Versione: 14 novembre 2017

Università di Pisa

Corso di laurea in Ingegneria Gestionale

Testi e soluzioni degli scritti d'esame di

Analisi Matematica I

a.a. 2016-17

Giovanni Alberti

Giovanni Alberti
Dipartimento di Matematica
Università di Pisa
largo Pontecorvo 5
56127 Pisa
http://pagine.dm.unipi.it/alberti

Avvertenze. Gli scritti d'esame per il corso di Analisi Matematica I per Ingegneria Gestionale si compongono di due parti: una prima parte con otto domande o problemi molto semplici a cui si deve dare solo la risposta, ed una seconda con tre problemi a cui si deve invece dare una soluzione articolata in dettaglio. Il tempo a disposizione è di un'ora per la prima parte e di due ore per la seconda. Per la sufficienza sono solitamente richieste almeno cinque risposte corrette nella prima parte, ed un problema completamente risolto nella seconda.

La prima sezione di questa raccolta contiene i testi di tutti gli scritti, incluse le prove in itinere, mentre la seconda contiene una breve traccia delle soluzioni.

Programma del corso [versione: 18 dicembre 2016]. Sono riportati in corsivo gli argomenti non fondamentali.

1. Funzioni e grafici
   - 1.1 Funzioni: dominio, codominio, immagine, grafico; funzione inversa; funzioni pari e dispari, crescenti e decrescenti.
   - 1.2 Funzioni elementari: funzioni lineari, potenze, esponenziali, logaritmo (in base e), funzioni trigonometriche (seno, coseno, tangente) e funzioni trigonometriche inverse.
   - 1.3 Operazioni sui grafici di funzioni. Interpretazione di equazioni e disequazioni in termini di grafici di funzioni.
   - 1.4 Richiamo delle nozioni di base di trigonometria. Coordinate polari di un punto nel piano.
2. Limiti di funzioni e continuità
   - 2.1 Limiti di funzioni, proprietà elementari, forme indeterminate.
   - 2.2 Funzioni continue. Esistenza del minimo e del massimo di una funzione continua su un intervallo chiuso (teorema di Weierstrass), senza dimostrazione.
3. Derivate
   - 3.1 Derivata di una funzione: definizione e significato geometrico. Altre interpretazioni della derivata.
   - 3.2 Derivate delle funzioni elementari e regole per il calcolo delle derivate.
   - 3.3 Segno della derivata e monotonia. Segno della derivata seconda e convessità. Individuazione dei punti di massimo e di minimo (locali) di una funzione. Uso delle derivate per disegnare il grafico di una funzione.
   - 3.4 Teoremi di Rolle, Lagrange e Cauchy. Dimostrazione rigorosa (non grafica) della relazione tra monotonia e segno della derivata.
   - 3.5 Teorema di de l'Hôpital (dimostrazione parziale). Confronto tra i comportamenti asintotici di esponenziali, potenze e logaritmi all'infinito e in zero.
   - 3.6 Funzioni asintoticamente equivalenti (vicino ad un punto assegnato). Trascurabilità di una funzione rispetto ad un altra. Notazione di Landau ("o piccolo" e "o grande"). Parte principale di una funzione all'infinito e in zero.
   - 3.7 Sviluppo di Taylor (in zero) di una funzione, espressione del resto come "o grande" e nella forma di Lagrange (con dimostrazione). Sviluppi di Taylor di alcune funzioni fondamentali. Formula del binomio di Newton. Uso degli sviluppi di Taylor per il calcolo dei limiti e delle parti principali.
4. Elementi di analisi astratta
   - 4.1 *Numeri interi, razionali e reali (definiti come i numeri con espansioni decimali finite o infinite). Definizione di estremo superiore ed inferiore di un insieme qualunque di numeri reali. Completezza dei numeri reali.*
   - 4.2 Teorema di esistenza degli zeri (dimostrazione solo accennata). Algoritmo di bisezione per la determinazione dello zero di una funzione.
5. Integrali
   - 5.1 Definizione di integrale definito di una funzione in termini di area del sottografico. Approssimazione dell'integrale tramite somme finite. Interpretazioni fisica dell'integrale: distanza percorsa da un punto in movimento (a velocità non costante) e lavoro di una forza (non costante) su un punto in movimento.
   - 5.2 Primitiva di una funzione e teorema fondamentale del calcolo integrale (con dimostrazione).

5.3 Regole per il calcolo delle primitive (integrali indefiniti) e degli integrali definiti.
5.4 Calcolo delle aree delle figure piane. Calcolo dei volumi delle figure solide, e in particolare dei solidi di rotazione.
5.5 Legge oraria di un punto in movimento nel piano o nello spazio, velocità ed accelerazione come derivate, distanza percorsa come integrale del modulo della velocità.

6. Integrali impropri

6.1 Integrali impropri semplici: definizione e possibili comportamenti.
6.2 Criterio del confronto e del confronto asintotico (per funzioni positive); criterio della convergenza assoluta (per funzioni a segno variabile).
6.3 Integrali impropri non semplici.

7. Serie numeriche e serie di potenze

7.1 Successioni e limiti di successioni. Collegamento con i limiti di funzioni.
7.2 Serie numeriche: definizione e possibili comportamenti. Esempio fondamentale: la serie geometrica.
7.3 Criteri del confronto con l'integrale; serie armonica generalizzata. Criteri di convergenza per le serie: del confronto, del confronto asintotico, della convergenza assoluta, della radice e del rapporto.
7.4 Serie di potenze, e raggio di convergenza. Serie di Taylor. Calcolo del raggio di convergenza per le serie di Taylor di alcune funzioni elementari. Coincidenza della serie di Taylor con la funzione per alcune funzioni elementari. *Espressione dei numeri e e π come serie. Giustificazione della formula $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.*

8. Equazioni differenziali

8.1 Esempi di equazioni differenziali tratti dalla meccanica; significato delle condizioni iniziali.
8.2 Equazioni differenziali del primo ordine: definizione e fatti generali. Risoluzione delle equazioni lineari e delle equazioni a variabili separabili.
8.3 Equazioni differenziali del secondo ordine: definizione e fatti generali. Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti, omogenee e non omogenee. Risoluzione delle equazioni a coefficienti costanti omogenee, e ricerca della soluzione particolare per quelle non omogenee (per certe classi di termini noti). *Equazione del pendolo e dell'oscillatore armonico.*

T E S T I

PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. Trovare le soluzioni della disuguaglianza $\sin(x+\pi) \le -1/2$ comprese nell'intervallo $[-\pi, \pi]$.
2. Trovare le coordinate polari (r, α) con $\alpha \in (-\pi, \pi]$ dei seguenti punti del piano, dati in coordinate cartesiane: a) $(0, -2)$; b) $(-1, 1)$; c) $(-1, -\sqrt{3})$.
3. Calcolare le derivate di: a) $\arctan(e^x)$; b) $x^3(2 + \log x)$; c) $\log\big(x^4/2^{x^2}\big)$.
4. Dire se esistono i punti di massimo e minimo *assoluti* della funzione $f(x) := \exp\big(x^3 - 12x + 1\big)$ relativamente alla semiretta $x \le 1$, e in caso affermativo calcolarli.
5. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to\pi} \frac{e^x}{\tan x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} 2^x(1-x)^2$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1-x+x^2)}{x+x^3}$.
6. Trovare il polinomio di Taylor all'ordine 6 (in 0) della funzione $(1-x^3)\log(1+4x^3)$.
7. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $\dfrac{x^2+1}{(\log x + 1)^3} = o(x^a)$ per $x \to +\infty$.
8. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $|x^2 - 4| \le y \le \log(1+x)$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. Trovare le soluzioni della disuguaglianza $\sin(x+\pi) \le -1/\sqrt{2}$ comprese nell'intervallo $[-\pi, \pi]$.
2. Trovare le coordinate polari (r, α) con $\alpha \in (-\pi, \pi]$ dei seguenti punti del piano, dati in coordinate cartesiane: a) $(0, -3)$; b) $(-2, 2)$; c) $(-3, -\sqrt{3})$.
3. Calcolare le derivate di: a) $\arcsin(x^2)$; b) $x^2(3 + \log x)$; c) $\log\big(2^{x^2}/x^6\big)$.
4. Dire se esistono i punti di massimo e minimo *assoluti* della funzione $f(x) := \exp\big(x^3 - 12x + 1\big)$ relativamente alla semiretta $x \ge -1$, e in caso affermativo calcolarli.
5. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{1+x^2}{x^2-4}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x(\log x + e^x)$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^3-x^2}{x-\log(1+x)}$.
6. Trovare il polinomio di Taylor all'ordine 6 (in 0) della funzione $(3+x^2)\sin(2x^2)$.
7. Dire per quali $a > 0$ si ha che $\dfrac{3^x}{x^2+1} = o(a^x)$ per $x \to +\infty$.
8. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $y \le |x^2 - 4|$ e $y \le \log(1+x)$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. Trovare le soluzioni della disuguaglianza $\cos(x+\pi) \le -1/2$ comprese nell'intervallo $[-\pi, \pi]$.
2. Trovare le coordinate polari (r, α) con $\alpha \in (-\pi, \pi]$ dei seguenti punti del piano, dati in coordinate cartesiane: a) $(-1, -1)$; b) $(0, -4)$; c) $(-\sqrt{3}, 3)$.
3. Calcolare le derivate di: a) $\sqrt{1+x^2}$; b) $x\,\log(\log x)$; c) $\log\big(3^{x^2}/x^4\big)$.
4. Dire se esistono i punti di massimo e minimo *assoluti* della funzione $f(x) := \exp\big(1 + 3x - x^3\big)$ relativamente alla semiretta $x \le 1$, e in caso affermativo calcolarli.

5. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1-x^2}{x^2-4}$; b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}(\log x+1)$; c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{x^2+x}$.
6. Trovare il polinomio di Taylor all'ordine 6 (in 0) della funzione $(3-x^4)\sin(2x^2)$.
7. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $\dfrac{2}{1+\log x} = o(x^a)$ per $x\to+\infty$.
8. Risolvere graficamente la disequazione $|x^2-4| \le \log(1+x)$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. Trovare le soluzioni della disuguaglianza $\sin(x+\pi) \ge 1/2$ comprese nell'intervallo $[0, 2\pi]$.
2. Trovare le coordinate polari (r, α) con $\alpha \in (-\pi, \pi]$ dei seguenti punti del piano, dati in coordinate cartesiane: a) $(-2, -2)$; b) $(0, -3)$; c) $(-\sqrt{3}, 1)$.
3. Calcolare le derivate di: a) $\arctan(x^2)$; b) $x^3(3+\log x)$; c) $\log\left(x^4/3^{x^2}\right)$.
4. Dire se esistono i punti di massimo e minimo *assoluti* della funzione $f(x) := \exp\left(1+3x-x^3\right)$ relativamente alla semiretta $x \ge -1$, e in caso affermativo calcolarli.
5. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1+x^2}{x^2-4}$; b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\log(\log x)}{\log x}$; c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{x^3+x^2}$.
6. Trovare il polinomio di Taylor all'ordine 6 (in 0) della funzione $(1+x^3)(\exp(2x^3)-1)$.
7. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $x\sin\left(\dfrac{1}{x^2+x^3}\right) = o(x^a)$ per $x\to+\infty$.
8. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $(|x|-1)^2 \le y \le \arctan x$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 5.

1. Trovare le soluzioni della disuguaglianza $\sin(x+\pi) \ge 1/\sqrt{2}$ comprese nell'intervallo $[0, 2\pi]$.
2. Trovare le coordinate polari (r, α) con $\alpha \in (-\pi, \pi]$ dei seguenti punti del piano, dati in coordinate cartesiane: a) $(-\sqrt{3}, -1)$; b) $(-3, 3)$; c) $(0, -4)$.
3. Calcolare le derivate di: a) $\arcsin(e^x)$; b) $x\,\log(\log x)$; c) $\log\left(x^3/4^{x^2}\right)$.
4. Dire se esistono i punti di massimo e minimo *assoluti* della funzione $f(x) := \exp\left(2-2x-x^3\right)$ relativamente alla semiretta $x \le 2$, e in caso affermativo calcolarli.
5. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1+x^2}{x^2-4}$; b) $\lim\limits_{x\to +\infty} 2^x(x-1)^{-2}$; c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3-x^2}{e^{x^2}-1}$.
6. Trovare il polinomio di Taylor all'ordine 6 (in 0) della funzione $(2x^2+x^4)\exp(x^2)$.
7. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $\dfrac{2^x}{x^4\log x} = o(x^a)$ per $x\to+\infty$.
8. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $y \ge (|x|-1)^2$ e $y \ge \arctan x$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 6.

1. Trovare le soluzioni della disuguaglianza $\cos(x+\pi) \leq -1/\sqrt{2}$ comprese nell'intervallo $[-\pi, \pi]$.

2. Trovare le coordinate polari (r, α) con $\alpha \in (-\pi, \pi]$ dei seguenti punti del piano, dati in coordinate cartesiane: a) $(-\sqrt{3}, -3)$; b) $(-1, 1)$; c) $(0, -2)$.

3. Calcolare le derivate di: a) $\sqrt{1+x^4}$; b) $x^2(2+\log x)$; c) $\log\big(x^2/3^{x^2}\big)$.

4. Dire se esistono i punti di massimo e minimo *assoluti* della funzione $f(x) := \exp\big(2-2x-x^3\big)$ relativamente alla semiretta $x \geq -2$, e in caso affermativo calcolarli.

5. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to\pi^-} \frac{e^x}{\tan x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{\log(\log x)}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^3-x^4}{\sin x - x}$.

6. Trovare il polinomio di Taylor all'ordine 6 (in 0) della funzione $(2x^2+x^4)\log(1+x^2)$.

7. Dire per quali $a>0$ si ha che $4^x \sin(e^{-x}) = o(a^x)$ per $x \to +\infty$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $(|x|-1)^2 \leq \arctan x$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 1.

1. a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione
$$f(x) := 1 - \sqrt[4]{\cos(4x^2)}\,.$$
b) Per ogni $a \in \mathbb{R}$, trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) + ax^4$.

2. a) Dire se la disequazione $(x^3+4)^4 \leq 32\,(x^4+2)^3$ vale per ogni $x \geq 0$ oppure no.
b) Trovare la più piccola costante M tale che $(x^3+4)^4 \leq M\,(x^4+2)^3$ per ogni $x \geq 0$.
c) Trovare la più grande costante m tale che $(x^3+4)^4 \geq m(x^4+2)^3$ per ogni $x \geq 0$.

3. Una ditta deve pianificare l'acquisto di una certa quantità di un materiale liquido necessario per una certa produzione; il totale del materiale da acquistare è di 100 unità, e si tratta di capire in quante tranche conviene suddividere l'acquisto, tenendo conto dei seguenti fatti:
   - al costo unitario del materiale 3 va aggiunto un costo fisso per ogni ordine, pari a 20;
   - in attesa di essere lavorato, il materiale acquistato viene conservato in un unico serbatoio che deve essere costruito per l'occasione, e il costo del contenitore dipende essenzialmente dalla sua capacità c (misurata in unità), e per la precisione è pari a $\frac{1}{2}c^2$.

   Determinare il numero ottimale N di tranche in cui suddividere l'acquisto.

SECONDA PARTE, GRUPPO 2.

1. a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione
$$f(x) := 1 - \sqrt{2-\exp(x^4)}\,.$$
b) Per ogni $a \in \mathbb{R}$, trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) + ax^4$.

2. a) Dire se la disequazione $(x^4+4)^5 \leq 66\,(x^5+2)^4$ vale per ogni $x \geq 0$ oppure no.
b) Trovare la più piccola costante M tale che $(x^4+4)^5 \leq M\,(x^5+2)^4$ per ogni $x \geq 0$.
c) Trovare la più grande costante m tale che $(x^4+4)^5 \geq m(x^5+2)^4$ per ogni $x \geq 0$.

3. Uguale al gruppo 1.

SECONDA PARTE, GRUPPO 3.

1. a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione
$$f(x) := 1 - \sqrt{\cos(2x^2)}\,.$$
b) Per ogni $a \in \mathbb{R}$, trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) + ax^4$.

2. a) Dire se la disequazione $(x^3+2)^4 \le \frac{9}{8}(x^4+4)^3$ vale per ogni $x \ge 0$ oppure no.
b) Trovare la più piccola costante M tale che $(x^3+2)^4 \le M\,(x^4+4)^3$ per ogni $x \ge 0$.
c) Trovare la più grande costante m tale che $(x^3+2)^4 \ge m(x^4+4)^3$ per ogni $x \ge 0$.

3. Uguale al gruppo 1.

SECONDA PARTE, GRUPPO 4.

1. a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione
$$f(x) := 1 - \sqrt[4]{2 - \exp(2x^4)}\,.$$
b) Per ogni $a \in \mathbb{R}$, trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) + ax^4$.

2. a) Dire se la disequazione $(x^4+2)^5 \le \frac{5}{4}(x^5+4)^4$ vale per ogni $x \ge 0$ oppure no.
b) Trovare la più piccola costante M tale che $(x^4+2)^5 \le M\,(x^5+4)^4$ per ogni $x \ge 0$.
c) Trovare la più grande costante m tale che $(x^4+2)^5 \ge m(x^5+4)^4$ per ogni $x \ge 0$.

3. Uguale al gruppo 1.

PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $\arcsin(e^{2x} - 2)$.
2. Determinare lo sviluppo di Taylor di ordine 4 (in 0) della funzione $f(x) := (x - x^3)\,\sin(6x)$.
3. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $x(t) := (1 + at)^3$ risolve l'equazione differenziale $\ddot{x} = 24\,x^{1/3}$.
4. Un punto P si muove nel piano con legge oraria
$$P(t) := \big(2\cos(e^{2t});\, 2\sin(e^{2t})\big)\,.$$
Calcolare la velocità di P e la distanza percorsa tra l'istante $t = 0$ e l'istante $t = 1$.
5. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n x^n}{1 + 4^n}$.
6. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2 + \sin x}{x^a + x^3}\,dx$ converge ad un numero finito.
7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = 4te^{2t}(1 + x^2)$ che soddisfa $x(1) = 0$.
8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $2x^4 - 1 \le y \le -\arctan(x - 2)$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $\arctan\left(\dfrac{1}{e^{2x} - 2}\right)$.
2. Determinare lo sviluppo di Taylor di ordine 4 (in 0) della funzione $f(x) := (1 - x^2)\,\log(1 + 4x^2)$.
3. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $x(t) := (1 + at)^4$ risolve l'equazione differenziale $\ddot{x} = 24\,x^{1/2}$.
4. Un punto P si muove nel piano con legge oraria
$$P(t) := \big(\cos(e^{-t});\, -\sin(e^{-t})\big)\,.$$
Calcolare la velocità di P e la distanza percorsa tra l'istante $t = 0$ e l'istante $t = 1$.
5. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n x^n}{n!}$.
6. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^a + 1}{2^x + 1}\,dx$ converge ad un numero finito.
7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = 4te^{t^2}(1 + x^2)$ che soddisfa $x(2) = 0$.
8. Risolvere graficamente la disequazione $2x^4 - 1 \le \big|\arctan(x - 2)\big|$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $\arccos(e^{4x} - 2)$.
2. Determinare lo sviluppo di Taylor di ordine 4 (in 0) della funzione $f(x) := (1 - x^4)\,\cos(2x^2)$.
3. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $x(t) := (1 + at)^{-2}$ risolve l'equazione differenziale $\ddot{x} = 6x^2$.

4. Un punto P si muove nel piano con legge oraria
$$P(t) := \big(2\sin(e^{3t});\, 2\cos(e^{3t})\big)\,.$$
Calcolare la velocità di P e la distanza percorsa tra l'istante $t = 0$ e l'istante $t = 1$.

5. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n + 4^n}$.

6. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{a^x + 1}{2^x + x}\, dx$ converge ad un numero finito.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = 4te^{2t}(2 + x)$ che soddisfa $x(1) = -1$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $\displaystyle\frac{1}{(x-1)^2} \le y \le \arctan\big(|x| - 1\big)$.

Prima parte, gruppo 4.

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $\arcsin(2 - e^{4x})$.

2. Determinare lo sviluppo di Taylor di ordine 4 (in 0) della funzione $f(x) := (x + x^3)\,\sin(6x)$.

3. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $x(t) := (1 + at)^3$ risolve l'equazione differenziale $\ddot{x} = 3x^{1/3}$.

4. Un punto P si muove nel piano con legge oraria
$$P(t) := \big(\cos(e^{2t});\, -\sin(e^{2t})\big)\,.$$
Calcolare la velocità di P e la distanza percorsa tra l'istante $t = 0$ e l'istante $t = 1$.

5. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n x^n}{1 + 2^n}$.

6. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^3 + \sin x}{x^a + x^4}\, dx$ converge ad un numero finito.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = 4te^{t^2}(2 + x)$ che soddisfa $x(2) = -1$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $2x^4 - 1 \ge -\arctan(x - 2)$.

Prima parte, gruppo 5.

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $\arctan\Big(\dfrac{1}{e^{2x} - 3}\Big)$.

2. Determinare lo sviluppo di Taylor di ordine 4 (in 0) della funzione $f(x) := (1 + x^2)\,\log(1 + 4x^2)$.

3. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $x(t) := (1 + at)^4$ risolve l'equazione differenziale $\ddot{x} = 3x^{1/2}$.

4. Un punto P si muove nel piano con legge oraria
$$P(t) := \big(2\cos(e^{-t});\, 2\sin(e^{-t})\big)\,.$$
Calcolare la velocità di P e la distanza percorsa tra l'istante $t = 0$ e l'istante $t = 1$.

5. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!\, x^n}{2^n}$.

6. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^4 + x^3}{x^a + x^{2a}}\,dx$ converge ad un numero finito.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = -4te^{2t}(1+x)^2$ che soddisfa $x(0) = -2$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $y \le 2x^4 - 1$ e $y \le \big|\arctan(x-2)\big|$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 6.

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $\arccos(2 - e^{2x})$.

2. Determinare lo sviluppo di Taylor di ordine 4 (in 0) della funzione $f(x) := (1 + x^4)\cos(2x^2)$.

3. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $x(t) := (1 + at)^{-2}$ risolve l'equazione differenziale $\ddot{x} = 12\,x^2$.

4. Un punto P si muove nel piano con legge oraria
$$P(t) := \big(\sin(e^{3t});\ -\cos(e^{3t})\big)\,.$$
Calcolare la velocità di P e la distanza percorsa tra l'istante $t = 0$ e l'istante $t = 1$.

5. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(3^n + n^3)x^n$.

6. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x - \sin x)^a}$ converge ad un numero finito.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = -4te^{t^2}(1+x)^2$ che soddisfa $x(0) = 0$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $\dfrac{1}{(x-1)^2} \le \arctan\big(|x| - 1\big)$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 1.

Scritto del primo appello: esercizi 1, 2 e 3; secondo compitino: esercizi 3, 4 e 5.

1. Consideriamo la funzione
$$f(x) := \big(\cos(2x^2)\big)^{1/x^2} - 1\,.$$
a) Trovare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$.
b) Per ogni $a \in \mathbb{R}$, trovare la parte principale di $f(x) - ax^2$ per $x \to 0$.

2. a) Dire se la disequazione $\exp(x^2) \ge x^{16/3}$ vale per ogni $x > 0$ oppure no.
b) Dire per quali $a > 0$ si ha che $\exp(x^2) \ge x^a$ per ogni $x > 0$.

3. Dato $a \in \mathbb{R}$, consideriamo l'equazione differenziale
$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + 4x = 8t + 4e^{2t}\,. \qquad (*)$$
a) Trovare la soluzione generale di (*) per $a > 0$ e $a \ne 2$.
b) Trovare la soluzione generale di (*) per $a = 2$.
c) Per ogni $a > 2$, trovare *una* soluzione di (*) che tende a $+\infty$ per $t \to +\infty$.

4. Dato $a > 0$, poniamo
$$f(x) := \frac{1}{(\exp(x^a) - 1)^{a+4}}\,.$$
a) Discutere il comportamento dell'integrale improprio $\int_0^1 f(x)\,dx$.

b) Discutere il comportamento dell'integrale improprio $\int_1^\infty f(x)\,dx$.

5. Sia A l'insieme dei punti (x,y) tali che $0 \le y \le e^{-|x|}$. e sia V il solido ottenuto facendo ruotare A attorno alla retta di equazione $y = 2$.

   a) Tracciare un disegno approssimativo di A, di V, e di una generica sezione di V ortogonale all'asse di rotazione, e calcolare l'area di quest'ultima.

   b) Calcolare il volume di V.

SECONDA PARTE, GRUPPO 2.

Scritto del primo appello: esercizi 1, 2 e 3; secondo compitino: esercizi 3, 4 e 5.

1. Consideriamo la funzione
$$f(x) := \big(\cos(2x^3)\big)^{1/x^2} - 1\,.$$
   a) Trovare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$.

   b) Per ogni $a \in \mathbb{R}$, trovare la parte principale di $f(x) - ax^4$ per $x \to 0$.

2. a) Dire se la disequazione $\exp(x^4) \ge x^{21/2}$ vale per ogni $x > 0$ oppure no.

   b) Dire per quali $a > 0$ si ha che $\exp(x^4) \ge x^a$ per ogni $x > 0$.

3. Dato $a \in \mathbb{R}$, consideriamo l'equazione differenziale
$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + 9x = 9t + 6e^{3t}\,. \qquad (*)$$
   a) Trovare la soluzione generale di (*) per $a > 0$ e $a \ne 3$.

   b) Trovare la soluzione generale di (*) per $a = 3$.

   c) Per ogni $a > 3$, trovare *una* soluzione di (*) che tende a $+\infty$ per $t \to +\infty$.

4. Dato $a > 0$, poniamo
$$f(x) := \frac{1}{(\exp(x^a) - 1)^{a+4}}\,.$$
   a) Discutere il comportamento dell'integrale improprio $\int_0^1 f(x)\,dx$.

   b) Discutere il comportamento dell'integrale improprio $\int_1^\infty f(x)\,dx$.

5. Sia A l'insieme dei punti (x,y) tali che $0 \le y \le e^{-|x|}$. e sia V il solido ottenuto facendo ruotare A attorno alla retta di equazione $y = 3$.

   a) Tracciare un disegno approssimativo di A, di V, e di una generica sezione di V ortogonale all'asse di rotazione, e calcolare l'area di quest'ultima.

   b) Calcolare il volume di V.

SECONDA PARTE, GRUPPO 3.

Scritto del primo appello: esercizi 1, 2 e 3; secondo compitino: esercizi 3, 4 e 5.

1. Consideriamo la funzione
$$f(x) := \big(\cos(2x^2)\big)^{1/x^2} - 1\,.$$
   a) Trovare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$.

   b) Per ogni $a \in \mathbb{R}$, trovare la parte principale di $f(x) - ax^2$ per $x \to 0$.

2. a) Dire se la disequazione $\exp(x^2) \ge x^{11/2}$ vale per ogni $x > 0$ oppure no.

   b) Dire per quali $a > 0$ si ha che $\exp(x^2) \ge x^a$ per ogni $x > 0$.

3. Dato $a \in \mathbb{R}$, consideriamo l'equazione differenziale
$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + 4x = 4t - 4e^{2t}\,. \tag{*}$$
a) Trovare la soluzione generale di (*) per $a > 0$ e $a \neq 2$.
b) Trovare la soluzione generale di (*) per $a = 2$.
c) Per ogni $a > 2$, trovare *una* soluzione di (*) che tende a $-\infty$ per $t \to +\infty$.

4. Dato $a > 0$, poniamo
$$f(x) := \frac{1}{(\exp(x^a) - 1)^{a+2}}\,.$$
a) Discutere il comportamento dell'integrale improprio $\int_0^1 f(x)\,dx$.
b) Discutere il comportamento dell'integrale improprio $\int_1^\infty f(x)\,dx$.

5. Sia A l'insieme dei punti (x, y) tali che $0 \leq y \leq e^{-|x|}$. e sia V il solido ottenuto facendo ruotare A attorno alla retta di equazione $y = 2$.
a) Tracciare un disegno approssimativo di A, di V, e di una generica sezione di V ortogonale all'asse di rotazione, e calcolare l'area di quest'ultima.
b) Calcolare il volume di V.

SECONDA PARTE, GRUPPO 4.

Scritto del primo appello: esercizi 1, 2 e 3; secondo compitino: esercizi 3, 4 e 5.

1. Consideriamo la funzione
$$f(x) := \big(\cos(2x^3)\big)^{1/x^2} - 1\,.$$
a) Trovare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$.
b) Per ogni $a \in \mathbb{R}$, trovare la parte principale di $f(x) - ax^4$ per $x \to 0$.

2. a) Dire se la disequazione $\exp(x^4) \geq x^{11}$ vale per ogni $x > 0$ oppure no.
b) Dire per quali $a > 0$ si ha che $\exp(x^4) \geq x^a$ per ogni $x > 0$.

3. Dato $a \in \mathbb{R}$, consideriamo l'equazione differenziale
$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + 9x = 27\,t - 6e^{3t}\,. \tag{*}$$
a) Trovare la soluzione generale di (*) per $a > 0$ e $a \neq 3$.
b) Trovare la soluzione generale di (*) per $a = 3$.
c) Per ogni $a > 3$, trovare *una* soluzione di (*) che tende a $-\infty$ per $t \to +\infty$.

4. Dato $a > 0$, poniamo
$$f(x) := \frac{1}{(\exp(x^a) - 1)^{a+2}}\,.$$
a) Discutere il comportamento dell'integrale improprio $\int_0^1 f(x)\,dx$.
b) Discutere il comportamento dell'integrale improprio $\int_1^\infty f(x)\,dx$.

5. Sia A l'insieme dei punti (x, y) tali che $0 \leq y \leq e^{-|x|}$. e sia V il solido ottenuto facendo ruotare A attorno alla retta di equazione $y = 3$.
a) Tracciare un disegno approssimativo di A, di V, e di una generica sezione di V ortogonale all'asse di rotazione, e calcolare l'area di quest'ultima.
b) Calcolare il volume di V.

Prima parte, gruppo 1.

1. Trovare le $x \in [0, \pi]$ che risolvono la disequazione $\sin(2x) \leq -\dfrac{1}{2}$.

2. Dire se esistono i punti di massimo e di minimo *assoluti* della funzione $f(x) := x^3 e^{2x}$ relativamente alla semiretta $x \leq -1$, e in caso affermativo calcolarli.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^4+x^3}-1}{x^4}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{\log(\log x)}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \cos\big(2^{x^2-x^3}\big)$.

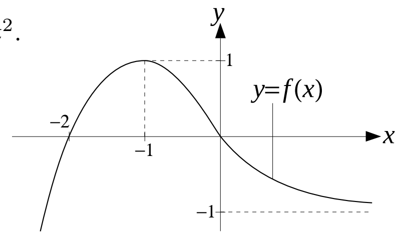
4. Calcolare l'integrale improprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{x^7}{(1+4x^8)^4}\,dx$.

5. Dire per quali $a > 0$ vale che $x^2 \log x = O(x^a)$ per $x \to +\infty$.

6. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n+1}{n!} x^n$.

7. Trovare una soluzione *particolare* dell'equazione $\ddot{x} + x = 2t^2$.

8. Sia f la funzione il cui grafico è riportato nella figura accanto. Disegnare il grafico della funzione $g(x) := \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2}$ e risolvere graficamente la disequazione $x^2 - 1 \leq g(x)$.



Prima parte, gruppo 2.

1. Trovare le $x \in [0, \pi]$ che risolvono la disequazione $\cos(2x) \leq -\dfrac{1}{2}$.

2. Dire se esistono i punti di massimo e di minimo *assoluti* della funzione $f(x) := x^3 e^{-x}$ relativamente alla semiretta $x \geq 4$, e in caso affermativo calcolarli.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^4+x^3}-1}{x^3}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log^2 x}{x+\log x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \cos\big(2^{x^3-x^2}\big)$.

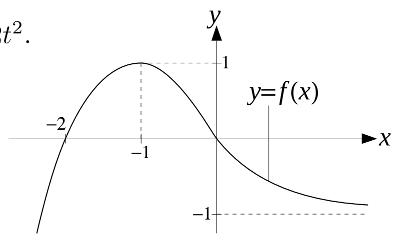
4. Calcolare l'integrale improprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{x^3}{(1+4x^4)^3}\,dx$.

5. Dire per quali $a > 0$ vale che $x^2 \log x = o(x^a)$ per $x \to 0$.

6. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{2^n+1} x^n$.

7. Trovare una soluzione *particolare* dell'equazione $\ddot{x} + 2x = 2t^2$.

8. Sia f la funzione il cui grafico è riportato nella figura accanto. Disegnare il grafico della funzione $g(x) := 1 - f(x)$ e l'insieme A dei punti (x, y) tali che $g(x) \leq y \leq f(x)$.



Prima parte, gruppo 3.

1. Trovare le $x \in [0, \pi]$ che risolvono la disequazione $\cos(2x) \leq \dfrac{1}{2}$.

2. Dire se esistono i punti di massimo e di minimo *assoluti* della funzione $f(x) := x^3 e^{2x}$ relativamente alla semiretta $x \leq 0$, e in caso affermativo calcolarli.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x^2)-1}{x^3+x^4}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x-\log x}{\sqrt{x}}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \cos\Big(\frac{x}{\log x}\Big)$.

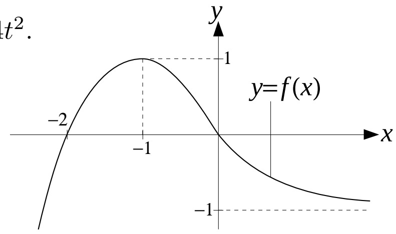
4. Calcolare l'integrale improprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{x^5}{(1+4x^6)^2}\,dx$.

5. Dire per quali $a>0$ vale che $x\,3^x = O(a^x)$ per $x\to+\infty$.

6. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$.

7. Trovare una soluzione *particolare* dell'equazione $\ddot{x} - 2x = 4t^2$.

8. Sia f la funzione il cui grafico è riportato nella figura accanto. Disegnare il grafico della funzione $g(x) := f(2x)$ e l'insieme A dei punti (x,y) tali che $f(x) \leq y \leq g(x)$.



PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. Trovare le $x \in [0,\pi]$ che risolvono la disequazione $\sin(2x) \leq -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Dire se esistono i punti di massimo e di minimo *assoluti* della funzione $f(x) := x^3 e^{-x}$ relativamente alla semiretta $x \geq 2$, e in caso affermativo calcolarli.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x^2)-1}{x^5+x^4}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x+\log x}{x^2}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \cos\Big(\frac{\log x}{2^x}\Big)$.

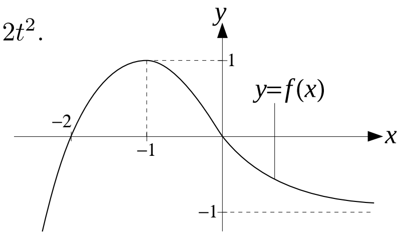
4. Calcolare l'integrale improprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{x^7}{(1+4x^8)^5}\,dx$.

5. Dire per quali $a>0$ vale che $x^3 \log x = O(x^a)$ per $x\to+\infty$.

6. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n+n^4}{4^n+n^2}x^n$.

7. Trovare una soluzione *particolare* dell'equazione $\ddot{x} + x = -2t^2$.

8. Sia f la funzione il cui grafico è riportato nella figura accanto. Disegnare il grafico della funzione $g(x) := \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}$ e l'insieme A dei punti (x,y) tali che $f(x) \leq y \leq g(x)$.



PRIMA PARTE, GRUPPO 5.

1. Trovare le $x \in [0,\pi]$ che risolvono la disequazione $\cos(2x) \leq -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Dire se esistono i punti di massimo e di minimo *assoluti* della funzione $f(x) := x^3 e^{2x}$ relativamente alla semiretta $x \leq -2$, e in caso affermativo calcolarli.

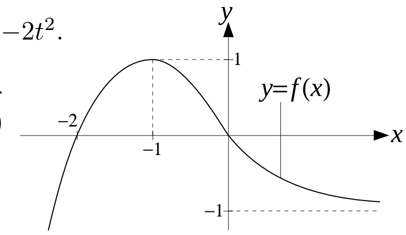
3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{e^{x^4+x^3}-1}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} (x^2+x^3)\,4^x$; c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \cos\big(2^{x^2+x^3}\big)$.

4. Calcolare l'integrale improprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{x^3}{(1+4x^4)^4}\,dx$.

5. Dire per quali $a>0$ vale che $x^3 \log x = o(x^a)$ per $x \to 0$.

6. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n+n}{4^n+5^n} x^n$.

7. Trovare una soluzione *particolare* dell'equazione $\ddot{x} + 2x = -2t^2$.



8. Sia f la funzione il cui grafico è riportato nella figura accanto. Disegnare il grafico della funzione $g(x) := 1 - f(x)$ e risolvere graficamente la disequazione $g(x) \le f(x)$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 6.

1. Trovare le $x \in [0,\pi]$ che risolvono la disequazione $\cos(2x) \le \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Dire se esistono i punti di massimo e di minimo *assoluti* della funzione $f(x) := x^3 e^{-x}$ relativamente alla semiretta $x \ge 0$, e in caso affermativo calcolarli.

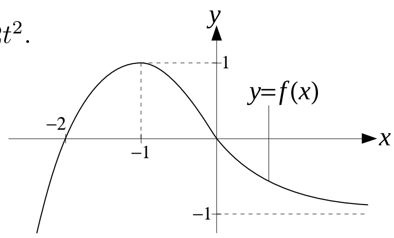
3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^3+x^4}{\cos(2x^2)-1}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} (x^4+x^3)\,4^x$; c) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \cos\big(2^{x^4+x^3}\big)$.

4. Calcolare l'integrale improprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{x^5}{(1+4x^6)^3}\,dx$.

5. Dire per quali $a>0$ vale che $x\,2^x = O(a^x)$ per $x \to +\infty$.

6. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n+5^n}{2^n+n} x^n$.

7. Trovare una soluzione *particolare* dell'equazione $\ddot{x} - 2x = 2t^2$.



8. Sia f la funzione il cui grafico è riportato nella figura accanto. Disegnare il grafico della funzione $g(x) := f(2x)$ e risolvere graficamente la disequazione $f(x) \le g(x)$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 1.

1. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ consideriamo l'equazione
$$e^x = a(x^2-3)\,, \tag{*}$$
e indichiamo con $x(a)$ la più piccola delle soluzioni di questa equazione (se ne esistono).
a) Per ogni $a>0$, determinare il numero di soluzioni di (*).
b) Determinare il limite L di $x(a)$ per $a \to +\infty$.
c) Determinare la parte principale di $x(a) - L$ per $a \to +\infty$.

2. Sia A l'insieme dei punti (x,y) del piano cartesiano per cui vale
$$|y+1| \le \frac{1}{(|x|+2)^4}\,.$$
a) Disegnare A e calcolarne l'area.
b) Trovare una retta *verticale* che divide A in due parti, una con area doppia dell'altra.

3. a) Per ogni $a > 0$ discutere il comportamento della serie
$$S := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^{(n^2)}}{n^2+1} \,.$$
b) Calcolare il valore di S per $a = 1/2$ con errore inferiore a 10^{-3}.

SECONDA PARTE, GRUPPO 2.

1. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ consideriamo l'equazione
$$e^x = a(x^2 - 8) \,, \tag{*}$$
e indichiamo con $x(a)$ la più piccola delle soluzioni di questa equazione (se ne esistono).
a) Per ogni $a > 0$, determinare il numero di soluzioni di (*).
b) Determinare il limite L di $x(a)$ per $a \to +\infty$.
c) Determinare la parte principale di $x(a) - L$ per $a \to +\infty$.

2. Sia A l'insieme dei punti (x, y) del piano cartesiano per cui vale
$$|y + 1| \le \frac{1}{(|x| + 4)^3} \,.$$
a) Disegnare A e calcolarne l'area.
b) Trovare una retta *verticale* che divide A in due parti, una con area doppia dell'altra.

3. a) Per ogni $a > 0$ discutere il comportamento della serie
$$S := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^{(n^2)}}{n+2} \,.$$
b) Calcolare il valore di S per $a = 1/2$ con errore inferiore a 10^{-3}.

SECONDA PARTE, GRUPPO 3.

1. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ consideriamo l'equazione
$$e^x = a(x^2 - 3) \,, \tag{*}$$
e indichiamo con $x(a)$ la più grande delle soluzioni di questa equazione (se ne esistono).
a) Per ogni $a < 0$, determinare il numero di soluzioni di (*).
b) Determinare il limite L di $x(a)$ per $a \to -\infty$.
c) Determinare la parte principale di $x(a) - L$ per $a \to -\infty$.

2. Sia A l'insieme dei punti (x, y) del piano cartesiano per cui vale
$$|y - 1| \le \frac{1}{(|x| + 2)^4} \,.$$
a) Disegnare A e calcolarne l'area.
b) Trovare una retta *verticale* che divide A in due parti, una con area doppia dell'altra.

3. a) Per ogni $a > 0$ discutere il comportamento della serie
$$S := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^{(n^2)}}{n^2+1} \,.$$
b) Calcolare il valore di S per $a = 1/2$ con errore inferiore a 10^{-3}.

Seconda parte, gruppo 4.

1. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ consideriamo l'equazione
$$e^x = a(x^2 - 8)\,, \tag{*}$$
e indichiamo con $x(a)$ la più grande delle soluzioni di questa equazione (se ne esistono).
a) Per ogni $a < 0$, determinare il numero di soluzioni di (*).
b) Determinare il limite L di $x(a)$ per $a \to -\infty$.
c) Determinare la parte principale di $x(a) - L$ per $a \to -\infty$.

2. Sia A l'insieme dei punti (x, y) del piano cartesiano per cui vale
$$|y - 1| \leq \frac{1}{(|x| + 4)^3}\,.$$
a) Disegnare A e calcolarne l'area.
b) Trovare una retta *verticale* che divide A in due parti, una con area doppia dell'altra.

3. a) Per ogni $a > 0$ discutere il comportamento della serie
$$S := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^{(n^2)}}{n+2}\,.$$
b) Calcolare il valore di S per $a = 1/2$ con errore inferiore a 10^{-3}.

Prima parte, gruppo 1.

1. Derivare le seguenti funzioni: a) $\arctan(x^2 - 1)$; b) $\log\big(x^4/e^x\big)$.

2. Disporre le seguenti funzioni nel giusto ordine rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{1 + \log x}_{a} \ll \underbrace{\frac{x+1}{e^x}}_{b} \ll \underbrace{\frac{x^2+1}{2e^x}}_{c} \ll \underbrace{\frac{x}{\log x}}_{d}.$$

3. Trovare un numero α con $-\pi \le \alpha \le \pi$ per cui vale la seguente identità:
$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\,\sin(x + \alpha) \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

4. Calcolare $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x^3}{\sqrt[4]{x^4+1}}\,dx$.

5. Scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine 8 della funzione $f(x) := (1 + 2x^4)\log(1 + 2x^4)$.

6. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^4 \sin(1/n^a)}{n^{2a} + n^a}$ converge ad un numero finito.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\ddot{x} + 4x = 8$ che soddisfa $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.

8. Calcolare il periodo della funzione $f(x) := 2 + 2\sin(2\pi x - \pi)$ e disegnarne il grafico.

Prima parte, gruppo 2.

1. Derivare le seguenti funzioni: a) $\arcsin(x^6 - 1)$; b) $\log\big(x^3/2^x\big)$.

2. Disporre le seguenti funzioni nel giusto ordine rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{e^x + x}_{a} \ll \underbrace{\frac{2}{x\log x}}_{b} \ll \underbrace{(2^x - 1)^2}_{c} \ll \underbrace{\frac{1}{\log x} + \frac{1}{x^2}}_{d}.$$

3. Trovare un numero α con $-\pi \le \alpha \le \pi$ per cui vale la seguente identità:
$$\sin x - \cos x = \sqrt{2}\,\sin(x + \alpha) \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

4. Calcolare $\displaystyle\int \frac{2x^5}{\sqrt[3]{x^6+1}}\,dx$.

5. Scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine 6 della funzione $f(x) := (3 + x^4)\sin(2x^2)$.

6. Dire per quali $a > 1$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n \log(1 + 1/a^n)}{a^n + n^2}$ converge ad un numero finito.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\ddot{x} + 4x = 4$ che soddisfa $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.

8. Calcolare il periodo della funzione $f(x) := -1 + 2\sin(\pi x + \pi)$ e disegnarne il grafico.

Prima parte, gruppo 3.

1. Derivare le seguenti funzioni: a) $\arctan(x^4 + 1)$; b) $\log\big(x^2/3^x\big)$.

2. Disporre le seguenti funzioni nel giusto ordine rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\frac{1}{e^x + x}}_{a} \ll \underbrace{\frac{2x^2}{\log x}}_{b} \ll \underbrace{x^2 \log x}_{c} \ll \underbrace{\frac{1}{(2^x - x)^2}}_{d} .$$

3. Trovare un numero α con $-\pi \le \alpha \le \pi$ per cui vale la seguente identità:
$$\cos x - \sin x = \sqrt{2}\, \sin(x + \alpha) \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

4. Calcolare $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x^5}{x^6 + 1}\, dx$.

5. Scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine 8 della funzione $f(x) := (1 - x^4)\log(1 + 2x^4)$.

6. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^4 \sin(1/n^a)}{2^n + 1}$ converge ad un numero finito.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\ddot{x} + 9x = 9$ che soddisfa $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.

8. Calcolare il periodo della funzione $f(x) := -2 + 2\sin(2x + \pi)$ e disegnarne il grafico.

Prima parte, gruppo 4.

1. Derivare le seguenti funzioni: a) $\arcsin(x^4 - 1)$; b) $\log\left(e^x/x^4\right)$.

2. Disporre le seguenti funzioni nel giusto ordine rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\frac{2e^x}{x^2 + 1}}_{a} \ll \underbrace{\frac{\log x}{1 + x}}_{b} \ll \underbrace{\frac{1}{\log^2 x} + \frac{1}{x^2}}_{c} \ll \underbrace{\frac{e^x}{x + 1}}_{d} .$$

3. Trovare un numero α con $-\pi \le \alpha \le \pi$ per cui vale la seguente identità:
$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\, \cos(x + \alpha) \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

4. Calcolare $\displaystyle\int \frac{2x^3}{\sqrt[4]{x^4 + 1}}\, dx$.

5. Scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine 6 della funzione $f(x) := (3 - x^4)\sin(2x^2)$.

6. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^4 \sin(1/n^a)}{n^{3a} + n^a}$ converge ad un numero finito.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\ddot{x} + 4x = 8t$ che soddisfa $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.

8. Calcolare il periodo della funzione $f(x) := 2 + 2\cos(2\pi x - \pi)$ e disegnarne il grafico.

Prima parte, gruppo 5.

1. Derivare le seguenti funzioni: a) $\arctan(x^2 + 1)$; b) $\log\left(2^x/x^3\right)$.

2. Disporre le seguenti funzioni nel giusto ordine rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{3^x + 1}_{a} \ll \underbrace{\frac{x}{3^x + 1}}_{b} \ll \underbrace{\frac{\log x}{3^x + 1}}_{c} \ll \underbrace{2^{2x} + 1}_{d} .$$

3. Trovare un numero α con $-\pi \le \alpha \le \pi$ per cui vale la seguente identità:

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2}\,\cos(x+\alpha) \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

4. Calcolare $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x^5}{\sqrt[3]{x^6+1}}\,dx$.

5. Scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine 4 della funzione $f(x) := (1-x^2)\log(1+2x^2)$.

6. Dire per quali $a > 1$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n \log(1+1/a^n)}{a^{3n}+n^2}$ converge ad un numero finito.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\ddot{x} + 4x = 4t$ che soddisfa $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.

8. Calcolare il periodo della funzione $f(x) := -1 + 2\cos(\pi x + \pi)$ e disegnarne il grafico.

PRIMA PARTE, GRUPPO 6.

1. Derivare le seguenti funzioni: a) $\arcsin(x^2-1)$; b) $\log\big(3^x/x^2\big)$.

2. Disporre le seguenti funzioni nel giusto ordine rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:

$$\underbrace{\frac{2}{3^x+1}}_{a} \ll \underbrace{x\,3^x}_{b} \ll \underbrace{\frac{4}{2^{2x}+1}}_{c} \ll \underbrace{3^x \log x}_{d}\,.$$

3. Trovare un numero α con $-\pi \le \alpha \le \pi$ per cui vale la seguente identità:

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2}\,\cos(x+\alpha) \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

4. Calcolare $\displaystyle\int \frac{2x^5}{x^6+1}\,dx$.

5. Scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine 3 della funzione $f(x) := (3-x^2)\sin(2x)$.

6. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n \sin(1/n^a)}{n^{2a}+n^a}$ converge ad un numero finito.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\ddot{x} + 9x = 9t$ che soddisfa $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.

8. Calcolare il periodo della funzione $f(x) := -2 + 2\cos(2x + \pi)$ e disegnarne il grafico.

SECONDA PARTE, GRUPPO 1.

1. Consideriamo la funzione $f(x) := \big(\cos(2x^2)\big)^6 - 1$.
   a) Trovare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$.
   b) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ trovare la parte principale di $f(x) + ax^4$ per $x \to 0$.

2. a) Disegnare il grafico della funzione

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+1}}$$

   e l'insieme A dei punti (x,y) tali che $f(x) \le y \le f(x-1)$.
   b) Scrivere l'area di A come integrale e dire se è finita o meno.

3. Consideriamo un punto P che si muove nel piano con la seguente legge oraria:
$$P(t) := \big(2t^2 - \tfrac{2}{3};\, t^3 - t\big)\,.$$
a) Calcolare la minima distanza di P dall'origine.
b) Disegnare la traiettoria di P. (Suggerimento: esprimere t, e poi anche y, in funzione di x.)

Seconda parte, gruppo 2.

1. Consideriamo la funzione $f(x) := \big(\cos(2x^2)\big)^9 - 1$.
a) Trovare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$.
b) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ trovare la parte principale di $f(x) + ax^4$ per $x \to 0$.

2. a) Disegnare il grafico della funzione
$$f(x) := \frac{1}{\sqrt[4]{x^2+1}}$$
e l'insieme A dei punti (x, y) tali che $f(x) \le y \le f(x-1)$.
b) Scrivere l'area di A come integrale e dire se è finita o meno.

3. Consideriamo un punto P che si muove nel piano con la seguente legge oraria:
$$P(t) := \big(3t^2 - 1;\, t^3 - t\big)\,.$$
a) Calcolare la minima distanza di P dall'origine.
b) Disegnare la traiettoria di P. (Suggerimento: esprimere t, e poi anche y, in funzione di x.)

Seconda parte, gruppo 3.

1. Consideriamo la funzione $f(x) := \big(\cos(2x^3)\big)^6 - 1$.
a) Trovare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$.
b) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ trovare la parte principale di $f(x) + ax^6$ per $x \to 0$.

2. a) Disegnare il grafico della funzione
$$f(x) := \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+1}}$$
e l'insieme A dei punti (x, y) tali che $f(x+1) \le y \le f(x)$.
b) Scrivere l'area di A come integrale e dire se è finita o meno.

3. Consideriamo un punto P che si muove nel piano con la seguente legge oraria:
$$P(t) := \big(2t^2 - \tfrac{2}{3};\, t^3 - t\big)\,.$$
a) Calcolare la minima distanza di P dall'origine.
b) Disegnare la traiettoria di P. (Suggerimento: esprimere t, e poi anche y, in funzione di x.)

Seconda parte, gruppo 4.

1. Consideriamo la funzione $f(x) := \big(\cos(2x^3)\big)^9 - 1$.
a) Trovare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$.
b) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ trovare la parte principale di $f(x) + ax^6$ per $x \to 0$.

2. a) Disegnare il grafico della funzione
$$f(x) := \frac{1}{\sqrt[4]{x^2+1}}$$

e l'insieme A dei punti (x, y) tali che $f(x+1) \leq y \leq f(x)$.

b) Scrivere l'area di A come integrale e dire se è finita o meno.

3. Consideriamo un punto P che si muove nel piano con la seguente legge oraria:

$$P(t) := \left(3t^2 - 1;\, t^3 - t\right).$$

a) Calcolare la minima distanza di P dall'origine.

b) Disegnare la traiettoria di P. (Suggerimento: esprimere t, e poi anche y, in funzione di x.)

PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. Trovare le coordinate polari (r, α) con $\alpha \in (-\pi, \pi]$ dei seguenti punti, espressi in coordinate cartesiane: a) $(-2, -2)$; b) $(0, -2)$; c) $(-1, -\sqrt{3})$.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sin(e^x)$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\,\log(2x)$; c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\,\sin(1/x^2)$.

3. Scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine 6 (in 0) di $f(x) := (2 - 3x^3)\log(1 - x^3)$.

4. Calcolare la velocità $\vec{v}(t)$ e la distanza d percorsa tra l'istante $t = -\infty$ e $t = 0$ da un punto P si muove con la legge oraria $P(t) := e^t\big(\sin(2t), \cos(2t)\big)$.

5. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^a + n^{2a}}{n^4 \log(1 + 1/n^2)}$ converge ad un numero finito.

6. Calcolare il raggio di convergenza R della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n} + n^2}{3^n + n} x^n$

7. Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 0$ che soddisfano la condizione iniziale $x(0) = 0$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) che soddisfano le condizioni $1 \le y \le 2$ e $y \le \dfrac{1}{(x-1)^4}$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. Trovare le coordinate polari (r, α) con $\alpha \in (-\pi, \pi]$ dei seguenti punti, espressi in coordinate cartesiane: a) $(-1, 1)$; b) $(0, -3)$; c) $(-\sqrt{3}, 3)$.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \cos(e^x)$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{\log(\log x)}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^4 + x^2}{\log(1 + 2x^2)}$.

3. Scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine 6 (in 0) di $f(x) := (1 + x^3)\log(1 - 2x^3)$.

4. Calcolare la velocità $\vec{v}(t)$ e la distanza d percorsa tra l'istante $t = -\infty$ e $t = 0$ da un punto P si muove con la legge oraria $P(t) := e^t\big(\sin(3t), \cos(3t)\big)$.

5. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin(1/n^{2a})}{n - \sqrt{n}}$ converge ad un numero finito.

6. Calcolare il raggio di convergenza R della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{-2n} + n^2}{3^n + n} x^n$

7. Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $\ddot{x} - 4\dot{x} + 5x = 0$ che soddisfano la condizione iniziale $x(0) = 0$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) che soddisfano le condizioni $-2 \le x \le -1$ e $y \le \dfrac{1}{(x+1)^4}$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. Trovare le coordinate polari (r, α) con $\alpha \in (-\pi, \pi]$ dei seguenti punti, espressi in coordinate cartesiane: a) $(0, -4)$; b) $(-1, -1)$; c) $(-3, -\sqrt{3})$.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3^x}{2^x+4^x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \Big(\frac{1}{x}+\log x\Big)$; c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^2\sin(1/x)$.

3. Scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine 6 (in 0) di $f(x) := (8-2x^3)\sqrt{1+x^3}$.

4. Calcolare la velocità $\vec{v}(t)$ e la distanza d percorsa tra l'istante $t=-\infty$ e $t=0$ da un punto P si muove con la legge oraria $P(t) := e^t\big(\cos(2t),\, \sin(2t)\big)$.

5. Dire per quali $a>0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^a+n^{2a}}{n^4(e^{1/n}-1)}$ converge ad un numero finito.

6. Calcolare il raggio di convergenza R della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n}+n^2}{3^{-n}+n}x^n$

7. Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $\ddot{x}+2\dot{x}+5x=0$ che soddisfano la condizione iniziale $x(0)=0$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x,y) che soddisfano le condizioni $-1\le x\le 1$ e $y\le e^{-|x|}$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. Trovare le coordinate polari (r,α) con $\alpha\in(-\pi,\pi]$ dei seguenti punti, espressi in coordinate cartesiane: a) $(0,-3)$; b) $(-2,2)$; c) $(-\sqrt{3},1)$.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{5^x}{2^x-4^x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (x-\log^{10}x)$; c) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{x^4-2x^2}{\log(1+x^2)}$.

3. Scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine 6 (in 0) di $f(x) := (2-x^3)\sqrt{1+2x^3}$.

4. Calcolare la velocità $\vec{v}(t)$ e la distanza d percorsa tra l'istante $t=-\infty$ e $t=0$ da un punto P si muove con la legge oraria $P(t) := e^t\big(\cos(3t),\, \sin(3t)\big)$.

5. Dire per quali $a>0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^4(e^{1/n^2}-1)}{n^a-1}$ converge ad un numero finito.

6. Calcolare il raggio di convergenza R della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{-2n}+n^2}{3^{-n}+n}x^n$

7. Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $\ddot{x}-2\dot{x}+5x=0$ che soddisfano la condizione iniziale $x(0)=0$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x,y) che soddisfano le condizioni $e^x\le y\le 1$ e $y\le 2-x^2$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 1.

1. a) Trovare la parte principale per $x\to0$ di $f(x) := \sqrt[3]{\exp(2x^6)-1}$.
   b) Per ogni $a\in\mathbb{R}$, trovare la parte principale per $x\to0$ di $f(x)-ax^2$.

2. Consideriamo l'insieme A dei punti (x,y) tali che $0\le y\le f(x)$, dove
$$f(x) := (x-1)\exp(-x)\,.$$
   a) Disegnare il grafico della funzione f e l'insieme A.
   b) Disegnare il solido V_x ottenuto ruotando A attorno all'asse x e calcolarne il volume.
   c) Disegnare il solido V_y ottenuto ruotando A attorno all'asse y e calcolarne il volume.

3. Si consideri la funzione f data da
$$f(x) := \int_1^{(x+1)^2} \frac{dt}{1+t^5}\,. \tag{*}$$
a) Discutere i limiti di $f(x)$ per $x \to \pm\infty$ (esistenza ed eventuale finitezza).
b) Disegnare il grafico di $f(x)$.
c) Trovare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$.

Seconda parte, gruppo 2.

1. a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) := \sqrt{\exp(2x^4) - 1}$.
b) Per ogni $a \in \mathbb{R}$, trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) - ax^2$.

2. Consideriamo l'insieme A dei punti (x, y) tali che $0 \le y \le f(x)$, dove
$$f(x) := (x-2)\exp(-x)\,.$$
a) Disegnare il grafico della funzione f e l'insieme A.
b) Disegnare il solido V_x ottenuto ruotando A attorno all'asse x e calcolarne il volume.
c) Disegnare il solido V_y ottenuto ruotando A attorno all'asse y e calcolarne il volume.

3. Si consideri la funzione f data da
$$f(x) := \int_1^{(x+1)^2} \frac{dt}{1+t^5}\,. \tag{*}$$
a) Discutere i limiti di $f(x)$ per $x \to \pm\infty$ (esistenza ed eventuale finitezza).
b) Disegnare il grafico di $f(x)$.
c) Trovare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := \sin(2x^3) + ax^3$ è crescente su tutto $\mathbb{R}$.

2. Disporre le seguenti funzioni nel giusto ordine rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\frac{4^x}{x}}_{a} \ll \underbrace{\sin\left(e^{x^2}\right)}_{b} \ll \underbrace{e^{x\,\log x}}_{c} \ll \underbrace{x^2 + 4^x}_{d}\,.$$

3. Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \sqrt{1+2x^2} - 1 - x^2$.

4. Un punto P si muove con la legge oraria $P(t) := (\cos t,\, 2t^3 - 3\pi t^2)$. Trovare tutti i tempi t in cui l'accelerazione di P è nulla (e se non ne esiste nessuno, specificarlo).

5. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \displaystyle\int_{2x}^{x^2} \frac{dt}{1+t^4}$.

6. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^a + x^{2a}}{x^4 \log(1+1/x^2)}\, dx$ è finito.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = (1+x^2)\, t\, e^t$ che soddisfa $x(0) = 0$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) nel piano cartesiano le cui coordinate polari α, r soddisfano
$$-\frac{\pi}{4} \le \alpha \le \frac{\pi}{4}\ ; \quad 1 \le r \le 2\,.$$

PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := \sin(3x^3) + ax^3$ è crescente su tutto $\mathbb{R}$.

2. Disporre le seguenti funzioni nel giusto ordine rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\frac{2x^3}{\log x}}_{a} \ll \underbrace{x\,2^{-x}}_{b} \ll \underbrace{x^3 + 1}_{c} \ll \underbrace{e^{2\log x}}_{d}\,.$$

3. Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \log(1 - x^2) + x^2$.

4. Un punto P si muove con la legge oraria $P(t) := (t^3 - 3t^2,\, \cos(\pi t))$. Trovare tutti i tempi t in cui l'accelerazione di P è nulla (e se non ne esiste nessuno, specificarlo).

5. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \displaystyle\int_{3x}^{x^3} \frac{dt}{1+t^4}$.

6. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(1/x^{2a})}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}\, dx$ è finito.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = (1+x^2)\, 4t\, e^{t^2}$ che soddisfa $x(0) = 0$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) nel piano cartesiano le cui coordinate polari α, r soddisfano
$$\frac{\pi}{4} \le \alpha \le \frac{3\pi}{4}\ ; \quad r \ge 2\,.$$

PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := \sin(3x^5) + ax^5$ è crescente su tutto $\mathbb{R}$.
2. Disporre le seguenti funzioni nel giusto ordine rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\frac{1}{\log x}}_{a} \ll \underbrace{\frac{x}{\log x}}_{b} \ll \underbrace{\frac{1}{x \log x}}_{c} \ll \underbrace{\frac{1}{x + \log x}}_{d} .$$
3. Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \sqrt[3]{1 + 3x^2} - 1 - x^2$.
4. Un punto P si muove con la legge oraria $P(t) := (\cos(2t),\, 4t^3 - 3\pi t^2)$. Trovare tutti i tempi t in cui l'accelerazione di P è nulla (e se non ne esiste nessuno, specificarlo).
5. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \displaystyle\int_{2x}^{x^2} \frac{dt}{1 + t^6}$.
6. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^a + x^{2a}}{x^4(e^{1/x} - 1)}\, dx$ è finito.
7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = (1 + x^2)\, t\, e^t$ che soddisfa $x(1) = 1$.
8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) nel piano cartesiano le cui coordinate polari α, r soddisfano
$$-\frac{\pi}{4} \le \alpha \le \frac{\pi}{4} \;; \quad r \ge 2 .$$

PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := \sin(4x^5) + ax^5$ è crescente su tutto $\mathbb{R}$.
2. Disporre le seguenti funzioni nel giusto ordine rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\log(x \log x)}_{a} \ll \underbrace{\log(\log(x^2))}_{b} \ll \underbrace{\frac{1}{\log(\log x)}}_{c} \ll \underbrace{\frac{1}{\log x}}_{d} .$$
3. Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \log(1 - x^4) + x^4$.
4. Un punto P si muove con la legge oraria $P(t) := (t^3 - t^2,\, \sin(\pi t))$. Trovare tutti i tempi t in cui l'accelerazione di P è nulla (e se non ne esiste nessuno, specificarlo).
5. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \displaystyle\int_{3x}^{x^3} \frac{dt}{1 + t^6}$.
6. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^4(e^{1/x^2} - 1)}{x^a + 1}\, dx$ è finito.
7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = (1 + x^2)\, 4t\, e^{t^2}$ che soddisfa $x(1) = 0$.
8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) nel piano cartesiano le cui coordinate polari α, r soddisfano
$$\frac{\pi}{4} \le \alpha \le \frac{3\pi}{4} \;; \quad 1 \le r \le 2 .$$

Seconda parte.

1. a) Dire se la disequazione $x^2 + 4x - 4 \geq 6 \log x$ è soddisfatta per ogni $x > 0$ oppure no.
   b) Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la disequazione $x^2 + 4x - a \geq 6 \log x$ è soddisfatta per ogni $x > 0$.

2. Determinare al variare di $a > 0$ il comportamento dell'integrale improprio
$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{(1 + \cos x)^a} \,.$$

3. Calcolare il volume del solido V ottenuto facendo ruotare una circonferenza di raggio r attorno ad una retta T tangente alla circonferenza stessa.

Prima parte, gruppo 1.

1. Determinare i punti di massimo e minimo *assoluti* della funzione $f(x) := x^3 e^{-x}$ relativamente alla semiretta $1 \le x$, specificando se non ne esistano.

2. Dire per quali $a > 0$ vale che $\dfrac{x^4 + x^3}{\log x} = o(x^a)$ per $x \to +\infty$.

3. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \displaystyle\int_1^{\exp(2x)} \sin(1 + \log t)\, dt$.

4. Calcolare $\displaystyle\int 4x \cos(1 + x^2)\, dx$.

5. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1 + \log x)^a}$ converge ad un numero finito.

6. Calcolare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{3^n\, n!}$ (per gli x per cui è finita).

7. Trovare tutte le soluzioni dell'equazione $\ddot{x} - 4x = 3e^{-t} + 5e^{-3t}$ che tendono a $+\infty$ per $t \to +\infty$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $\dfrac{1}{(1 - x)^3} \ge e^{-x}$.

Prima parte, gruppo 2.

1. Determinare i punti di massimo e minimo *assoluti* della funzione $f(x) := x^3 e^{-x}$ relativamente alla semiretta $-1 \le x$, specificando se non ne esistano.

2. Dire per quali $a > 0$ vale che $x^2 e^x + x^3 = o(e^{ax})$ per $x \to +\infty$.

3. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \displaystyle\int_{\exp(-x)}^{1} \sin(1 + \log t)\, dt$.

4. Calcolare $\displaystyle\int x \cos\Big(\frac{x}{2}\Big)\, dx$.

5. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x^{2a}}$ converge ad un numero finito.

6. Calcolare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{3^n}$ (per gli x per cui è finita).

7. Trovare tutte le soluzioni dell'equazione $\ddot{x} - 4x = 3e^{-t} + 5e^{-3t}$ che tendono a 0 per $t \to +\infty$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $\log(x + 1) \ge y \ge e^{1-x} - 1$.

Prima parte, gruppo 3.

1. Determinare i punti di massimo e minimo *assoluti* della funzione $f(x) := x^2 e^{-x}$ relativamente alla semiretta $x \le 1$, specificando se non ne esistano.

2. Dire per quali $a > 0$ vale che $\dfrac{2^{-x} + x^3}{x + 1} = o(e^{ax})$ per $x \to +\infty$.

3. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \int_1^{\exp(2x)} \cos(1 + \log t)\, dt$.

4. Calcolare $\int_0^1 4x \cos(1 + x^2)\, dx$.

5. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1 + 2^x)^a}$ converge ad un numero finito.

6. Calcolare il valore della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n\, n!}$ (per gli x per cui è finita).

7. Trovare tutte le soluzioni dell'equazione $\ddot{x} - 9x = 8e^{-t} + 5e^{-2t}$ che tendono a $+\infty$ per $t \to +\infty$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $\log(x + 1) \geq e^{1-x} - 1$.

Prima parte, gruppo 4.

1. Determinare i punti di massimo e minimo *assoluti* della funzione $f(x) := x^2 e^{-x}$ relativamente alla semiretta $x \leq 3$, specificando se non ne esistano.

2. Dire per quali $a > 0$ vale che $x^4 e^{-x} + x^3 \log x = O(x^a)$ per $x \to +\infty$.

3. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \int_{\exp(-x)}^1 \cos(1 + \log t)\, dt$.

4. Calcolare $\int_0^{\pi} x \cos\Big(\frac{x}{2}\Big)\, dx$.

5. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\int_0^{+\infty} \frac{1 + x^{2a}}{x^a(1 + x^a)}\, dx$ converge ad un numero finito.

6. Calcolare il valore della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{2^n}$ (per gli x per cui è finita).

7. Trovare tutte le soluzioni dell'equazione $\ddot{x} - 9x = 8e^{-t} + 5e^{-2t}$ che tendono a 0 per $t \to +\infty$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $\frac{1}{(1 - x)^3} \geq y \geq e^{-x}$.

Seconda parte.

1. Dato $a \in \mathbb{R}$, sia $x_a(t)$ la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = x^2 - 4$ che soddisfa la condizione iniziale $x(0) = a$.
   a) Calcolare $x_0(t)$ e disegnarne il grafico.
   b) Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la soluzione $x_a(t)$ è definita per ogni $t \in \mathbb{R}$.

2. Discutere al variare di $a \in \mathbb{R}$ il comportamento dell'integrale improprio
$$\int_1^{+\infty} (x + 1)^a - x^a\, dx\,.$$
   (Suggerimento: raccogliere x^a nella funzione integranda.)

3. Consideriamo la figura piana A delimitata da un arco di circonferenza di raggio r e dalla corda corrispondente. Indichiamo quindi con ℓ la lunghezza della corda, con L la lunghezza dell'arco,

e con α l'angolo compreso tra la corda e la retta tangente alla circonferenza in uno dei due estremi. Consideriamo infine la seguente quantità:

$$E = L\Big(1 + \frac{1}{r^2}\Big) + \ell\,.$$

a) Disegnare un esempio della figura A e dire tra quali estremi può variare l'angolo α.

b) Fissato l'angolo α, trovare la figura A che per cui il valore di E è minimo.

c) Detto $E(\alpha)$ il valore minimo di E calcolato al punto precedente, trovare il valore massimo e minimo di $E(\alpha)$ al variare di α.

Prima parte, gruppo 1.

1. Trovare le soluzioni $x \in [0, \pi]$ della disequazione $\cos(2x) \geq -1/2$.
2. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico $y = \dfrac{x}{1+x^4}$ nel punto di ascissa $x = -1$.
3. Dire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la seguente funzione è continua: $f(x) := \begin{cases} x^2 + b & \text{per } x \geq 2, \\ ae^x & \text{per } x < 2. \end{cases}$
4. Scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine 4 della funzione $f(x) := (1 + x^4)\sqrt{1 - 4x^2}$.
5. Calcolare $\displaystyle\int \frac{8x^3}{1+x^4}\, dx$.
6. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 2}{2^n + 4^n} x^n$.
7. Trovare la soluzione dell'equazione $\dot{x} = 4t^3 e^x$ tale che $x(1) = 0$.
8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $(x-1)^3 \leq y \leq |\arctan(x+1)|$.

Prima parte, gruppo 2.

1. Trovare le soluzioni $x \in [0, \pi/2]$ della disequazione $\tan(2x) \geq -1$.
2. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico $y = \dfrac{x}{1+x^6}$ nel punto di ascissa $x = 1$.
3. Dire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la seguente funzione è continua: $f(x) := \begin{cases} x^2 + b & \text{per } x \geq -2, \\ ae^x & \text{per } x < -2. \end{cases}$
4. Scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine 6 della funzione $f(x) := (3 + x^4)\log(1 + 2x^2)$.
5. Calcolare $\displaystyle\int_1^e 16\, x^3 \log x\, dx$.
6. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n + 2}{2^n + 5^n} x^n$.
7. Trovare la soluzione dell'equazione $\dot{x} = 4t(1 + x^2)$ tale che $x(1) = 0$.
8. Risolvere graficamente la disequazione $-|\arctan(x-2)| \leq x \leq 1 - x^4$.

Prima parte, gruppo 3.

1. Trovare le soluzioni $x \in [0, \pi]$ della disequazione $\sin(2x) \geq -1/2$.
2. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico $y = \dfrac{x}{1+x^4}$ nel punto di ascissa $x = 1$.
3. Dire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la seguente funzione è continua: $f(x) := \begin{cases} x^2 + b & \text{per } x \geq -1, \\ ae^x & \text{per } x < -1. \end{cases}$
4. Scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine 6 della funzione $f(x) := (1 + x^6)\sqrt{1 - 4x^3}$.

5. Calcolare $\displaystyle\int_0^1 \frac{8x^3}{1+x^4}\,dx$.

6. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+4^n}{3^n+2} x^n$.

7. Trovare la soluzione dell'equazione $\dot{x} = 3t^2(1+x^2)$ tale che $x(1) = 0$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $y \le 1 - x^4$ e $y \le -|\arctan(x-2)|$.

Prima parte, gruppo 4.

1. Trovare le soluzioni $x \in [0, \pi/2]$ della disequazione $\tan(2x) \le \sqrt{3}$.

2. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico $y = \dfrac{x}{1+x^6}$ nel punto di ascissa $x = -1$.

3. Dire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la seguente funzione è continua: $f(x) := \begin{cases} x^2 + b & \text{per } x \ge 1, \\ ae^x & \text{per } x < 1. \end{cases}$

4. Scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine 9 della funzione $f(x) := (3 + x^6)\log(1 + 2x^3)$.

5. Calcolare $\displaystyle\int 16\, x^3 \log x\, dx$.

6. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+5^n}{4^n+2} x^n$.

7. Trovare la soluzione dell'equazione $\dot{x} = 3t^2 e^x$ tale che $x(1) = 0$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $(x-1)^3 \le |\arctan(x+1)|$.

Seconda parte.

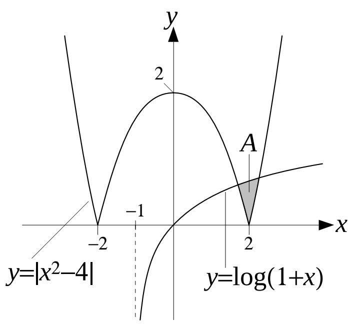
1. Dato $a \in \mathbb{R}$ consideriamo l'equazione differenziale
$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + 9x = 18\,t\,. \tag{*}$$
   a) Trovare la soluzione generale di (*) per ogni $a > 0$.
   b) Per quali $a > 0$ esiste almeno una soluzione x di (*) tale che $x(t) \gg e^{9t}$ per $t \to +\infty$?

2. Consideriamo la funzione
$$f(x) := \log\Big(x^2 - 1 + \frac{16}{x^2}\Big)\,.$$
   a) Determinare l'insieme di definizione di f.
   b) Disegnare il grafico di f.
   c) Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $x > 0$ e $f(x) \le y \le 2\log x$.
   d) Dire se l'area di A è finita oppure no.

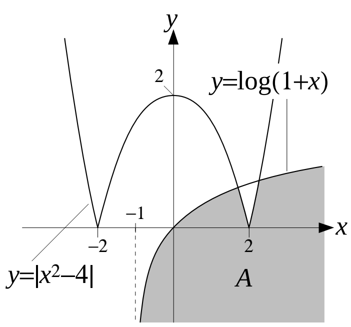
3. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ discutere il comportamento dell'integrale improprio
$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(e^x - e)^a}\,.$$

SOLUZIONI

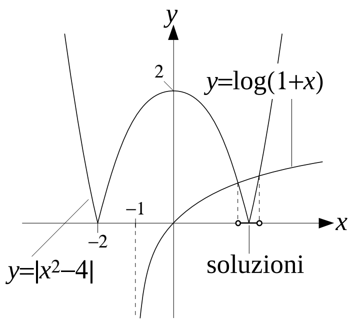
PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. Le soluzioni cercate sono: $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$.
2. Le coordinate polari (r, α) cercate sono a) $(2, -\pi/2)$; b) $(\sqrt{2}, 3\pi/4)$; c) $(2, -2\pi/3)$.
3. a) $\frac{e^x}{1+e^{2x}}$; b) $x^2(7 + 3\log x)$; c) $\frac{4}{x} - \log 4 \cdot x$.
4. Il punto di massimo assoluto è $x = -2$; il punto di minimo assoluto non esiste.
5. a) Non esiste; b) 0; c) -1.
6. Lo sviluppo cercato è $P_6(x) = 4x^3 - 12x^6$.
7. $a \geq 2$.
8. 

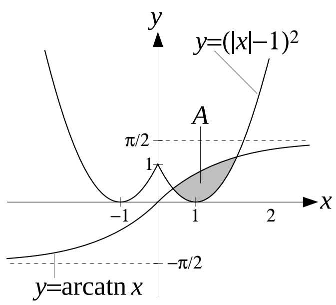
PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. Le soluzioni cercate sono: $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$.
2. Le coordinate polari (r, α) cercate sono a) $(3, -\pi/2)$; b) $(2\sqrt{2}, 3\pi/4)$; c) $(2\sqrt{3}, -5\pi/6)$.
3. a) $\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$; b) $x(7 + 2\log x)$; c) $\log 4 \cdot x - \frac{6}{x}$.
4. Il punto di massimo assoluto non esiste; il punto di minimo assoluto è $x = 2$.
5. a) $+\infty$; b) 0; c) -2.
6. Lo sviluppo cercato è $P_6(x) = 6x^2 + 2x^4 - 4x^6$.
7. $a \geq 3$.
8. 

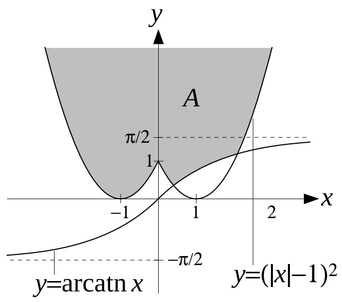
PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. Le soluzioni cercate sono: $-\dfrac{\pi}{3} \le x \le \dfrac{\pi}{3}$.
2. Le coordinate polari (r, α) cercate sono a) $(\sqrt{2}, -3\pi/4)$; b) $(4, -\pi/2)$; c) $(2\sqrt{3}, 2\pi/3)$.
3. a) $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; b) $\log(\log x) + \dfrac{1}{\log x}$; c) $\log 9 \cdot x - \dfrac{4}{x}$.
4. Il punto di massimo assoluto non esiste; il punto di minimo assoluto è $x = -1$.
5. a) $-\infty$; b) 0; c) 2.
6. Lo sviluppo cercato è $P_6(x) = 6x^2 - 6x^6$.
7. $a \ge 0$.
8. 

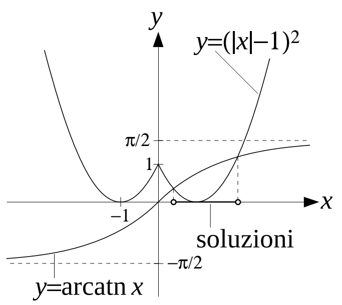
PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. Le soluzioni cercate sono: $\dfrac{7\pi}{6} \le x \le \dfrac{11\pi}{6}$.
2. Le coordinate polari (r, α) cercate sono a) $(2\sqrt{2}, -3\pi/4)$; b) $(3, -\pi/2)$; c) $(2, 5\pi/6)$.
3. a) $\dfrac{2x}{1+x^4}$; b) $x^2(10 + 3\log x)$; c) $\dfrac{4}{x} - \log 9 \cdot x$.
4. Il punto di massimo assoluto è $x = 1$; il punto di minimo assoluto non esiste.
5. a) Non esiste; b) 0; c) non esiste.
6. Lo sviluppo cercato è $P_6(x) = 2x^3 + 4x^6$.
7. $a > -2$.
8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 5.

1. Le soluzioni cercate sono: $\frac{5\pi}{4} \leq x \leq \frac{7\pi}{4}$.
2. Le coordinate polari (r, α) cercate sono a) $(2, -5\pi/6)$; b) $(3\sqrt{2}, 3\pi/4)$; c) $(4, -\pi/2)$.
3. a) $\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$; b) $\log(\log x) + \frac{1}{\log x}$; c) $\frac{3}{x} - \log 16 \cdot x$.
4. Il punto di massimo assoluto non esiste; il punto di minimo assoluto è $x = 2$.
5. a) $-\infty$; b) $+\infty$; c) -1.
6. Lo sviluppo cercato è $P_6(x) = 2x^2 + 3x^4 + 2x^6$.
7. Nessun a.
8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 6.

1. Le soluzioni cercate sono: $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.
2. Le coordinate polari (r, α) cercate sono a) $(2\sqrt{3}, -2\pi/3)$; b) $(\sqrt{2}, 3\pi/4)$; c) $(2, -\pi/2)$.
3. a) $\frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}}$; b) $x(5 + 2\log x)$; c) $\frac{2}{x} - \log 9 \cdot x$.
4. Il punto di massimo assoluto è $x = -2$; il punto di minimo assoluto non esiste.
5. a) $-\infty$; b) $+\infty$; c) -6.
6. Lo sviluppo cercato è $P_6(x) = 2x^4$.
7. $a > 4/e$.
8. 

SECONDA PARTE, GRUPPO 1.

1. a) Siccome $f(0)=0$, ci aspettiamo una parte principale con esponente positivo. E infatti

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{\cos(4x^2)} &= \sqrt[4]{1-8x^4+O(x^8)}\\ &= 1+\frac{1}{4}(-8x^4+O(x^8))+O\big((-8x^4+O(x^8))^2\big)\\ &= 1-2x^4+O(x^8)+O\big((O(x^4))^2\big)\\ &= 1-2x^4+O(x^8)\,, \end{aligned}\tag{1}$$

avendo usato nel primo passaggio lo sviluppo

$$\cos t = 1-\frac{t^2}{2}+O(t^4) \quad \text{con} \quad t:=4x^2\,,$$

e nel secondo lo sviluppo

$$\sqrt[4]{1+t}=(1+t)^{1/4}=1+\frac{t}{4}+O(t^2) \quad \text{con} \quad t:=-8x^4+O(x^8)\,.$$

Usando la formula (1) otteniamo infine

$$f(x):=1-\sqrt[4]{\cos(4x^2)}=2x^4+O(x^8)\sim 2x^4\,,\tag{2}$$

ovvero la parte principale di $f(x)$ per $x\to 0$ è $2x^4$.

b) Utilizzando la formula (2) otteniamo

$$f(x)+ax^4\sim(2+a)x^4 \quad \text{per } a\neq -2.$$

Invece per $a=-2$ abbiamo bisogno di uno sviluppo più preciso della funzione f, che otteniamo procedendo come per la formula (1), con la differenza che stavolta usiamo sviluppi più precisi per ciascuna delle funzioni coinvolte:

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{\cos(4x^2)} &= \sqrt[4]{1-8x^4+\frac{32}{3}x^8+O(x^{12})}\\ &= 1+\frac{1}{4}\Big(-8x^4+\frac{32}{3}x^8+O(x^{12})\Big)\\ &\quad -\frac{3}{32}\Big(-8x^4+\frac{32}{3}x^8+O(x^{12})\Big)^2+O\Big(\Big(-8x^4+\frac{32}{3}x^8+O(x^{12})\Big)^3\Big)\\ &= 1-2x^4+\frac{8}{3}x^8+O(x^{12})-\frac{3}{32}\big(-8x^4+O(x^8)\big)^2+O\big((O(x^4))^3\big)\\ &= 1-2x^4+\frac{8}{3}x^8+O(x^{12})-\frac{3}{32}\big(64\,x^8+O(x^{12})\big)+O(x^{12})\\ &= 1-2x^4-\frac{10}{3}x^8+O(x^{12})\,, \end{aligned}\tag{3}$$

avendo usato nel primo passaggio lo sviluppo

$$\cos t=1-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{24}+O(t^6) \quad \text{con} \quad t:=4x^2\,,$$

e nel secondo lo sviluppo

$$\sqrt[4]{1+t}=1+\frac{t}{4}-\frac{3}{32}t^2+O(t^3) \quad \text{con} \quad t:=-8x^4+\frac{32}{3}x^8+O(x^{12})\,.$$

Usando la formula (3) otteniamo infine

$$f(x)-2x^4=1-2x^4-\sqrt[4]{\cos(4x^2)}=\frac{10}{3}x^8+O(x^{12})\sim\frac{10}{3}x^8\,.$$

Ricapitolando, la parte principale di $f(x)+ax^4$ per $x\to 0$ è

$$\text{p.p.}(f(x)+ax^4)=\begin{cases}(2+a)x^4 & \text{per } a\neq -2,\\ \frac{10}{3}x^8 & \text{per } a=-2.\end{cases}$$

2. a) Ponendo
$$f(x) := \frac{(x^3+4)^4}{(x^4+2)^3}$$
possiamo riscrivere la disequazione in oggetto nella forma $f(x) \leq 32$. Si tratta quindi di capire se è vero o meno che questa disequazione vale per ogni $x \geq 0$, ovvero se il valore massimo di $f(x)$ per $x \geq 0$ soddisfa
$$\max_{x\geq 0} f(x) \leq 32 \tag{4}$$
(e se il valore massimo non esiste va sostituito con l'estremo superiore dei valori $f(x)$ con $x \geq 0$). Per rispondere dobbiamo calcolare tale massimo. Studiando il segno della derivata
$$f'(x) = \frac{24\,x^2(x^3+4)^3(1-2x)}{(x^4+2)^4}$$
limitatamente alla semiretta $x \geq 0$ si vede subito che f cresce nell'intervallo $[0, 1/2]$ e decresce nella semiretta $[1/2, +\infty)$, ed in particolare $x = 1/2$ è il punto di massimo *assoluto* di f. Di conseguenza
$$\max_{x\geq 0} f(x) = f(1/2) = 33\,,$$
ed in particolare la (4) non vale, per cui la risposta alla domanda a) è negativa.
b) Riprendendo quanto appena detto, la disuguaglianza $(x^3 + 4)^4 \leq M\,(x^4 + 2)^3$ può essere riscritta come $f(x) \leq M$ e quindi vale per ogni $x \geq 0$ se
$$\max_{x\geq 0} f(x) = 33 \leq M\,.$$
Di conseguenza il minimo valore ammissibile di M è 33.
c) La disuguaglianza $(x^3 + 4)^4 \geq m\,(x^4 + 2)^3$ può essere riscritta come $f(x) \geq m$ e quindi vale per ogni $x \geq 0$ se il valore minimo, o meglio, l'estremo inferiore dei valori $f(x)$ con $x \geq 0$ soddisfa
$$\inf_{x\geq 0} f(x) \geq m\,. \tag{5}$$
Poiché la funzione f cresce in $[0, 1/2]$ e decresce in $[1/2, +\infty)$, l'estremo inferiore dei valori viene raggiunto o per $x \to +\infty$ o per $x = 0$ (ed in tal caso è anche il valore minimo); confrontando $f(0) = 32$ con il limite di $f(x)$ per $x \to +\infty$, vale a dire 1, otteniamo che l'estremo inferiore dei valori di f è 1. Pertanto la disequazione (5) è soddisfatta se $1 \geq m$, ed in particolare il più grande valore ammissibile di m è 1.

3. Supponiamo di dividere l'acquisto del materiale in N ordini, e calcoliamo il costo totale dell'operazione. Per far questo osserviamo che:
   - il costo totale del materiale è pari a 300 (e non dipende da N);
   - la somma dei costi fissi per ogni ordine è pari a $20\,N$;
   - volendo minimizzare la capacità del serbatoio da costruire, conviene acquistare ad ogni ordine la stessa quantità di materiale, vale a dire $100/N$; così facendo serve un contenitore di capacità $c = 100/N$, il cui costo è pari a $5000/N^2$.

   Sommando i costi sopraelencati otteniamo infine che il costo totale dell'operazione è pari a
$$300 + 20\,N + \frac{5000}{N^2}\,.$$
Si tratta dunque di trovare il valore minimo di questa quantità al variare di N tra i numeri *interi* positivi.
Studiando il segno della derivata della funzione
$$f(x) := 300 + 20\,x + \frac{5000}{x^2}\,,$$
vale a dire
$$f'(x) = 20 - \frac{10000}{x^3} = \frac{20}{x^3}(x^3 - 500)\,,$$
si ottiene che f' si annulla in $x_0 := \sqrt[3]{500} \simeq 7{,}94$, ed in particolare la funzione decresce nell'intervallo $[0, x_0]$ e cresce nella semiretta $[x_0, +\infty)$. In particolare, il valore minimo di $f(N)$ tra tutti i numeri interi N nell'intervallo $[0, x_0]$ viene raggiunto per $N = 7$, mentre il valore minimo tra tutti gli interi N nella semiretta $[x_0, +\infty)$ viene raggiunto per $N = 8$. Confrontando

$f(7) \simeq 542{,}04$ e $f(8) \simeq 538{,}12$ otteniamo infine che il valore minimo di $f(N)$ al variare di N tra gli interi positivi viene raggiunto per $N = 8$, che è dunque la soluzione.

SECONDA PARTE, GRUPPO 2.

1. Analogo al gruppo 1: la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$ è $\text{p.p.}(f(x)) = \frac{1}{2}x^4$, inoltre
$$\text{p.p.}(f(x) + ax^4) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2} + a\right)x^4 & \text{per } a \neq -\frac{1}{2}, \\ \frac{3}{8}x^8 & \text{per } a = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

2. Analogo al gruppo 1. Si pone
$$f(x) := \frac{(x^4+4)^5}{(x^5+2)^4}\,,$$
e procedendo come per il gruppo 1 si ottiene che la risposta alla domanda b) è
$$M = \max_{x \geq 0} f(x) = f(1/2) = 65\,,$$
ed in particolare la risposta alla domanda a) è negativa. Invece la risposta alla domanda c) è
$$m = \inf_{x \geq 0} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1\,.$$

3. Uguale al gruppo 1.

SECONDA PARTE, GRUPPO 3.

1. Analogo al gruppo 1: la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$ è $\text{p.p.}(f(x)) = x^4$, inoltre
$$\text{p.p.}(f(x) + ax^4) = \begin{cases} (1 + a)x^4 & \text{per } a \neq -1, \\ \frac{1}{6}x^8 & \text{per } a = -1. \end{cases}$$

2. Analogo al gruppo 1. Si pone
$$f(x) := \frac{(x^3+2)^4}{(x^4+4)^3}\,,$$
e procedendo come per il gruppo 1 si ottiene che la risposta alla domanda b) è
$$M = \max_{x \geq 0} f(x) = f(2) = \frac{5}{4}\,,$$
ed in particolare la risposta alla domanda a) è negativa. Invece la risposta alla domanda c) è
$$m = \min_{x \geq 0} f(x) = f(0) = \frac{1}{4}\,.$$

3. Uguale al gruppo 1.

SECONDA PARTE, GRUPPO 4.

1. Analogo al gruppo 1: la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$ è $\text{p.p.}(f(x)) = \frac{1}{2}x^4$, inoltre
$$\text{p.p.}(f(x) + ax^4) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2} + a\right)x^4 & \text{per } a \neq -\frac{1}{2}, \\ \frac{7}{8}x^8 & \text{per } a = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

2. Analogo al gruppo 1. Si pone
$$f(x) := \frac{(x^4+2)^5}{(x^5+4)^4}\,,$$
e procedendo come per il gruppo 1 si ottiene che la risposta alla domanda b) è
$$M = \max_{x \geq 0} f(x) = f(2) = \frac{9}{8}\,,$$

ed in particolare la risposta alla domanda a) è positiva. Invece la risposta alla domanda c) è

$$m = \min_{x \geq 0} f(x) = f(0) = \frac{1}{8} .$$

3. Uguale al gruppo 1.

Commenti

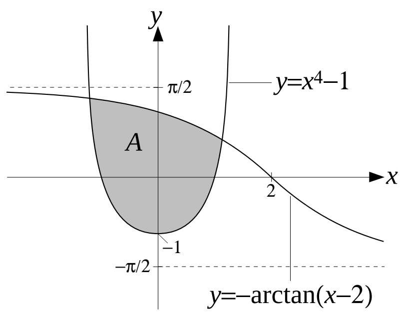
- Prima parte, esercizio 2. Pare che molti dei presenti abbiano calcolato l'angolo α delle coordinate polari del punto (x, y) usando la formula $\alpha = \arctan(y/x)$. Ma questa formula dà l'angolo corretto solo se il punto in questione è contenuto nel primo o nel quarto quadrante.

- Prima parte, esercizio 7. Molti dei presenti hanno fatto errori che si possono ricondurre al seguente ragionamento (sbagliato): siccome $\log x$ è trascurabile rispetto a tutte le potenze (positive) di x per $x \to +\infty$, allora $x^2/\log x$ è asintoticamente equivalente a x^2, e quindi l'equazione $x^2/\log x = o(x^a)$ equivale a $x^2 = o(x^a)$. Peccato che non è vero che $x^2/\log x$ e x^2 siano asintoticamente equivalenti, come si vede facendo il limite del rapporto di queste due funzioni; è invece vero che $x^2 + \log x$ e x^2 sono asintoticamente equivalenti, e forse questo ha indotto alcuni in confusione.

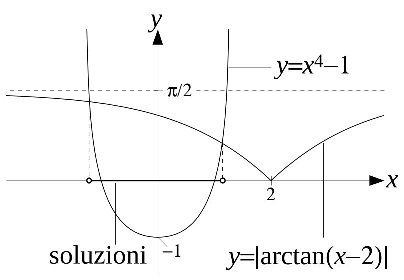
- Seconda parte, esercizio 1. Diversi dei presenti hanno risposto correttamente alla domanda a), ma al momento di passare al punto delicato della domanda b), hanno sviluppato ulteriormente solo una delle due funzioni coinvolte della definizione di f. Tale errore sarebbe stato messo in evidenza dal resto, se questo non fosse stato brutalmente omesso.

- Seconda parte, esercizio 3. Diversi dei presenti hanno determinato correttamente la funzione f da minimizzare, è una volta ottenuto che il minimo di $f(x)$ tra gli x reali e positivi viene raggiunto per $x = x_0 \simeq 7{,}94$, hanno argomentato che il minimo di $f(N)$ tra gli N interi positivi viene raggiunto per $N = 8$ perché "8 approssima 7,94 meglio di 7". Tuttavia questo argomento non è del tutto convincente, perché la domanda rilevante non è se 8 approssima 7,94 meglio di 7, ma semmai se $f(8)$ approssima $f(7{,}94)$ meglio di $f(7)$.
  Un argomento decisamente migliore, proposto da diversi altri, consiste nel confrontare i valori $f(7)$ e $f(8)$ e osservare che il secondo è più piccolo.
  Ma a ben vedere neanche questo è completamente convincente: è infatti possibile costruire una funzione f tale che il minimo di $f(x)$ tra tutti gli x reali viene raggiunto per $x = x_0 = 7{,}94$, mentre il minimo di $f(N)$ tra gli N interi non viene raggiunto né per $N = 7$ né per $N = 8$.

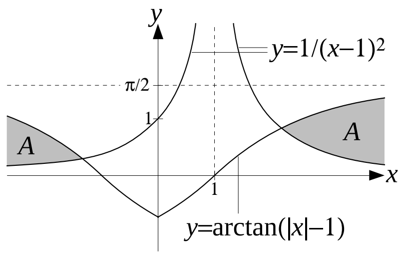
Prima parte, gruppo 1.

1. Deve essere $-1 \leq e^{2x} - 2 \leq 1$, ovvero $0 \leq x \leq \dfrac{\log 3}{2}$,
2. $f(x) = 6x^2 - 42\,x^4 + O(x^6)$.
3. Sostituendo la formula per x nell'equazione si ottiene l'identità $6a^2(1+at) = 24\,(1+at)$ che è verificata per $a = \pm 2$.
4. La velocità è $\vec{v}(t) = \big(-4e^{2t}\sin(e^{2t});\, 4e^{2t}\cos(e^{2t})\big)$. La distanza è $d = \displaystyle\int_0^1 \big|\vec{v}(t)\big|\,dt = 2e^2 - 2$.
5. Il raggio di convergenza è $R = 2$.
6. L'integrale in questione si comporta come $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ per $a \leq 3$ e come $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{a-2}}$ per $a > 2$. Quindi converge per $a > 3$.
7. Equazione a variabili separabili. La soluzione cercata è $x(t) = \tan\big(e^{2t}(2t-1) - e^2\big)$.
8. 

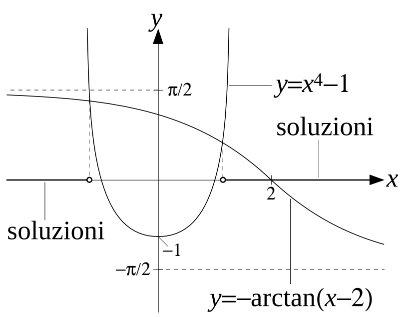
Prima parte, gruppo 2.

1. Deve essere $e^{2x} - 2 \neq 0$, ovvero $x \neq \dfrac{\log 2}{2}$,
2. $f(x) = 4x^2 - 12\,x^4 + O(x^6)$.
3. Sostituendo la formula per x nell'equazione si ottiene l'identità $12\,a^2(1+at)^2 = 24\,(1+at)^2$ che è verificata per $a = \pm\sqrt{2}$.
4. La velocità è $\vec{v}(t) = \big(e^{-t}\sin(e^{-t});\, e^{-t}\cos(e^{-t})\big)$. La distanza è $d = \displaystyle\int_0^1 \big|\vec{v}(t)\big|\,dt = 1 - \frac{1}{e}$.
5. Il raggio di convergenza è $R = +\infty$.
6. L'integrale si comporta come $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^a}{2^x}\,dx$, e siccome $\dfrac{x^a}{2^x} \ll \dfrac{1}{x^2}$ converge per ogni $a > 0$.
7. Equazione a variabili separabili. La soluzione cercata è $x(t) = \tan\big(2e^{t^2} - 2e^4\big)$.
8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. Deve essere $-1 \leq e^{4x} - 2 \leq 1$, ovvero $0 \leq x \leq \dfrac{\log 3}{4}$,
2. $f(x) = 1 - 3x^4 + O(x^8)$.
3. Sostituendo la formula per x nell'equazione si ottiene l'identità $6a^2(1+at)^{-4} = 6(1+at)^{-4}$ che è verificata per $a = \pm 1$.
4. La velocità è $\vec{v}(t) = \big(6e^{3t}\cos(e^{3t});\ -6e^{3t}\sin(e^{3t})\big)$. La distanza è $d = \displaystyle\int_0^1 \big|\vec{v}(t)\big|\, dt = 2e^3 - 2$.
5. Il raggio di convergenza è $R = 4$.
6. L'integrale in questione si comporta come $\displaystyle\int_1^{+\infty} (a/2)^x\, dx$ e quindi converge per $0 < a < 2$.
7. Equazione a variabili separabili. La soluzione cercata è $x(t) = \exp\big(e^{2t}(2t-1) - e^2\big) - 2$.
8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. Deve essere $-1 \leq 2 - e^{4x} \leq 1$, ovvero $0 \leq x \leq \dfrac{\log 3}{4}$,
2. $f(x) = 6x^2 - 30\,x^4 + O(x^6)$.
3. Sostituendo la formula per x nell'equazione si ottiene l'identità $6a^2(1+at) = 3(1+at)$ che è verificata per $a = \pm 1/\sqrt{2}$.
4. La velocità è $\vec{v}(t) = \big(-2e^{2t}\sin(e^{2t});\ -2e^{2t}\cos(e^{2t})\big)$. La distanza è $d = \displaystyle\int_0^1 \big|\vec{v}(t)\big|\, dt = e^2 - 1$.
5. Il raggio di convergenza è $R = 1/2$.
6. L'integrale in questione si comporta come $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x}$ per $a \geq 4$ e come $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^{a-3}}$ per $a < 4$. Quindi converge per $0 < a < 2$.
7. Equazione a variabili separabili. La soluzione cercata è $x(t) = \exp\big(2e^{t^2} - 2e^4\big) - 2$.
8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 5.

1. Deve essere $e^{2x} - 3 \neq 0$, ovvero $x \neq \dfrac{\log 3}{2}$,

2. $f(x) = 4x^2 - 4x^4 + O(x^6)$.

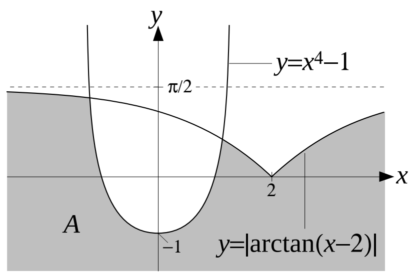
3. Sostituendo la formula per x nell'equazione si ottiene l'identità $12\, a^2(1 + at)^2 = 3(1 + at)^2$ che è verificata per $a = \pm 1/2$.

4. La velocità è $\vec{v}(t) = \big(2e^{-t}\sin(e^{-t});\, -2e^{-t}\cos(e^{-t})\big)$. La distanza è $d = \displaystyle\int_0^1 \big|\vec{v}(t)\big|\, dt = 2 - \frac{2}{e}$.

5. Il raggio di convergenza è $R = 0$.

6. L'integrale in questione si comporta come $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^{a-3}}$ e quindi converge per $0 < a < 4$.

7. Equazione a variabili separabili. La soluzione cercata è $x(t) = \dfrac{1}{e^{2t}(2t-1)} - 1$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 6.

1. Deve essere $-1 \leq 2 - e^{2x} \leq 1$, ovvero $0 \leq x \leq \dfrac{\log 3}{2}$,

2. $f(x) = 1 - x^4 + O(x^8)$.

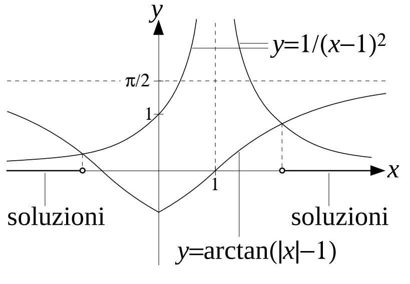
3. Sostituendo la formula per x nell'equazione si ottiene l'identità $6a^2(1 + at)^{-4} = 12\,(1 + at)^{-4}$ che è verificata per $a = \pm\sqrt{2}$.

4. La velocità è $\vec{v}(t) = \big(3e^{3t}\cos(e^{3t});\, 3e^{3t}\sin(e^{3t})\big)$. La distanza è $d = \displaystyle\int_0^1 \big|\vec{v}(t)\big|\, dt = e^3 - 1$.

5. Il raggio di convergenza è $R = 1/3$.

6. L'integrale in questione si comporta come $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^{3a}}$ e quindi converge per $0 < a < 1/3$.

7. Equazione a variabili separabili. La soluzione cercata è $x(t) = \dfrac{1}{2e^{t^2} - 1} - 1$.

8. 

SECONDA PARTE, GRUPPO 1.

1. a) Scriviamo la funzione f nella forma

$$f(x) := \big(\cos(2x^2)\big)^{1/x^2} - 1 = \exp\left(\frac{1}{x^2}\log\big(\cos(2x^2)\big)\right) - 1\,.$$

Utilizzando lo sviluppo $\cos t = 1 - t^2/2 + O(t^4)$ con $t = 2x^2$ otteniamo

$$\cos(2x^2) = 1 - 2x^4 + O(x^8)\,.$$

Utilizzando quindi lo sviluppo $\log(1+t) = 1 - t + O(t^2)$ con $t = -2x^4 + O(x^8)$ otteniamo

$$\begin{aligned}\log\big(\cos(2x^2)\big) &= \log(1 - 2x^4 + O(x^8))\\ &= -2x^4 + O(x^8) + O((-2x^4)^2) = -2x^4 + O(x^8)\,,\end{aligned}$$

e dunque

$$\frac{1}{x^2}\log\big(\cos(2x^2)\big) = -2x^2 + O(x^6)\,.$$

Infine, usando lo sviluppo $e^t = 1 + t + O(t^2)$ con $t = -2x^2 + O(x^6)$ otteniamo

$$\begin{aligned}\exp\left(\frac{1}{x^2}\log\big(\cos(2x^2)\big)\right) &= \exp\big(-2x^2 + O(x^6)\big)\\ &= 1 - 2x^2 + O(x^6) + O\big((-2x^2)^2\big) = 1 - 2x^2 + O(x^4)\,,\end{aligned} \tag{1}$$

da cui segue $f(x) = -2x^2 + O(x^4)$ e quindi

$$\text{p.p.}(f(x)) = -2x^2\,. \tag{2}$$

b) Usando la formula (2) otteniamo

$$\text{p.p.}\big(f(x) - ax^2\big) = (-2-a)x^2 \quad \text{per ogni } a \neq -2.$$

Per $a = -2$ dobbiamo invece usare uno sviluppo più preciso di f. Per ottenerlo, procediamo come prima utilizzando però lo sviluppo $e^t = 1 + t + t^2/2 + O(t^3)$ al posto di $e^t = 1 + t + O(t^2)$ nella formula (1):

$$\begin{aligned}\exp\left(\frac{1}{x^2}\log\big(\cos(2x^2)\big)\right) &= \exp\big(-2x^2 + O(x^6)\big)\\ &= 1 - 2x^2 + O(x^6) + \frac{1}{2}\big(-2x^2 + O(x^6)\big)^2 + O\big((-2x^2)^3\big)\\ &= 1 - 2x^2 + 2x^4 + O(x^6)\,.\end{aligned}$$

(Che per ottenere uno sviluppo più preciso di f basti rendere più preciso solo lo sviluppo dell'esponenziale, e non quello del coseno e del logaritmo, non è per nulla evidente e anzi può sembrare sbagliato; solo controllando con cura i resti ci si rende conto che è corretto.)
Dalla formula precedente si ottiene infine $f(x) + 2x^2 = 2x^4 + O(x^6)$ e quindi

$$\text{p.p.}\big(f(x) + 2x^2\big) = 2x^4\,.$$

2. Risolvo direttamente il punto b). Per iniziare, riscrivo la disequazione $\exp(x^2) \geq x^a$ per ogni $x > 0$ nella forma

$$x^2 \geq a\log x \quad \text{per ogni } x > 0.$$

Osservo adesso che questa disequazione è automaticamente verificata per $x \leq 1$ perché per tali x il logaritmo è negativo (mentre x^2 è positivo). La domanda diventa quindi: per quali $a > 0$ vale che $x^2 \geq a\log x$ per ogni $x > 1$, ovvero

$$\frac{x^2}{\log x} \geq a \quad \text{per ogni } x > 1?$$

(Ho diviso per $\log x$, che è *positivo* per $x > 1$, e quindi la disequazione non cambia.)
Ponendo $f(x) := x^2/\log x$ si vede che quest'ultima disequazione vale se e solo se

$$\min_{x>1} f(x) \geq a\,.$$

(E come al solito, se il minimo non esistesse andrebbe sostituito dall'estremo inferiore.)
Per calcolare il minimo di f studio il segno della derivata

$$f'(x) = \frac{x(2\log x - 1)}{\log^2 x},$$

ottenendo che f decresce nell'intervallo $(1, \sqrt{e}]$ e cresce nella semiretta $[\sqrt{e}, +\infty)$. Pertanto $\sqrt{e}$ è il punto di minimo *assoluto* di f relativamente alla semiretta $(1, +\infty)$, e quindi

$$\min_{x>1} f(x) = f(\sqrt{e}) = 2e,$$

e in particolare i valori di a cercati sono quelli tali che $a \leq 2e$.

Come conseseguenza dell'analisi appena fatta otteniamo infine la risposta alla domanda a): siccome $16/3 < 2e$, la disequazione $\exp(x^2) \geq x^{16/3}$ è verificata per ogni $x > 0$.

3. a), b). La soluzione dell'equazione generale differenziale lineare (*) può essere ottenuta tramite la formula

$$x = x_{\rm om} + \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2$$

dove $x_{\rm om}$ è la soluzione *generale* dell'equazione omogenea associata, vale a dire

$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + 4x = 0, \tag{3}$$

mentre $\tilde{x}_1$ e $\tilde{x}_2$ sono rispettivamente soluzioni *particolari* delle equazioni non omogenee

$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + 4x = 8t, \tag{4}$$

$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + 4x = 4e^{2t}. \tag{5}$$

Calcolo di x_{om}. L'equazione caratteristica associata alla (3) è $\lambda^2 - 2a\lambda + 4 = 0$, e le soluzioni sono

$$\lambda_1 = a + \sqrt{a^2 - 4}, \quad \lambda_2 = a - \sqrt{a^2 - 4};$$

in particolare il discriminante è positivo per $a > 2$, nullo per $a = 2$ e negativo per $0 < a < 2$. Pertanto

$$x_{\rm om}(t) = \begin{cases} c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} & \text{per } a > 2, \\ e^{2t}(c_1 + c_2 t) & \text{per } a = 2, \\ e^{at}(c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)) & \text{per } 0 < a < 2, \end{cases}$$

dove $\omega := \sqrt{|a^2 - 4|}$ e c_1, c_2 sono numeri reali qualunque.

Calcolo di $\tilde{x}_1$. Poiché il termine noto della (4) è un polinomio di primo grado, cerco $\tilde{x}_1$ tra i polinomi di primo grado, cioè della forma $\tilde{x}_1 = b_1 t + b_0$. Sostituendo questa espressione nella (4) otteniamo

$$(4b_1 - 8)t + (4b_0 - 2ab_1) = 0,$$

e questa identità è soddisfatta per ogni t se i coefficienti $4b_1 - 8$ e $4b_0 - 2ab_1$ sono entrambi nulli, ovvero se $b_1 = 2$ e $b_0 = a$; la soluzione cercata è quindi

$$\tilde{x}_1 = 2t + a.$$

Calcolo di $\tilde{x}_2$ per $a \neq 2$. Poiché il termine noto della (5) è un multiplo di e^{2t}, e questa funzione non risolve l'equazione omogenea (3), cerco $\tilde{x}_2$ tra i multipli di e^{2t}, cioè della forma $\tilde{x}_1 = be^{2t}$. Sostituendo questa espressione nella (4) otteniamo l'identità $(8 - 4a)be^{2t} = 4e^{2t}$, che è soddisfatta se $(8 - 4a)b = 4$, ovvero se $b = 1/(2 - a)$; la soluzione cercata è quindi

$$\tilde{x}_2 = \frac{e^{2t}}{2 - a} \quad \text{per } a \neq 2.$$

Calcolo di $\tilde{x}_2$ per $a = 2$. In questo caso sia e^{2t} che te^{2t} risolvono l'equazione omogenea (3), e quindi cerco $\tilde{x}_2$ della forma $\tilde{x}_1 = bt^2 e^{2t}$. Sostituendo questa espressione nella (4) otteniamo l'identità $2be^{2t} = 4e^{2t}4$, che è soddisfatta per $b = 2$; la soluzione cercata è quindi

$$\tilde{x}_2 = 2t^2 e^{2t} \quad \text{per } a = 2.$$

c) Per quanto visto sopra, per $a > 2$ la soluzione generale della (*) è

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + t + 2 + \frac{e^{2t}}{2 - a}.$$

Osserviamo ora che $\lambda_1 > \lambda_2$ e $\lambda_1 > a > 2$, quindi tutti gli addendi alla destra dell'uguale nell'equazione precedente (tranne il primo, ovviamente) sono trascurabili rispetto a $e^{\lambda_1 t}$ per $t \to +\infty$; pertanto

$$x(t) \sim c_1 e^{\lambda_1 t} \quad \text{se } c_1 \neq 0,$$

da cui segue che

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{t\to+\infty} c_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{cases} +\infty & \text{se } c_1 > 0, \\ -\infty & \text{se } c_1 < 0. \end{cases}$$

In particolare la soluzione $x(t)$ tende a $+\infty$ se $c_1 > 0$ (qualunque sia c_2).

4. a) Osserviamo che la funzione $f(x)$ è ben definita, positiva e continua per $x > 0$, ma non è definita per $x = 0$; quindi l'integrale da studiare è improprio semplice in 0 ed ammette solo due comportamenti: o converge a un numero finito (positivo), oppure diverge a $+\infty$.
Per capire quale dei due casi si verifica, studio il comportamento asintotico di $f(x)$ per $x \to 0$. Usando lo sviluppo $e^t - 1 \sim t$ per $t \to 0$ con $t = x^a$ ottengo $\exp(x^a) - 1 \sim x^a$ e dunque

$$f(x) := \frac{1}{(\exp(x^a) - 1)^{a+4}} \sim \frac{1}{x^{a(a+4)}}\,.$$

Quindi

$$\int_0^1 f(x)\,dx \quad \text{si comporta come} \quad \int_0^1 \frac{dx}{x^{a(a+4)}}\,,$$

e pertanto è finito se e solo se $a(a+4) < 1$, vale a dire $0 < a < -2 + \sqrt{5}$.
b) Questo integrale è improprio semplice in $+\infty$, e come il precedente ammette solo due casi: o converge a un numero positivo finito oppure diverge a $+\infty$. Usando che $e^t \gg t^b$ per $t \to +\infty$ e per ogni $b > 0$ ottengo

$$\exp(x^a) - 1 \sim \exp(x^a) \gg (x^a)^b = x^{ab}$$

e quindi

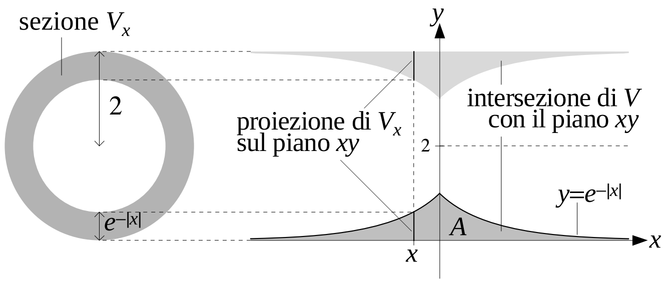
$$(\exp(x^a) - 1)^{a+4} \gg x^{ba(a+4)}\,.$$

Prendendo ora $b = \frac{2}{a(a+4)}$ ottengo

$$(\exp(x^a) - 1)^{a+4} \gg x^2\,, \quad f(x) := \frac{1}{(\exp(x^a) - 1)^{a+4}} \ll \frac{1}{x^2}\,,$$

e pertanto l'integrale $\int_1^\infty f(x)\,dx$ è finito per confronto asintotico con $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$, per ogni $a > 0$.

5. a) Per ogni $x \in R$ indico con V_x la sezione ottenuta intersecando V con il piano ortogonale all'asse delle x e passante per il punto x (o meglio il punto $(x, 0, 0)$).



Come si vede dal disegno, V_x è una corona circolare con raggio esterno $r_e = 2$ e raggio interno $r_i = 2 - e^{-|x|}$, e quindi

$$\text{area}(V_x) = \pi\big(r_e^2 - r_i^2\big) = \pi\big(4 - (2 - e^{-|x|})^2\big) = \pi\big(4e^{-|x|} - e^{-2|x|}\big)\,.$$

b) Com'è noto, il volume di V è dato da

$$\text{volume}(V) = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{area}(V_x)\,dx = \pi \int_{-\infty}^{+\infty} 4e^{-|x|} - e^{-2|x|}\,dx\,,$$

e siccome la funzione integranda è pari, l'ultimo integrale è il doppio di quello con estremi di integrazione 0 e $+\infty$, vale a dire

$$\text{volume}(V) = 2\pi \int_0^{+\infty} 4e^{-x} - e^{-2x}\, dx = 2\pi \bigg| -4e^{-x} + \frac{e^{-2x}}{2} \bigg|_0^{+\infty} = 7\pi\,.$$

Seconda parte, gruppo 2.

1. Analogo al gruppo 1:

$$\text{p.p.}(f(x)) = -2x^4\,; \quad \text{p.p.}\big(f(x) - ax^4\big) = \begin{cases} (-2-a)x^4 & \text{per } a \neq -2; \\ 2x^8 & \text{per } a = -2. \end{cases}$$

2. b) Analogo al gruppo 1: i valori di a cercati sono $a \leq 4e$.
   a) Siccome $21/2 < 4e$ la disuguaglianza in questione vale per ogni $x > 0$.

3. Analogo al gruppo 1.
   a) e b). La soluzione è $x = x_{\text{om}} + \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2$ dove:

$$x_{\text{om}}(t) = \begin{cases} c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} & \text{per } a > 2, \\ e^{2t}(c_1 + c_2 t) & \text{per } a = 2, \\ e^{at}(c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)) & \text{per } 0 < a < 2, \end{cases}$$

   con $\lambda_1 := a + \sqrt{a^2 - 9}$, $\lambda_2 := a - \sqrt{a^2 - 9}$, $\omega := \sqrt{|a^2 - 9|}$, e c_1, c_2 numeri reali qualunque;

$$\tilde{x}_1 = t + \frac{2a}{9}\,, \quad \tilde{x}_2 = \begin{cases} \frac{e^{3t}}{3-a} & \text{se } a \neq 3, \\ 3t^2 e^{3t} & \text{se } a = 3. \end{cases}$$

   c) La soluzione $x(t)$ tende a $+\infty$ se $c_1 > 0$ (qualunque sia c_2).

4. Uguale al gruppo 1.

5. Analogo al gruppo 1: la sezione V_x è una corona circolare con raggio esterno $r_e = 3$ e raggio interno $r_i = 3 - e^{-|x|}$, e quindi

$$\text{area}(V_x) = \pi\big(6e^{-|x|} - e^{-2|x|}\big)\,, \quad \text{volume}(V) = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{area}(V_x)\, dx = 11\,\pi\,.$$

Seconda parte, gruppo 3.

1. Uguale al gruppo 1.

2. b) Uguale al gruppo 1: i valori di a cercati sono $a \leq 2e$.
   a) Siccome $11/2 > 2e$ la disuguaglianza in questione non vale per ogni $x > 0$.

3. Analogo al gruppo 1.
   a) e b). La soluzione è $x = x_{\text{om}} + \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2$ dove:

$$x_{\text{om}}(t) = \begin{cases} c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} & \text{per } a > 2, \\ e^{2t}(c_1 + c_2 t) & \text{per } a = 2, \\ e^{at}(c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)) & \text{per } 0 < a < 2, \end{cases}$$

   con $\lambda_1 := a + \sqrt{a^2 - 4}$, $\lambda_2 := a - \sqrt{a^2 - 4}$, $\omega := \sqrt{|a^2 - 4|}$, e c_1, c_2 numeri reali qualunque;

$$\tilde{x}_1 = t + \frac{a}{2}\,, \quad \tilde{x}_2 = \begin{cases} \frac{e^{2t}}{a-2} & \text{se } a \neq 2, \\ -2t^2 e^{2t} & \text{se } a = 2. \end{cases}$$

   c) La soluzione $x(t)$ tende a $+\infty$ se $c_1 < 0$ (qualunque sia c_2).

4. Analogo al gruppo 1: l'integrale in a) è finito se $0 < a < -1 + \sqrt{2}$, mentre l'integrale in b) è finito per ogni $a > 0$.

5. Uguale al gruppo 1.

SECONDA PARTE, GRUPPO 4.

1. Uguale al gruppo 2.

2. b) Uguale al gruppo 2: i valori di a cercati sono $a \leq 4e$.
   a) Siccome $11 > 4e$ la disuguaglianza in questione non vale per ogni $x > 0$.

3. Analogo al gruppo 1.
   a) e b). La soluzione è $x = x_{\rm om} + \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2$ dove:
$$x_{\rm om}(t) = \begin{cases} c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} & \text{per } a > 2, \\ e^{2t}(c_1 + c_2 t) & \text{per } a = 2, \\ e^{at}(c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)) & \text{per } 0 < a < 2, \end{cases}$$
   con $\lambda_1 := a + \sqrt{a^2 - 9}$, $\lambda_2 := a - \sqrt{a^2 - 9}$, $\omega := \sqrt{|a^2 - 9|}$, e c_1, c_2 numeri reali qualunque;
$$\tilde{x}_1 = 3t + \frac{2a}{3}\,, \quad \tilde{x}_2 = \begin{cases} \frac{e^{3t}}{a-3} & \text{se } a \neq 3, \\ -3t^2 e^{3t} & \text{se } a = 3. \end{cases}$$
   c) La soluzione $x(t)$ tende a $+\infty$ se $c_1 < 0$ (qualunque sia c_2).

4. Uguale al gruppo 3.

5. Uguale al gruppo 2.

COMMENTI

- Seconda parte, esercizio 1. Diversi dei presenti hanno calcolato la parte principale di $f(x)$ come segue (tralascio i resti, che non sono il punto):
$$f(x) := \big(\cos(2x^2)\big)^{1/x^2} - 1 = (1 - 2x^4)^{1/x^2} - 1 = 1 + \frac{1}{x^2}(-2x^4) - 1 = -2x^2\,,$$
  dove nel secondo passaggio è stato usato lo sviluppo $(1+t)^a = 1 + at$ con $t = -2x^4$ e $a = 1/x^2$. Anche se il risultato è corretto, la procedura è sbagliata perché non si può applicare questo sviluppo con a non costante. E infatti in situazioni analoghe questa procedura porta a risultati errati.

- Seconda parte, esercizio 2. Molti dei presenti hanno riscritto la disequazione $\exp(x^2) \geq x^a$ (mi riferisco qui al gruppo 1) come $x^2 \geq a \log x$, e quindi hanno diviso per $\log x$ ottenendo $x^2/\log x \geq a$, ma questo passaggio non è corretto perché $\log x$ non è sempre positivo. Con poche eccezioni, le stesse persone hanno quindi cercato di calcolare il minimo di $f(x) := x^2/\log x$ per $x > 0$ senza accorgersi che questa funzione ha un'asintoto verticale in 1 (dove non è definita) e che l'estremo inferiore dei valori è $-\infty$; in particolare queste persone non si sono accorte che $\sqrt{e}$ è solo un punti di minimo locale di $f(x)$. Anche se il risultato finale è corretto, questa soluzione è concettualmente sbagliata (in modo anche grave).

- Seconda parte, esercizio 2. Una soluzione alternativa consiste nel riscrivere la disequazione come $x^{-a}\exp(x^2) \geq 1$ (mi riferisco al gruppo 1) e quindi calcolare il valore minimo della funzione $x^{-a}\exp(x^2)$ tra tutti gli $x > 0$.
  Un'altra soluzione consiste nel riscrivere la disequazione come $x^2 - a\log x \geq 0$ e quindi calcolare il valore minimo della funzione $x^2 - a\log x$ tra tutti gli $x > 0$.

- Seconda parte, esercizio 3. Diversi dei presenti hanno omesso di scrivere la soluzione dell'equazione omogenea nel caso in cui l'equazione caratteristica ha radici complesse, oppure l'hanno scritta incompleta (senza specificare i valori di ρ e ω che appaiono nella formula) oppure sbagliata (per esempio, nel caso del gruppo 1, alcuni hanno scritto $\omega = \sqrt{a^2 - 4}$, per cui ω non è un numero reale).

- Seconda parte, esercizio 3. Nel calcolare le costanti che determinano le soluzioni particolari, alcuni dei presenti hanno ottenuto valori che dipendono da t, per cui le costanti non sono costanti; questo è un errore grave.

- Seconda parte, esercizio 3. Il punto c) è stato svolto da pochi, e pochissimi hanno messo chiaramente in evidenza il punto chiave, vale a dire che la soluzione è asintoticamente equivalente a $c_1 e^{\lambda_1 t}$ (quando $c_1 \neq 0$).

- Seconda parte, esercizio 4. Molti dei presenti hanno dato la risposta corretta al punto b), vale a dire che l'integrale è finito per ogni $a > 0$, ma senza dare alcuna dimostrazione, o nel migliore dei casi dicendo che la funzione integranda è trascurabile rispetto a $1/x^2$ per $x \to +\infty$. Questo fatto è vero, ma non così evidente da non richiedere alcuna dimostrazione. (La sensazione è che per molti l'integrale converge semplicemente perché c'è un esponenziale di mezzo...)

Prima parte, gruppo 1.

1. Le soluzioni sono $\frac{7}{12}\pi \le x \le \frac{11}{12}\pi$.

2. Il punto di minimo assoluto è $x = -3/2$; il punto di massimo assoluto non esiste.

3. I risultati sono: a) non esiste; b) $+\infty$; c) 1.

4. Utilizzando il cambio di variabile $y = 1 + 4x^8$ ottengo

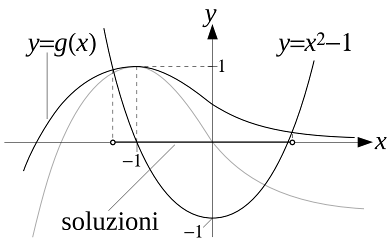
$$\int_{-\infty}^{0} \frac{x^7}{(1+4x^8)^4}\, dx = \frac{1}{32}\int_{+\infty}^{1} \frac{dy}{y^4} = -\frac{1}{96}\left|\frac{1}{y^3}\right|_{+\infty}^{1} = -\frac{1}{96}\,.$$

5. I valori di a cercati sono $a > 2$.

6. $R = +\infty$.

7. Cerco x tra i polinomi di secondo grado, vale a dire $x = at^2 + bt + c$, e ottengo $x = 2t^2 - 4$.

8.



Prima parte, gruppo 2.

1. Le soluzioni sono $\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{2}{3}\pi$.

2. Il punto di minimo assoluto non esiste; il punto di massimo assoluto è $x = 4$.

3. I risultati sono: a) 1; b) 0; c) non esiste.

4. Utilizzando il cambio di variabile $y = 1 + 4x^4$ ottengo

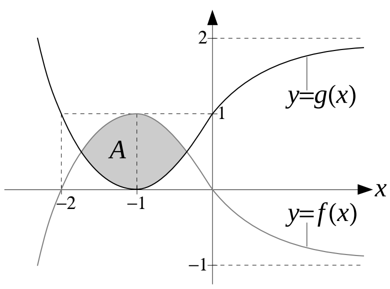
$$\int_{-\infty}^{0} \frac{x^3}{(1+4x^4)^3}\, dx = \frac{1}{16}\int_{+\infty}^{1} \frac{dy}{y^3} = -\frac{1}{32}\left|\frac{1}{y^2}\right|_{+\infty}^{1} = -\frac{1}{32}\,.$$

5. I valori di a cercati sono $0 < a < 2$.

6. $R = 0$.

7. Cerco x tra i polinomi di secondo grado, vale a dire $x = at^2 + bt + c$, e ottengo $x = t^2 - 1$.

8.



Prima parte, gruppo 3.

1. Le soluzioni sono $\dfrac{\pi}{6} \le x \le \dfrac{5}{6}\pi$.

2. Il punto di minimo assoluto è $x = -3/2$; il punto di massimo assoluto è $x = 0$.

3. I risultati sono: a) 0; b) $+\infty$; c) non esiste.

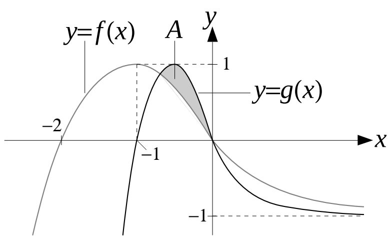
4. Utilizzando il cambio di variabile $y = 1 + 4x^6$ ottengo

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{x^5}{(1+4x^6)^2}\, dx = \frac{1}{24}\int_{+\infty}^{1} \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{24}\left|\frac{1}{y^1}\right|_{+\infty}^{1} = -\frac{1}{24}\,.$$

5. I valori di a cercati sono $a > 3$.

6. $R = +\infty$.

7. Cerco x tra i polinomi di secondo grado, vale a dire $x = at^2 + bt + c$, e ottengo $x = -2t^2 - 2$.

8. 

Prima parte, gruppo 4.

1. Le soluzioni sono $\dfrac{2}{3}\pi \le x \le \dfrac{5}{6}\pi$.

2. Il punto di minimo assoluto non esiste; il punto di massimo assoluto è $x = 3$.

3. I risultati sono: a) -2; b) $-\infty$; c) 1.

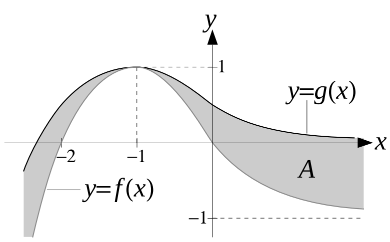
4. Utilizzando il cambio di variabile $y = 1 + 4x^8$ ottengo

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{x^7}{(1+4x^8)^5}\, dx = \frac{1}{32}\int_{+\infty}^{1} \frac{dy}{y^5} = -\frac{1}{128}\left|\frac{1}{y^4}\right|_{+\infty}^{1} = -\frac{1}{128}\,.$$

5. I valori di a cercati sono $a > 3$.

6. $R = 2$.

7. Cerco x tra i polinomi di secondo grado, vale a dire $x = at^2 + bt + c$, e ottengo $x = -2t^2 + 4$.

8. 

Prima parte, gruppo 5.

1. Le soluzioni sono $\frac{5}{12}\pi \leq x \leq \frac{7}{12}\pi$.

2. Il punto di minimo assoluto è $x = -2$; il punto di massimo assoluto non esiste.

3. I risultati sono: a) 1; b) 0; c) 1.

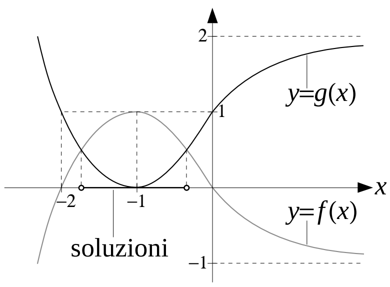
4. Utilizzando il cambio di variabile $y = 1 + 4x^4$ ottengo

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{x^3}{(1+4x^4)^4}\, dx = \frac{1}{16}\int_{+\infty}^{1} \frac{dy}{y^4} = -\frac{1}{48}\left|\frac{1}{y^3}\right|_{+\infty}^{1} = -\frac{1}{48}\,.$$

5. I valori di a cercati sono $0 < a < 3$.

6. $R = \frac{5}{2}$.

7. Cerco x tra i polinomi di secondo grado, vale a dire $x = at^2 + bt + c$, e ottengo $x = -t^2 + 1$.

8. 

Prima parte, gruppo 6.

1. Le soluzioni sono $\frac{\pi}{12} \leq x \leq \frac{11}{12}\pi$.

2. Il punto di minimo assoluto è $x = 0$; il punto di massimo assoluto è $x = 3$.

3. I risultati sono: a) non esiste; b) 0; c) non esiste.

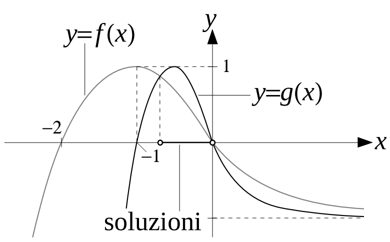
4. Utilizzando il cambio di variabile $y = 1 + 4x^6$ ottengo

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{x^5}{(1+4x^6)^3}\, dx = \frac{1}{24}\int_{+\infty}^{1} \frac{dy}{y^3} = -\frac{1}{48}\left|\frac{1}{y^2}\right|_{+\infty}^{1} = -\frac{1}{48}\,.$$

5. I valori di a cercati sono $a > 2$.

6. $R = \frac{2}{5}$.

7. Cerco x tra i polinomi di secondo grado, vale a dire $x = at^2 + bt + c$, e ottengo $x = -t^2 - 1$.

8. 

Seconda parte, gruppo 1.

1. Dividendo l'equazione (*) per $x^2 - 3$ ottengo

$$\frac{e^x}{x^2-3} = a \tag{1}$$

(il passaggio è corretto perché $x^2 - 3$ vale zero solo per $x = \pm\sqrt{3}$, e queste non sono soluzioni dell'equazione). Studio quindi la funzione

$$f(x) := \frac{e^x}{x^2-3}\,.$$

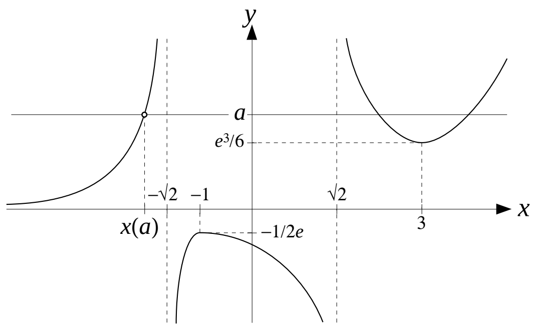
Questa funzione è definita per ogni $x \neq \pm\sqrt{3}$, è negativa per $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$ e positiva altrimenti. Inoltre

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to(-\sqrt{3})^-} f(x) = \lim_{x\to(\sqrt{3})^+} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \\ &\lim_{x\to(-\sqrt{3})^+} f(x) = \lim_{x\to(\sqrt{3})^-} f(x) = -\infty\,, \\ &\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0\,. \end{aligned}$$

Infine, studiando il segno della derivata

$$f'(x) = \frac{e^x}{(x^2-3)^2}(x^2-2x-3)$$

ottengo che f cresce negli intervalli $(-\infty, -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}, -1]$ e $[3, +\infty)$, e decresce negli intervalli $(-1, \sqrt{3})$ e $(\sqrt{3}, 3]$. In particolare -1 è un punto di massimo locale, e $f(-1) = -1/(2e)$, mentre 3 un punto di minimo locale, e $f(3) = e^3/6$.
Utilizzando queste informazioni traccio il grafico riportato nella figura sotto.



a) Chiamo N il numero di soluzioni dell'equazione (*), o equivalentemente dell'equazione (1). Usando dalla figura sopra si vede subito che

$$N = \begin{cases} 1 & \text{per } 0 < a < e^3/6, \\ 2 & \text{per } a = e^3/6, \\ 3 & \text{per } a > e^3/6. \end{cases}$$

b) Sempre dalla figura sopra è evidente che $x(a)$ tende a $L = -\sqrt{3}$ per $a \to +\infty$.

c) Devo trovare la parte principale per $a \to +\infty$ di

$$z(a) := x(a) - L = x(a) + \sqrt{3}\,.$$

Sostituendo x con $z - \sqrt{3}$ l'equazione (1) diventa

$$a = \frac{e^x}{x^2-3} = \frac{e^{z-\sqrt{3}}}{(z-\sqrt{3})^2-3} = \frac{e^{z-\sqrt{3}}}{z^2-2\sqrt{3}\,z} \tag{2}$$

(attenzione, anche se non lo scrivo esplicitamente, sia x che z sono funzioni di a). Ora, siccome $z(a) \to 0$ per $a \to +\infty$, ho che

$$\frac{e^{z-\sqrt{3}}}{z^2-2\sqrt{3}\,z} \sim \frac{e^{-\sqrt{3}}}{-2\sqrt{3}\,z} = -\frac{1}{2\sqrt{3}\,e^{\sqrt{3}}z}$$

e quindi l'equazione (2) diventa

$$a \sim -\frac{1}{2\sqrt{3}\, e^{\sqrt{3}}\, z} \quad \text{ovvero} \quad z \sim -\frac{1}{2\sqrt{3}\, e^{\sqrt{3}}\, a} .$$

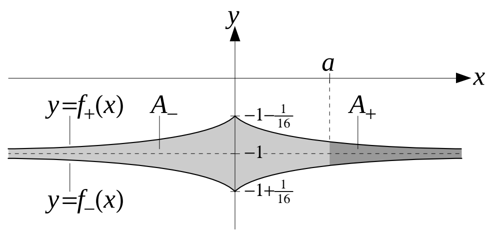
In conclusione

$$\text{p.p.}\big(x(a) - L\big) = \text{p.p.}(z(a)) = -\frac{1}{2\sqrt{3}\, e^{\sqrt{3}}} \cdot \frac{1}{a} \quad \text{per } a \to +\infty.$$

2. a) Riscrivo la disequazione che determina i punti di A come

$$\underbrace{-1 - \frac{1}{(|x|+2)^4}}_{f_-(x)} \leq y \leq \underbrace{-1 + \frac{1}{(|x|+2)^4}}_{f_+(x)} .$$

Disegno i grafici delle due funzioni $f_-(x)$ e $f_+(x)$ partendo dal grafico (ben noto!) della funzione $1/x^4$, e ottengo il disegno sottostante, dove A è l'insieme in grigio.



L'area di A è dunque data dall'integrale improprio

$$\begin{aligned} \text{area}(A) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_+(x) - f_-(x)\, dx \\ &= 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(|x|+2)^4} = 4\int_0^{+\infty} (x+2)^{-4}\, dx = 4 \left| \frac{(x+2)^{-3}}{-3} \right|_0^{+\infty} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

(nel terzo passaggio ho utilizzato che la funzione integranda è pari per passare dall'integrale da $-\infty$ a $+\infty$ all'integrale da 0 a $+\infty$).

b) Considero una generica retta verticale di equazione $x = a$ con $a > 0$, e indico con A_- e A_+ le parti di A che stanno rispettivamente a sinistra e a destra di questa retta (vedere la figura sopra). Il punto è trovare a in modo tale che A_+ (la parte più "piccola") soddisfi

$$\text{area}(A_+) = \frac{1}{18} , \tag{3}$$

così facendo si ottiene infatti che $\text{area}(A_-) = \text{area}(A) - \text{area}(A_+) = 1/9$, e quindi l'area di A_- è il doppio di quella di A_+.

Poiché l'area di A_+ è data da

$$\text{area}(A_+) = 2\int_a^{+\infty} (x+2)^{-4}\, dx = 2\left| \frac{(x+2)^{-3}}{-3} \right|_a^{+\infty} = \frac{2}{3(a+2)^3} ,$$

imponendo la (3) ottengo

$$\frac{2}{3(a+2)^3} = \frac{1}{18} \quad \text{cioè} \quad a = \sqrt[3]{12} - 2 \simeq 0{,}29 .$$

3. a) Si tratta di una serie a termini positivi, che quindi converge ad un numero finito oppure diverge a $+\infty$. Applico ora il criterio del rapporto: indicando con a_n l'n-esimo addendo della serie ottengo

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a^{((n+1)^2)}}{(n+1)^2+1} \Bigg/ \frac{a^{(n^2)}}{n^2+1} = a^{2n+1} \frac{n^2+1}{n^2+2n+2} \sim a^{2n+1} \quad \text{per } n \to +\infty,$$

e quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1, \\ 1 & \text{se } a = 1, \\ 0 & \text{se } 0 < a < 1. \end{cases}$$

Pertanto la serie converge per $a < 1$ e diverge per $a > 1$.
Per $a = 1$ il criterio del rapporto non permette di determinare il comportamento della serie, ma il criterio del confronto asintotico mostra che la serie si comporta come la serie armonica generalizzata $\sum 1/n^2$, e in particolare converge.

b) Faccio vedere che la serie

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n^2+1)\, 2^{(n^2)}}$$

è approssimata dalla somma parziale

$$S_2 = \sum_{n=1}^{2} \frac{1}{(n^2+1)\, 2^{(n^2)}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{80} = \frac{21}{80} = 2{,}625$$

con errore inferiore a 10^{-3}, ovvero che

$$|S - S_2| \leq 10^{-3}\,. \tag{4}$$

Osservo per cominciare che

$$S - S_2 = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n^2+1)\, 2^{(n^2)}}\,;$$

questo dimostra che $S - S_2$ è un numero positivo, e quindi la stima (4) si riduce a $S - S_2 \leq 10^{-3}$.
Osservo inoltre che per $n \geq 3$ si ha $n^2 + 1 \geq 3^2 + 1 = 10$ e $n^2 \geq 3n$, e quindi

$$\frac{1}{(n^2+1)\, 2^{(n^2)}} \leq \frac{1}{10 \cdot 2^{3n}}\,,$$

da cui si ottiene infine

$$\begin{aligned} S - S_2 &= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n^2+1)\, 2^{(n^2)}} \\ &\leq \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{10 \cdot 2^{3n}} = \frac{1}{10} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{8^n} = \frac{1}{10 \cdot 8^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{8^n} \\ &= \frac{1}{10 \cdot 8^3} \cdot \frac{1}{1 - 1/8} = \frac{1}{10 \cdot 8^2 \cdot 7} = \frac{1}{4480} \leq \frac{1}{10^3} \end{aligned}$$

(nella terza riga ho usato la formula per la serie geometrica di base $1/8$).

SECONDA PARTE, GRUPPO 2.

1. Procedo come per il gruppo 1 e riscrivo l'equazione nella forma $f(x) = a$ con

$$f(x) := \frac{e^x}{x^2 - 8}\,.$$

Il grafico di f assomiglia a quello del gruppo 1, con le seguenti differenze:

- gli asintoti verticali sono in $\pm\sqrt{8}$;
- il punto di minimo locale è $x = -2$, e $f(-2) = -1/(4e^2)$;
- il punto di massimo locale è $x = 4$, e $f(4) = e^4/8$.

a) Partendo dal grafico di f si vede subito che

$$N = \begin{cases} 1 & \text{per } 0 < a < e^4/8, \\ 2 & \text{per } a = e^4/8, \\ 3 & \text{per } a > e^4/8. \end{cases}$$

b) Partendo dal grafico di f si vede subito che $L = -\sqrt{8}$.

c) Procedendo come per il gruppo 1 si ottiene $\text{p.p.}\big(x(a) - L\big) = -\dfrac{1}{4\sqrt{2}\, e^{\sqrt{8}}} \cdot \dfrac{1}{a}$.

2. Analogo al gruppo 1.
   a) $\text{area}(A) = 1/8$.
   b) La retta cercata è quella di equazione $x = \sqrt{24} - 4 \simeq 0{,}90$.

3. a) Simile al gruppo 1. Usando il criterio del rapporto si vede che la serie S converge per $a < 1$ e diverge per $a > 1$, e diverge anche per $a = 1$ per confronto asintotico con la serie armonica.
   b) La serie S si approssima con la somma parziale
$$S_2 = \sum_{n=1}^{2} \frac{1}{(n+2)\,2^{(n^2)}} = \frac{1}{6} + \frac{1}{64} = 0{,}1822\dots$$
   con errore inferiore a 10^{-3}. Per dimostrarlo procedo come per il gruppo 1, partendo dalla stima
$$\frac{1}{(n+2)\,2^{(n^2)}} \leq \frac{1}{5\cdot 2^{3n}}\,,$$
   da cui ottengo
$$S - S_2 = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2^{(n^2)}(n^2+1)} \leq \frac{1}{10} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{8^n} = \frac{1}{2240} \leq \frac{1}{10^3}\,.$$

Seconda parte, gruppo 3.

1. Procedo come per il gruppo 1 e riscrivo l'equazione nella forma $f(x) = a$ con
$$f(x) := \frac{e^x}{x^2-3}\,.$$
   La funzione f è la stessa del gruppo 1 (il cui grafico è stato disegnato sopra).
   a) Partendo dal grafico di f si vede subito che
$$N = \begin{cases} 0 & \text{per } -1/(2e) < a < 0, \\ 1 & \text{per } a = -1/(2e), \\ 2 & \text{per } a < -1/(2e). \end{cases}$$
   b) Partendo dal grafico di f si vede subito che $L = +\sqrt{3}$.
   c) Procedendo come per il gruppo 1 si ottiene $\text{p.p.}\big(x(a) - L\big) = \dfrac{e^{\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}} \cdot \dfrac{1}{a}$.

2. Analogo al gruppo 1.
   a) $\text{area}(A) = 1/6$.
   b) La retta cercata è quella di equazione $x = \sqrt[3]{12} - 2 \simeq 0{,}29$.

3. Uguale al gruppo 1.

Seconda parte, gruppo 4.

1. Procedo come per il gruppo 1 e riscrivo l'equazione nella forma $f(x) = a$ con
$$f(x) := \frac{e^x}{x^2-8}\,.$$
   La funzione f è la stessa del gruppo 2.
   a) Partendo dal grafico di f si vede subito che
$$N = \begin{cases} 0 & \text{per } -1/(4e^2) < a < 0, \\ 1 & \text{per } a = -1/(4e^2), \\ 2 & \text{per } a < -1/(4e^2). \end{cases}$$

b) Partendo dal grafico di f si vede subito che $L = +\sqrt{8}$.

c) Procedendo come per il gruppo 1 si ottiene $\text{p.p.}\big(x(a) - L\big) = \dfrac{e^{\sqrt{8}}}{4\sqrt{2}} \cdot \dfrac{1}{a}$.

2. Analogo al gruppo 1.
   a) $\text{area}(A) = 1/8$.
   b) La retta cercata è quella di equazione $x = \sqrt{24} - 4 \simeq 0{,}90$.

3. Uguale al gruppo 2.

COMMENTI

- Seconda parte, esercizio 1. La maggior parte dei presenti, pur avendo svolto correttamente il punto a), non ha risolto il punto b) che pure è elementare, e sopratutto analogo ad esercizi già dati in più di un'occasione in passato.

- Seconda parte, esercizio 3. È possibile affrontare il punto a) in molti altri modi; per esempio, utilizzando il criterio della radice invece che il criterio del rapporto. Inoltre per dimostrare che la serie diverge per $a > 1$ si può usare che l'addendo a_n tende a $+\infty$, mentre per dimostrare che converge per $a < 1$ si può usare il confronto con la serie geometrica a^n: vale infatti che $a_n \leq a^{n^2} \leq a^n$ per ogni n (per tutti i gruppi).

PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. a) $\dfrac{2x}{x^4-2x^2+2}$; b) $\dfrac{4}{x}-1$.

2. $b \ll c \ll a \ll d$.

3. $\alpha = \pi/4$.

4. Utilizzando la sostituzione $y = x^4+1$ si ottiene

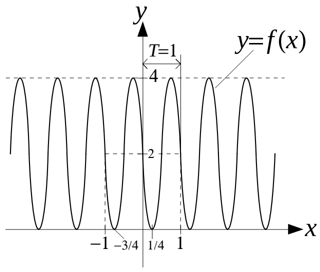
$$\int_0^1 \frac{2x^3}{\sqrt[4]{x^4+1}}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 y^{-1/4}dy = \frac{1}{2}\left|\frac{y^{3/4}}{3/4}\right|_1^2 = \frac{2}{3}(2^{3/4}-1)\,.$$

5. $f(x)= (1+2x^4)\log(1+2x^4) = (1+2x^4)\big(2x^4-2x^8+O(x^{12})\big) = 2x^4+2x^8+O(x^{12})$.

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^4\sin(1/n^a)}{n^{2a}+n^a} \approx \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^4/n^a}{n^{2a}} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{3a-4}}$ converge per $a>5/3$.

7. La soluzione cercata è $x(t) = -2\cos(2t)+2$

8. Il periodo è $T=1$; il grafico è disegnato nella figura accanto.



PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. a) $\dfrac{6x^5}{\sqrt{2x^6-x^{12}}} = \dfrac{\pm 6x^2}{\sqrt{2-x^6}}$; b) $\dfrac{3}{x}-\log 2$.

2. $b \ll d \ll a \ll c$.

3. $\alpha = -\pi/4$.

4. Utilizzando la sostituzione $y = x^6+1$ si ottiene

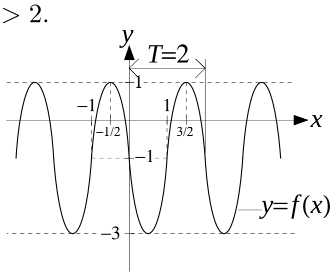
$$\int \frac{2x^5}{\sqrt[3]{x^6+1}}\,dx = \frac{1}{3}\int y^{-1/3}dy = \frac{1}{2}y^{2/3}+c = \frac{1}{2}(x^6+1)^{2/3}+c\,.$$

5. $f(x)= (3+x^4)\sin(2x^2) = (3+x^4)\big(2x^2-\tfrac{4}{3}x^6+O(x^{10})\big) = 6x^2-2x^6+O(x^{10})$.

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4^n\log(1+1/a^n)}{a^n+n^2} \approx \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4^n/a^n}{a^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}(4/a^2)^n$ converge per $a>2$.

7. La soluzione cercata è $x(t) = -\cos(2t)+1$

8. Il periodo è $T=2$; il grafico è disegnato nella figura accanto.



PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. a) $\dfrac{4x^3}{x^8+2x^4+2}$; b) $\dfrac{2}{x}-\log 3$.

2. $d \ll a \ll b \ll c$.

3. $\alpha = 3\pi/4$.

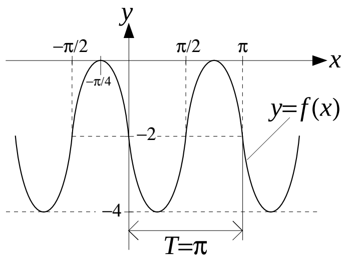
4. Utilizzando la sostituzione $y = x^6 + 1$ si ottiene
$$\int_0^1 \frac{2x^5}{x^6+1}\,dx = \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{dy}{y} = \frac{1}{3}\bigg|\log y\bigg|_1^2 = \frac{1}{3}\log 2\,.$$

5. $f(x)= (1-x^4)\log(1+2x^4) = (1-x^4)\big(2x^4 - 2x^8 + O(x^{12})\big) = 2x^4 - 4x^8 + O(x^{12})$.

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^4\sin(1/n^a)}{2^n+1} \approx \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{4-a}}{2^n}$ converge per ogni $a > 0$.

7. La soluzione cercata è $x(t) = -\cos(3t) + 1$

8. Il periodo è $T = \pi$; il grafico è disegnato nella figura accanto.



PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. a) $\displaystyle\frac{4x^3}{\sqrt{2x^4-x^8}} = \frac{4x}{\sqrt{2-x^4}}$; b) $\displaystyle 1 - \frac{4}{x}$.

2. $b \ll c \ll a \ll d$.

3. $\alpha = -\pi/4$.

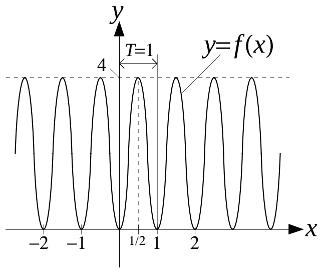
4. Utilizzando la sostituzione $y = x^4 + 1$ si ottiene
$$\int \frac{2x^3}{\sqrt[4]{x^4+1}}\,dx = \frac{1}{2}\int y^{-1/4}dy = \frac{2}{3}y^{3/4} + c = \frac{2}{3}(x^4+1)^{3/4} + c\,.$$

5. $f(x)= (3-x^4)\sin(2x^2) = (3-x^4)\big(2x^2 - \frac{4}{3}x^6 + O(x^{10})\big) = 6x^2 - 6x^6 + O(x^{10})$.

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^4\sin(1/n^a)}{n^{3a}+n^a} \approx \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^4/n^a}{n^{3a}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{4a-4}}$ converge per $a > 5/4$.

7. La soluzione cercata è $x(t) = -\sin(2t) + 2t$

8. Il periodo è $T = 1$; il grafico è disegnato nella figura accanto.



PRIMA PARTE, GRUPPO 5.

1. a) $\displaystyle\frac{2x}{x^4+2x^2+2}$; b) $\displaystyle\log 2 - \frac{3}{x}$.

2. $c \ll b \ll a \ll d$.

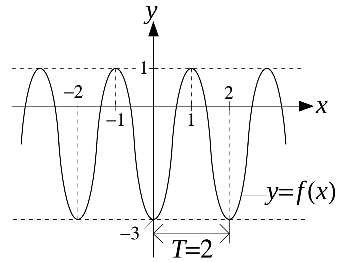
3. $\alpha = -3\pi/4$.

4. Utilizzando la sostituzione $y = x^6 + 1$ si ottiene
$$\int_0^1 \frac{2x^5}{\sqrt[3]{x^6+1}}\,dx = \frac{1}{3}\int_1^2 y^{-1/3}dy = \frac{1}{3}\bigg|\frac{y^{2/3}}{2/3}\bigg|_1^2 = \frac{1}{2}(2^{2/3}-1)\,.$$

5. $f(x)= (1-x^2)\log(1+2x^2) = (1-x^2)\big(2x^2 - 2x^4 + O(x^6)\big) = 2x^2 - 4x^4 + O(x^6)$.

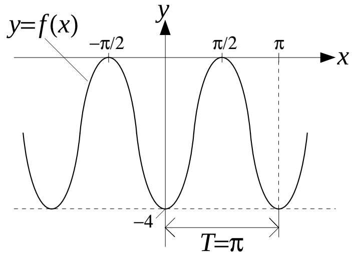
6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n\log(1+1/a^n)}{a^{3n}+n^2} \approx \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n/a^n}{a^{3n}} = \sum_{n=1}^{+\infty}(4/a^4)^n$ converge per $a > \sqrt{2}$.

7. La soluzione cercata è $x(t) = -\frac{1}{2}\sin(2t) + t$
8. Il periodo è $T = 2$; il grafico è disegnato nella figura accanto.



Prima parte, gruppo 6.

1. a) $\dfrac{2x}{\sqrt{2x^2 - x^4}} = \dfrac{\pm 2}{\sqrt{2 - x^2}}$; b) $\log 3 - \dfrac{2}{x}$.
2. $c \ll a \ll d \ll b$.
3. $\alpha = \pi/4$.
4. Utilizzando la sostituzione $y = x^6 + 1$ si ottiene
$$\int \frac{2x^5}{x^6+1}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{dy}{y} = \frac{1}{3}\log y + c = \frac{1}{3}\log(x^6+1) + c\,.$$
5. $f(x)= (3 - x^2)\sin(2x) = (3 - x^2)\big(2x - \frac{4}{3}x^3 + O(x^5)\big) = 6x - 6x^3 + O(x^5)$.
6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n \sin(1/n^a)}{n^{2a} + n^a} \approx \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n}{n^{3a}}$ non converge per alcun $a > 0$.
7. La soluzione cercata è $x(t) = -\frac{1}{3}\sin(3t) + t$
8. Il periodo è $T = \pi$; il grafico è disegnato nella figura accanto.



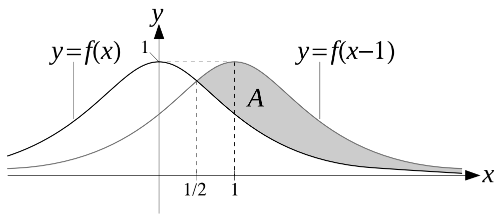
Seconda parte, gruppo 1.

1. a) Usando lo sviluppo $\cos t = 1 - t^2/2 + O(t^4)$ con $t = 2x$ ottengo
$$\cos(2x^2) = 1 - 2x^4 + O(x^8)\,.$$
Usando poi lo sviluppo $(1+t)^6 = 1 + 6t + O(t^2)$ con $t = -2x^4 + O(x^8)$ ottengo
$$\begin{aligned}\big(\cos(2x^2)\big)^6 &= \big(1 - 2x^4 + O(x^8)\big)^6 \\ &= 1 + 6\big[-2x^4 + O(x^8)\big] + O\big[(-2x^4)^2\big] = 1 - 12\,x^4 + O(x^8)\,,\end{aligned}$$
e quindi $f(x) = -12\,x^4 + O(x^8)$, da cui segue infine che
$$\text{p.p.}(f(x)) = -12\,x^4\,.$$
b) Partendo da quanto fatto al punto precedente ottengo subito che
$$\text{p.p.}(f(x) + ax^4) = (a - 12)\,x^4 \quad \text{per } a \neq 12.$$
Per $a = 12$ devo invece usare uno sviluppo più preciso di $f(x)$. Partendo dallo sviluppo $\cos t = 1 - t^2/2 + t^4/24 + O(t^6)$ con $t = 2x$ ottengo
$$\cos(2x^2) = 1 - 2x^4 + \tfrac{2}{3}x^8 + O(x^{12})\,;$$
usando quindi lo sviluppo $(1+t)^6 = 1 + 6t + 15\,t^2 + O(t^3)$ con $t = -2x^4 + \frac{2}{3}x^8 + O(x^{12})$ ottengo
$$\begin{aligned}\big(\cos(2x^2)\big)^6 &= \big(1 - 2x^4 + \tfrac{2}{3}x^8 + O(x^{12})\big)^6 \\ &= 1 + 6\big[-2x^4 + \tfrac{2}{3}x^8 + O(x^{12})\big] + 15\,\big[-2x^4 + O(x^8)\big]^2 + O\big[(-2x^4)^3\big] \\ &= 1 - 12\,x^4 + 4x^8 + O(x^{12}) + 15\,\big[4x^8 + O(x^{12})\big] + O(x^{12}) \\ &= 1 - 12\,x^4 + 64\,x^8 + O(x^{12})\,,\end{aligned}$$

e quindi $f(x) = -12\,x^4 + 64\,x^8 + O(x^{12})$, da cui segue che

$$\text{p.p.}(f(x) + 12\,x^4) = 64\,x^8 .$$

2. a) La funzione $f(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, sempre positiva, pari, e tende a 0 per $x \to \pm\infty$. Studiando inoltre il segno della derivata vedo che $f(x)$ è crescente nella semiretta $x \leq 0$ e decrescente nella semiretta $x \geq 0$. Infine risolvendo la disequazione $f(x) \leq f(x-1)$ ottengo $x \geq 1/2$.
Sulla base di queste informazioni traccio il disegno sottostante.



b) L'area di A è data da

$$\text{area}(A) = \int_{1/2}^{+\infty} f(x-1) - f(x)\,dx\,, \tag{1}$$

e per capire se questo integrale improprio è finito o meno studio il comportamento asintotico della funzione $f(x-1) - f(x)$ per $x \to +\infty$. Per cominciare osservo che

$$\begin{aligned} f(x-1) = (x^2 - 2x + 2)^{-1/3} &= x^{-2/3}\big(1 - 2x^{-1} + O(x^{-2})\big)^{-1/3} \\ &= x^{-2/3}\big(1 + \tfrac{2}{3}x^{-1} + O(x^{-2})\big) \end{aligned}$$

(nell'ultimo passaggio ho usato lo sviluppo $(1+t)^{-1/3} = 1 - t/3 + O(t^2)$ con $t = x^{-2}$). Analogamente

$$\begin{aligned} f(x) = (x^2 + 1)^{-1/3} &= x^{-2/3}\big(1 + x^{-2}\big)^{-1/3} \\ &= x^{-2/3}\big(1 - \tfrac{2}{3}x^{-2} + O(x^{-4})\big)\,. \end{aligned}$$

Mettendo insieme questi due sviluppi ottengo infine che

$$f(x-1) - f(x) \sim \tfrac{2}{3}x^{-5/3} \quad \text{per } x \to +\infty,$$

da cui segue che l'integrale improprio che dà l'area di A si comporta come $\int_1^\infty x^{-5/3}dx$, ed in particolare è finito.

3. a) All'istante t, la distanza di P dall'origine è data da

$$d(t) = |P(t)| = \sqrt{(2t^2 - \tfrac{2}{3})^2 + (t^3 - t)^2)} = \sqrt{t^6 + 2t^4 - \tfrac{5}{3}t^2 + \tfrac{4}{9}}\,.$$

La funzione $d(t)$ è definita per ogni $t \in \mathbb{R}$, pari, e tende a $+\infty$ per $t \to \pm\infty$, e la derivata

$$d'(t) = \frac{t\big(3t^4 + 2t^2 - \frac{5}{3}\big)}{\sqrt{t^6 + 2t^4 - \frac{5}{3}t^2 + \frac{4}{9}}}$$

si annulla per $t = 0$ e $t = \pm 1/\sqrt{3}$; confrontando quindi i valori di d in questi punti (e per $t \to \pm\infty$) ottengo che i punti di minimo di d sono $t = \pm 1/\sqrt{3}$, e quindi

$$d_{\min} = d\big(\pm 1/\sqrt{3}\big) = \frac{2}{3\sqrt{3}}\,.$$

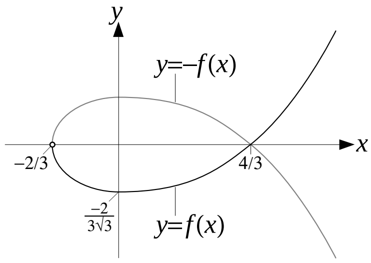
b) Esplicitando t in funzione di x ottengo

$$t = \pm\sqrt{\frac{3x+2}{6}}$$

e quindi

$$y = (t^2 - 1)t = \pm f(x) \quad \text{con} \quad f(x) := \frac{1}{6\sqrt{6}}(3x - 4)\sqrt{3x+2}\,.$$

Dunque la traiettoria di P è l'unione dei grafici di $f(x)$ e $-f(x)$.
Per disegnare questi grafici osservo che $f(x)$ è definita per $x \geq -2/3$, è positiva per $x \geq 4/3$, ed è asintoticamente equivalente a $(x/2)^{3/2}$ per $x \to +\infty$; studiando inoltre il segno della derivata ottengo che $f(x)$ decresce per $x \leq 0$ e cresce per $x \geq 0$.
Sulla base di queste informazioni ottengo il disegno sottostante; in particolare la traiettoria interseca l'asse delle x per $x = -2/3$ e $x = 4/3$, e l'asse delle y per $y = \pm 2/(3\sqrt{3})$.



Seconda parte, gruppo 2.

1. Analogo al gruppo 1.

$$\text{p.p.}(f(x)) = -18\,x^4\,, \quad \text{p.p.}(f(x) + ax^4) = \begin{cases} (a-18)\,x^4 & \text{se } a \neq 18, \\ 150\,x^8 & \text{se } a = 18, \end{cases}$$

2. a) Il grafico di f è simile a quello del gruppo 1, come pure l'insieme A.
   b) L'area di A è data da

$$\text{area}(A) = \int_{1/2}^{+\infty} f(x-1) - f(x)\,dx \approx \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}\,,$$

   ed in particolare è finita.

3. Analogo al gruppo 1.
   a) All'istante t la distanza di P dall'origine è

$$d(t) = \sqrt{t^6 + 7t^4 - 5t^2 + 1}\,,$$

   il valore minimo viene assunto per $t = -1/\sqrt{3}$, e vale $d_{\min} = 2/(3\sqrt{3})$.
   b) Esplicitando y in funzione di x ottengo

$$y = \pm f(x) \quad \text{con} \quad f(x) := \frac{1}{3\sqrt{3}}(x+2)\sqrt{x+1}\,,$$

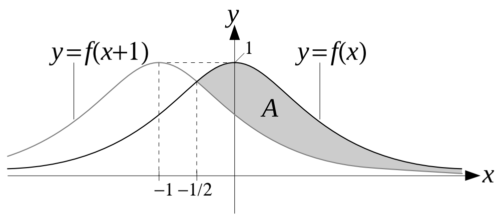
   e disegnando il grafico di f e $-f$ ottengo una traiettoria simile a quella del gruppo 1; in questo caso le intersezioni con l'asse delle x sono a $x = -1$ e $x = 2$, e quelle con l'asse delle y sono a $y = \pm 2/(3\sqrt{3})$.

Seconda parte, gruppo 3.

1. Analogo al gruppo 1.

$$\text{p.p.}(f(x)) = -12\,x^6\,, \quad \text{p.p.}(f(x) + ax^6) = \begin{cases} (a-12)\,x^6 & \text{se } a \neq 12, \\ 64\,x^{12} & \text{se } a = 12, \end{cases}$$

2. a) Il grafico di f è lo stesso del gruppo 1, mentre l'insieme A è dato nella figura sotto.



b) L'area di A è data da

$$\text{area}(A) = \int_{-1/2}^{+\infty} f(x) - f(x+1)\,dx \approx \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{5/3}}\,,$$

ed in particolare è finita.

3. Uguale al gruppo 1.

SECONDA PARTE, GRUPPO 4.

1. Analogo al gruppo 1.

$$\text{p.p.}(f(x)) = -18\,x^6\,, \quad \text{p.p.}(f(x) + ax^6) = \begin{cases} (a-18)\,x^6 & \text{se } a \neq 18, \\ 150\,x^{12} & \text{se } a = 18, \end{cases}$$

2. a) Il grafico di f è lo stesso del gruppo 2, mentre l'insieme A è simile a quello del gruppo 3.
   b) L'area di A è data da

$$\text{area}(A) = \int_{-1/2}^{+\infty} f(x) - f(x+1)\,dx \approx \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}\,,$$

   ed in particolare è finita.

3. Uguale al gruppo 2.

COMMENTI

- Seconda parte, esercizio 2. Nessuno ha risolto correttamente il punto b). La maggior parte dei presenti che ci hanno provato ha scritto che

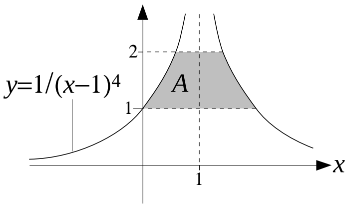
$$\text{area}(A) = \int_{1/2}^{+\infty} f(x-1)\,dx - \int_{1/2}^{+\infty} f(x)\,dx$$

  (faccio riferimento al gruppo 1, ma lo stesso vale per gli altri gruppi), ovvero ha scomposto l'integrale nella formula (1) come differenza di due integrali.
  Tuttavia $f(x-1) \sim f(x1) \sim 1/x^{2/3}$, e quindi entrambi questi integrali valgono $+\infty$, il che significa che questa scomposizione non è corretta. Invece (quasi) tutti quelli che l'hanno fatta ne hanno dedotto erroneamente che l'area di A non è definita, o peggio ancora che è infinita.

- Seconda parte, esercizio 3. Molti dei presenti hanno impostato in modo errato il punto a), cominciando a calcolare la distanza percorsa da P in un non ben definito intervallo di tempo, invece che considerare la distanza di P dall'origine. Si tratta di un errore di impostazione grave.

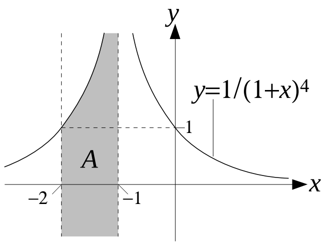
PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. I valori di r e α sono a) $2\sqrt{2}$, $-3\pi/4$; b) 2, $-\pi/2$; c) 2, $-2\pi/3$.
2. a) non esiste; b) 0; c) 0.
3. $f(x) = -2x^3 + 2x^6 + O(x^9)$.
4. La velocità è $\vec{v}(t) = e^t\big(\sin(2t) + 2\cos(2t),\ -2\sin(2t) + \cos(2t)\big)$. In particolare $|\vec{v}(t)| = \sqrt{5}\,e^t$, e la distanza percorsa è $d = \int_{-\infty}^0 |\vec{v}(t)|\,dt = \sqrt{5}$.
5. La serie si comporta come $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2-2a}}$ e quindi converge per $0 < a < 1/2$.
6. Il raggio di convergenza è $R = 3/4$.
7. $x(t) = ce^{-2t}\sin t$ con $c \in \mathbb{R}$.
8.



PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. I valori di r e α sono a) $\sqrt{2}$, $3\pi/4$; b) 3, $-\pi/2$; c) $2\sqrt{3}$, $2\pi/3$.
2. a) 1; b) $+\infty$; c) 1/2.
3. $f(x) = -2x^3 - 4x^6 + O(x^9)$.
4. La velocità è $\vec{v}(t) = e^t\big(\sin(3t) + 3\cos(3t),\ -3\sin(3t) + \cos(3t)\big)$. In particolare $|\vec{v}(t)| = \sqrt{10}\,e^t$, e la distanza percorsa è $d = \int_{-\infty}^0 |\vec{v}(t)|\,dt = \sqrt{10}$.
5. La serie si comporta come $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+2a}}$ e quindi converge per $a > 0$.
6. Il raggio di convergenza è $R = 3$.
7. $x(t) = ce^{2t}\sin t$ con $c \in \mathbb{R}$.
8.



PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. I valori di r e α sono a) 4, $-\pi/2$; b) $\sqrt{2}$, $-3\pi/4$; c) $2\sqrt{3}$, $-5\pi/6$.

2. a) 0; b) $+\infty$; c) $-\infty$.

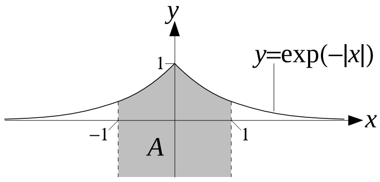
3. $f(x) = 8 + 2x^3 - 2x^6 + O(x^9)$.

4. La velocità è $\vec{v}(t) = e^t\big(-2\sin(2t) + \cos(2t),\, \sin(2t) + 2\cos(2t)\big)$. In particolare $|\vec{v}(t)| = \sqrt{5}\, e^t$, e la distanza percorsa è $d = \int_{-\infty}^0 |\vec{v}(t)|\, dt = \sqrt{5}$.

5. La serie si comporta come $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3-2a}}$ e quindi converge per $0 < a < 1$.

6. Il raggio di convergenza è $R = 1/4$.

7. $x(t) = ce^{-t}\sin(2t)$ con $c \in \mathbb{R}$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. I valori di r e α sono a) 3, $-\pi/2$; b) $2\sqrt{2}$, $3\pi/4$; c) 2, $5\pi/6$.

2. a) $-\infty$; b) $+\infty$; c) -2.

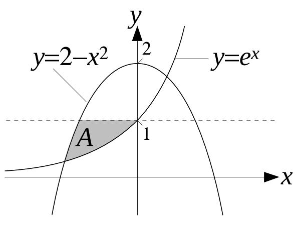
3. $f(x) = 2 + x^3 - 2x^6 + O(x^9)$.

4. La velocità è $\vec{v}(t) = e^t\big(-3\sin(3t) + \cos(3t),\, \sin(3t) + 3\cos(3t)\big)$. In particolare $|\vec{v}(t)| = \sqrt{10}\, e^t$, e la distanza percorsa è $d = \int_{-\infty}^0 |\vec{v}(t)|\, dt = \sqrt{10}$.

5. La serie si comporta come $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{a-2}}$ e quindi converge per $a > 3$.

6. Il raggio di convergenza è $R = 1$.

7. $x(t) = ce^{t}\sin(2t)$ con $c \in \mathbb{R}$.

8. 

SECONDA PARTE, GRUPPO 1.

1. Usando lo sviluppo di Taylor $e^t = 1 + t + t^2/2 + O(t^3)$ con $t = 2x^6$ ottengo

$$f(x) := \sqrt[3]{\exp(2x^6) - 1} = \sqrt[3]{2x^6 + 2x^{12} + O(x^{18})}\,,$$

e raccogliendo $2x^6$ sotto la radice,

$$f(x) = \sqrt[3]{2}\, x^2\, \sqrt[3]{1 + x^6 + O(x^{12})}\,.$$

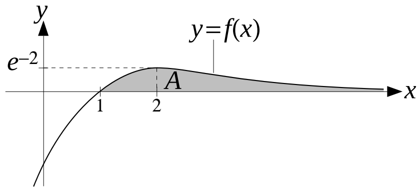
Usando ora lo sviluppo $\sqrt[3]{1+t} = (1+t)^{1/3} = 1 + t/3 + O(t^2)$ con $t = x^6 + O(x^{12})$ ottengo

$$f(x) = \sqrt[3]{2}\,x^2\left[1 + \frac{x^6}{3} + O(x^{12})\right] = \sqrt[3]{2}\,x^2 + \frac{\sqrt[3]{2}}{3}\,x^8 + O(x^{14})\,.$$

Questa formula implica chiaramente che la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$ è $\sqrt[3]{2}\,x^2$, e inoltre

$$f(x) - ax^2 \sim \begin{cases} (\sqrt[3]{2} - a)\,x^2 & \text{se } a \neq \sqrt[3]{2}, \\ \frac{\sqrt[3]{2}}{3}\,x^8 & \text{se } a = \sqrt[3]{2}. \end{cases}$$

2. a) La funzione $f(x)$ è definita (e continua) per ogni $x \in \mathbb{R}$, è positiva per $x \geq 1$ e negativa altrimenti. Inoltre tende a $-\infty$ per $x \to -\infty$, e tende a 0 per $x \to +\infty$. Studiando poi il segno della derivata $f'(x) = (2-x)e^{-x}$ ottengo che $f(x)$ cresce per $x \leq 2$ e decresce per $x \geq 2$; in particolare $x = 2$ è il punto di massimo assoluto. Utilizzando queste informazioni disegno il grafico sottostante (le proporzioni non sono quelle reali).



b) Usando la prima formula per i volumi dei solidi di rotazione (e la figura sopra) ottengo

$$\text{volume}(V_x) = \pi\int_1^{+\infty} \big(f(x)\big)^2\,dx = \pi\int_1^{+\infty}(x^2 - 2x + 1)e^{-2x}\,dx = \frac{\pi}{4e^2}\,.$$

(L'ultimo passaggio nasconde una doppia integrazione per parti, in cui ogni volta ho preso la primitiva di e^{-2x}.)

c) Usando la seconda formula per i volumi dei solidi di rotazione (e la figura sopra) ottengo

$$\text{volume}(V_y) = 2\pi\int_1^{+\infty} x\,f(x)\,dx = 2\pi\int_1^{+\infty}(x^2 - x)e^{-x}\,dx = \frac{6\pi}{e}\,.$$

(L'ultimo passaggio nasconde una doppia integrazione per parti, in cui ogni volta ho preso la primitiva di e^{-x}.)

3. a) Per la definizione di integrale improprio, i limiti di $f(x)$ per x che tende a $\pm\infty$ coincidono con

$$L := \int_1^{+\infty}\frac{dt}{1+t^5}\,.$$

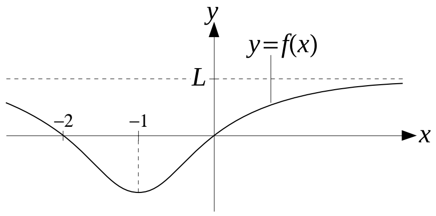
Questo integrale improprio semplice esiste ed è positivo perché la funzione integranda è positiva, ed è finito per confronto asintotico con l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} t^{-5}dt$.

b) La funzione integranda $1/(1+t^5)$ in (*) è ben definita e positiva per $t > -1$, e gli estremi di integrazione 1 e $(x+1)^2$ sono entrambi positivi, e quindi strettamente maggiori di -1. Pertanto l'integrale che definisce $f(x)$ è proprio per ogni $x \in \mathbb{R}$, e l'insieme di definizione di f è tutto $\mathbb{R}$. Inoltre il valore di $f(x)$ è positivo se l'estremo di integrazione $(x+1)^2$ è maggiore dell'estremo di integrazione 1, vale a dire se $x > 0$ oppure $x < -2$, si annulla per $x = 0$ e $x = -2$, ed è negativo per $-2 < x < 0$.

Studiando il segno della derivata

$$f'(x) = \frac{2(x+1)}{1+(x+1)^{10}}$$

ottengo infine che $f(x)$ decresce per $x \leq -1$ e cresce per $x \geq -1$; in particolare $x = -1$ è il punto di minimo assoluto. Utilizzando queste informazioni disegno il grafico sottostante.



c) Per $x \to 0$ l'estremo di integrazione superiore in (*) converge a 1, che è l'estremo di integrazione inferiore. Quindi i valori assunti della funzione integranda $1/(1+t^5)$ per t nell'intervallo di integrazione sono sempre più vicini al valore dell'integranda per $t = 1$, vale a dire $1/2$. Pertanto

$$f(x) = \int_1^{(1+x)^2} \frac{dt}{1+t^5} \sim \int_1^{(1+x)^2} \frac{dt}{2} = \frac{(1+x)^2 - 1}{2} \sim x \,,$$

e quindi la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$ è x.
(Una dimostrazione più precisa del fatto che $f(x) \sim x$ la si ottiene mostrando tramite la regola di de L'Hôpital che il limite del rapporto $f(x)/x$ per $x \to 0$ è uguale a 1; nel farlo si usa la formula per f' data sopra.)

SECONDA PARTE, GRUPPO 2.

1. Procedendo come per il gruppo 1 otteniamo

$$f(x) = \sqrt{2}\, x^2 + \frac{x^6}{\sqrt{2}} + O(x^{10})$$

da cui segue che la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$ è $\sqrt{2}\, x^2$, e inoltre

$$f(x) - ax^2 \sim \begin{cases} (\sqrt{2} - a)\, x^2 & \text{se } a \neq \sqrt{2}, \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\, x^6 & \text{se } a = \sqrt{2}. \end{cases}$$

2. a) Il grafico di f è molto simile a quello del gruppo 1. Le differenze più significative sono che $f(x)$ è negativa per $x \leq 2$ e positiva altrimenti, cresce per $x \leq 3$ e decresce altrimenti.
b) Analogo al gruppo 1:

$$\text{volume}(V_x) = \pi \int_2^{+\infty} \big(f(x)\big)^2\, dx = \pi \int_2^{+\infty} (x^2 - 4x + 4) e^{-2x}\, dx = \frac{\pi}{4e^4} \,.$$

c) Analogo al gruppo 1:

$$\text{volume}(V_y) = 2\pi \int_2^{+\infty} x\, f(x)\, dx = 2\pi \int_2^{+\infty} (x^2 - 2x) e^{-x}\, dx = \frac{8\pi}{e^2} \,.$$

3. Uguale al gruppo 1.

COMMENTI

- Prima parte, esercizio 6. Molti dei presenti hanno risolto l'esercizio trascurando gli addendi n^2 e n presenti nel numeratore e nel denominatore del coefficiente della serie, e tenendo solo gli esponenziali $3^{\pm n}$ e $2^{\pm 2n}$. Questo passaggio è corretto quando gli esponenziali tendono a infinito, cioè quando all'esponente c'è il segno $+$.

- Seconda parte, esercizio 2. Molti dei presenti hanno impostato male il calcolo del volume al punto c), pur essendo completamente standard.

Prima parte, gruppo 1.

1. I valori di a cercati sono quelli per cui la derivata $f'(x) := 3x^2\big(2\cos(2x^3) + a\big)$ è positiva per ogni $x \in \mathbb{R}$, vale a dire $a \geq 2$.

2. L'ordine corretto è $b \ll a \ll d \ll c$.

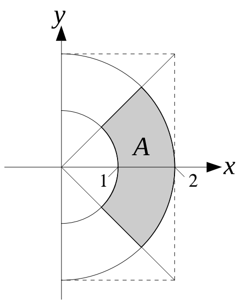
3. $f(x) \sim -\dfrac{x^4}{2}$ per $x \to 0$.

4. L'accelerazione è $\vec{a}(t) := (-\cos t,\, 12\,t - 6\pi)$; la seconda componente si annulla solo per $t = \pi/2$, dove si annulla anche la prima, e quindi $\vec{a}(t) = 0$ per $t = \pi/2$.

5. $f'(x) = \dfrac{2x}{1+x^8} - \dfrac{2}{1+(2x)^4}$.

6. L'integrale in questione si comporta come $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{2-2a}}$ e quindi è finito per $a < \dfrac{1}{2}$.

7. Si tratta di un'equazione a variabili separabili; la soluzione è $x(t) = \tan\big((t-1)e^t + 1\big)$.

8. 

Prima parte, gruppo 2.

1. I valori di a cercati sono quelli per cui la derivata $f'(x) := 3x^2\big(3\cos(3x^3) + a\big)$ è positiva per ogni $x \in \mathbb{R}$, vale a dire $a \geq 3$.

2. L'ordine corretto è $b \ll d \ll a \ll c$.

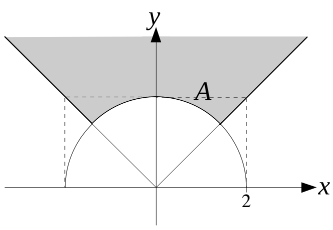
3. $f(x) \sim -\dfrac{x^4}{2}$ per $x \to 0$.

4. L'accelerazione è $\vec{a}(t) := (6t - 6,\, -\pi^2\cos(\pi t))$; la prima componente si annulla solo per $t = 1$, dove però non si annulla la seconda, e quindi non esiste alcun t per cui $\vec{a}(t) = 0$.

5. $f'(x) = \dfrac{3x^2}{1+x^{12}} - \dfrac{3}{1+(3x)^4}$.

6. L'integrale in questione si comporta come $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{2a+1/2}}$ e quindi è finito per $a > \dfrac{1}{4}$.

7. Si tratta di un'equazione a variabili separabili; la soluzione è $x(t) = \tan\big(2e^{t^2} - 2\big)$.

8. 

Prima parte, gruppo 3.

1. I valori di a cercati sono quelli per cui la derivata $f'(x) := 5x^4\big(3\cos(3x^5) + a\big)$ è positiva per ogni $x \in \mathbb{R}$, vale a dire $a \geq 3$.

2. L'ordine corretto è $c \ll d \ll a \ll b$.

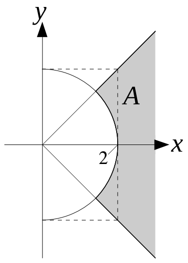
3. $f(x) \sim -x^4$ per $x \to 0$.

4. L'accelerazione è $\vec{a}(t) := (-4\cos(2t),\, 24\,t - 6\pi)$; la seconda componente si annulla solo per $t = \pi/4$, dove si annulla anche la prima, e quindi $\vec{a}(t) = 0$ per $t = \pi/4$.

5. $f'(x) = \dfrac{2x}{1 + x^{12}} - \dfrac{2}{1 + (2x)^6}$.

6. L'integrale in questione si comporta come $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3-2a}}$ e quindi è finito per $a < 1$.

7. Si tratta di un'equazione a variabili separabili; la soluzione è $x(t) = \tan\Big((t-1)e^t + \dfrac{\pi}{4}\Big)$.

8. 

Prima parte, gruppo 4.

1. I valori di a cercati sono quelli per cui la derivata $f'(x) := 5x^4\big(4\cos(4x^5) + a\big)$ è positiva per ogni $x \in \mathbb{R}$, vale a dire $a \geq 4$.

2. L'ordine corretto è $d \ll c \ll b \ll a$.

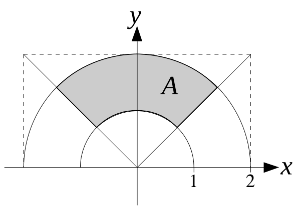
3. $f(x) \sim -\dfrac{x^8}{2}$ per $x \to 0$.

4. L'accelerazione è $\vec{a}(t) := (6t - 2,\, -\pi^2\sin(\pi t))$; la prima componente si annulla solo per $t = 1/3$, dove però non si annulla la seconda, e quindi non esiste alcun t per cui $\vec{a}(t) = 0$.

5. $f'(x) = \dfrac{3x^2}{1 + x^{18}} - \dfrac{3}{1 + (3x)^6}$.

6. L'integrale in questione si comporta come $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{a-2}}$ e quindi è finito per $a > 3$.

7. Si tratta di un'equazione a variabili separabili; la soluzione è $x(t) = \tan\big(2e^{t^2} - 2e\big)$.

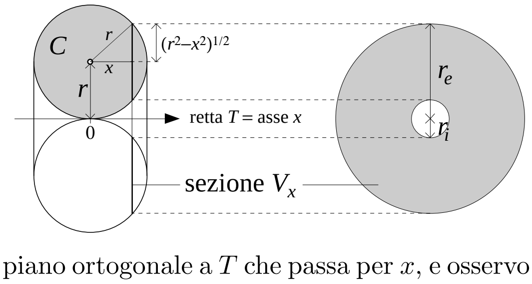
8. 

Seconda parte.

1. Partiamo direttamente dal punto b), di cui a) è un caso particolare.
Come prima cosa riscrivo la disequazione come
$$a \le x^2 + 4x - 6\log x \quad \text{per ogni } x > 0, \tag{1}$$
e ponendo $f(x) := x^2 + 4x - 6\log x$ ottengo che questa condizione equivale a
$$a \le \inf_{x>0} f(x)\,.$$
Per calcolare l'estremo inferiore dei valori di $f(x)$, osservo che questa funzione è definita e continua per ogni $x > 0$, e studiando il segno della derivata prima
$$f'(x) = 2x + 4 - \frac{6}{x} = \frac{2x^2 + 4x - 6}{x}$$
ottengo che $f(x)$ decresce per $x \le 1$ e cresce per $x \ge 1$. Quindi $x = 1$ è il punto di minimo *assoluto* di f, e
$$\inf_{x>0} f(x) = \min_{x>0} f(x) = f(1) = 5\,,$$
da cui segue che la (1) vale per $a \le 5$.
In particolare vale per $a = 4$, e quindi la risposta alla domanda a) è affermativa.

2. La funzione integranda
$$\frac{1}{(1+\cos x)^a}$$
è definita, continua e positiva nell'intervallo $(-\pi, \pi)$ ma non è definita agli estremi, e quindi l'integrale che dobbiamo studiare è improprio in $\pm\pi$, ed ammette solo due possibili comportamenti: è finito oppure vale $+\infty$.
Siccome la funzione integranda è pari, ottengo inoltre
$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{(1+\cos x)^a} = 2\int_{-\pi}^{0} \frac{dx}{(1+\cos x)^a}\,.$$
Studio l'integrale alla destra dell'uguale, che è improprio in $-\pi$, applicando il cambio di variabile $y = x + \pi$ in modo da ricondurmi ad un integrale improprio in 0:
$$\int_{-\pi}^{0} \frac{dx}{(1+\cos x)^a} = \int_{0}^{\pi} \frac{dy}{(1+\cos(y-\pi))^a} = \int_{0}^{1} \frac{dy}{(1-\cos y)^a} \approx \int_{0}^{1} \frac{dy}{y^{2a}}\,.$$
(nel terzo passaggio ho usato l'identità $\cos(y-\pi) = -\cos y$, mentre nel quarto ho usato il fatto che $1 - \cos y \sim y^2/2$ per $y \to 0$ e il principio del confronto asintotico).
Mettendo insieme le formule precedenti ottengo infine che l'integrale di partenza si comporta come
$$\int_0^1 \frac{dy}{y^{2a}}\,,$$
ed in particolare è finito per $a < 1/2$, ed è $+\infty$ altrimenti.

3. Per calcolare il volume del solido V, integro le aree delle sezioni di questo solido ortogonali alla retta T. Per la precisione, fisso l'asse delle x in modo che coincida con la retta T e che 0 sia il punto in cui T è tangente alla circonferenza di partenza.



Indico quindi con P_x il piano ortogonale a T che passa per x, e osservo che la sezione $V_x := V \cap P_x$ è una corona circolare con raggio esterno r_e e raggio interno r_i dati da
$$r_e = r + \sqrt{r^2 - x^2}\,, \quad r_i = r - \sqrt{r^2 - x^2}\,.$$

Pertanto l'area di V_x è data da

$$\text{area}(V_x) = \pi r_e^2 - \pi r_i^2 = 4\pi r\sqrt{r^2 - x^2}$$

e il volume di V è dato da

$$\text{volume}(V) = \int_{-r}^{r} \text{area}(V_x)\, dx = 4\pi r \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = 2\pi^2 r^3 \,.$$

(Nell'ultimo passaggio ho usato che l'integrale corrisponde all'area della semicirconferenza di raggio r, e quindi vale $\pi r^2/2$.)

COMMENTI

- Prima parte, esercizio 1. Diversi dei presenti hanno risposto indicando dei valori di a che dipendono da x; ma la risposta alla domanda se una funzione è crescente o meno su tutto il dominio non dipende da x. Si tratta di un errore grave.

- Prima parte, esercizio 8. Pur trattandosi di un esercizio molto facile, molti dei presenti hanno dato risposte gravemente errate (cosa che attribuisco ad una scarsa comprensione del significato geometrico delle coordinate polari).

Prima parte, gruppo 1.

1. Il punto di massimo è $x = 3$. Il punto di minimo non esiste.

2. I valori di a cercati sono $a \geq 4$.

3. $f'(x) := 2e^{2x} \sin(1 + 2x)$.

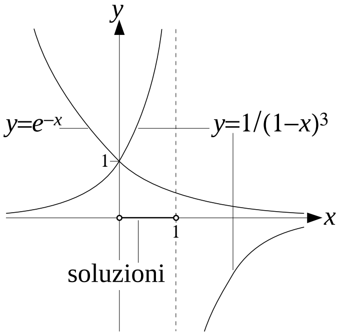
4. Usando il cambio di variabile $t = 1 + x^2$ si ottiene

$$\int 4x \cos(1 + x^2)\, dx = 2 \int \cos t\, dt = 2 \sin t + c = 2 \sin(1 + x^2) + c\,.$$

5. Nessun a.

6. Si tratta di una serie esponenziale: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{3^n\, n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x/3)^n}{n!} = \exp(x/3)\,.$

7. Le soluzioni cercate sono $x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} - e^{-t} + e^{-3t}$ con $c_1 > 0$ e c_2 qualunque.

8. 

Prima parte, gruppo 2.

1. Il punto di massimo è $x = 3$. Il punto di minimo è $x = -1$.

2. I valori di a cercati sono $a > 1$.

3. $f'(x) := e^{-x} \sin(1 - x)$.

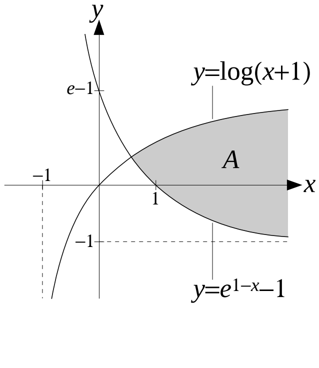
4. Integrando per parti si ottiene

$$\int x \cos\Big(\frac{x}{2}\Big)\, dx = 2x \sin\Big(\frac{x}{2}\Big) - \int 2 \sin\Big(\frac{x}{2}\Big)\, dx = 2x \sin\Big(\frac{x}{2}\Big) + 4 \cos\Big(\frac{x}{2}\Big) + c\,.$$

5. Ogni $a > 0$.

6. Si tratta di una serie geometrica: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{3^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\frac{x^2}{3}\Big)^n = \frac{1}{1 - x^2/3} = \frac{3}{3 - x^2}\,.$

7. Le soluzioni cercate sono $x(t) = ce^{-2t} - e^{-t} + e^{-3t}$ con c qualunque.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. Il punto di massimo non esiste. Il punto di minimo è $x = 0$.

2. I valori di a cercati sono $a > 0$.

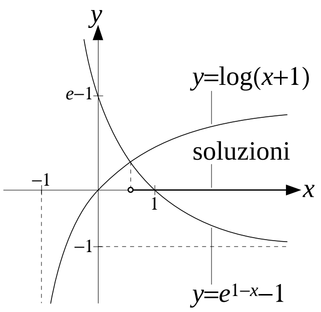
3. $f'(x) := 2e^{2x}\cos(1 + 2x)$.

4. Usando il cambio di variabile $t = 1 + x^2$ si ottiene
$$\int_0^1 4x\,\cos(1+x^2)\,dx = 2\int_1^2 \cos t\,dt = 2\,\Big|\sin t\Big|_1^2 = 2\sin(2) - 2\sin(1)\,.$$

5. Ogni $a > 0$.

6. Si tratta di una serie esponenziale: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2^n\,n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(x/2)^n}{n!} = \exp(x/2)\,.$

7. Le soluzioni cercate sono $x(t) = c_1e^{3t} + c_2e^{-3t} - e^{-t} - e^{-2t}$ con $c_1 > 0$ e c_2 qualunque.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. Il punto di massimo non esiste. Il punto di minimo è $x = 0$.

2. I valori di a cercati sono $a > 3$.

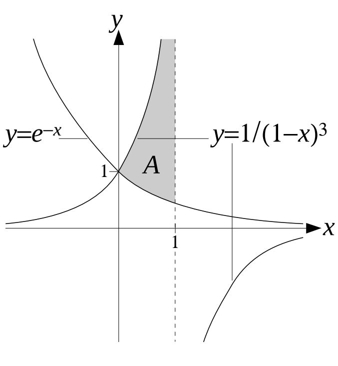
3. $f'(x) := e^{-x}\cos(1 - x)$.

4. Integrando per parti si ottiene
$$\int_0^\pi x\,\cos\Big(\frac{x}{2}\Big)\,dx = \Big|2x\,\sin\Big(\frac{x}{2}\Big)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi 2\sin\Big(\frac{x}{2}\Big)\,dx = 2\pi + \Big|4\cos\Big(\frac{x}{2}\Big)\Big|_0^\pi = 2\pi - 4\,.$$

5. Nessun a.

6. Si tratta di una serie geometrica: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{3n}}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{x^3}{2}\Big)^n = \frac{1}{1 - x^3/2} = \frac{2}{2 - x^3}\,.$

7. Le soluzioni cercate sono $x(t) = ce^{-3t} - e^{-t} - e^{-2t}$ con c qualunque.

8. 

SECONDA PARTE.

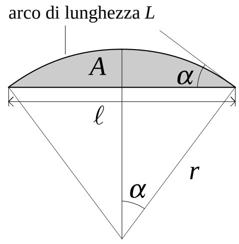
1. Per cominciare, trovo x_a per ogni $a \in \mathbb{R}$, ovvero trovo la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = x^2 - 4$ che soddisfa la condizione iniziale $x(0) = a$. L'equazione in questione è a variabili separabili e si riduce alla forma
$$\int \frac{dx}{x^2-4} = \int dt\,. \tag{1}$$
Tenuto conto che
$$\int \frac{dx}{x^2-4} = \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\,dx = \frac{1}{4}\big(\log|x-2| - \log|x+2|\big) = \frac{1}{4}\log\left|\frac{x-2}{x+2}\right|$$
dalla (1) ottengo
$$\log\left|\frac{x-2}{x+2}\right| = 4t + c \quad \text{con } c \in \mathbb{R},$$
vale a dire
$$\frac{x-2}{x+2} = \pm e^c\, e^{4t} \quad \text{con } c \in \mathbb{R}.$$
e poiché $\pm e^c$ può essere una qualunque costante c' diversa da zero, posso riscrivere la precendente equazione come
$$\frac{x-2}{x+2} = c' e^{4t}\,,$$
imponendo infine la condizione iniziale $x(0) = a$ ottengo $c' = \frac{a-2}{a+2}$ (sono esclusi i valori $a = 2$, per cui $c' = 0$, ed $a = -2$ per cui c' non è definita). Esplicitando infine la x ottengo per $a \neq \pm 2$
$$x_a(t) = \frac{4}{1 - c'e^{4t}} - 2 \quad \text{con } c' = \frac{a-2}{a+2}. \tag{2}$$
I valori iniziali $a = \pm 2$ sono quelli per cui si annulla il denominatore $x^2 - 2$ in (1), ed in tal caso la soluzione x_a non è data dalla formula precedente, ma è la funzione costante $x_a(t) = a$.

a) In base a quanto fatto sopra
$$x_0(t) = \frac{4}{1+e^{4t}} - 2.$$
Questa funzione è definita per ogni $t \in \mathbb{R}$, è descrescente (perché il denominatore $1 + e^{4t}$ è chiaramente crescente), tende a 2 per $x \to -\infty$, e tende a -2 per $x \to +\infty$.

b) Consideriamo prima le soluzioni x_a con $a \neq \pm 2$, vale a dire quelle date dalla formula (2). Chiaramente, tali soluzioni sono definite per ogni $t \in \mathbb{R}$ se e solo se il denominatore $1 - c'e^{4t}$ non si annulla per alcun t, ovvero se e solo se la costante $c' = \frac{a-2}{a+2}$ è negativa (ricordo che c' non può essere nulla), ovvero se e solo se $-2 < a < 2$.
A questi valori di a a cui vanno aggiunti $a = \pm 2$, per cui x_a è la soluzione costante, ed è quindi definita per ogni $t \in \mathbb{R}$.
Riassumendo, $x_a(t)$ è definita per ogni $t \in \mathbb{R}$ se e solo se $-2 \le a \le 2$.

2. L'integrale
$$\int_1^{+\infty} (x+1)^a - x^a\,dx$$
è improprio semplice a $+\infty$, e poichè la funzione integranda è positiva, ammette solo due possibili comportamenti: o converge ad un numero finito e positivo, oppure diverge a $+\infty$. Per capire quale dei due casi si verifica determino la parte principale della funzione integranda per $x \to +\infty$:
$$(x+1)^a - x^a = x^a\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^a - 1\right] \sim x^a\frac{a}{x} = ax^{a-1} \tag{3}$$
(nel secondo passaggio ho utilizzato lo sviluppo di Taylor $(1+y)^a = 1 + ay + O(y^2)$, che riscrivo nella forma $(1+y)^a - 1 \sim ay$ per $y \to 0$, unitamente al cambio di variabile $y = 1/x$).
Dalla (3) si ottiene infine che l'integrale improprio di partenza si comporta come $\int_1^{+\infty} x^{a-1}\,dx$, ed in particolare è finito per $a < 0$, infinito per $a \ge 0$.

3. a) L'angolo α varia tra 0 e π (esclusi).



b) La figura sopra mostra chiaramente che le lunghezze ℓ e L possono essere espresse in funzione dell'angolo α e del raggio r:

$$\ell = 2r\,\sin\alpha\,, \quad L = 2r\alpha\,.$$

Quindi posso scrivere anche la quantità E come funzione di α e di r:

$$E = L\Big(1+\frac{1}{r^2}\Big) + \ell = 2\alpha\left[\frac{1}{r} + \left(1+\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right) r\right]$$

Pertanto, fissato α, per trovare la figura A che minimizza il valore di E devo trovare il valore di $r > 0$ che rende minima la funzione

$$\frac{1}{r} + \left(1+\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right) r\,.$$

Studiando il segno della derivata di questa funzione, ottengo facilmente che il punto di minimo assoluto (per $r > 0$) è

$$r_{\min} = \left(1+\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^{-1/2},$$

mentre il valore minimo di E è

$$E(\alpha) = 4\big(\alpha^2 + \alpha\,\sin\alpha\big)^{1/2}\,.$$

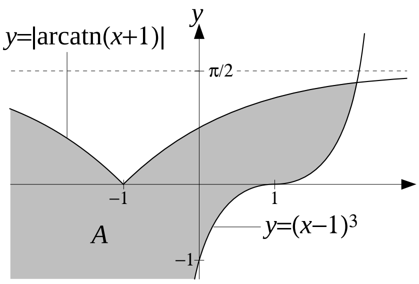
c) Calcoliamo la derivata (rispetto alla variabile α) della funzione $E(\alpha)$ data nella formula precedente:

$$E'(\alpha) = 2\big(\alpha^2+\alpha\,\sin\alpha\big)^{-1/2}\big((2+\cos\alpha)\alpha + \sin\alpha\big)\,.$$

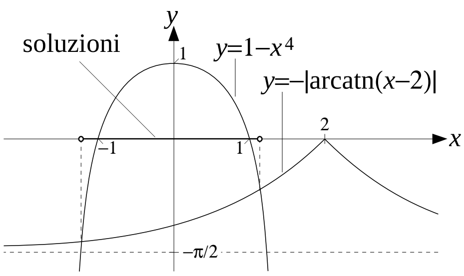
Osserviamo ora che per $0 < \alpha < \pi$ questa derivata è strettamente positiva (sono infatti positive le quantità α, $\sin\alpha$, $2+\cos\alpha$). Ne deduco che anche la funzione $E(\alpha)$ è strettamente crescente per $0 < \alpha < \pi$, da cui segue che

- $E(\alpha)$ non ha alcun punto di massimo o minimo all'interno dell'intervallo $0 < \alpha < \pi$;
- l'estremo inferiore dei valori $E(\alpha)$ viene raggiunto per $\alpha \to 0$, e vale 0;
- l'estremo superiore dei valori $E(\alpha)$ viene raggiunto per $\alpha \to \pi$, e vale 4π.

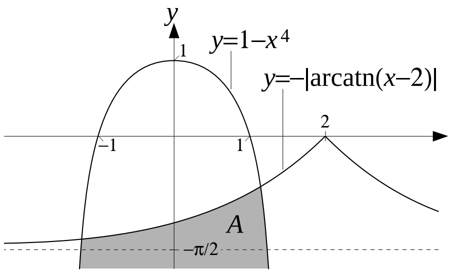
Prima parte, gruppo 1.

1. Le soluzioni sono $0 \le x \le \dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{2\pi}{3} \le x \le \pi$.
2. La retta tangente ha equazione $y = -\dfrac{x}{2} - 1$.
3. La funzione f è continua se e solo se $b = ae^2 - 4$.
4. Lo sviluppo cercato è $f(x) = 1 - 2x^2 - x^4 + O(x^6)$.
5. Usando il cambio di variabile $y = 1+x^4$ ottengo $\displaystyle\int \frac{8x^3}{1+x^4}\,dx = 2\int \frac{dy}{y} = 2\log y + c = 2\log(1+x^4) + c$.
6. Il raggio di convergenza è $R = \dfrac{4}{3}$.
7. Equazione a variabili separabili; la soluzione è $x(t) = -\log(2 - t^4)$.
8. 

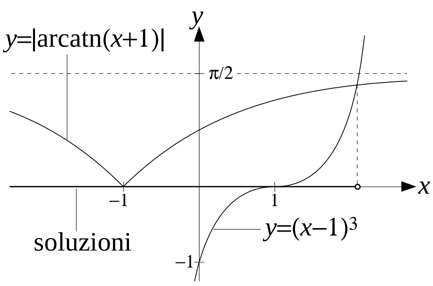
Prima parte, gruppo 2.

1. Le soluzioni sono $0 \le x < \dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{3\pi}{8} \le x \le \dfrac{\pi}{2}$.
2. La retta tangente ha equazione $y = -x + \dfrac{3}{2}$.
3. La funzione f è continua se e solo se $b = \dfrac{a}{e^2} - 4$.
4. Lo sviluppo cercato è $f(x) = 6x^2 - 6x^4 + 10\,x^6 + O(x^8)$.
5. Integrando per parti ottengo $\displaystyle\int_1^e 16\,x^3 \log x\,dx = \Big|4x^4\log x\Big|_1^e - \int_1^e 4x^4\,\frac{1}{x}\,dx = 3e^4 + 1$.
6. Il raggio di convergenza è $R = \dfrac{5}{4}$.
7. Equazione a variabili separabili; la soluzione è $x(t) = \tan(2t^2 - 2)$.
8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. Le soluzioni sono $0 \leq x \leq \frac{7\pi}{12}$, $\frac{11\pi}{12} \leq x \leq \pi$.
2. La retta tangente ha equazione $y = -\frac{x}{2} + 1$.
3. La funzione f è continua se e solo se $b = \frac{a}{e} - 1$.
4. Lo sviluppo cercato è $f(x) = 1 - 2x^3 - x^6 + O(x^9)$.
5. Usando il cambio di variabile $y = 1 + x^4$ ottengo $\int_0^1 \frac{8x^3}{1+x^4}\, dx = 2\int_1^2 \frac{dy}{y} = 2\log 2$.
6. Il raggio di convergenza è $R = \frac{3}{4}$.
7. Equazione a variabili separabili; la soluzione è $x(t) = \tan(t^3 - 1)$.
8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

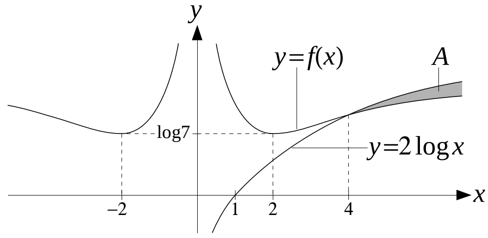
1. Le soluzioni sono $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{2}$.
2. La retta tangente ha equazione $y = -x - \frac{3}{2}$.
3. La funzione f è continua se e solo se $b = ae - 1$.
4. Lo sviluppo cercato è $f(x) = 6x^3 - 6x^6 + 10\,x^9 + O(x^{12})$.
5. Integrando per parti ottengo $\int 16\,x^3 \log x\, dx = 4x^4 \log x - \int 4x^4 \frac{1}{x}\, dx = 4x^4 \log x - x^4 + c$.
6. Il raggio di convergenza è $R = \frac{4}{5}$.
7. Equazione a variabili separabili; la soluzione è $x(t) = -\log(2 - t^3)$.
8. 

Seconda parte.

1. a) Calcolo prima la soluzione generale dell'equazione omogenea associata. Le soluzioni dell'equazione caratteristica $\lambda^2 - 2a\lambda + 9 =$ sono
$$\lambda_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - 9}$$
ed in particolare devo considerare i seguenti tre casi:
   (i) se $a > 3$ allora λ_1 e λ_2 sono reali e distinte, e quindi
$$x_{\rm om}(t) = c_1\, e^{\lambda_1 t} + c_2\, e^{\lambda_2 t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{1a}$$
   (ii) se $a = 3$ allora $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ e quindi
$$x_{\rm om}(t) = e^{3t}(c_1 + c_2 t) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{1b}$$
   (iii) se $0 < a < 3$ allora $\lambda_{1,2} = a \pm \omega i$ con $\omega := \sqrt{9 - a^2}$, e quindi
$$x_{\rm om}(t) = e^{at}\big(c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)\big) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{1c}$$
   Cerco ora una soluzione particolare dell'equazione di partenza (*) tra le funzioni del tipo $\tilde{x}(t) = b_1 t + b_2$ con $b - 1, b_2 \in \mathbb{R}$. Sostituendo questa espressione nell'equazione (*) ottengo l'identità
$$9b_1 t + 9b_2 - 2ab_1 = 18t$$
che è soddisfatta per ogni t se e solo se $9b_1 = 18$ e $9b_2 - 2ab_1 = 0$, vale a dire $b_1 = 2$ e $b_2 = \frac{4}{9}a$. Pertanto la soluzione particolare cercata è
$$\tilde{x}(t) = 2t + \frac{4a}{9}\,. \tag{2}$$
   Sommando la soluzione dell'equazione omogenea $x_{\rm om}$ in (1a)-(1c) con la soluzione particolare $\tilde{x}$ in (2) ottengo infine la soluzione generale di (*).
   b) Osservo che la soluzione particolare $\tilde{x}$ data in (2) soddisfa $\tilde{x}(t) \ll e^{9t}$ per $t \to +\infty$. Pertanto esiste una soluzione di (*) che soddisfa la proprietà che $x(t) \gg e^{9t}$ se e solo esiste una soluzione dell'equazione omogenea con questa stessa proprietà.
   Date le formule (1b) e (1c) posso escludere i valori $a \leq 3$, per cui $x_{\rm om}(t) \ll e^{9t}$, e supporre che $a > 3$. In questo caso la formula (1a) mostra che è possibile scegliere i coefficienti c_1, c_2 in modo che $x_{\rm om}(t) \gg e^{9t}$ a patto che almeno una delle due radici caratteristiche λ_1, λ_2 sia strettamente maggiore di 9. O meglio, che lo sia la più grande delle due soluzioni, vale a dire che
$$a + \sqrt{a^2 - 9} > 9\,.$$
   Risolvendo questa disequazione ottengo $a > 5$.

2. a) La funzione $f(x)$ è definita per tutti gli $x \in \mathbb{R}$ per cui l'argomento del logaritmo che appare nella definizione è ben definito e strettamente positivo, vale a dire tutti gli $x \neq 0$ tali che
$$x^2 - 1 + \frac{16}{x^2} > 0\,.$$
   Moltiplicando questa disequazione per x^2 ottengo la disequazione $x^4 - x^2 + 16 > 0$, che è verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$, come conseguenza del fatto più generale che $t^2 - t + 16 > 0$ è verificata per ogni $t \in \mathbb{R}$ (dato che il discriminante è strettamente negativo).
   Riassumendo, $f(x)$ è definita per ogni $x \neq 0$.
   b) Per disegnare il grafico di $f(x)$ osservo innanzitutto che si tratta di una funzione pari, e quindi mi basta studiarla per $x > 0$. Osservo inoltre che $f(x)$ che tende a $+\infty$ per $x \to 0$ e per $x \to +\infty$, e per la precisione $f(x) \sim 2 \log x$ per $x \to +\infty$.
   Inoltre studiando il segno della derivata
$$f'(x) = \frac{2(x^4 - 16)}{x(x^4 - x^2 + 16)}$$
vedo che $f(x)$ decresce per $0 < x \leq 2$ e cresce per $x \geq 2$. In particolare $x = 2$ è il punto di minimo assoluto (insieme a $x = -2$), mentre il valore minimo è $f(2) = \log 7$.

Usando queste informazioni traccio il grafico riportato nella figura sotto.



c) Per disegnare l'insieme A risolvo la disequazione $f(x) \leq 2\log x$, ottenendo $x \geq 4$. L'insieme A è quindi quello riportato nella figura sopra.

d) L'area di A è data dal seguente integrale (improprio semplice a $+\infty$):

$$\begin{aligned}\operatorname{area}(A) &= \int_4^{+\infty} 2\log x - f(x)\,dx \\ &= \int_4^{+\infty} \log\left(x^2\right) - \log\left(x^2 - 1 + \frac{16}{x^2}\right) dx \\ &= \int_4^{+\infty} -\log\left(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{16}{x^4}\right) dx \approx \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} < +\infty\end{aligned}$$

e quindi l'area di A è finita. (Nel secondo passaggio ho usato l'identità $\log a - \log b = -\log(b/a)$, nel terzo ho usato il criterio del confronto asintotico più il fatto che

$$\log\left(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{16}{x^4}\right) \sim -\frac{1}{x^2} + \frac{16}{x^4} \sim -\frac{1}{x^2} \quad \text{per } x \to +\infty,$$

ottenuto a sua volta a partire dallo sviluppo $\log(1+t) \sim t$ per $t \to 0$.)

3. La funzione integranda

$$f(x) = \frac{1}{(e^x - e)^a}$$

è ben definita (e continua) per ogni x tale che la base $e^x - e$ della potenza al denominatore è strettamente positiva, vale a dire per $x > 1$. Inoltre per tali x la funzione è sempre positiva. Ne segue che l'integrale di $f(x)$ tra 1 e $+\infty$ è improprio sia in 1 che in $+\infty$ ed ammette solo due comportamenti: o diverge a $+\infty$ oppure converge ad un numero finito e positivo. Per capire quale dei due casi si verifica lo spezzo come

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \underbrace{\int_1^2 f(x)\,dx}_{I} + \underbrace{\int_2^{+\infty} f(x)\,dx}_{II} \tag{3}$$

ed analizzo separatamente il comportamento dei due integrali impropri semplici I e II.
Comincio da II. Osservo innanzitutto che

$$f(x) \sim e^{-ax} \quad \text{per } x \to +\infty.$$

Quindi, se $a < 0$ allora $f(x)$ tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$, mentre se $a = 0$ allora $f(x)$ tende a 1 (anzi, vale sempre 1); in entrambi ne deduco che II diverge a $+\infty$, e questo è sufficiente a dire che anche l'integrale di partenza diverge a $+\infty$.
Invece se $a > 0$ allora $f(x) \sim e^{-ax}$ per $x \to +\infty$, e quindi II si comporta come $\int_2^{+\infty} e^{-ax}\,dx$, che può essere calcolato ed è finito.
Resta dunque da studiare l'integrale I. Per prima cosa uso il cambio di variabile $y = x + 1$ per ricondurmi ad un integrale improprio in 0:

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{(e^x - e)^a} = \int_0^1 \frac{dy}{(e^{y+1} - e)^a} = \frac{1}{e^a}\int_0^1 \frac{dy}{(e^y - 1)^a}\,;$$

usando lo sviluppo $e^y - 1 \sim y$ ottengo che I si comporta come $\int_0^1 dy/y^a$ e in particolare è finito se $a < 1$, e diverge altrimenti.
Mettendo insieme quanto fatto otteniamo che l'integrale di partenza è finito se $0 < a < 1$, e diverge a $+\infty$ altrimenti.

Commenti

- Prima parte, esercizio 1. Si tratta di un esercizio piuttosto standard, ma la maggior parte dei presenti lo ha svolto male (per la precisione, quasi tutti hanno dato solo le soluzioni in una metà dell'intervallo prescritto).

- Prima parte, esercizio 3. Molti dei presenti hanno trovato una coppia di numeri a, b per cui f è continua, ma non tutte le coppie.

- Seconda parte, esercizio 1. Anche questo esercizio è molto standard, e tuttavia la maggior parte dei presenti lo ha risolto male o solo in parzialmente. In particolare molti hanno impostato in modo scorretto la ricerca della soluzione particolare, mentre altri hanno scritto in modo incompleto la soluzione dell'equazione omogenea nel caso $a < 3$.