10^3 \cdot x + 5{,}04 \cdot 10^6$.
   c) $y = 9{,}70 \cdot 10^8 \cdot x^{-4{,}00}$.
3. a) Analogo al gruppo A: $m = 1{,}6$; $\sigma^2 = 0{,}74$.
   b) e c) Uguale al gruppo A.
   d) Analogo al gruppo A: $0{,}53 \leq p \leq 0{,}92$.

Commenti

- Prima parte, esercizio 4. Molti hanno sbagliato il calcolo della classe mediana.
- Prima parte, esercizio 6. Diverse persone non hanno riportato l'unità di misura nel valore del rapporto (e qualcuno ha persino omesso di scriverlo).
- Prima parte, esercizio 7c). Sorprendentemente qualcuno ha semplificato correttamente la funzione sbagliando però a derivarla.
- Seconda parte, esercizio 1. Nonostante che si trattasse semplicemente di ricordare il significato geometrico della derivata, alla fine quasi nessuno ha svolto questo esercizio. La maggior parte di quelli che lo hanno fatto ha proceduto in modo abbastanza involuto, calcolando l'equazione della retta su cui giace il lato obliquo destro, per poi ricavare l'ordinata del vertice P opposto alla base. A questo punto, un errore sorprendentemente frequente è stato dire che se il punto medio Q della base ha ordinata y_1 e P ha ordinata y_2, allora l'altezza del triangolo è $h = y_1 + y_2$, mentre invece è $y_1 - y_2$. Pochi hanno completato l'esercizio risolvendo anche il punto b), che invece era quasi immediato.
- Seconda parte, esercizio 2. Nello svolgimento di questo esercizio sono stati fatti, com'era prevedibile, molti errori di calcolo; tra questi, sono stati considerati più gravi quelli di cui ci si sarebbe dovuti accorgere (per esempio un coefficiente di correlazione non compreso tra -1 e 1).
- Seconda parte, esercizio 2c). Diverse persone hanno risolto questo punto prendendo come coefficienti della funzione $y = b\,x^a$ quelli della retta di regressione calcolata al punto precedente, ma questo non ha alcun senso.
- Seconda parte, esercizio 3b). Moltissimi hanno scritto che per calcolare p bisogna per forza conoscere il numero totale di abitanti N. In realtà questo non è vero (come si è fatto vedere sopra).
- Seconda parte, esercizio 3c). Alcune persone hanno risposto a questa domanda partendo dal presupposto (errato) che il numero medio di componenti per famiglia sia lo stesso in tutte le classi.

Compitino di recupero, 10 febbraio 2010

Prima parte, gruppo A

1. Deve essere $x^2 - 3e^2 \geq e^2$ e quindi $x \geq 2e$ oppure $x \leq -2e$.
2. a) $2x\,\sin(1-x^2)$; b) $-\dfrac{1}{\sin^2 x}$; c) $\big(\log(e^{3x}x^3)\big)' = (3x + 3\log x)' = 3 + \dfrac{3}{x}$.
3. a) No; b) sì; c) sì; d) no.
4. Media = 2,1; mediana = 2,1; varianza = 0,06.
5. a) $r = 2$, $\theta = \pi$; b) $r = \sqrt{2}$, $\theta = -\pi/4$; c) $r = 2$, $\theta = 4\pi/3$.
6. 10%.
7. $\dfrac{7\pi}{6}$ e $\dfrac{11\pi}{6}$.
8. Si tratta de grafico di $\sqrt{x}$ spostato verso destra di 1.

Prima parte, gruppo B

1. Deve essere $x^2 - 8e^2 \geq e^2$ e quindi $x \geq 3e$ oppure $x \leq -3e$.
2. a) $4x^3 e^{x^4-3}$; b) $\dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}$; c) $\big(\log(e^{-3x}x^3)\big)' = (-3x + 3\log x)' = -3 + \dfrac{3}{x}$.
3. a) Sì; b) sì; c) no; d) no.
4. Media = 3,1; mediana = 3,1; varianza = 0,06.
5. a) $r = 2$, $\theta = -\pi/6$; b) $r = 1$, $\theta = -\pi/2$; c) $r = \sqrt{2}$, $\theta = 5\pi/4$.
6. 7%.
7. $\pm\dfrac{2\pi}{3}$.
8. Si tratta de grafico di $\sqrt{x}$ riflesso rispetto all'asse delle x.

Prima parte, gruppo C

1. Deve essere $x^2 - 3e^4 \geq e^4$ e quindi $x \geq 2e^2$ oppure $x \leq -2e^2$.
2. a) $3x^2\sin(2-x^3)$; b) $-\dfrac{2\cos x}{\sin^3 x}$; c) $\big(\log(e^{3x}x^{-3})\big)' = (3x - 3\log x)' = 3 - \dfrac{3}{x}$.
3. a) Sì; b) no; c) no; d) sì.
4. Media = 4,2; mediana = 4,2; varianza = 0,24.
5. a) $r = \sqrt{8}$, $\theta = 3\pi/4$; b) $r = 3$, $\theta = \pi/2$; c) $r = 2$, $\theta = -\pi/3$.
6. 7,5%.
7. $\dfrac{2\pi}{3}$ e $\dfrac{4\pi}{3}$.
8. Si tratta de grafico di $\sqrt{x}$ spostato verso il basso di 1.

Seconda parte, gruppo A

1. a) Siccome l'errore assoluto delle misurazioni è pari a 0,2 m, si ha che

$$\begin{aligned}\text{Area} &= \big[(12{,}5 \pm 0{,}2) \cdot (20 \pm 0{,}2) + 2 \cdot (20 \pm 0{,}2) \cdot (4{,}8 \pm 0{,}2)\big]\,\mathrm{m}^2 \\ &= (250 \pm 6{,}5 + 192 \pm 9{,}92)\,\mathrm{m}^2 = (442 \pm 16{,}42)\,\mathrm{m}^2 = (440 \pm 20)\,\mathrm{m}^2\ .\end{aligned}$$

b) La superficie imbiancabile con un litro di pittura è pari a $(2{,}25 \pm 0{,}25)\,\mathrm{m}^2$, e quindi il numero di litri di pittura usati per la tinteggiatura sarà pari a

$$\begin{aligned}N &= \frac{(442 \pm 16{,}42)\,\mathrm{m}^2}{(2{,}25 \pm 0{,}25)\,\mathrm{m}^2} = \frac{442\,(1 \pm 3{,}71\%)}{2{,}25\,(1 \pm 11{,}11\%)} \\ &= 196{,}44\,(1 \pm 14{,}83\%) = 196{,}44 \pm 29{,}12 = 196 \pm 30\end{aligned}$$

(per calcolare l'errore del rapporto ci siamo ricondotti alla formula per l'errore relativo, anche se questo non è strettamente necessario).
c) Per quanto visto al punto precedente, per essere sicuri di finire il lavoro bisogna avere a disposizione $196{,}44 + 29{,}12 \simeq 226$ litri di pittura, e quindi se ne devono acquistare 23 bidoni.

2. Facendo un disegno si vede subito che l'angolo tra la diagonale ed il lato più lungo è $\alpha/2$, e quindi i lati sono lunghi $d\sin(\alpha/2)$ e $d\cos(\alpha/2)$. Pertanto

$$\begin{aligned}\text{Area} &= d^2 \sin(\alpha/2)\,\cos(\alpha/2) = \frac{d^2}{2}\sin\alpha\ , \\ \text{Perimetro} &= 2d(\sin(\alpha/2) + \cos(\alpha/2))\ .\end{aligned}$$

b) Per quanto visto al punto precedente, ci interessano gli angoli α compresi tra 0 e $\pi/2$ tali che $\sin\alpha \geq 1/2$, ovvero $\pi/6 \leq \alpha \leq \pi/2$.

Seconda parte, gruppo B

1. Analogo al gruppo A. a) Area $= \big[(12{,}5 \pm 0{,}1) \cdot (20 \pm 0{,}1) + 2 \cdot (12{,}5 \pm 0{,}1) \cdot (5{,}5 \pm 0{,}2)\big]\,\mathrm{m}^2 = (387{,}5 \pm 6{,}85)\,\mathrm{m}^2 = (390 \pm 10)\,\mathrm{m}^2$.
b) $N = \dfrac{(387{,}5 \pm 6{,}85)\,\mathrm{m}^2}{(2{,}25 \pm 0{,}25)\,\mathrm{m}^2} = 172{,}22 \pm 22{,}18 = 172 \pm 23$.
c) Bisogna prendere 20 bidoni.
2. Uguale al gruppo A.

Seconda parte, gruppo C

1. Analogo al gruppo A. a) Area $= \big[(16 \pm 0{,}2) \cdot (16 \pm 0{,}2) + 3 \cdot (16 \pm 0{,}2) \cdot (4{,}8 \pm 0{,}2)\big]\,\mathrm{m}^2 = (486{,}4 \pm 18{,}88)\,\mathrm{m}^2 = (490 \pm 20)\,\mathrm{m}^2$.
b) $N = \dfrac{(486{,}4 \pm 18{,}88)\,\mathrm{m}^2}{(2{,}25 \pm 0{,}25)\,\mathrm{m}^2} = 216{,}18 \pm 32{,}41 = 216 \pm 33$.
c) Bisogna prendere 25 bidoni.
2. Uguale al gruppo A.

Commenti

- Prima parte, esercizio 3. Stranamente quasi nessuno ha svolto correttamente questo esercizio.

- Prima parte, esercizio 5. La maggior parte dei presenti ha determinato la coordinata angolare θ dei punti (x, y) utilizzando (a quanto sembra) la formula $\theta = \arctan(y/x)$ e dimenticando quindi che $\arctan(y/x)$ è uguale a θ oppure a $\theta + \pi$, a seconda dei casi.
- Seconda parte, esercizio 1a). Moltissime persone hanno preso come area da imbiancare tutta la superficie del parallelepipedo, mentre nel testo viene detto chiaramente che si devono imbiancare solo il pavimento ed alcune pareti.
- Seconda parte, esercizio 1b). Diverse persone hanno scritto che l'area che si riesce ad imbiancare con un litro di pittura è pari a $(2 \pm 0{,}5)\,\mathrm{m}^2$. Questo è corretto, anche se meno preciso di $(2{,}25 \pm 0{,}25)\,\mathrm{m}^2$.

Prima parte, gruppo A

1. Deve essere $e^{-x} - 2 > 0$ e quindi $x < -\log 2$.
2. $(20\,\mathrm{cm} \pm 4\,\mathrm{mm}) \cdot (8\,\mathrm{cm} \pm 4\,\mathrm{mm}) = 20\,\mathrm{cm}\,(1 \pm 2\%) \cdot 8\,\mathrm{cm}\,(1 \pm 5\%) = 160\,\mathrm{cm}^2\,(1 \pm 7\%)$.
3. Media $= 21$, mediana $= 20$, varianza $= 4{,}8$.
4. La derivata $f'(x) = (2x-2)e^{x^2-2x-2}$ si annulla per $x = 1$; confrontando i valori di $f(x)$ per $x = 0, 1, 3$ otteniamo che il punto di massimo è $x = 3$, ed il valore massimo è $f(3) = e$.
5. a) 0 ; b) 2 ; c) 0 .
6. Usando il cambio di variabile $y = \cos x$ si ottiene:
$$\int e^{\cos x} \sin x\, dx = -\int e^y\, dy = -e^y + c = -e^{\cos x} + c.$$
7. Si tratta di un'equazione a variabili separabili: $y(t) = \dfrac{1}{\cos t + c}$ con $c \in \mathbb{R}$.
8. Si tratta del grafico di e^x riflesso rispetto all'asse delle y e poi traslato verso il basso di 1.

Prima parte, gruppo B

1. Deve essere $2 - e^{-x} > 0$ e quindi $x > -\log 2$.
2. $(10\,\mathrm{cm} \pm 4\,\mathrm{mm}) \cdot (8\,\mathrm{cm} \pm 4\,\mathrm{mm}) = 10\,\mathrm{cm}\,(1 \pm 4\%) \cdot 8\,\mathrm{cm}\,(1 \pm 5\%) = 80\,\mathrm{cm}^2\,(1 \pm 9\%)$.
3. Media $= 22$, mediana $= 20$, varianza $= 19{,}2$.
4. Il punto di minimo è $x = 3$, ed il valore minimo è $f(3) = e^{-3}$.
5. a) 0 ; b) $+\infty$; c) 0 .
6. Integrando per parti si ottiene: $\displaystyle\int 4x\, e^{2x}\, dx = 2x\, e^{2x} - \int 2e^{2x}\, dx = (2x-1)\, e^{2x} + c$.
7. Si tratta di un'equazione a variabili separabili: $y(t) = \dfrac{t}{1 + ct}$ con $c \in \mathbb{R}$.
8. Si tratta del grafico di $1/x$ traslato verso sinistra di 1 e poi verso il basso, ancora di 1.

Prima parte, gruppo C

1. Deve essere $e^{2x} - 4 \geq 0$ e quindi $x \geq \log 2$.
2. $(10\,\mathrm{cm} \pm 4\,\mathrm{mm}) \cdot (16\,\mathrm{cm} \pm 4\,\mathrm{mm}) = 10\,\mathrm{cm}\,(1 \pm 4\%) \cdot 16\,\mathrm{cm}\,(1 \pm 2{,}5\%) = 160\,\mathrm{cm}^2\,(1 \pm 6{,}5\%)$.
3. Media $= 16$, mediana $= 15$, varianza $= 4{,}8$.
4. Il punto di massimo è $x = -1$, ed il valore massimo è $f(-1) = e^2$.
5. a) 2 ; b) $-\infty$; c) $+\infty$.
6. Usando il cambio di variabile $y = 2 - x$ si ottiene:
$$\int 3\sqrt{2-x}\, dx = -\int 3y^{1/2} dy = -2y^{3/2} + c = -2(2-x)^{3/2} + c.$$
7. Si tratta di un'equazione a variabili separabili: $y(t) = \log(t^3 + c)$ con $c \in \mathbb{R}$.
8. Si tratta del grafico di $\log x$ riflesso rispetto all'asse delle x e poi traslato verso sinistra di 1.

Seconda parte, gruppo A

1. a) $y(t) = e^{-2t} + e^{-t}(\alpha_1 \cos(\sqrt{3}t) + \alpha_2 \sin(\sqrt{3}t))$ con $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.
b) $y(t) = e^{-2t}(\alpha_1 + \alpha_2 t + 2t^2)$ con $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.
[*Per la dimostrazione di a) e b) si veda direttamente il punto c).*]
c) Ricordiamo innanzitutto che la soluzione generale dell'equazione $(*)$ è data da

$$y = \tilde{y} + y_{\mathrm{om}}$$

dove $\tilde{y}$ è una qualunque soluzione particolare della $(*)$ e y_{om} è la soluzione generale dell'equazione omogenea associata $\ddot{y} + 2a\dot{y} + 4y = 0$. L'equazione caratteristica corrispondente è $\lambda^2 + 2a\lambda + 4 = 0$ ed ha come soluzioni

$$\lambda_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - 4}\ ,$$

e quindi, posto $\omega := \sqrt{4 - a^2}$ per ogni $a < 2$, la soluzione dell'equazione omogenea è

$$y_{\mathrm{om}}(t) = \begin{cases} \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} & \text{per } a > 2, \\ e^{-2t}(\alpha_1 + \alpha_2 t) & \text{per } a = 2, \\ e^{-at}(\alpha_1 \cos(\omega t) + \alpha_2 \sin(\omega t)) & \text{per } 0 \le a < 2, \end{cases} \tag{1}$$

con $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.
Non ci resta che trovarne una soluzione particolare $\tilde{y}$. Per quanto visto a lezione, conviene cercarla della forma $\tilde{y}(t) := ce^{-2t}$. Sostituendo questa formula nell'equazione si ottiene l'identità $4c(2-a)e^{-2t} = 4e^{-2t}$, che è verificata prendendo $c := 1/(2-a)$ e quindi

$$\tilde{y}(t) = \frac{e^{-2t}}{2-a} \quad \text{per } a \neq 2. \tag{2}$$

Per $a = 2$ la formula precedente non ha senso (non si può dividere per 0), e infatti in questo caso sia e^{-2t} che te^{-2t} risolvono l'equazione omogenea associata alla $(*)$ e quindi non possono risolvere la $(*)$. Pertanto si cerca una soluzione particolare della forma $\tilde{y}(t) := ct^2 e^{-2t}$, e si trova che questa funzione risolve l'equazione per $c = 2$, ovvero

$$\tilde{y}(t) = 2t^2 e^{-2t} \quad \text{per } a = 2. \tag{3}$$

d) Si vede subito che $e^{ct} = o(e^{-t})$ se e solo se $c < -1$. Questo implica che la soluzione particolare $\tilde{y}$ data nella (2) soddisfa

$$\tilde{y}(t) = o(e^{-t})\ ,$$

e si vede facilmente che lo stesso vale anche per quella data nella (3). Dobbiamo quindi capire per quali a si ha che

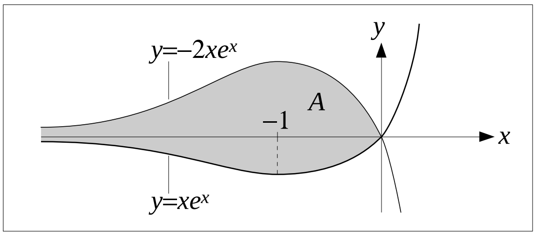
$$y_{\mathrm{om}}(t) = o(e^{-t}) \quad \text{per ogni } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Facendo riferimento alla (1), distinguiamo tre casi:
a) per $a = 2$ la (4) vale;
b) per $0 \le a < 2$ la (4) vale se $-a < -1$, cioè se $a > 1$;
c) per $a > 2$ la (4) vale se $-a + \sqrt{a^2 - 4} < -1$, cioè se $a < 5/2$.

Concludiamo che $y_o m$, e quindi anche la soluzione generale della $(*)$, sono $o(e^{-t})$ per

$$1 < a < \frac{5}{2} \ .$$

2. a) e b) La funzione xe^x è positiva per $x \geq 0$ e negativa altrimenti, tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$, e tende a 0 per $x \to -\infty$. La derivata di questa funzione è $(x+1)e^x$, e studiandone il segno si ottiene infine che xe^x cresce per $x \geq -1$, decresce per $x \leq -1$, e quindi $x = -1$ è il suo punto di minimo assoluto.
Usando quanto appena fatto possiamo tracciare il grafico xe^x; da questo otteniamo il grafico di $-2xe^x$ tramite una riflessione rispetto all'asse delle x e una dilatazione verticale di fattore 2 (cfr. la figura sotto). A questo punto è facile disegnare l'insieme A.



c) L'area di A è data dal seguente integrale, che si calcola tramite un'integrazione per parti:

$$\begin{aligned}\text{Area}(A) &= \int_{-\infty}^{0} (-2xe^x) - (xe^x)\, dx \\ &= -3\int_{-\infty}^{0} xe^x dx = -3\Big|xe^x\Big|_{-\infty}^{0} + 3\int_{-\infty}^{0} e^x dx = 3\Big|e^x\Big|_{-\infty}^{0} = 3 \ .\end{aligned}$$

3. Partiamo direttamente dal punto c): scrivendo $\sin x$ come sviluppo di Taylor all'ordine 3, vale a dire

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) = x\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right) \ ,$$

otteniamo

$$x^n - \sin^n x = x^n\left[1 - \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)^n\right] \ .$$

Ricordiamo adesso che $(1+y)^n = 1+ny+o(y)$, da cui segue che $1-(1+y)^n = -ny+o(y)$, e quindi anche che $1-(1-y)^n = ny+o(y)$; usando quest'ultimo sviluppo con $y := x^2/6 - o(x^2)$ otteniamo infine

$$\begin{aligned}x^n - \sin^n x &= x^n\left[\frac{n}{6}x^2 - n\,o(x^2) + o\left(\frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)\right] \\ &= x^n\left[\frac{n}{6}x^2 + o(x^2)\right] = \frac{n}{6}x^{n+2} + o(x^{n+2}) \sim \frac{n}{6}x^{n+2} \ .\end{aligned}$$

SECONDA PARTE, GRUPPO B

1. Analogo al gruppo A.
a) $y(t) = e^{-3t} + e^{-2t}(\alpha_1\cos(\sqrt{5}t) + \alpha_2\sin(\sqrt{5}t))$ con $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.
b) $y(t) = e^{-3t}(\alpha_1 + \alpha_2 t + 3t^2)$ con $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

c) La soluzione dell'equazione $(*)$ è data da

$$y = y_{\mathrm{om}} + \tilde{y}$$

dove y_{om} è la soluzione generale dell'equazione omogenea $\ddot{y} + 2a\dot{y} + 9y = 0$, e pertanto è data da

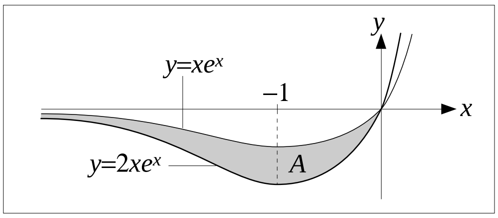
$$y_{\mathrm{om}}(t) = \begin{cases} \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} & \text{per } a > 3, \text{ con } \lambda_{1,2} := -a \pm \sqrt{a^2 - 9}, \\ e^{-3t}(\alpha_1 + \alpha_2 t) & \text{per } a = 3, \\ e^{-at}(\alpha_1 \cos(\omega t) + \alpha_2 \sin(\omega t)) & \text{per } 0 \le a < 3, \text{ con } \omega := \sqrt{9 - a^2}, \end{cases}$$

mentre $\tilde{y}$ è la soluzione particolare della $(*)$ data da

$$\tilde{y}(t) := \begin{cases} \dfrac{e^{-3t}}{3 - a} & \text{per } a \neq 3, \\ 3t^2 e^{-3t} & \text{per } a = 3. \end{cases}$$

d) Le soluzioni della $(*)$ sono tutte $o(e^{-t})$ se e solo se $1 < a < 5$.

2. Analogo al gruppo A. La risposta ai punti a) e b) è data nella figura sottostante:



c) $\text{Area}(A) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} (xe^x) - (2xe^x)\, dx = -\int_{-\infty}^{0} xe^x dx = 1.$

3. Analogo al gruppo A. c) Siccome $\log(1 + x) = x - x^2/2 + o(x^2) = x(1 - x/2 + o(x))$,

$$\log^n(1 + x) = x^n \left[1 - \left(1 - \frac{x}{2} + o(x)\right)^n\right] = x^n \left[\frac{n}{2}x + o(x)\right] \sim \frac{n}{2}x^{n+1}\ .$$

SECONDA PARTE, GRUPPO C

1. Analogo al gruppo A.
a) $y(t) = \frac{1}{2}e^{-4t} + e^{-2t}(\alpha_1 \cos(\sqrt{12}\, t) + \alpha_2 \sin(\sqrt{12}\, t))$ con $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.
b) $y(t) = e^{-4t}(\alpha_1 + \alpha_2 t + 4t^2)$ con $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.
c) La soluzione dell'equazione $(*)$ è data da

$$y = y_{\mathrm{om}} + \tilde{y}$$

dove y_{om} è la soluzione generale dell'equazione omogenea $\ddot{y} + 2a\dot{y} + 16y = 0$, e pertanto è data da

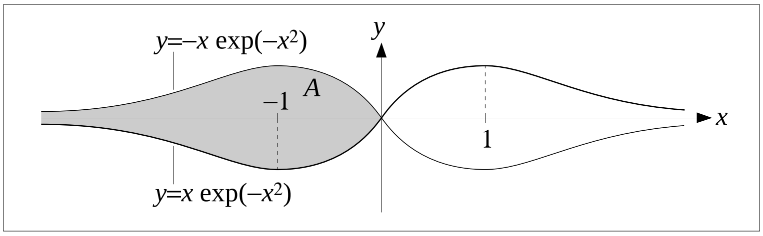
$$y_{\mathrm{om}}(t) = \begin{cases} \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} & \text{per } a > 4, \text{ con } \lambda_{1,2} := -a \pm \sqrt{a^2 - 16}, \\ e^{-4t}(\alpha_1 + \alpha_2 t) & \text{per } a = 4, \\ e^{-at}(\alpha_1 \cos(\omega t) + \alpha_2 \sin(\omega t)) & \text{per } 0 \le a < 4, \text{ con } \omega := \sqrt{16 - a^2}, \end{cases}$$

mentre $\tilde{y}$ è la soluzione particolare della $(*)$ data da

$$\tilde{y}(t) := \begin{cases} \dfrac{e^{-4t}}{4-a} & \text{per } a \neq 4, \\ 4t^2 e^{-4t} & \text{per } a = 4. \end{cases}$$

d) Le soluzioni della $(*)$ sono tutte $o(e^{-t})$ se e solo se $1 < a < 17/2$.

2. Analogo al gruppo A. La risposta ai punti a) e b) è data nella figura sottostante:



c) L'area di A è data dal seguente integrale, che si calcola tramite un cambio di variabile:

$$\text{Area}(A) = \int_{-\infty}^{0} (-xe^{-x^2/2}) - (xe^{-x^2/2})\, dx = -2\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2/2} dx = 2\int_{-\infty}^{0} e^y dy = 2\ .$$

3. Uguale al gruppo B.

COMMENTI

- Prima parte, esercizio 7 del gruppo B. In diversi hanno erroneamente dato come soluzione $y(t) = t + c$. Questo può essere dovuto al fatto che si è aggiunta la costante c alla fine (cosa non corretta) oppure perché in qualche passaggio si è usata piú o meno esplicitamente l'identità (falsa) $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$. Per gli altri gruppi vale un discorso analogo.
- Prima parte, esercizio 8. Per tutti e tre i gruppi il grafico da disegnare passa per l'origine, ma in molti non se ne sono accorti (pur procedendo in modo altrimenti corretto).
- Seconda parte, esercizio 1 del gruppo A. Nel punto a) tutti hanno correttamente scritto che la radice quadrata del numero negativo -3 è $i\sqrt{3}$ (a meno di segno). Però nel punto c) in molti hanno scritto che quando $0 \leq a < 2$, la radice quadrata del numero negativo $a^2 - 4$ è $i\sqrt{a^2-4}$ invece di $i\sqrt{4-a^2}$, come invece dovrebbe essere. Per gli altri gruppi vale un discorso analogo.
- Seconda parte, esercizio 1 del gruppo A. Cercando soluzioni particolari del tipo $\tilde{y} = ce^{-2t}$ molti hanno finito per trovare una c dipendente dal tempo, e questo è ovviamente sbagliato perché si suppone che c sia una costante (presupposto usato al momento di calcolare le derivate di $\tilde{y}$). Per gli altri gruppi vale un discorso analogo.
- Seconda parte, esercizio 1c). Sono state usate diverse semplificazioni a dir poco azzardate (cioè false), come ad esempio $\sqrt{9-a^2} = 3 - a$ e, ancor più misteriosa, $\sqrt{9-a^2} = 3a$. Questi sono errori gravi.
- Seconda parte, esercizio 2c). Pur avendo disegnato correttamente l'insieme A, molti hanno impostato male l'integrale per il calcolarne l'area.
- Seconda parte, esercizio 2b) del gruppo C. Quasi tutti hanno sbagliato a individuare l'insieme A.

- Seconda parte, esercizio 3c) del gruppo A. In via alternativa si può sviluppare la potenza n-esima di $\sin x = x - x^3/6 + o(x^3)$ usando la formula del binomio di Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

con $a := x$ e $b := -x^3/6 + o(x^3)$. Poiché $a = x$ e $b = o(x^2)$, per tutti gli interi k maggior o uguali a 2 si ha $a^{n-k}b^k = o(x^{n+2})$ e quindi

$$\begin{aligned}\sin^n x = (a+b)^n &= a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + o(x^{n+2}) \\ &= x^n + n x^{n-1}\left(-\frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + o(x^{n+2}) \\ &= x^n - \frac{n}{6} x^{n+2} + o(x^{n+2}) \ ,\end{aligned}$$

da cui si arriva facilmente alla conclusione. Per gli altri gruppi vale un discorso analogo.

- Seconda parte, esercizio 3 del gruppo A. In diversi hanno usato in maniera più o meno esplicita l'identità (falsa!) $sin^n x = \sin(x^n)$. Per gli altri gruppi vale un discorso analogo.

Terzo compitino e primo appello, 1 giugno 2010

Prima parte, gruppo A

1. Deve essere $e^{2x} - 3 > 1$, vale a dire $2x > \log 4$ ovvero $x > \log 2$.
2. Media = 22 (anni), mediana = 24 (anni), varianza = 16/3 (anni^2).
3. a) 1 ; b) 0 ; c) $-\infty$.
4. Si integra per parti: $\int_1^e 25\, x^4 \log x\, dx = \Big|5x^5 \log x\Big|_1^e - \int_1^e 5x^5 \frac{1}{x}\, dx = 4e^5 + 1.$
5. Si tratta di un'equazione a variabili separabili: $-y^{-2}\dot{y} = 4t^3 \Leftrightarrow \int -y^{-2} dy = \int 4t^3\, dt \Leftrightarrow y^{-1} = t^4 + c$. Imponendo $y(2) = 1$ si ottiene $c = -15$ e quindi
$$y(t) = \frac{1}{t^4 - 15}\ .$$
6. $P = \left(\frac{5}{21}\right)^2 \simeq 5{,}67\%$.
7. $\mathrm{E}(Y) = 5$, $\mathrm{Var}(Y) = 9$, $\mathrm{E}(Z) = -10$, $\mathrm{Var}(Z) = 36$.
8. Si tratta del grafico di e^x riflesso rispetto all'asse delle y e poi traslato verso il basso di 1.

Prima parte, gruppo B

1. Deve essere $e^{2x} - 15 > 1$, vale a dire $2x > \log 16$ ovvero $x > \log 4 = 2 \log 2$.
2. Media = 13, mediana = 14, varianza = 4/3.
3. a) $+\infty$; b) 3 ; c) 2 .
4. $\int_1^e 16\, x^3 \log x\, dx = \Big|4x^4 \log x\Big|_1^e - \int_1^e 4x^4 \frac{1}{x}\, dx = 3e^4 + 1.$
5. $-y^{-2}\dot{y} = 5t^4 \Leftrightarrow \int -y^{-2} dy = \int 5t^4\, dt \Leftrightarrow y^{-1} = t^5 + c$. Imponendo $y(2) = 1$ si ottiene $c = -31$ e quindi
$$y(t) = \frac{1}{t^5 - 31}\ .$$
6. $P = \left(\frac{16}{21}\right)^2 \simeq 58\%$.
7. $\mathrm{E}(Y) = 5$, $\mathrm{Var}(Y) = 3$, $\mathrm{E}(Z) = -10$, $\mathrm{Var}(Z) = 12$.
8. Si tratta del grafico di e^x riflesso rispetto all'asse delle x e poi traslato verso l'alto di 1.

Prima parte, gruppo C

1. Deve essere $e^{2x} - 8 > 1$, vale a dire $2x > \log 9$ ovvero $x > \log 3$.
2. Media = 9, mediana = 10, varianza = 4/3.
3. a) -1 ; b) $\log 2$; c) 0 .
4. $\int_1^{e^2} 16\, x^3 \log x\, dx = \Big|4x^4 \log x\Big|_1^{e^2} - \int_1^{e^2} 4x^4 \frac{1}{x}\, dx = 7e^8 + 1.$

5. $-y^{-2}\dot{y} = 3t^2 \Leftrightarrow \int -y^{-2}dy = \int 3t^2\,dt \Leftrightarrow y^{-1} = t^3 + c$. Imponendo $y(2) = 1$ si ottiene $c = -7$ e quindi
$$y(t) = \frac{1}{t^3 - 7}\ .$$

6. $P = \left(\frac{16}{21}\right)^3 \simeq 44{,}2\%$.

7. $\mathrm{E}(Y) = 7$, $\mathrm{Var}(Y) = 4$, $\mathrm{E}(Z) = -5$, $\mathrm{Var}(Z) = 16$.

8. Si tratta del grafico di $\log x$ riflesso rispetto all'asse delle x e poi traslato verso sinistra di 1.

Prima parte, gruppo D

1. Deve essere $0 < e^{4x} - 8 < 1$, vale a dire $\log 8 < 4x < \log 9$ ovvero $\frac{1}{4}\log 8 < x < \frac{1}{2}\log 3$.

2. Media = 18, mediana = 20, varianza = 16/3.

3. a) 0 ; b) $-1/2$; c) $+\infty$.

4. $\displaystyle\int_1^{e^2} 25\,x^4 \log x\,dx = \Big|5x^5 \log x\Big|_1^{e^2} - \int_1^{e^2} 5x^5 \frac{1}{x}\,dx = 9e^{10} + 1.$

5. $-y^{-2}\dot{y} = 8t^3 \Leftrightarrow \int -y^{-2}dy = \int 8t^3\,dt \Leftrightarrow y^{-1} = 2t^4 + c$. Imponendo $y(2) = 1$ si ottiene $c = -31$ e quindi
$$y(t) = \frac{1}{2t^4 - 31}\ .$$

6. $P = \left(\frac{5}{21}\right)^3 \simeq 1{,}35\%$.

7. $\mathrm{E}(Y) = 7$, $\mathrm{Var}(Y) = 2$, $\mathrm{E}(Z) = -5$, $\mathrm{Var}(Z) = 8$.

8. Si tratta del grafico di $\log x$ riflesso rispetto all'origine.

Seconda parte, gruppo A

1. a) Conviene svolgere i calcoli usando l'errore relativo. Il diametro del contenitore è $d = 40\,\mathrm{cm}\cdot(1 \pm 1{,}25\%)$ e quindi l'area di base è
$$b = \frac{\pi}{4}\big(40\,\mathrm{cm}\cdot(1 \pm 1{,}25\%)\big)^2 = 0{,}7854 \cdot 1600\,\mathrm{cm}^2 \cdot (1 \pm 2{,}5\%) = 1257\,\mathrm{cm}^2 \cdot (1 \pm 2{,}5\%)\ .$$
Invece il volume del cilindro (cioè la capacità) è $v = 10^5\,\mathrm{cm}^3 \cdot (1 \pm 5\%)$. Pertanto l'altezza è
$$h = \frac{v}{b} = \frac{10^5\,\mathrm{cm}^3(1 \pm 5\%)}{1257\,\mathrm{cm}^2\cdot(1 \pm 2{,}5\%)} = 79{,}58\,\mathrm{cm}\cdot(1 \pm 7{,}5\%) = 79{,}6\,\mathrm{cm} \pm 6{,}0\,\mathrm{cm}\ .$$
b) Detto e l'errore *relativo* nella misura della capacità, abbiamo che l'errore relativo nella misura dell'altezza è pari a $e + 2{,}5\%$, e vogliamo che $(e + 2{,}5\%)\cdot 79{,}58\,\mathrm{cm} = 3\,\mathrm{cm}$. Da questo segue che $e = 1{,}27\%$, e quindi l'errore *assoluto* nella misura della capacità deve essere di $1{,}27 \simeq 1{,}3$ litri.

2. a) L'equazione caratteristica associata all'equazione omogenea è $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ ed ha due soluzioni coincidenti $\lambda_{1,2} = -1$. Pertanto la soluzione generale dell'equazione omogenea è
$$y_{\mathrm{om}}(t) = ae^{-t} + bte^{-t} \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}.$$

Cerchiamo ora una soluzione particolare dell'equazione $(*)$ della forma $\tilde{y}(t) := ce^{-2t}$. Sostituendo nell'equazione otteniamo che $\tilde{y}$ è una soluzione per $c = 2$. Pertanto la soluzione generale della $(*)$ è

$$y(t) = 2e^{-2t} + ae^{-t} + bte^{-t} \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

b) Osserviamo che $e^{-2t} \ll e^{-t} \ll te^{-t}$ per $t \to +\infty$, e quindi chiedere che la funzione in (1) sia asintoticamente equivalente a e^{-t} equivale a imporre $b = 0$ e $a = 1$. La soluzione cercata è quindi una sola:

$$y(t) = 2e^{-2t} + e^{-t} \ .$$

3. a) Detto X il guadagno del signor A misurato in euro, allora $X = -10$ con probabilità

$$P(-10) = \frac{6}{9} \cdot \frac{6}{9} = \frac{4}{9}$$

(A perde 10 euro se viene estratta una pallina nera e poi di nuovo una nera) e quindi $X = 8$ con probabilità

$$P(8) = 1 - P(-10) = \frac{5}{9} \ .$$

Pertanto il valor medio di X è

$$\mathrm{E}(X) = \frac{4}{9} \cdot (-10) + \frac{5}{9} \cdot 8 = 0 \ .$$

b) Detto Y il guadagno complessivo di A in 20 partite, possiamo calcolare il valore esatto di $p := P(\text{“}Y \geq 100\text{”})$ esattamente oppure stimarlo usando la disuguaglianza di Chebyshev. Per usare Chebyshev ci serve conoscere il valore atteso e la varianza di Y, e siccome Y è data dalla somma di 20 variabili indipendenti distribuite come X,

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}(Y) = 20 \cdot \mathrm{E}(X) = 0 \ , \\ &\mathrm{Var}(Y) = 20 \cdot \mathrm{Var}(X) = 20 \cdot \left(\frac{4}{9} \cdot (-10)^2 + \frac{5}{9} \cdot 8^2 \right) = 1600 \ . \end{aligned}$$

Pertanto

$$p \leq P(\text{“}|Y| \geq 100\text{”}) \leq \frac{\mathrm{var}(Y)}{100^2} = 0{,}16 \ .$$

Per calcolare esattamente il valore di p, invece, osserviamo che A guadagna più di 100 euro se e solo se il numero n di partite che ha perso soddisfa $n \leq 3$ (questo lo si ottiene imponendo che il guadagno complessivo, vale a dire $(20 - n)8 - 10n$, sia maggiore o uguale a 100). Pertanto p è uguale alla probabilità che A perda al più 3 partite, e siccome la probabilità che A perda una partita è $4/9$,

$$p = \sum_{k=0}^{3} \binom{20}{k} \left(\frac{4}{9}\right)^k \left(\frac{5}{9}\right)^{20-k} = \frac{18057 \cdot 5^{18}}{9^{20}} \simeq 5{,}66 \cdot 10^{-3} \ .$$

c) In questo caso

$$P(-10) = \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{12} \ , \quad P(8) = 1 - P(-10) = \frac{7}{12} \ ,$$

e quindi

$$\mathrm{E}(X) = \frac{5}{12} \cdot (-10) + \frac{7}{12} \cdot 8 = \frac{1}{2} \ .$$

4. a) Gli spettatori provenienti da Y e Z sono il 75% del totale; tra questi quelli provenienti da Y sono il 45%/75% = 60%, e quindi quelli provenienti da Z sono il 40%. Pertanto la percentuale di quelli che usano i mezzi pubblici è

$$90\% \cdot 60\% + 65\% \cdot 40\% = 80\% \ .$$

b) Detto A l'evento "lo spettatore usa l'auto" e B l'evento "lo spettatore proviene da X", dobbiamo calcolare $P(B|A)$. Per farlo usiamo la formula di Bayes: sappiamo dal testo che $P(A|B) = 90\%$ mentre per quanto visto al punto precedente $P(A|B^c) = 20\%$; inoltre $P(B) = 25\%$ e $P(B^c) = 75\%$. Pertanto

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A|B) \cdot P(B) + P(A|B^c) \cdot P(B^c)} = \frac{90\% \cdot 25\%}{90\% \cdot 25\% + 20\% \cdot 75\%} = \frac{3}{5} \ .$$

5. a) $P_a = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{2}{38} = \frac{1}{2470} \simeq 4{,}05 \cdot 10^{-4}$.

b) $P_b = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{2}{38} \cdot \frac{36}{37} \cdot \frac{35}{36} = \frac{7}{18278} \simeq 3{,}83 \cdot 10^{-4}$.

c) $P_c = C_{5,3} \cdot P_b = 10 \cdot P_b = \frac{35}{9139} \simeq 3{,}83 \cdot 10^{-3}$.

c) $P_d = 10 \cdot P_c = \frac{350}{9139} \simeq 3{,}83 \cdot 10^{-2}$.

Seconda parte, gruppo B

1. Analogo al gruppo A. a) Il raggio di base è $r = 25\,\text{cm} \cdot (1 \pm 1{,}2\%)$ e quindi l'area è

$$b = \pi\big(25\,\text{cm} \cdot (1 \pm 1{,}2\%)\big)^2 = 1963\,\text{cm}^2 \cdot (1 \pm 2{,}4\%) \ .$$

Il volume è $v = 80\,\text{dm}^3 \cdot (1 \pm 6{,}25\%) = 8 \cdot 10^4\,\text{cm}^3 \cdot (1 \pm 6{,}25\%)$. Pertanto l'altezza è

$$h = \frac{v}{b} = \frac{8 \cdot 10^4\,\text{cm}^3 \cdot (1 \pm 6{,}25\%)}{1963\,\text{cm}^2 \cdot (1 \pm 2{,}4\%)} = 40{,}74\,\text{cm} \cdot (1 \pm 8{,}65\%) = 40{,}7\,\text{cm} \pm 3{,}6\,\text{cm} \ .$$

b) Detto e l'errore relativo nella misura della capacità, l'errore relativo nella misura dell'altezza è $e + 2{,}4\%$, e vogliamo che $(e + 2{,}4\%) \cdot 40{,}74\,\text{cm} = 3\,\text{cm}$. Da questo segue che $e = 4{,}96\%$, e quindi l'errore assoluto nella misura della capacità deve essere di 4,0 litri.

2. Analogo al gruppo A. a) L'equazione caratteristica dell'omogenea ha due soluzioni coincidenti $\lambda_{1,2} = -2$ e quindi la soluzione generale dell'omogenea è

$$y_{\text{om}}(t) = ae^{-2t} + bte^{-2t} \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R},$$

mentre la soluzione generale della $(*)$ è

$$y(t) = e^{-t} + ae^{-2t} + bte^{-2t} \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

b) Siccome $e^{-2t} \ll te^{-2t} \ll e^{-t}$ per $t \to +\infty$, tutte le funzioni date in (2) sono asintoticamente equivalenti a e^{-t}.

3. Analogo al gruppo A. a) Detto X il guadagno del signor A, X assume solo i valori -16 e 9, e

$$P(-16) = \frac{6}{10} \cdot \frac{6}{10} = \frac{9}{25} , \quad P(9) = 1 - P(-16) = \frac{16}{25} .$$

Pertanto

$$\mathrm{E}(X) = \frac{9}{25} \cdot (-16) + \frac{16}{25} \cdot 9 = 0 .$$

b) Detta Y il guadagno di A in 25 partite e posto $p := P(\text{“}Y \geq 200\text{”})$, si ha

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}(Y) = 25 \cdot \mathrm{E}(X) = 0 , \\ &\mathrm{Var}(Y) = 25 \cdot \mathrm{Var}(X) = 3600 , \end{aligned}$$

e quindi la disuguaglianza di Chebyshev dà

$$p \leq P(\text{“}|Y| \geq 200\text{”}) \leq \frac{\mathrm{var}(Y)}{200^2} = 0{,}09 .$$

Invece per calcolare direttamente p osserviamo che per guadagnare più di 200 euro il signor A deve perdere al più 1 partita, e quindi

$$p = \sum_{k=0}^{1} \binom{25}{k} \left(\frac{9}{25}\right)^k \left(\frac{16}{25}\right)^{25-k} = \frac{241 \cdot 2^{96}}{5^{50}} \simeq 2{,}15 \cdot 10^{-4} .$$

c) In questo caso

$$P(-16) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{1}{3} , \quad P(9) = 1 - P(-16) = \frac{2}{3}$$

e quindi

$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{3} \cdot (-16) + \frac{2}{3} \cdot 9 = \frac{2}{3} .$$

4. Analogo al gruppo A. a) Di tutti gli spettatori provenienti da X o da Y, 3/8 provengono da X e 5/8 da Y. Pertanto la percentuale di quelli che usano l'auto è

$$50\% \cdot \frac{3}{8} + 10\% \cdot \frac{5}{8} = 25\% .$$

b) Detto A l'evento “lo spettatore viene in auto” e B l'evento “lo spettatore proviene da Z” si ha che

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A|B) \cdot P(B) + P(A|B^c) \cdot P(B^c)} = \frac{20\% \cdot 20\%}{20\% \cdot 20\% + 25\% \cdot 80\%} = \frac{1}{6} .$$

5. Uguale al gruppo A.

SECONDA PARTE, GRUPPO C

1. Uguale al gruppo A.
2. Uguale al gruppo B.
3. Analogo al gruppo A. a) Detto X il guadagno del signor A, X assume solo i valori -7 e 9, e

$$P(-7) = \frac{6}{8} \cdot \frac{6}{8} = \frac{9}{16} \ , \quad P(9) = 1 - P(-7) = \frac{7}{16} \ .$$

Pertanto

$$\mathrm{E}(X) = \frac{9}{16} \cdot (-7) + \frac{7}{16} \cdot 9 = 0 \ .$$

b) Detta Y il guadagno di A in 20 partite e posto $p := P(\text{“}Y \geq 100\text{”})$ si ha

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(Y) &= 20 \cdot \mathrm{E}(X) = 0 \ , \\ \mathrm{Var}(Y) &= 20 \cdot \mathrm{Var}(X) = 1260 \ , \end{aligned}$$

e quindi

$$p \leq P(\text{“}|Y| \geq 100\text{”}) \leq \frac{\mathrm{var}(Y)}{100^2} = 12{,}6\% \ .$$

Invece per calcolare direttamente p osserviamo che per guadagnare più di 100 euro il signor A deve perdere al più 5 partite, e quindi

$$p = \sum_{k=0}^{5} \binom{20}{k} \left(\frac{9}{16}\right)^k \left(\frac{7}{16}\right)^{20-k} \simeq 4{,}65 \cdot 10^{-3} \ .$$

c) In questo caso

$$P(-7) = \frac{6}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{28} \ , \quad P(9) = 1 - P(-7) = \frac{13}{28}$$

e quindi

$$\mathrm{E}(X) = \frac{15}{28} \cdot (-7) + \frac{13}{28} \cdot 9 = \frac{3}{7} \ .$$

4. Uguale al gruppo A.
5. Uguale al gruppo A.

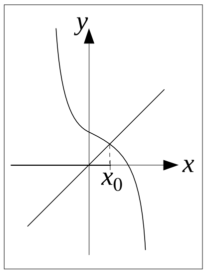
COMMENTI

- Prima parte, esercizio 1. Molti hanno risolto l'esercizio richiedendo che l'argomento del logaritmo sia positivo, ma questa è la condizione da imporre affinché il logaritmo sia ben definito, non affinché sia positivo.
- Seconda parte, esercizio 1. Alcuni hanno fatto un'errore piuttosto sottile, che in sostanza si riduce a questo: com'è be noto, date due quantità x_1 e x_2 misurate con errori relativi e_1 ed e_2, l'errore relativo del prodotto $x_3 = x_1 \cdot x_2$ è $e_3 = e_1 + e_2$ (ci limitiamo alla formula semplificata); il punto chiave è che quest'ultima uguaglianza vale solo se le quantità misurate sono x_1 e x_2 e quella non misurata è x_3; in particolare non la si può applicare al caso in cui le quantità misurate sono x_1 e x_3 e quella da misurare è x_2 (si otterrebbe infatti $e_2 = e_3 - e_1$, mentre la formula semplificata per l'errore del rapporto, dice che $e_2 = e_3 + e_1$).

- Seconda parte, esercizio 2. Quasi nessuno ha risolto il punto b).
- Seconda parte, esercizio 3b). Nell'usare la disuguaglianza di Chebyshev, molti hanno usato la varianza di X al posto di quella di Y.
- Seconda parte, esercizio 3b). Si noti che la maggiorazione della probabilità p ottenuta tramite la disuguaglianza di Chebyshev è assai lontana dal valore esatto (che però non era richiesto calcolare).
- Seconda parte, esercizio 4a), gruppi A e C. Alcuni hanno calcolato la percentuale di coloro che usano i mezzi pubblici relativamente al totale degli spettatori, invece che relativamente a quelli provenienti da Y e Z. Vale un discorso analogo per il gruppo B.
- Seconda parte, esercizio 5. Alcuni (pochi) hanno interpretato (erroneamente) il testo dell'esercizio decidendo che ognuna delle cinque carte viene rimessa nel mazzo prima di estrarre la successiva.

Prima parte, gruppo A

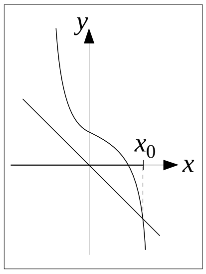
1. Media = 1,3 ; mediana = 1,2 ; varianza = 0,032 .
2. a) $+\infty$; b) 0 ; c) 1 .
3. La derivata $f'(x) = 2(1-x)/(4+2x-x^2)$ si annulla per $x = 1$. Pertanto i punti di massimo e minimo sono compresi tra $0, 1, 3$. Confrontando i valori di f in questi punti si ottiene che il punto di massimo è 1 e quello di minimo è 3.
4. L'errore relativo è 5%.
5. $\mathrm{E}(X) = -1 \cdot \frac{3}{8} + 0 \cdot \frac{3}{8} + 1 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{8} = 0$; $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) = 1 \cdot \frac{3}{8} + 0 \cdot \frac{3}{8} + 1 \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{1}{8} = 1$.
6. Si tratta della probabilità di non ottenere alcuna testa più quella di ottenere una sola testa:
$$P = \binom{4}{0}\frac{1}{2^4} + \binom{4}{1}\frac{1}{2^4} = \frac{5}{2^4} \simeq 31\% \ .$$



7. $\dfrac{1}{1-i} + \dfrac{1}{1+i} = 1.$
8. L'insieme delle soluzioni è la semiretta $(-\infty, x_0]$ dove x_0 è dato nella figura accanto.

Prima parte, gruppo B

1. Media = 1,7 ; mediana = 1,8 ; varianza = 0,032 .
2. a) 0 ; b) $+\infty$; c) $\frac{1}{2}$.
3. La derivata $f'(x) = 2(x-1)/(4+2x-x^2)$ si annulla per $x = 1$. Pertanto i punti di massimo e minimo sono compresi tra $-1, 1, 2$. Confrontando i valori di f in questi punti si ottiene che il punto di massimo è -1 e quello di minimo è 1.
4. L'errore relativo è 4%.
5. $\mathrm{E}(X) = -4 \cdot \frac{1}{8} - 2 \cdot \frac{1}{8} + 0 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} = 0$; $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) = 16 \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{1}{8} + 0 \cdot \frac{3}{8} + 4 \cdot \frac{3}{8} = 4$.
6. $P = \binom{5}{0}\frac{1}{2^5} + \binom{5}{1}\frac{1}{2^5} = \frac{3}{2^4} \simeq 19\%.$



7. $\dfrac{1}{i-1} + \dfrac{1}{i+1} = -i.$
8. L'insieme delle soluzioni è la semiretta $(-\infty, x_0]$ dove x_0 è dato nella figura accanto.

Seconda parte, gruppo A

1. Si tratta solo di applicare formule ben note; i risultati sono arrotondati a tre cifre significative.
   a) $\mathrm{med}(x_i) = 2{,}38$; $\mathrm{var}(x_i) \simeq 8{,}73$; $\mathrm{med}(y_i) = 0{,}68$; $\mathrm{var}(y_i) \simeq 2{,}92$.
   b) $\mathrm{cov}(x_i; y_i) \simeq -4{,}91$; $\mathrm{corr}(x_i; y_i) \simeq -0{,}971$.
   c) $y = -0{,}562 \cdot x + 2{,}02$.

2. a) L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata alla $(*)$ è $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$, ed ha due soluzioni coincidenti uguali a -1. Pertanto la soluzione generale dell'equazione omogenea è
$$y_{\text{om}}(t) = e^{-t}(a + bt) \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}.$$
Sappiamo che la soluzione generale della $(*)$ è data da $y = y_{\text{om}} + \tilde{y}$ dove $\tilde{y}$ è una qualunque soluzione particolare della $(*)$; inoltre, essendo il termine noto della $(*)$ un polinomio di grado 1, cerchiamo $\tilde{y}$ tra i polinomi di grado 1, vale a dire tra le funzioni della forma $\tilde{y} = ct + d$ con $c, d \in \mathbb{R}$. Facendo i conti si vede che $\tilde{y}$ è una soluzione per $c = 3$ e $d = -6$. Pertanto la soluzione generale della $(*)$ è
$$y(t) = e^{-t}(a + bt) + 3t - 6 \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}.$$
b) Per quanto visto al punto precedente, per $\alpha = -1$ le soluzioni della $(*)$ soddisfano tutte $y(t) = o(t^2)$ per $t \to +\infty$. Consideriamo ora $\alpha > -1$. Le soluzioni dell'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata alla $(*)$ sono reali e distinte, e per la precisione
$$\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 + \alpha}\ .$$
Quindi $y_{\text{om}}(t) = ae^{\lambda_1 t} + be^{\lambda_2 t}$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Sappiamo inoltre che esiste una soluzione particolare $\tilde{y}$ della $(*)$ tra i polinomi di primo grado, e quindi la soluzione generale è
$$y(t) = ae^{\lambda_1 t} + be^{\lambda_2 t} + \tilde{y}(t) \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}.$$
Osserviamo ora che questa soluzione soddisfa $y(t) = o(t^2)$ solo quando sia λ_1 che λ_2 sono numeri negativi o nulli, e questo si verifica per $\alpha \le 0$.

3. a) La percentuale è $20\% \cdot (1 - 75\%) = 5\%$.
b) Indichiamo con A l'evento "la partita non è stata controllata" e con B l'evento "la lavatrice è difettosa". Dobbiamo quindi calcolare la probabilità condizionale $P(A|B)$, e lo facciamo usando la formula di Bayes. A questo proposito osserviamo che in base ai dati a disposizione e per quanto visto al punto precedente $P(B|A) = 20\% = 1/5$, $P(B|A^c) = 5\% = 1/20$, $P(A) = 16/80 = 1/5$ e infine $P(A^c) = 1 - P(A) = 4/5$. Pertanto
$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B|A) \cdot P(A) + P(B|A^c) \cdot P(A^c)} = \frac{1/5 \cdot 1/5}{1/5 \cdot 1/5 + 1/20 \cdot 4/5} = \frac{1}{2}\ .$$
b) Indichiamo ora con B l'evento "le lavatrici sono una difettosa ed una no", e procediamo come al punto precedente. In questo caso $P(B|A) = 8/25$ e $P(B|A^c) = 19/200$, e quindi
$$P(A|B) = \frac{8/25 \cdot 1/5}{8/25 \cdot 1/5 + 19/200 \cdot 4/5} = \frac{16}{35} \simeq 45{,}7\%\ .$$

SECONDA PARTE, GRUPPO B

1. a) $\text{med}(x_i) = 0{,}88$; $\text{var}(x_i) \simeq 8{,}73$; $\text{med}(y_i) = -0{,}26$; $\text{var}(y_i) \simeq 0{,}73$.
b) $\text{cov}(x_i; y_i) \simeq -2{,}45$; $\text{corr}(x_i; y_i) \simeq -0{,}971$.
c) $y = -0{,}281 \cdot x - 0{,}013$.

2. Analogo al gruppo A. a) La soluzione generale dell'equazione omogenea è
$$y_{\text{om}}(t) = e^{-2t}(a + bt) \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}.$$
Inoltre una soluzione particolare della $(*)$ è $\tilde{y} = t - 1$ e quindi la soluzione generale è
$$y(t) = e^{-2t}(a + bt) + t - 1 \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}.$$
b) I valori di α cercati sono $0 - 4 \le \alpha \le 0$.

3. Uguale al gruppo A.

Commenti

- Prima parte, esercizio 3. Nel cercare di risolvere questo esercizio molti non hanno ricordato che i punti di massimo e di minimo di una funzione definita su un intervallo chiuso sono compresi tre quelli in cui si annulla la derivata *oppure* tra gli estremi dell'intervallo.
- Prima parte, esercizio 4. Molti hanno dato come risposta una lunghezza o comunque una grandezza con una dimensione, mentre l'errore relativo è sempre un numero puro. Questo è un errore grave.
- Prima parte, esercizio 6. Stranamente (per me), diverse persone si sono trovate in difficoltà al momento di attribuire un significato all'espressione "al più una testa".
- Seconda parte, esercizio 2. Molti hanno cercato una soluzione particolare della forma $\tilde{y} = ct$ invece che $\tilde{y} = ct + d$, senza ovviamente trovarla. Il punto è che la soluzione particolare andava cercata tra i polinomi di primo grado, cioè le funzioni del primo tipo (e non del secondo).
- Seconda parte, esercizio 2. Nessuno ha risolto correttamente il punto b).
- Seconda parte, esercizio 3. Nessuno ha risolto correttamente il punto c), pochissimi hanno risolto il b) e, cosa un po' sorprendente, pure pochi hanno risolto l'a).

Scritto del terzo appello, 14 settembre 2010

Prima parte

1. Media $= 1{,}5$, mediana $= 1$, varianza $= 1{,}95$.
2. a) 1 ; b) 0 ; c) $\dfrac{1}{2}$.
3. a) $r = \sqrt{2}$ e $\theta = 3\pi/4$; b) $r = 2$ e $\theta = -\pi/2$; c) $r = 2$ e $\theta = -\pi/3$.
4. Usiamo il cambio di variabile $t = \pi x$: $\displaystyle\int_0^1 \sin(\pi x)\,dx = \int_0^\pi \sin t\,\frac{dt}{\pi} = \frac{1}{\pi}\Big| -\cos t\Big|_0^\pi = \frac{2}{\pi}$.
5. $N = 9^2 \cdot 21^3 \simeq 7{,}5 \cdot 10^5$.
6. $y(t) = e^{-2t}(a\cos t + b\sin t)$ con $a, b \in \mathbb{R}$.
7. $P = 1 - P(\text{“sono entrambi dispari”}) = 1 - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{4}$.
8. Si tratta del grafico di $\sqrt{x}$ riflesso rispetto all'asse delle y e traslato verso destra di 1.

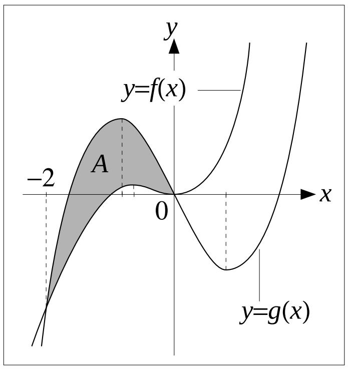
Seconda parte

1. Indichiamo con ε l'errore (assoluto) nella misurazione delle dimensioni, misurato in metri. Allora l'area cercata, misurata in metri quadrati, è data da

$$\begin{aligned} A &= (5 \pm \varepsilon)\cdot(3 \pm \varepsilon) + 2\cdot(5 \pm \varepsilon + 3 \pm \varepsilon)\cdot(2 \pm \varepsilon) \\ &= 15 \pm 8\varepsilon + 2\cdot(8 \pm 2\varepsilon)\cdot(2 \pm \varepsilon) \\ &= 47 \pm 32\varepsilon \\ &= 47 \cdot \left(1 \pm \frac{32}{47}\varepsilon\right) . \end{aligned} \tag{1}$$

In particolare l'errore relativo nel calcolo di A è $\frac{32}{47}\varepsilon$.
a) Ponendo $\varepsilon = 0{,}1$ nella (1) otteniamo $A = 47\,\mathrm{m}^2$ con l'errore relativo pari a 6,8%.
b) Dalla (1) segue che l'errore relativo nel calcolo di A è inferiore al 3% se $\varepsilon \le 3\%\cdot\frac{47}{32} = 0{,}044$, ovvero se l'errore assoluto delle misurazioni è inferiore a 4,4 cm.

2. a) La funzione $f(x) = x^2(x+1)$ tende a $\pm\infty$ per $x \to \pm\infty$, si annulla in -1 e 0, è negativa per $x \le -1$ e positiva altrimenti. Studiando il segno della derivata $f'(x) = x(3x+2)$, si ottiene che $f(x)$ è decrescente per $-2/3 \le x \le 0$ e crescente altrimenti.
Analogamente $g(x) = x(x^2 - 2)$ tende a $\pm\infty$ per $x \to \pm\infty$, si annulla in $\pm\sqrt{2}$ e 0, è negativa per $x \le -\sqrt{2}$ e per $0 \le x \le \sqrt{2}$, e positiva altrimenti. Studiando il segno della derivata $g'(x) = 3x^2 - 2$, si ottiene che $f(x)$ è decrescente per $-\sqrt{2/3} \le x \le \sqrt{2/3}$, e crescente altrimenti.
Sulla base di queste informazioni si ottengono i grafici dati nella figura accanto.



b) Risolvendo la disequazione $g(x) \ge f(x)$ si ottiene $-2 \le x \le 0$; in particolare i grafici di $f(x)$ e $g(x)$ si intersecano per $x = -2$ e $x = 0$, e quindi l'insieme A è come nella figura sopra. Inoltre

$$\text{Area}(A) = \int_{-2}^0 g(x) - f(x)\,dx = \int_{-2}^0 -2x - x^2\,dx = \Big| -x^2 - \frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^0 = \frac{4}{3} .$$

3. a) $P_a = \dfrac{2}{15} \cdot \dfrac{1}{14} = \dfrac{1}{105} \simeq 0{,}95\%$.

b) Dobbiamo calcolare la probabilità che vengano estratti prima un 4 e poi un 8 oppure prima un 8 e poi un 4:

$$P_b = \frac{2}{15} \cdot \frac{1}{14} + \frac{1}{15} \cdot \frac{2}{14} = \frac{2}{105} \simeq 1{,}90\% \ .$$

c) Facendo i calcoli si ottiene

$$\mathrm{E}(X) = 1 \cdot \frac{8}{15} + 2 \cdot \frac{4}{15} + 4 \cdot \frac{2}{15} + 8 \cdot \frac{1}{15} = \frac{32}{15} \simeq 2{,}13$$

e

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}^2(X) \\ &= 1 \cdot \frac{8}{15} + 4 \cdot \frac{4}{15} + 16 \cdot \frac{2}{15} + 64 \cdot \frac{1}{15} - \left(\frac{32}{15}\right)^2 = \frac{776}{15^2} \simeq 3{,}45 \ . \end{aligned}$$

d) Indichiamo con X_1 il primo numero estratto e con X_2 il secondo. Le variabili aleatorie X_1 e X_2 hanno la stessa distribuzione di probabilità di X e la loro somma è Y. Quindi

$$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(X_1 + X_2) = \mathrm{E}(X_1) + \mathrm{E}(X_2) = 2\,\mathrm{E}(X) = \frac{64}{15} \simeq 4{,}27 \ .$$

Appello straordinario, 12 novembre 2010

Prima parte

1. Deve essere $3 + 2x - x^2 > 0$, ovvero $-1 < x < 3$.
2. $x/y = \dfrac{0{,}5\,\mathrm{m}^2(1 \pm 1\%)}{0{,}4\,\mathrm{m}\,(1 \pm 2\%)} = 1{,}25\,\mathrm{m}\,(1 \pm 3\%)$.
3. Media $= 1{,}4$, mediana $= 1$, varianza $= 0{,}64$.
4. a) 0 ; b) $+\infty$; c) $\log 2$.
5. $N = 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 = 43.680$.
6. $P = \binom{6}{3}(1/2)^3\,(1/2)^3 = \dfrac{5}{16} \simeq 31\%$.
7. Equazione a variabili separabili: $y\,\dot y = e^t \Leftrightarrow \int y\,dy = \int e^t\,dt \Leftrightarrow y^2/2 = e^t + c$; imponendo la condizione $y(0) = 2$ otteniamo $c = 1$ e quindi $y(t) = \sqrt{2(e^t + 1)}$.
8. Si tratta dell'insieme dei punti al di sopra del grafico della funzione $\log x$ traslato verso sinistra di 1.

Seconda parte

1. La probabilità che lanciando il dado esca la lettera A è $2/3$, e quindi la probabilità che non esca è $1/3$. Pertanto, detta P_a la probabilità dell'evento descritto al punto a), P_b quella di b) e così via, si ha

$$\begin{aligned} P_a &= (1/3)^5 = \frac{1}{243} \simeq 4{,}11 \cdot 10^{-3} \ ; \\ P_b &= \binom{5}{1}(2/3)^1(1/3)^4 = \frac{10}{243} \simeq 4{,}11 \cdot 10^{-2} \ ; \\ P_c &= 1 - P_a = \frac{242}{243} \simeq 0{,}996 \ ; \\ P_d &= 1 - (P_a + P_b) = \frac{232}{243} \simeq 0{,}955 \ . \end{aligned}$$

2. a) L'equazione caratteristica associata alla $(*)$ è $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$, ed ha soluzioni $\lambda = 2 \pm i$. Pertanto la soluzione generale dell'equazione omogenea associata alla $(*)$ è

$$y_{\mathrm{om}}(t) = e^{2t}(a\cos t + b\sin t) \ . \tag{1}$$

Cerchiamo poi una soluzione particolare della $(*)$ tra i polinomi di primo grado, vale a dire tra le funzioni della forma $y(t) = ct + d$. Sostituendo questa espressione nella $(*)$ si ottiene

$$5(c-1)t + (5d - 4c - 6) = 0$$

e questa identità vale per ogni t se $c = 1$ e $d = 2$. La soluzione particolare cercata è quindi $y(t) = t + 2$, e sommandoci la soluzione generale dell'omogenea data in (1) otteniamo la soluzione generale della $(*)$:

$$y(t) = e^{2t}(a\cos t + b\sin t) + t + 2 \ . \tag{2}$$

b) Chiaramente la funzione $y(t)$ data in (2) è $o(e^{st})$ se $s > 2$, e questa condizione è anche necessaria (questo però è leggermente meno evidente).

3. Detta h l'altezza del contenitore e b il lato di base (misurati in metri), il volume del contenitore (misurato in metri cubi) è $V = b^2 h$ mentre la somma delle lunghezze degli spigoli è $8b + 4h$. Imponendo che quest'ultima sia uguale a 1 otteniamo $h = 1/4 - 2b$ (in particolare affinché h sia un numero positivo deve essere $b \leq 1/8$) e quindi

$$V = \frac{b^2}{4} - 2b^3 .$$

Cerchiamo dunque il valore di b compreso tra 0 e 1/8 che rende massimo V. Studiando il segno della derivata $V' = b/2 - 6b^2$ si ottiene che la funzione V cresce per b compreso tra 0 e 1/12 e decresce altrimenti; quindi il massimo di V si ha per $b = 1/12$, ed in tal caso $h = 1/12$. Dunque il contenitore di massimo volume è quello cubico di lato 1/12 (misurato in metri).

Scritto del quarto appello, 31 gennaio 2011

Prima parte

1. Deve essere $2 - e^x \geq 0$, ovvero $x \leq \log 2$.
2. a) $r = \sqrt{2}$ e $\theta = 5\pi/4$; b) $r = 2$ e $\theta = -\pi/2$; c) $r = 2\sqrt{3}$ e $\theta = -\pi/3$.
3. Media = 26, mediana = 23, varianza = 58.
4. $\left[\log\left(\dfrac{x^4}{e^x}\right)\right]' = [4\log x - x]' = \dfrac{4}{x} - 1.$
5. Si tratta di un'equazione a variabili separabili: $e^y \dot{y} = \sin t$, da cui segue $\int e^y dy = \int \sin t\, dt$, ovvero $e^y = -\cos t + c$, e infine $y = \log(-\cos t + c)$ con c costante arbitraria.
6. A e B sono indipendenti; A e C pure; mentre B e C non lo sono.
7. $N = 16 \cdot 5 \cdot 16 \cdot 5 = 6400$.
8. Si tratta del grafico di $\cos x$ riflesso rispetto all'asse delle x e poi traslato verso l'alto di 1.

Seconda parte

1. a) Detta x la lunghezza del lato del cubo, abbiamo che $x = (20 \pm 0{,}1)\,\text{cm}$, e quindi

$$\text{Superficie totale} = 6x^2 = 6 \cdot (20^2 + 2 \cdot 20 \cdot 0{,}1)\,\text{cm}^2 = (2400 \pm 24)\,\text{cm}^2 \ .$$

Detto e l'errore assoluto nella misura di x (misurato in millimetri), abbiamo che

$$\text{Superficie totale} = 6x^2 = 6 \cdot (20^2 + 2 \cdot 20 \cdot e/10)\,\text{cm}^2 = (2400 \pm 24 \cdot e)\,\text{cm}^2 \ .$$

Imponendo $24 \cdot e \leq 10$ otteniamo quindi $e \leq 5/12 \simeq 0{,}4$.

2. Per quanto detto, il numero di pezzi prodotti per secondo dalla macchina è $1/t$, e di questi quelli difettosi sono $p/t = 12/t^3$. Pertanto il numero di pezzi non difettosi prodotti per secondo è

$$x := \frac{1}{t} - \frac{12}{t^3} \ .$$

Vogliamo quindi scegliere il valore di t compreso tra 4 e 10 che rende massimo il valore di x. La derivata di x rispetto a t è

$$x' = \frac{36 - t^2}{t^4} \ ,$$

ed è quindi positiva per $t \leq 6$ e negativa altrimenti. Dunque x cresce nell'intervallo $[4, 6]$ e descresce in $[6, 10]$; pertanto $t = 6$ è il punto di massimo assoluto di x in $[4, 10]$.

3. a) La variabile aleatoria X ha distribuzione binomiale di parametri $p = 1/6$ e $n = 10$. Pertanto

$$\mathrm{E}(X) = np = \frac{5}{3} \ , \quad \mathrm{Var}(X) = np(p-1) = \frac{25}{18} \ .$$

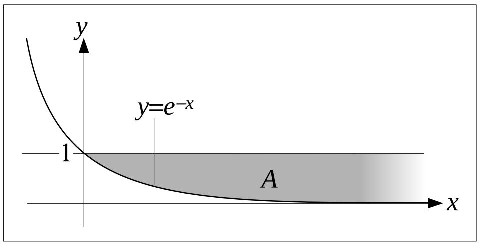
b) Se il sei esce X volte, il guadagno (misurato in euro) è pari a $Y := 5X - (10 - X) = 6X - 10$, e quindi il guadagno medio, ovvero il valore atteso di Y, è

$$\mathrm{E}(Y) = 6 \cdot \mathrm{E}(X) - 10 = 0 \ .$$

c) Per vincere almeno 40 euro, è necessario che escano 9 o 10 sei, e la probabilità che questo accada è

$$P = \binom{10}{9} p^9(1-p) + p^{10} = \frac{51}{6^{10}} \simeq 8{,}4 \cdot 10^{-7} \ .$$

Prima parte

1. $0 < x \leq e^2/2$.
2. $\dfrac{1}{2-3i} + \dfrac{1}{2+3i} = \dfrac{4}{13}$.
3. Gli errori relativi delle misure dei lati sono rispettivamente $6 \cdot 10^{-3}$ e $3 \cdot 10^{-3}$. Pertanto l'errore relativo dell'area è $9 \cdot 10^{-3} \simeq 1\%$.
4. a) $+\infty$; b) 0 ; c) 2 .
5. Ponendo $y = 1 - 2x$ si ottiene $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{2}{1-2x}\,dx = \int_1^3 \frac{dy}{y} = \Big|\log y\Big|_1^3 = \log 3.$
6. $\mathrm{E}(Y) = 2 - 3 \cdot \mathrm{E}(X) = 2$; $\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(-3X) = 9 \cdot \mathrm{Var}(X) = 9$.
7. $P = \dfrac{4}{52} \cdot \dfrac{4}{51} \cdot \dfrac{4}{50} = \dfrac{8}{16575} \simeq 4{,}83 \cdot 10^{-4}$.
8. 

Seconda parte

1. L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata alla $(*)$ è $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$, ed ha quindi due soluzioni reali coincidenti $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$. Pertanto la soluzione dell'equazione omogenea è
$$y_{\mathrm{om}}(t) = e^{-2t}(\alpha_1 + \alpha_2 t) \quad \text{con } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}. \tag{1}$$
Com'è noto, possiamo inoltre trovare una soluzione dell'equazione $(*)$ tra le funzioni della forma $\tilde{y} = ae^{-t}$. Sostituendo questa espressione nella $(*)$ si ottiene che affinché $\tilde{y}$ sia una soluzione si deve porre $a = 3$, ovvero $\tilde{y} = 3e^{-t}$. Tenendo con to della (1) si ottiene quindi che la soluzione generale della $(*)$ è
$$y(t) = 3e^{-t} + e^{-2t}(\alpha_1 + \alpha_2 t) \quad \text{con } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$
Imponendo infine che questa funzione soddisfi $y(0) = 0$ e $\dot{y}(0) = 0$ si ottiene $\alpha_1 = \alpha_2 = -3$, e dunque la soluzione cercata è
$$y(t) = 3e^{-t} - e^{-2t}(3 + 3t)\ .$$

2. Si tratta di calcolare la probabilità condizionale $P(A|B)$ dove A è l'evento "l'ultimo lancio è croce" e B l'evento "esattamente 7 lanci hanno dato croce"; per farlo usiamo la formula
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}\ .$$
Osserviamo che l'evento B ha probabilità
$$P(B) = \binom{10}{7}\frac{1}{2^{10}} = \frac{15}{2^7}\ ,$$

mentre l'evento $A \cap B$ equivale a "nei primi 9 lanci sono uscite esattamente 6 croci e nell'ultimo è uscita croce", e dunque

$$P(A \cap B) = \binom{9}{6} \frac{1}{2^9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{21}{2^8} \ .$$

Pertanto

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{7}{10} \ .$$

3. Si tratta di calcolare la probabilità condizionale $P(A|B)$ dove A è l'evento "la scheda è difettosa" e B l'evento "la scheda ha funzionato correttamente per più di 5 anni". Sappiamo che $P(A) = 2/5$ (da cui segue che $P(A^c) = 3/5$), e che $P(B|A) = 3/10$ e $P(B|A^c) = 1$. Applicando la formula di Bayes otteniamo quindi

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B|A) \cdot P(A) + P(B|A^c) \cdot P(A^c)} = \frac{1}{6} \simeq 17\% \ .$$

Commenti

- Seconda parte, esercizio 2. Possiamo riformulare l'esercizio come segue: estraendo a caso dieci lettere da un sacchetto che contiene sette C e tre T, qual è la probabilità che l'ultima lettera estratta sia C? Osserviamo ora che questa probabilità è uguale a quella che la prima estratta sia C (fatto discusso a lungo in classe), che è chiaramente uguale a 7/10.