Versione: 14 settembre 2019

Università di Pisa

Corso di laurea in Matematica

Testi e soluzioni degli scritti d'esame di

Analisi 3

a.a. 2018-19

Giovanni Alberti

Giovanni Alberti
Dipartimento di Matematica
Università di Pisa
largo Pontecorvo 5
56127 Pisa
http://pagine.dm.unipi.it/alberti

Avvertenze. Gli scritti d'esame per il corso di Analisi 3 consistono di otto domande a cui dare una risposta articolata. Di queste, le prime quattro sono solitamente più semplici, nel senso che a possono essere facilmente ricondotte a fatti e/o calcoli noti. Il tempo a disposizione è di tre ore.

La prima sezione di questa raccolta contiene i testi di tutti gli scritti, incluse le prove in itinere, mentre la seconda parte contiene una traccia delle soluzioni.

Programma del corso [versione: 23 dicembre 2018]. Sono riportati in corsivo gli argomenti non fondamentali.

1. Teoria dell'integrazione
   - 1.1. Misure σ-additive su σ-algebre. Esempio fondamentale: la misura di Lebesgue e la σ-algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue su $\mathbb{R}^d$. Altro esempio: la misura che conta i punti.
   - 1.2. Funzioni misurabili (rispetto ad una data σ-algebra). Proprietà delle funzioni misurabili. Costruzione dell'integrale delle funzioni misurabile positive partendo delle funzioni semplici. Integrale delle funzioni misurabili a segno variabile.
   - 1.3. Teorema di convergenza monotona (o di Beppo Levi), lemma di Fatou, teorema di convergenza dominata (o di Lebesgue). *Teorema di Fubini-Tonelli.*

2. Spazi L^p e convoluzione
   - 2.1. Disuguaglianze di Jensen, Hölder e Minkowski.
   - 2.2. Spazi L^p. Completezza degli spazi L^p.
   - 2.3. Prodotto di convoluzione di funzioni su $\mathbb{R}^d$ e disuguaglianze collegate alle norme L^p. Regolarità del prodotto di convoluzione in funzione della regolarità dei fattori. Approssimazione e regolarizzazione per convoluzione delle funzioni in $L^p(\mathbb{R}^d)$.

3. Spazi di Hilbert
   - 3.1. Spazi di Hilbert reali; basi di Hilbert (sistemi ortonormali massimali). Rappresentazione di un elemento dello spazio in termini di una base.
   - 3.2. Proiezione di un vettore su un sottospazio chiuso, e caratterizzazione in termini di distanza. Rappresentazione di un funzionale lineare e continuo tramite prodotto scalare (Teorema di Riesz).
   - 3.3. *Spazi di Hilbert sul campo complesso.*

4. Serie di Fourier ed applicazioni
   - 4.1. Le funzioni esponenziali e^{inx} (opportunamente rinormalizzate) formano una base di Hilbert di $L^2(-\pi, \pi)$. Serie di Fourier per le funzioni complesse in $L^2(-\pi, \pi)$. Convergenza della serie di Fourier in L^2. Convergenza uniforme per le funzioni 2π-periodiche di classe C^1. Regolarità delle funzione e comportamento asintotico dei coefficienti. Rappresentazione delle somme parziali della serie di Fourier come convoluzione e ulteriori risultati sulla convergenza puntuale della serie di Fourier.
   - 4.2. *Derivazione dell'equazione del calore e delle onde in una dimensione spaziale.* Soluzione dell'equazione del calore e delle onde con condizioni di periodicità agli estremi tramite la serie di Fourier. Disuguaglianza isoperimetrica nel piano.
   - 4.3. Varianti della serie di Fourier: rappresentazione in serie di seni e coseni per le funzioni reali in $L^2(-\pi, \pi)$ (serie di Fourier reale); rappresentazione in serie di seni per le funzioni reali in $L^2(0, \pi)$; rappresentazione in serie di esponanziali di due variabili per le funzioni complesse in $L^2\big([-\pi, \pi]^d\big)$ (serie di Fourier in d variabili).
   - 4.4. Basi ortonormali e autovettori di operatori autoaggiunti.

5. Trasformata di Fourier e applicazioni
   - 5.1. *Derivazione euristica della trasformata di Fourier a partire dalla serie di Fourier.* Trasformata di Fourier delle funzioni (complesse) in $L^1(\mathbb{R})$. Proprietà elementari della trasformata di Fourier.
   - 5.2. Dimostrazione della formula di inversione. La trasformata di Fourier preserva il prodotto scalare e la norma L^2. Trasformata di Fourier delle funzioni in $L^2(\mathbb{R})$.

5.3. Risoluzione dell'equazione del calore tramite trasformata di Fourier e rappresentazione della soluzione tramite il nucleo del calore.

6. Funzioni armoniche
   6.1. Le funzioni armoniche come soluzioni dell'equazione di Laplace. Caratterizzazione in termini di proprietà della media. Principio del massimo e unicità della soluzione dell'equazione di Laplace con dato al bordo assegnato.
   6.2. Funzioni armoniche e funzioni olomorfe. Risoluzione dell'equazione di Laplace nel disco unitario tramite la serie di Fourier, rappresentazione della soluzione tramite nucleo di Poisson.

T E S T I

1. Sia $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una funzione limitata e α-Hölderiana per un certo $\alpha \in (0, 1]$. Dimostrare che $f * g$ è una funzione α-Hölderiana per ogni $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

2. Dire per quali $p \geq 1$ la funzione $f(x_1, x_2) := (x_1^2 + x_2^4)^{-1/10}$ appartiene a $L^p(Q)$ dove Q è il quadrato $[0, 1]^2$ in $\mathbb{R}^2$.

3. In $L^2(-1, 1)$ consideriamo il sottospazio X generato dalle funzioni x, x^2, x^3. Determinare le proiezioni della funzione 1 su X e su $X^\perp$.

4. a) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione 2π-periodica appartenente a $L^2(-\pi, \pi)$. Dato $h \in \mathbb{R}$, calcolare i coefficienti di Fourier della traslazione $f(x - h)$ in termini dei coefficienti c_n di f.

   b) Dato un intero $N \geq 2$, dimostrare che f $2\pi/N$-periodica se e solo se $c_n = 0$ per ogni n che non è multiplo di N.[1]

5. a) Dimostrare la seguente generalizzazione della disuguaglianza di Hölder: date f_1, f_2 funzioni misurabili su E insieme misurabile in $\mathbb{R}^d$ e dati p, p_1, p_2 in $[1, +\infty]$ tali che $1/p = 1/p_1 + 1/p_2$, allora $\|f_1 f_2\|_p \leq \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2}$. [*Suggerimento: ricondursi alla disuguaglianza di Hölder.*]

   b) Sia la mappa T che ad ogni coppia di funzioni f_1, f_2 su E associa la funzione prodotto $f_1 f_2$. Far vedere che T porta $L^{p_1} \times L^{p_2}$ in L^p.

   c) Dire se la mappa T è iniettiva / surgettiva / continua.

6. Consideriamo il problema (P) dato dall'equazione $u_t = \cos t \cdot u_{xx}$ con $u = u(t, x)$ definita su $[0, T) \times [-\pi, \pi]$, le condizioni al bordo $u(\cdot, -\pi) = u(\cdot, \pi)$ e $u_x(\cdot, -\pi) = u_x(\cdot, \pi)$, e la condizione iniziale $u(0, \cdot) = u_0(\cdot)$, dove u_0 è una funzione con coefficienti di Fourier c_n^0.
   Dimostrare che:

   a) per ogni $T > 0$ esiste al più una soluzione;[2]

   b) se $\sum_n |c_n^o| < +\infty$ allora esiste una soluzione per $T = \pi$;

   c) la soluzione al punto b) è di classe C^∞ per $t > 0$;

   d) in generale se $T > \pi$ non esistono soluzioni, neanche assumendo che u_0 sia C^∞.

7. Dato $p \in [1, +\infty)$, sia X l'insieme delle successioni $(x_1, x_2, \dots) \in \ell^p$ tali che $|x_n| \leq 1/n$ per ogni n. Dimostrare che:

   a) X è chiuso (in ℓ^p) per ogni p.

   b) X è compatto per $p > 1$.

   c) X non è compatto per $p = 1$.

8. Sia $f : \mathbb{R}^d \to (0, +\infty)$ una funzione di classe C^1 tale che il rapporto $|\nabla f|/f$ è limitato.

   a) Far vedere che per ogni $\delta > 0$ esiste m tale che $|y - x| \leq \delta \;\Rightarrow\; f(y)/f(x) \leq m$.

   b) Dimostrare che $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} f(n) < +\infty$ se e solo se $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, dx < +\infty$.

   c) Dire per quali $a > 1$ la serie $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \frac{1}{1 + |n|^a}$ è finita.

---

[1] In questo contesto si dice che f è h-periodica se $f(x) = f(x - h)$ per quasi ogni $x \in \mathbb{R}$.

[2] Al solito si richiede che u sia continua, C^2 in x per $t > 0$, C^1 in t per $t > 0$.

1. Sia M una matrice $d \times d$ invertibile e sia u una funzione in $L^1(\mathbb{R}^d)$, e sia v la funzione su $\mathbb{R}^d$ definita da $v(x) := u(Mx)$.

   a) Dimostrare che $v \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ed scrivere $\|v\|_1$ in termini di $\|u\|_1$.

   b) Scrivere la trasformata di Fourier $\hat{v}$ in termini di $\hat{u}$.

2. Calcolare la trasformata di Fourier della funzione $u(x) := \dfrac{1}{x^2 + 2x + 5}$.

3. Sia $u_0(x) := 16x_1^2 x_2^2$ per ogni $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Risolvere l'equazione $\Delta u = 0$ sul disco D di centro 0 e raggio 1 con la condizione al bordo $u = u_0$ su ∂D.

4. Sia Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^d$ con bordo regolare e sia X il sottospazio di $L^2(\Omega)$ composto dalle funzioni $u : \Omega \to \mathbb{R}$ di classe C^2 con supporto compatto.

   a) Dimostrare che l'operatore $T : X \to L^2(\Omega)$ definito da $T : u \mapsto \Delta u$ è autoaggiunto.

   b) Cosa si può dire sulla segnatura di T?

   c) Cosa succede se invece X è il sottospazio delle funzioni che sono restrizioni di funzioni di classe C^2 definite su tutto $\mathbb{R}^d$?

5. a) Data $m : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ funzione misurabile limitata, dimostrare che esiste uno (ed un solo) operatore lineare T da $L^2_\mathbb{C}(\mathbb{R})$ in sé tale che $\widehat{Tu} = m\,\hat{u}$ per ogni $u \in L^2_\mathbb{C}(\mathbb{R})$.

   b) Dire per quali m l'operatore T è autoaggiunto, e per quali è anche definito positivo.

6. Sia $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione di classe C^1 tale che $u \in L^1_\mathbb{C}$ e $\dot{u} \in L^2_\mathbb{C}$.

   a) Dimostrare che $\widehat{\dot{u}} = iy\,\hat{u}$.

   b) Dimostrare che $\hat{u} \in L^1_\mathbb{C}$.

7. Consideriamo il problema (P) dato dall'equazione $u_t = u_{xx}$ sull'intervallo spaziale $[0, \pi]$ con le condizioni al bordo $u(\cdot, 0) = u(\cdot, \pi) = 0$ e la condizione iniziale $u(0, x) = 8\cos^2 x \,\sin x$.

   a) Trovare una soluzione di (P).

   b) Dimostrare che la soluzione di (P) è unica.

   c) Dimostrare che l'unicità viene meno se si rimuove la condizione al bordo $u(\cdot, \pi) = 0$.

8. a) Sia Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$ con $\partial\Omega \neq \varnothing$, e per ogni $x \in \Omega$ sia $d(x)$ la distanza di x da $\partial\Omega$.

   a) Dimostrare che esiste una costante C che dipende solo da d tale che per ogni u funzione armonica su Ω vale
   $$\big|\nabla u(x)\big| \leq \frac{C}{d(x)} \|u\|_\infty \quad \text{per ogni } x \in \Omega;$$

   b) Dimostrare che ogni funzione armonica u su $\mathbb{R}^d$ tale che $u(x) = o(|x|)$ per $|x| \to \infty$ è costante.

   c) Trovare una stima per $\big|\nabla^k u(x)\big|$ analoga a quella nel punto a).

   d) Dimostrare che ogni funzione armonica u su $\mathbb{R}^d$ tale che $u(x) = o(|x|^k)$ per $|x| \to \infty$ è un polinomio con grado minore di k.

1. Sia X il sottospazio delle funzioni u in $L^2([0,2])$ tali che $u(x) = 0$ per q.o. $x \in [0,1]$. Determinare $X^\perp$ e le proiezioni ortogonali di una generica $u \in L^2([0,2])$ su X e su $X^\perp$.

2. Calcolare la trasformata di Fourier della funzione $u(x) := xe^{-|x|}$.

3. Detto X lo spazio delle funzioni $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ limitate e misurabili, dotato della norma L^1, consideriamo l'applicazione $T : X \times X \to \mathbb{R}$ data da $T(f_1, f_2) = \int_0^1 f_1 f_2 \, dx$.

   a) Dimostrare che T è ben definita e separatamente continua in ciascuna variabile.

   b) Dimostrare che T non è continua.

4. a) Trovare una funzione v su $\mathbb{R}^2$ tale che $\Delta v(x) = 4$.

   b) Risolvere l'equazione $\Delta u(x) = 4$ sul disco D di centro 0 e raggio 1 in $\mathbb{R}^2$, con la condizione al bordo $u(e^{it}) = |t|$ per $-\pi \le t \le \pi$.

5. a) Scrivere la funzione $u_0(x) := 2 - 16 \cos^2 x \sin^2 x$ in serie di Fourier.

   b) Risolvere il problema (P) dato dall'equazione alle derivate parziali $u_{tt} + 4u_t = u_{xx}$ sull'intervallo spaziale $[-\pi, \pi]$ con le condizioni di periodicità $u(t, -\pi) = u(t, \pi)$ e $u_x(t, -\pi) = u_x(t, \pi)$, e le condizioni iniziali $u(0, \cdot) = u_0$ e $u_t(0, \cdot) = 0$.

   c) Dire per quali dati iniziali u_0 la soluzione di (P) esiste per ogni $t \ge 0$, e per quali tende uniformemente a 0 per $t \to +\infty$.

6. Fissato $a > 0$ consideriamo la funzione $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f_a(x) := 1/|x|^a$ se $-1 \le x \le 1$ e $x \ne 0$, e $f_a(x) := 0$ altrimenti.

   a) Dire per quali $p \in [1, \infty)$ si ha che $f_a \in L^p(\mathbb{R})$.

   b) Dire per quali a la funzione $f_a * f_a$ è continua e limitata. (Notare che siccome f_a è positiva, $f_a * f_a$ è ben definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, e ha valori in $[0, +\infty]$.)

7. Dato E insieme misurabile in $\mathbb{R}^n$ e $1 \le p_1 \le p_2 \le +\infty$, per ogni funzione misurabile u su E poniamo
$$\|u\|_X := \inf \big\{ \|u_1\|_{p_1} + \|u_2\|_{p_2} : u = u_1 + u_2 \big\} ,$$
ed indichiamo con $X = X(E, p_1, p_2)$ lo spazio delle u tali che $\|u\|_X < +\infty$. Nel caso $p_2 < +\infty$ consideriamo inoltre la funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $g(t) := |t|^{p_1} \wedge |t|^{p_2}$ dove $a \wedge b := \min\{a, b\}$. Dimostrare quanto segue (supponendo $p_2 < +\infty$ tranne che per a)):

   a) $\| \cdot \|_X$ è una norma su X (avendo identificato le funzioni che coincidono q.o.);

   b) esiste una costante C tale che $g(t_1 + t_2) \le C\big(|t_1|^{p_1} + |t_2|^{p_2}\big)$ per ogni $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$;

   c) $u \in X$ se e solo se $\int_E g(u(x))\, dx < +\infty$;

   d) se $|E| < \infty$ allora $X = L^{p_1}$ e la una norma $\| \cdot \|_X$ equivale alla norma $\| \cdot \|_{p_1}$;

   e) lo spazio X con la norma $\| \cdot \|_X$ è completo.

8. a) Far vedere che è possibile definire la Trasformata di Fourier come applicazione lineare e continua da $X := X(\mathbb{R}, 1, 2)$ in $X' := X(\mathbb{R}, 2, \infty)$ che coincide con le definizioni già viste su L^1 e su L^2.

   b) Dire per quali $a > 0$ si ha che $u(x) := |x|^{-a} \in X(\mathbb{R}, 1, 2)$.

   c) Per gli a come sopra, dimostrare che $\hat{u}(y) = b|y|^{-c}$ per opportuni b, c.

1. Dire per quali $p \geq 1$ e $a \geq 0$ la funzione $f(x_1, x_2) := \dfrac{x_1^a}{x_1^4 + x_2^4}$ appartiene a $L^p(Q)$ dove Q è il quadrato $Q := (0,1)^2$.

2. Calcolare la serie di Fourier di $f(x) := \dfrac{1}{2 - e^{ix}}$.

3. Sia $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}^d$ una funzione di classe C^1 tale che u e ∇u appartengono a $L^1(\mathbb{R}^d)$. Esprimere le trasformate di Fourier di ∇u e $\operatorname{div} u$ in funzione della trasformata di u.[1]

4. Sia X l'insieme delle funzioni u in $C_c^\infty(\mathbb{R})$ con integrale 0.

   a) Dimostrare che la chiusura di X in $L^1(\mathbb{R})$ è il sottospazio Y delle funzioni con integrale 0.

   b) Qual è la chiusura di X in $L^2(\mathbb{R})$?

5. Consideriamo il problema (P) dato dall'equazione $u_t = u_{xx}$ sull'intervallo spaziale $[0, \pi]$ con le condizioni al bordo $u(t, 0) = 0$ e $u(t, \pi) = \pi t^2$ e la condizione iniziale $u(0, x) = 0$.

   a) Discutere l'unicità della soluzione.

   b) Discutere l'esistenza della soluzione.

6. Consideriamo lo spazio di Hilbert complesso $L^2 = L^2_{\mathbb{C}}([0, \pi])$, il sottospazio X delle funzioni $u : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ di classe C^1 tali che $u(0) = u(\pi)$, e l'operatore $T : X \to L^2$ dato da $T : u \mapsto i\dot{u}$.

   a) Dimostrare che T è autoaggiunto.

   b) Discutere la segnatura di T.

   c) Trovare una base di Hilbert di L^2 composta di autovettori di T.

7. Fissata una funzione pari $g \in L^1(\mathbb{R})$ considero la forma quadratica F su $L^2(\mathbb{R})$ data da
$$F(u) := \int_{\mathbb{R}^2} g(h)\, u(x-h)\, u(x)\, dx\, dh\,.$$

   a) Dimostrare che $F(u)$ è ben definita per ogni $u \in L^2(\mathbb{R})$;

   b) Scrivere $F(u)$ in funzione della trasformata di Fourier di u;

   c) Trovare ipotesi su g che garantiscono che F è definita positiva.

8. In $\mathbb{R}^2$ sia D la corona circolare (chiusa) con centro l'origine, raggio interno 1 e raggio esterno 2, e siano S_1 ed S_2 le circonferenze con centro l'origine e raggi 1 e 2 rispettivamente, vale a dire le due componenti connesse di ∂D. Date u_1 e u_2 funzioni di classe C^1 definite su S_1 e S_2 rispettivamente, trovare la funzione continua $u : D \to \mathbb{R}$ tale che $u = u_1$ su S_1, $u = u_2$ su S_2, e u è armonica all'interno di D.

---

[1] Per le funzioni a valori vettori o matrici la trasformata di Fourier viene calcolata componente per componente.

1. Calcolare la trasformata di Fourier di $u(x) := \dfrac{\sin(2x)}{1+x^2}$.

2. Tra tutti i polinomi p di grado minore o uguale a due trovare quello che minimizza la distanza dalla funzione $\sin x$ in $L^2(-\pi, \pi)$.

3. Sia Ω l'insieme del punti (x, y) tali che $x > 0$ e $0 < y < x^2$. Dire per quali $p \in [1, +\infty)$ la funzione $f(x, y) := 1/\sqrt{x^2 + y^2}$ appartiene a $L^p(\Omega)$.

4. Dire per quali $a \neq 0$ la funzione $f : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) := |x|^a$ è armonica.

5. Sia $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione tale che $x^k u \in L^1$ per ogni $k = 0, 1, 2, \dots$ Dimostrare che la TdF $\hat{u}$ è una funzione di classe C^∞ e calcolarne la serie di Taylor (formale) in 0.

6. Consideriamo il problema (P) dato dall'equazione $u_t = 4t^3 u_{xx}$, dalle condizioni al bordo $u(\cdot, 0) = u(\cdot, \pi) = 0$ e dalla la condizione iniziale $u(0, \cdot) = u_0$.
   a) Dimostrare che (P) ammette al più una soluzione su $[0, T) \times [0, \pi]$ per ogni $T > 0$.[1]
   b) Dire sotto quali ipotesi (su u_0) (P) ammette una soluzione, e discuterne le regolarità.
   c) Cosa si può dire sulla risolubilità *nel passato* di (P)?

7. Dimostrare la seguente variante del teorema di convergenza dominata: sia E un insieme misurabile in $\mathbb{R}^d$ e siano $u_n : E \to \mathbb{R}$ e $v_n : E \to [0, +\infty)$ due successioni di funzioni misurabili tali che u_n converge q.o. a u, v_n converge a v in $L^1(E)$, e $|u_n| \leq v_n$ q.o. per ogni n; allora
$$\lim_{n\to\infty} \int_E u_n \, dx = \int_E u \, dx \, .$$

8. Sia $I := [0, 1]$, sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua, e sia T l'operatore che ad ogni funzione misurabile $u : I \to \mathbb{R}$ associa la funzione composta $f \circ u$. Dimostrare quanto segue:
   a) Se $f(t) = O(|t|)$ per $t \to \pm\infty$ allora T porta $L^p(I)$ in sé per ogni $p \in [1, +\infty)$.
   b) Se f è Lipschitziana allora T porta $L^p(I)$ in sé ed è Lipschitziana.
   c) Se non vale l'ipotesi al punto a) allora T non porta $L^p(I)$ in sé per alcun $p \in [1, +\infty)$.
   d) Se vale l'ipotesi al punto a) allora $T : L^p(I) \to L^p(I)$ è continua.

[1] Al solito, per soluzione intendo una funzione u continua che sia anche di classe C^1 in t e C^2 in x per $t > 0$, e che risolve l'equazione per $t > 0$.

1. Data $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ di classe C^1, scrivere i coefficienti di Fourier (complessi) di f' in funzione di quelli di f e del numero $m(f) := f(\pi) - f(-\pi)$.

2. Calcolare la Trasformata di Fourier della funzione $u(x) := \dfrac{x^2}{x^4 + 4}$.

3. Detto D il disco chiuso (in $\mathbb{C}$) con raggio 1 e centro nell'origine, trovare la funzione $u : D \to \mathbb{R}$ continua e armonica all'interno di D che soddisfa la condizione al bordo $u(e^{it}) = t^2$.

4. Sia $I := [0, 1]$ e sia X il sottospazio di $L^2(I)$ dato dalle funzioni $u : I \to \mathbb{R}$ di classe C^2 tali che $u(1) = 0$. Data $a : I \to \mathbb{R}$ funzione di classe C^1, consideriamo l'operatore $T : X \to L^2(I)$ dato da $Tu := (a\dot{u})'$.

   a) Dire per quali funzioni a l'operatore T è autoaggiunto.

   b) Tra le funzioni a del punto a), dire per quali T è semi-definito positivo.

   c) Tra le funzioni a del punto a), dire per quali T è definito positivo.

5. Sia $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile, siano $E_1, E_2, \dots$ una successione di insiemi misurabili contenuti in $\mathbb{R}^d$ e a due a due disgiunti, e sia E l'unione di questi insiemi. Dimostrare che l'uguaglianza
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{E_n} f\, dx \right) = \int_E f\, dx$$
vale nei seguenti casi: a) $f \geq 0$; b) $f \in L^1(E)$; c) f è integrabile su E.

6. Data una funzione $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ di classe C^3 e 2π-periodica, consideriamo il problema
$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 3u \\ u(\cdot, -\pi) = u(\cdot, \pi)\,,\ u_x(\cdot, -\pi) = u_x(\cdot, \pi) \\ u(0, \cdot) = u_0(\cdot)\,,\ u_t(0, \cdot) = 0 \end{cases} \tag{*}$$

   a) Risolvere il problema $(*)$ per $u_0(x) := \cos(x)$.

   b) Dire per quali u_0 la soluzione del problema $(*)$ è definita su tutto $\mathbb{R} \times [-\pi, \pi]$ ed è limitata.

7. a) Usando la trasformata di Fourier, trovare una funzione $u \in L^1(\mathbb{R})$ che risolve l'equazione
$$u * u = \frac{1}{1 + x^2}\,.$$

   b) Quante soluzioni u in $L^1(\mathbb{R})$ ammette di quest'equazione?

   c) E quante in $L^2(\mathbb{R})$?

8. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la funzione data $f(x) := 1/|x|$ per $x \neq 0$ (e $f(0) := 0$), sia u una funzione in $L^1(\mathbb{R}^3)$ e sia A un aperto in $\mathbb{R}^3$ tale che $u = 0$ q.o. su A; sia infine $B := B(0, 1)$ la palla chiusa con centro l'origine e raggio 1.

   a) Dire per quali p la funzione f appartiene agli spazi $L^p(\mathbb{R}^3)$, $L^p(B)$, $L^p(\mathbb{R}^3 \setminus B)$.

   b) Dimostrare che il prodotto di convoluzione $u * f(x)$ è ben definito per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^3$.

   c) Dimostrare che $u * f(x)$ è ben definito e finito per ogni $x \in A$, e che $u * f$ è continua su A.

   d) Dimostrare che $u * f$ è armonica su A.

1. a) Dato $u \in L^1(\mathbb{R})$, sia $v(x) := u(-x)$; esprimere $\hat{v}$ in termini di $\hat{u}$.

   b) Caratterizzare le funzioni $u \in L^1(\mathbb{R})$ tali che $\hat{u}$ è una funzione *dispari* a valori *reali*.

2. a) Scrivere la serie di Fourier della funzione $u_0(x) := 4\sin^3 x$.

   b) Scrivere u_0 come combinazione lineare delle funzioni $\sin(nx)$ con $n = 1, 2, \dots$.

3. Sia u una funzione misurabile su $\mathbb{R}$ che è limitata sugli insiemi limitati (ma non necessariamente limitata su tutto $\mathbb{R}$) e sia v una funzione in $L^1(\mathbb{R})$ con supporto compatto. Dimostrare che:

   a) $u * v(x)$ è ben definito per ogni $x \in \mathbb{R}$;

   b) la funzione $u * v$ è continua;

   c) se $u(x) = O(|x|^a)$ per $x \to +\infty$ per qualche $a \in \mathbb{R}$ allora $u * v(x) = O(|x|^a)$ per $x \to +\infty$.

4. Sia E l'insieme dei punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $y^2(1 + x^8) \leq 2$. Dire per quali $a \geq 0$ e $p \geq 1$ la funzione $f(x) := (1 + x^2 + y^2)^a$ appartiene a $L^p(E)$.

5. Trovare una soluzione $u = u(t, x)$ definita su $[0, +\infty) \times [0, \pi]$ del problema (P) dato dall'equazione differenziale $u_t = u_{xx} + 3t^2 u$, le condizioni al bordo $u(\cdot, 0) = u(\cdot, \pi) = 0$ e la condizione iniziale $u(0, \cdot) = u_0(\cdot)$, dove u_0 è la funzione definita nell'esercizio 2.

6. a) Data una funzione armonica u su $\mathbb{R}^d$ ed un aperto limitato A in $\mathbb{R}^d$ con frontiera di classe C^1, dimostrare che il flusso di ∇u uscente da ∂A è zero.

   b) Far vedere con un esempio che quanto affermato al punto a) non vale se si suppone che u sia una funzione armonica su $\mathbb{R}^d \setminus \{x_0\}$ con $x_0 \in A$.

   c) Nel contesto del punto b), far vedere che il flusso di ∇u uscente da ∂A non dipende da A.

7. Sia u una funzione radiale di classe C^2 su $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ con $d \geq 2$, vale a dire una funzione della forma $u(x) := v(|x|)$ con v funzione di classe C^2 su $(0, +\infty)$.

   a) Scrivere ∇u e Δu in funzione di v.

   b) Trovare tutte le funzioni armoniche radiali su $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$.

8. Consideriamo una successione di funzioni f_n in $L^1(\mathbb{R}^d)$ tali che f_n converge a 0 in $L^1(B)$ per ogni palla B centrata nell'origine.

   a) Far vedere che f_n converge a 0 in $L^1(E)$ per ogni insieme E in $\mathbb{R}^d$ misurabile e limitato.

   b) Dare un esempio di f_n tale che f_n non converge a 0 in $L^1(\mathbb{R}^d)$.

   c) Caratterizzare gli insiemi misurabili E per cui vale sempre che f_n converge a 0 in $L^1(E)$.

SOLUZIONI

1. Osservo innanzitutto che il prodotto di convoluzione $f * g$ è una funzione limitata ben definita perché f appartiene a L^1 mentre g è limitata. Dati $x, x' \in \mathbb{R}^d$, usando la definizione del prodotto di convoluzione ottengo

$$f * g(x) - f * g(x') = \int_{\mathbb{R}^d} (g(x-y) - g(x'-y))\, f(y)\, dy\,.$$

Detta quindi L la costante di α-Hölderianità di g ottengo

$$\begin{aligned}\big|f * g(x) - f * g(x')\big| &\le \int_{\mathbb{R}^d} |g(x-y) - g(x'-y)|\, |f(y)|\, dy \\ &\le \int_{\mathbb{R}^d} L|(x-y)-(x'-y)|^\alpha\, |f(y)|\, dy = L|x-x'|^\alpha\, \|f\|_1\,,\end{aligned}$$

da cui segue che $f * g$ è α-Hölderiana di costante $L' := L\|f\|_1$.

2. Per capire per quali p la norma $\|f\|_p$ è finita la devo stimare sia dall'alto che dal basso (visto che non la posso calcolare esattamente). Per fare entrambe le stime spezzo il dominio di integrazione Q in due sottoinsiemi Q^+ e Q^- definiti come segue:
   - Q^- è l'insieme degli x tali che $x \in Q$ e $x_2^4 \le x_1^2$, ovvero $0 \le x_1 \le 1$ e $0 \le x_2 \le x_1^{1/2}$;
   - Q^+ è l'insieme degli x tali che $x \in Q$ e $x_2^4 > x_1^2$, ovvero $0 \le x_2 \le 1$ e $0 \le x_1 < x_2^2$.

   L'idea di questa suddivisione è che in Q^- la quantità $x_1^2 + x_2^4$ può essere stimata dall'alto e dal basso con x_1^2, mentre in Q^+ può essere stimata dall'alto e dal basso con x_2^4.
   Per la precisione vale che

$$\begin{aligned} x \in Q^- \ &\Rightarrow\ x_1^2 \le x_1^2 + x_2^4 \le 2x_1^2 \ \Rightarrow\ \frac{1}{2^{p/10} x_1^{p/5}} \le |f(x)|^p \le \frac{1}{x_1^{p/5}}\,, \\ x \in Q^+ \ &\Rightarrow\ x_2^4 \le x_1^2 + x_2^4 \le 2x_2^4 \ \Rightarrow\ \frac{1}{2^{p/10} x_2^{2p/5}} \le |f(x)|^p \le \frac{1}{x_2^{2p/5}}\,. \end{aligned}$$

   Quindi stimo l'integrale $\int_{Q^-} |f|^p$ dall'alto e dal basso con

$$\int_{Q^-} \frac{dx}{x_1^{p/5}} = \int_0^1 \left(\int_0^{x_1^{1/2}} \frac{dx_2}{x_1^{p/5}} \right) dx_1 = \int_0^1 \frac{dx_1}{x_1^{p/5-1/2}}\,,$$

   e quest'ultimo integrale è finito se e solo se $p/5 - 1/2 < 1$, vale a dire $p < 15/2$.
   Analogamente stimo l'integrale $\int_{Q^+} |f|^p$ dall'alto e dal basso con

$$\int_{Q^+} \frac{dx}{x_2^{2p/5}} = \int_0^1 \left(\int_0^{x_2^2} \frac{dx_1}{x_2^{2p/5}} \right) dx_2 = \int_0^1 \frac{dx_2}{x_2^{2p/5-2}}\,,$$

   e quest'ultimo integrale è finito se e solo se $2p/5 - 2 < 1$, vale a dire $p < 15/2$.
   Sulla base di quanto fatto deduco che la norma $\|f\|_p$ è finita se e solo se $p < 15/2$.

3. Siccome X è un sottospazio chiuso di $L^2(-1,1)$, so che esiste la proiezione di 1 su X, ed è una funzione della forma

$$f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3\,,$$

   inoltre la proiezione di 1 su $X^\perp$ è $1 - f$. Il fatto $1 - f$ è ortogonale a X si traduce nel seguente sistema di equazioni lineari nei coefficienti a_i:

$$\begin{cases} 0 = \langle 1 - f\,;\, x \rangle = \displaystyle\int_{-1}^1 x - a_1 x^2 - a_2 x^3 - a_3 x^4 dx = -\tfrac{2}{3} a_1 - \tfrac{2}{5} a_3 \\ 0 = \big\langle 1 - f\,;\, x^2 \big\rangle = \displaystyle\int_{-1}^1 x^2 - a_1 x^3 - a_2 x^4 - a_3 x^5 dx = \tfrac{2}{3} - \tfrac{2}{5} a_2 \\ 0 = \big\langle 1 - f\,;\, x^3 \big\rangle = \displaystyle\int_{-1}^1 x^3 - a_1 x^4 - a_2 x^5 - a_3 x^6 dx = -\tfrac{2}{5} a_1 - \tfrac{2}{7} a_3 \end{cases}$$

   da cui si ricava facilmente che $a_1 = a_3 = 0$ e $a_2 = 5/3$. Quindi la proiezione di 1 su X è $f = \frac{5}{3} x^2$ e la proiezione su $X^\perp$ è $1 - f = 1 - \frac{5}{3} x^2$.

4. a) Detta $\tau_h f(x) := f(x-h)$ la traslata di f, per ogni $n \in \mathbb{Z}$ vale che

$$\begin{aligned} c_n(\tau_h f) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-h)\, e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi-h}^{\pi-h} f(t)\, e^{-in(t+h)} dt \\ &= e^{-inh} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int} dt = e^{-inh} c_n \,. \end{aligned}$$

(Nel secondo passaggio ho usato il cambio di variabile $x = t + h$, nel terzo ho usato il fatto che l'integrale di una funzione 2π-periodica su ogni intervallo di lunghezza 2π è lo stesso.)

b) Posto $h := 2\pi/N$, i seguenti fatti sono equivalenti:
(i) f è $2\pi/N$-periodica;
(ii) $f(x) = \tau_h f(x) = 0$ per q.o. x;
(iii) $(1 - e^{-inh})c_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$;
(iv) $c_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$ tale che N non divide n.
(L'equivalenza (i) $\Leftrightarrow$ (ii) è ovvia, (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) segue dal punto a), e infine (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) segue dal fatto che $1 - e^{-inh} \neq 0$ se e solo se N non divide n.)

5. a) La condizione $1/p = 1/p_1 + 1/p_2$ equivale a

$$1 = \frac{p}{p_1} + \frac{p}{p_2}\,, \tag{1.1}$$

il che significa che p_1/p e p_2/p sono esponenti coniugati. Posso allora applicare la disuguaglianza di Hölder come segue:

$$\|f_1 f_2\|_p^p = \int_E |f_1|^p |f_2|^p \, dx \le \big\||f_1|^p\big\|_{p_1/p} \big\||f_2|^p\big\|_{p_2/p} = \|f_1\|_{p_1}^p \|f_2\|_{p_2}^p \,.$$

(Il caso $p = p_1 = p_2 = +\infty$ va considerato a parte, ma è immediato.)

b) Basta applicare a).

c) *T non è iniettiva.* Infatti posso scrivere la funzione 0 (che appartiene a L^p per ogni p) sia come prodotto di 0 per 0 che come prodotto di g per 0, dove g è una qualunque funzione in L^{p_1} che non sia quasi ovunque nulla.

T è surgettiva. Ricordando la (1.1) posso infatti scrivere ogni funzione $f \in L^p$ come

$$f = \underbrace{\operatorname{sgn}(f)\,|f|^{p_1/p}}_{f_1} \cdot \underbrace{|f|^{p_2/p}}_{f_2}$$

dove ho posto

$$\operatorname{sgn}(t) := \begin{cases} +1 & \text{se } t > 0, \\ 0 & \text{se } t = 0, \\ -1 & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

Si verifica facilmente che f_1 appartiene a L^{p_1} ed f_2 appartiene a L^{p_2}.

T è Lipschitziana su ogni sottoinsieme limitato di $L^{p_1} \times L^{p_2}$, ed in particolare è continua. Osservo infatti che date due coppie (f_1, f_2) e (f_1', f_2') in $L^{p_1} \times L^{p_2}$ si ha che

$$\begin{aligned} \|f_1' f_2' - f_1 f_2\|_p &= \|f_1'(f_2' - f_2) + (f_1 - f_1')f_2\|_p \\ &\le \|f_1'(f_2' - f_2)\|_p + \|(f_1 - f_1')f_2\|_p \\ &\le \|f_1'\|_{p_1} \|f_2' - f_2\|_{p_2} + \|f_2\|_{p_2} \|f_1 - f_1'\|_{p_1} \,. \end{aligned}$$

6. a) Data u soluzione del problema (P) definita su $[0,T) \times [-\pi, \pi]$, per ogni $t \in [0,T)$ e $n \in \mathbb{Z}$ indico con $c_n(t)$ i coefficienti di Fourier di $u(t, \cdot)$. Allora
   - c_n è una funzione continua su $[0,T)$ perché u è continua su $[0,T) \times [-\pi, \pi]$;
   - c_n è una funzione derivabile per ogni $t \in (0,T)$ perché u è di classe C^1 in t su $(0,T) \times [-\pi, \pi]$, e $\dot c_n(t)$ sono i coefficienti di Fourier di $u_t(t, \cdot)$;

- $-n^2\, c_n(t)$ sono i coefficienti di Fourier di $u_{xx}(t,\cdot)$ per ogni $t \in (0,T)$ perché $u(t,\cdot)$ è di classe C^2 e soddisfa le condizioni al bordo $u(\cdot,-\pi) = u(\cdot,\pi)$ e $u_x(\cdot,-\pi) = u_x(\cdot,\pi)$;
- per ogni $t \in (0,T)$ vale l'identità $u_t(t,\cdot) = \cos t \cdot u_{xx}(t,\cdot)$ da cui segue l'identità dei rispettivi coefficienti di Fourier, vale a dire $\dot c_n(t) = -n^2 \cos t \cdot c_n(t)$;
- $c_n(0) = c_n^0$ perché $u(u,\cdot) = u_0(\cdot)$;
- la funzione c_n risolve dunque l'equazione differenziale lineare omogenea $\dot y = -n^2 \cos t \cdot y$ con la condizione iniziale $y(0) = c_n^0$, e pertanto è univocamente determinata; per la precisione vale che
$$c_n(t) = c_n^0\, e^{-n^2 \sin t}\,. \tag{1.2}$$

Siccome i coefficienti di Fourier di $u(t,\cdot)$ sono univocamente determinati per ogni $t \in [0,T)$, ho che anche la funzione $u(t,\cdot)$ è univocamente determinata.

b) e c) La formula (1.2) suggerisce di considerare la soluzione u data da
$$u(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \underbrace{c_n^0\, e^{-n^2 \sin t}\, e^{inx}}_{u_n}\,. \tag{1.3}$$

Faccio vedere quanto segue:

- La serie delle funzioni u_n in (1.3) converge totalmente su $[0,\pi]\times\mathbb{R}$, da cui segue che u è ben definita e continua su $[0,\pi]\times\mathbb{R}$, e 2π-periodica nella variabile x. Infatti, tenuto conto che $-n^2 \sin t \le 0$ per $t \in [0,\pi]$, ho che
$$\|u_n\|_{L^\infty([0,\pi]\times\mathbb{R})} \le |c_n^0|\,,$$
e sappiamo che $\sum_n |c_n^0| < +\infty$ per ipotesi.
- La serie delle derivate parziali di ogni ordine delle funzioni u_n converge totalmente su $[\delta,\pi-\delta]\times\mathbb{R}$ per ogni $\delta > 0$, da cui segue che u è di classe C^∞ su $(0,\pi)\times\mathbb{R}$. Si può infatti dimostrare per induzione che per ogni intero $h = 0,1\dots$ esiste un polinomio $P_h = P_h(y_1,y_2)$ di grado h tale
$$D_t^h\big(e^{-n^2 \sin t}\big) = c_n^0\, P_h(n^2 \sin t, n^2 \cos t)\, e^{-n^2 \sin t}\,,$$
e quindi per ogni intero $k = 0,1,\dots$ vale che
$$D_x^k D_t^h u_n = c_n^0\, P_h(n^2 \sin t, n^2 \cos t)\, e^{-n^2 \sin t}\, (in)^k e^{inx}\,.$$
Usando questa formula, per ogni $h = 0,1,\dots$ possiamo trovare una costante M_h tale che
$$\big\|D_x^k D_t^h u_n\big\|_{L^\infty([\delta,\pi-\delta]\times\mathbb{R})} \le M_h\, |c_n^0|\, |n|^{2h+k} e^{-n^2 \sin\delta}\,,$$
e dunque la serie delle derivate parziali $D_x^k D_t^h u_n$ converge totalmente perché la successione $|c_n^0|$ è limitata, $e^{-n^2 \sin\delta}$ tende a 0 più che esponenzialmente in n, mentre $|n|^{2h+k}$ tende a infinito polinomialmente.
- Siccome ciascuna funzione u_n risolve l'equazione in (P), che è lineare, grazie ai punti precedenti ottengo che anche u risolve tale equazione. Inoltre u è 2π-periodica in x e quindi soddisfa la condizione al bordo in (P). Infine le funzioni $u(0,\cdot)$ e $u_0(\cdot)$ coincidono perché hanno gli stessi coefficienti di Fourier.

d) Considero la funzione u_0 con coefficienti $c_n^0 := e^{-|n|}$. Siccome c_n^0 tende a 0 più che polinomialmente per $n \to \pm\infty$ ho che
$$\sum_n |c_n^0|\, |n|^k < +\infty \quad \text{per } k = 0,1,\dots,$$
e quindi u_0 è una funzione 2π-periodica su $\mathbb{R}$ di classe C^∞. Supponiamo per assurdo che esista una soluzione u di (P) definita su $[0,T)\times[-\pi,\pi]$. Preso allora t con $\pi < t < \min\{T, 2\pi\}$, si ha che $\sin t < 0$ e quindi la formula (1.2) implica che i coefficienti $c_n(t)$ tendono a $\pm\infty$ per $n \to \pm\infty$. Ma questo contraddice il fatto che questi coefficienti sono in ℓ^2, e quindi devono tendere a 0.

7. a) Sia $x^{(k)}$ una successione di elementi di X che converge a x in ℓ^p per $k \to +\infty$. Devo mostrare che x appartiene a X. Osservo che per ogni $n = 1,2\dots$ si ha che
$$\big|x_n^{(k)} - x_n\big| \le \big\|x^{(k)} - x\big\|_{\ell^p}$$

e quindi $x_n^{(k)}$ converge a x_n per $k \to +\infty$. Inoltre $\left|x_n^{(k)}\right| \leq 1/n$ (perché $x^{(k)}$ appartiene a X) e quindi anche x_n soddisfa $|x_n| \leq 1/n$, e dunque x appartiene a X.

b) Data una successione $x^{(k)}$ di elementi di X, voglio trovare una sotto-successione che converge ad un qualche elemento di X. Fissato n, ho che $\left|x_n^{(k)}\right| \leq 1/n$ per ogni k e quindi posso estrarre da k una sotto-successione k_h tale che $x_n^{(k_h)}$ converge ad un certo x_n, che a sua volta soddisfa

$$|x_n| \leq 1/n \,. \tag{1.4}$$

Usando un procedimento diagonale posso inoltre fare in modo che la successione k_h sia la stessa per ogni n.

Pongo allora $x := (x_1, x_2, \dots)$, e osservo che x appartiene a X per via della (1.4). Mi resta da dimostrare che $x^{(k_h)}$ converge a x in ℓ^p. Osservo che per ogni n vale

$$\left|x_n^{(k_h)} - x_n\right| \leq \left|x_n^{(k_h)}\right| + |x_n| \leq \frac{2}{n} \,,$$

e dunque, fissato un qualunque intero N, vale che

$$\left\|x^{(k_h)} - x\right\|_{\ell^p}^p \leq \sum_{n=1}^{N-1} \left|x_n^{(k_h)} - x_n\right|^p + 2^p \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \,. \tag{1.5}$$

Siccome la serie di $1/n^p$ converge, per ogni $\varepsilon > 0$ posso trovare N tale che la seconda somma in (1.5) vale meno di ε; siccome la prima somma in (1.5) tende a 0 per $h \to +\infty$ ho che

$$\limsup_{h \to +\infty} \left\|x^{(k_h)} - x\right\|_{\ell^p}^p \leq 2^p \varepsilon \,,$$

e dall'arbitrarietà di ε segue che

$$\lim_{h \to +\infty} \left\|x^{(k_h)} - x\right\|_{\ell^p}^p = 0 \,.$$

8. a) Osservo che

$$\nabla(\log f) = \frac{\nabla f}{f} \,.$$

Dunque l'ipotesi fatta su f implica che la funzione $\log f$ ha gradiente limitato, ed in particolare è una funzione Lipschitziana su $\mathbb{R}^d$. In altre parole esiste una costante L tale che per ogni $x, y \in \mathbb{R}^d$ vale

$$L|y - x| \geq \left|\log(f(y)) - \log(f(x))\right| = \left|\log\left(\frac{f(y)}{f(x)}\right)\right| \,,$$

e dunque

$$\exp(-L|x - y|) \leq \frac{f(y)}{f(x)} \leq \exp(L|x - y|) \,.$$

In particolare presa $\delta > 0$ e posto $m := \exp(L\delta)$ si ha che

$$|x - y| \leq \delta \;\Rightarrow\; \frac{1}{m} \leq \frac{f(y)}{f(x)} \leq m \,. \tag{1.6}$$

b) Per ogni vettore $n \in \mathbb{Z}^d$ indico con $Q(n)$ il cubo di centro n e lato 1 con lati paralleli agli assi. Osservo che i cubi $Q(n)$ ricoprono $\mathbb{R}^d$ e l'intersezione di due di questi cubi ha misura nulla. Pertanto

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \int_{Q(n)} f(x)\, dx \,. \tag{1.7}$$

D'altra parte il diametro di ciascun $Q(n)$ è $\sqrt{d}$, e posto quindi $m := \exp\left(L\sqrt{d}\right)$ la (1.6) implica

$$\frac{1}{m} f(n) \leq f(x) \leq m\, f(n) \quad \text{per ogni } x \in Q(n),$$

e dunque, ricordando che ogni $Q(n)$ ha volume 1,

$$\frac{1}{m} f(n) \leq \int_{Q(n)} f(x)\, dx \leq m\, f(n) \,. \tag{1.8}$$

Mettendo insieme (1.7) e (1.8) ottengo che

$$\frac{1}{m} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} f(n) \leq \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, dx \leq m \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} f(n) \,,$$

da cui segue la tesi.

c) Voglio vedere se posso applicare quanto fatto al punto b). Pongo dunque

$$f(x) := \frac{1}{1+|x|^a} \tag{1.9}$$

ed osservo che

$$\nabla f(x) = \frac{ax|x|^{a-2}}{(1+|x|^a)^2}\,,$$

e quindi

$$\frac{|\nabla f(x)|}{f(x)} = \frac{a|x|^{a-1}}{1+|x|^a}\,,$$

e questa funzione è limitata perché è continua e tende a 0 per $|x| \to +\infty$.
Pertanto grazie a quanto fatto al punto b) ho che

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \frac{1}{1+|n|^a} \approx \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{1+|x|^a}\,dx \approx \int_0^{+\infty} \frac{t^{d-1}}{1+t^a} dt \approx \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{a-d+1}} dt\,.$$

(L'espressione "$a \approx b$" sta per "a si comporta come b", cioè "a è finito se e solo se b è finito".) Siccome l'ultimo integrale è finito se e solo se $a - d + 1 > 1$, cioè $a > d$, lo stesso vale per la serie.

COMMENTI

- Esercizio 1. Un passaggio preliminare che molti dei presenti hanno omesso è verificare che il prodotto di convoluzione $f * g$ sia effettivamente ben definito, cosa che peraltro segue da un risultato visto a lezione. Alcuni, nel tentativo di farlo vedere, hanno scritto che $f * g$ è ben definito perché

$$|f * g(x)| \le \int |g(x-y)|\,|f(y)|\,dy \le \|g\|_\infty \|f\|_1\|\,.$$

  Ma questa disuguaglianza non ha molto senso, visto che presuppone l'esistenza di $f * g(x)$, che è proprio quella che si vorrebbe dimostrare.

- Esercizio 2. Mi scuso perché il suggerimento dato durante lo scritto non era ottimale. Seguendo quel suggerimento, infatti, è facile arrivare alla conclusione che $f \in L^p$ per $p < 5$ e $f \notin L^p$ for $p \ge 10$, ma non è facile arrivare al risultato completo.

- Esercizio 2. Un approccio alternativo (seguito da veri dei presenti) è il seguente: si calcola l'integrale di $|f(x)|^p$ su Q usando il cambio di variabili

$$x_1 = \rho\cos\theta\,, \quad x_2 = \sqrt{\rho\sin\theta}\,.$$

  Si noti infatti che
  - $f(x) = 1/\rho^{1/5}$;
  - il determinante Jacobiano del cambio di variabili è $\frac{1}{2}\sqrt{\rho/\sin\theta}$;
  - Q contiene l'insieme B dei punti x tali che $0 \le \rho \le 1$ e $0 \le \theta \le \pi/2$;
  - l'integrale di $|f(x)|^p$ su Q si comporta come quello su B perché f è limitata su $Q \setminus B$ e quindi l'integrale di $|f(x)|^p$ su $Q \setminus B$ è finito per ogni p.

  Ne consegue che

$$\begin{aligned}\int_Q |f(x)|^p\,dx &\approx \int_B |f(x)|^p\,dx \\ &= \int_0^1\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\rho^{p/5}}\,\frac{\sqrt{\rho}}{2\sqrt{\sin\theta}} d\theta\,d\rho \\ &= \left(\int_0^1 \frac{d\rho}{\rho^{p/5-1/2}}\right)\left(\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{2\sqrt{\sin\theta}}\right) \approx \int_0^1 \frac{d\rho}{\rho^{p/5-1/2}}\,,\end{aligned}$$

  e dunque f appartiene a $L^p(Q)$ se e solo se $p/5 - 1/2 < 1$, cioè $p < 15/2$.

- Esercizio 3. Noto che le funzioni dispari e quelle pari sono mutuamente ortogonali in $L^2(-1,1)$. Usando questa osservazione ed un po' di algebra lineare si dimostra che allora la proiezione della funzione pari 1 su X è uguale alla proiezione di 1 sulla retta generata da x^2, che è data dalla formula
$$\frac{\langle 1\,;\, x^2\rangle}{\|x^2\|_2^2}\,x^2 = \frac{2/3}{2/5}\,x^2 = \frac{5}{3}x^2\,.$$

- Esercizio 5c): continuità della mappa T. Diversi gli errori e le dimostrazioni incomplete, cioè basate su enunciati non sono stati dimostrati né a lezione, né dallo studente che li ha usati. Per cominciare, alcuni dei presenti hanno scritto che la mappa $T : L^{p_1} \times L^{p_2} \to L^p$ è lineare, mentre invece è bilineare (come ogni prodotto che si rispetti).
Altri invece hanno scritto che T è continua perché è separatamente continua nelle due variabili. Il problema è che questa affermazione in generale è falsa, persino nel caso in cui T è una funzione bilineare sul prodotto di due spazi normati (anche a valori in $\mathbb{R}$). Tuttavia è vera se T è una mappa bilineare tra spazi di Banach (come in questo esercizio); però questo enunciato è tutt'altro che ovvio, e non può essere dato per buono.
Qualcuno ha scritto che T è continua perchè è continua in $(0,0)$: questa affermazione è corretta ma non immediata, e non può essere data per buona. Stesso discorso vale l'asserzione che la stima $\|T(f_1,f_2)\|_p \leq \|f_1\|_{p_1}\|f_2\|_{p_2}$ implica la continuità di T.

- Esercizio 5c): surgettività della mappa T. Alcuni dei presenti hanno dimostrato che T ha immagine densa in L^p, e ne hanno dedotto che allora l'immagine è tutto L^p. Non vedo alcuna ragione per cui debba essere così, e certamente non basta la continuità di T. (Per esempio, dato un insieme E di misura nulla, l'immersione di $L^2(E)$ in $L^1(E)$ è una mappa lineare continua con immagine densa, ma non surgettiva.)

- Esercizio 6. Questo esercizio è stato particolarmente difficile da correggere, perché molti hanno dato risposte lunghe e allo stesso tempo vaghe e imprecise, in particolare per quanto riguarda i punti b) e c), dando spesso l'impressione di non essere in grado di scriverne di precise. Tuttavia alcuni (ma solo alcuni) hanno anche dato tutte le idee e le formule necessarie, cosa che è stata valutata positivamente.
Diverse persone hanno dedicato tempo a raccontare la procedura "formale" usata per trovare la soluzione del problema. In un esame scritto questo passo può essere ridotto al minimo o anche omesso, e sopratutto deve essere chiaro che non sostituisce le dimostrazioni rigorose.
Infine molti dei presenti hanno ridimostrato formule viste e riviste a lezione, come quelle che legano i coefficienti di Fourier di una funzione $u(t,\cdot)$ con quelli di $u_t(t,\cdot)$ e di $u_{xx}(t,\cdot)$. Questo non era ovviamente necessario.

- Esercizio 6b). Diversi dei presenti hanno mostrato che la serie delle funzioni u_n in (1.3) converge totalmente, e da questo hanno dedotto che la funzione u definita da questa serie è una soluzione del problema (P). In realtà la convergenza totale della serie mostra solo che u è una funzione ben definita e continua su $[0,\pi]\times\mathbb{R}$, mentre per dimostrare che è una soluzione dell'equazione in (P) bisogna far vedere perlomeno che le serie delle derivate parziali $D_t u_n$, $D_x u_n$ e $D_{xx} u_n$ convergono totalmente sui sottoinsiemi compatti di $(0,\pi)\times\mathbb{R}$.

- Esercizio 6b) e c). Molti dei presenti hanno scritto che le derivate parziali delle funzioni u_n di un certo ordine convergono totalmente su $(0,\pi)\times[-\pi,\pi]$, ma questo è falso: convergono totalmente solo in $(\delta,\pi-\delta)\times[-\pi,\pi]$ per ogni $\delta>0$. (L'errore è in parte dovuto al tipo di stime scritte, vedere il commento successivo.)

- Esercizio 6b). Per dimostrare la convergenza totale della serie $\sum_n u_n$ che definisce u, o della serie delle derivate parziali di u_n di un certo ordine, molti dei presenti hanno scritto delle stime dipendenti da t, del tipo
$$\sum_n \|D_t u_n\|_\infty \leq \sum_n n^2 |c_n^0|\,|e^{-n^2\sin t}| < +\infty\,,$$
dove quindi $\|D_t u_n\|_\infty$ non può che essere la norma del sup della funzione $D_t u_n(t,\cdot)$ a t fissato. Il problema è che questa stima mostra la convergenza totale della serie delle funzioni $D_t u_n(t,\cdot)$

per ogni t, che però non implica la convergenza totale delle funzioni $D_t u_n$ in t e x. In particolare questa convergenza implica che $v := \sum D_t u_n$ è una funzione continua nella variabile x per ogni t, ma non che v è continua nelle variabili t, x. Inoltre non implica che v coincida con la derivata parziale $D_t u$, né che questa esista.
Ovviamente dalla stima data sopra è possibile ricavare una stima della norma del sup delle funzioni $D_t u_n$ nelle due variabili, ma questa stima andava scritta esplicitamente.

- Esercizio 6d). Alcuni dei presenti hanno fatto vedere che la serie delle funzioni u_n non converge totalmente e ne hanno dedotto che quindi la soluzione u non esiste.
Scritta così questa inferenza non è corretta. Ma può essere resa corretta osservando che per ogni t la soluzione $u(t, \cdot)$ è per ipotesi una funzione di classe C^2 (nella variabile x) e quindi è anche di classe C^1, cosa che implica la convergenza totale della serie di Fourier $\sum c_n(t)\, e^{inx}$ (a t fissato).

- Esercizio 7. Gli enunciati a) e b) valgono anche per $p = +\infty$, ma questo caso è stato escluso per semplificare lo svolgimento dell'esercizio.

- Esercizio 7a). Diversi dei presenti hanno dato la seguente dimostrazione: sia $p_n : \ell^p \to \mathbb{R}$ la mappa lineare che ad ogni successione x associa il termine n-esimo x_n. Si dimostra facilmente che questa mappa è continua e che
$$X = \bigcap_{n=1}^{\infty} p_n^{-1}\big([-1/n, 1/n]\big)\,,$$
e dunque X è chiuso in quanto intersezione di chiusi. Attenzione: la continuità della mappa p_n non può essere data per scontata, come invece hanno fatto alcuni.

- Esercizio 7b). Molti dei presenti hanno scritto che la compattezza di X segue dal fatto che X è chiuso e limitato, ma questa affermazione è sbagliata. In effetti gli insiemi compatti in uno spazio metrico completo sono caratterizzati dall'essere chiusi e *totalmente limitati*, ma negli spazi normati di dimensione infinita, come ad esempio ℓ^p, i limitati non sono sempre totalmente limitati. Un esempio di insieme limitato ma non totalmente limitato è proprio la palla chiusa in ℓ^p (con centro l'origine e raggio r) che infatti non è compatta.
Alcuni dei presenti hanno scritto che sotto opportune ipotesi di numerabilità sulla topologia dello spazio, la compattezza equivale a chiusura e limitatezza (confondendosi, credo, con le ipotesi per l'equivalenza di compattezza e compattezza sequenziale).
Infine alcuni dei presenti hanno usato la corretta caratterizzazione dei compatti, ma poi hanno usato definizioni non corrette della totale limitatezza.

- Esercizio 7b). Per quanto detto sopra si può dimostrare che X è compatto facendo vedere che è totalmente limitato. La dimostrazione di questo fatto si basa su due osservazioni: la prima è che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste N tale che
$$\sum_{n>N} \frac{1}{n^p} < \varepsilon^p\,,$$
e pertanto, detta $p : X \to X$ la mappa che ad ogni successione x associa la successione "troncata" $p(x)$ definita da
$$p(x)_n := \begin{cases} x_n & \text{se } n \le N, \\ 0 & \text{se } n > N, \end{cases}$$
allora
$$\|x - p(x)\|_{\ell^p} = \Big(\sum_{n>N} |x_n|^p\Big)^{1/p} \le \Big(\sum_{n>N} \frac{1}{n^p}\Big)^{1/p} < \varepsilon\,,$$
e dunque
$$\operatorname{dist}(x, p(X)) := \inf_{y \in p(X)} \|x - y\|_{\ell^p} < \varepsilon \quad \text{per ogni } x \in X. \tag{1.10}$$
La seconda osservazione è che $p(X)$ è un insieme chiuso e limitato in $p(\ell^p)$, che è uno spazio normato di dimensione finita, quindi $p(X)$ è compatto ed in particolare è totalmente limitato.

Pertanto per ogni $\varepsilon > 0$ posso trovare un insieme finito $F \subset p(X)$ tale che

$$\operatorname{dist}(x, F) < \varepsilon \quad \text{per ogni } x \in p(X). \tag{1.11}$$

Mettendo insieme le stime (1.10) e (1.11) ottengo che

$$\operatorname{dist}(x, F) < 2\varepsilon \quad \text{per ogni } x \in X.$$

e siccome ε è arbitrario ho dimostrato che X è totalmente limitato.

- Esercizio 7b). La dimostrazione data sopra segue questo schema: data una successione di elementi $x^{(k)}$ di X si estrae una sottosuccessione $x^{(k_h)}$ che converge puntualmente ad un qualche $x \in X$ (nel senso che $x_n^{(k_h)} \to x_n$ per ogni n) e quindi si dimostra poi che $x^{(k_h)}$ converge a x in ℓ^p. Alcuni dei presenti hanno proposto una diversa dimostrazione di quest'ultimo fatto: detta μ la misura che conta i punti su $\mathbb{N}^* := \{1, 2, \dots\}$, hanno osservato che
$$\left\| x^{(k_h)} - x \right\|_{\ell^p}^p = \sum_{n=1}^{\infty} \left| x_n^{(k_h)} - x_n \right|^p = \int_{\mathbb{N}^*} \left| x_n^{(k_h)} - x_n \right|^p d\mu(n)\,,$$
e questo integrale tende a 0 per il teorema di convergenza dominata. Per la precisione hanno usato la seguente dominazione:
$$\left| x_m^{(k_h)} - x_m \right|^p \le \frac{2}{n^p}$$
(la successione $2/n^p$ sta in $\ell^1 = L^1(\mathbb{N}^*, \mu)$ perché $p > 1$).

- Esercizio 8a). Diversi dei presenti hanno dimostrato che una funzione di classe C^1 su $\mathbb{R}^d$ con gradiente limitato è Lipschitziana. Questo fatto poteva essere dato per buono (come anche detto durante lo scritto).

- Esercizio 8. La versione originale del punto c) chiedeva di considerare $a > 0$. Il risultato non cambia, ma la dimostrazione è più complicata perchè la funzione f definita in (1.9) non è di classe C^1 su tutto $\mathbb{R}^d$ per $a \le 1$ (non è differenziabile nell'origine). Per includere il caso $0 < a \le 1$ basta osservare separatamente che la serie in oggetto vale $+\infty$ perché è sempre maggiore della somma di $1/(1 + n^a)$ con n intero positivo, che vale $+\infty$.
In alternativa si può notare che il criterio di convergenza enunciato al punto b) vale in realtà per tutte le funzioni continue $f : \mathbb{R}^d \to (0, +\infty)$ che sono di classe C^1 nel complementare A di una qualche palla chiusa, e tali che il rapporto $|\nabla f|/f$ è limitato su A.

- Esercizio 8a). In diversi hanno dato dimostrazioni sbagliate di questo punto, e spesso l'errore è consistito nel dire che il rapporto $|\nabla f|/f$ è limitato anche se ∇f e f non sono calcolate nello stesso punto.

1. a) Usando il cambio di variabile $z = Mx$ (e quindi $x = M^{-1}z$, $dx = |\det M|^{-1}dx$) ottengo
$$\|v\|_1 := \int_{\mathbb{R}^d} |u(Mx)|\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} |u(z)|\,\frac{dz}{|\det M|} = \frac{\|u\|_1}{|\det M|} < +\infty\,.$$
b) Usando lo stesso cambio di variabile ottengo anche
$$\begin{aligned}\hat{v}(y) &= \int_{\mathbb{R}^d} u(Mx)\,e^{-i\langle x\,;\,y\rangle}\,dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^d} u(z)\,e^{-i\left\langle M^{-1}x\,;\,y\right\rangle}\,\frac{dz}{|\det M|}\\ &= \int_{\mathbb{R}^d} u(z)\,e^{-i\left\langle x\,;\,(M^{-1})^T y\right\rangle}\,\frac{dz}{|\det M|} = \frac{1}{|\det M|}\hat{u}\big((M^{-1})^T y\big)\,.\end{aligned}$$

2. Calcolo la trasformata di u riconducendomi a quella di della funzione $w(x) := \frac{1}{1+x^2}$, già calcolata a lezione. Osservo infatti che posso scrivere in u in termini di v usando l'operatore di traslazione τ_h dato da $\tau_h v(x) := v(x-h)$ e l'operatore di riscalamento σ_δ dato da $\sigma_\delta v(x) := \frac{1}{\delta}v(x/\delta)$, e per la precisione
$$u(x) = \frac{1}{x^2+2x+5} = \frac{1}{(x+1)^2+4} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1} = \frac{1}{2}\big(\tau_{-1}\sigma_2 w\big)(x)\,.$$
Pertanto, ricordando che
- $\widehat{\tau_h v}(y) = e^{-ihy}\hat{v}(y)$,
- $\widehat{\sigma_\delta v}(y) = \hat{v}(\delta y)$,
- $\hat{w}(y) = \pi e^{-|y|}$,

ottengo
$$\hat{u}(y) = \frac{1}{2}\widehat{\tau_{-1}(\sigma_2 w)}(y) = \frac{1}{2}e^{iy}\,\widehat{\sigma_2 w}(y) = \frac{1}{2}e^{iy}\,\hat{v}(2y) = \frac{\pi}{2}e^{iy}e^{-|2y|} = \frac{\pi}{2}e^{-2|y|+iy}\,.$$

3. Come visto a lezione, conviene identificare il piano $\mathbb{R}^2$ con il piano complesso $\mathbb{C}$. Osservo ora che per ogni punto $x = e^{it}$ del bordo di D vale che
$$\begin{aligned}u_0(x) = 16\cos^2 t\sin^2 t &= 16\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^2\left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^2\\ &= -\big(e^{it}+e^{-it}\big)^2\big(e^{it}-e^{-it}\big)^2\\ &= -\big(e^{2it}-e^{-2it}\big)^2 = 2-(e^{it})^4-(e^{-it})^4\,,\end{aligned}$$
e quindi l'estensione armonica di u_0 all'interno di D è
$$u(x) = 2 - x^4 - \bar{x}^4 = 2\big(1-\mathrm{Re}(x^4)\big) = 2\big(1+6x_1^2x_2^2-x_1^4-x_2^4\big)\,.$$

4. a) Devo far vedere che per ogni $u, v \in X$ vale $\langle Tu\,;\,v\rangle = \langle u\,;\,Tv\rangle$. Estendo u e v a tutto $\mathbb{R}^d$ ponendole uguali a 0 fuori da Ω. Usando l'identità
$$\mathrm{div}(v\,\nabla u) = v\,\mathrm{div}(\nabla u) + \nabla v\cdot\nabla u = v\,\Delta u + \nabla v\cdot\nabla u$$
ottengo
$$\langle Tu\,;\,v\rangle = \int_\Omega v\,\Delta u\,dx = \int_\Omega \mathrm{div}(v\,\nabla u) - \int_\Omega \nabla v\cdot\nabla u\,dx\,,$$
ed applicando il teorema della divergenza ottengo
$$\langle Tu\,;\,v\rangle = \int_{\partial\Omega} (v\,\nabla u)\cdot\eta\,d\sigma(x) - \int_\Omega \nabla v\cdot\nabla u\,dx = -\int_\Omega \nabla v\cdot\nabla u\,dx\,, \tag{2.1}$$
dove η è la normale esterna a $\partial\Omega$, e l'integrale su $\partial\Omega$ vale zero perché $v = 0$ su $\partial\Omega$. Applicando la formula (2.1) sia a $\langle Tu\,;\,v\rangle$ che a $\langle Tv\,;\,u\rangle$ ottengo infine
$$\langle Tu\,;\,v\rangle = -\int_\Omega \nabla v\cdot\nabla u\,dx = \langle Tv\,;\,u\rangle = \langle u\,;\,Tv\rangle\,.$$
b) Usando di nuovo la formula (2.1) ottengo che per ogni $u \in X$ vale
$$\langle Tu\,;\,u\rangle = -\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\,,$$

e questo dimostra che T è semidefinito negativo. Inoltre se $\langle Tu\,;\,u\rangle = 0$ allora $\nabla u = 0$ quasi ovunque, e quindi ovunque (perché $|\nabla u|$ è una funzione continua). Quindi la funzione u è costante su ogni componente connessa di Ω, ma siccome è anche nulla in un intorno del bordo di ogni componente connessa, deve essere identicamente nulla. Ho quindi dimostrato che T è definito negativo.

c) In questo caso la dimostrazione fatta al punto a) non funziona perché l'integrale su $\partial\Omega$ nella formula (2.1) in generale non vale zero, e dunque mi aspetto T non sia autoaggiunto. Per dimostrarlo prendo per esempio $u(x) := x_1^2$ e $v(x) := 1$ e verifico che

$$\langle Tu\,;\,v\rangle - \langle u\,;\,Tv\rangle = \int_\Omega v\,\Delta u - u\,\Delta v\,dx = \int_\Omega (2\cdot 1 - x_1^2\cdot 0)\,dx = 2|\Omega| \neq 0\,.$$

Si vede anche che T non è né semidefinito positivo né semidefinito negativo. Il punto a) basta ad escludere la prima possibilità, per escludere la seconda basta osservare che per $u(x) := x_1^2$ si ha

$$\langle Tu\,;\,u\rangle = \int_\Omega u\,\Delta u\,dx = \int_\Omega 2x_1^2\,dx > 0\,.$$

5. a) È facile verificare per ogni $v \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ il prodotto mv è una funzione in $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, e dunque la mappa $U : v \mapsto mv$ è un operatore lineare da $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ in sé. Inoltre U è continuo perché

$$\|Uv\|_2 \leq \|m\|_\infty \|v\|_2\,.$$

Detta $\mathscr{F}$ la trasformata di Fourier, intesa come operatore da $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ in sé, ho che $T := \mathscr{F}^{-1}U\mathscr{F}$ è un operatore continuo da $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ in sé che soddisfa $\widehat{Tu} = m\,\hat{u}$ per ogni u. (L'unicità di Tu segue dal fatto che la trasformata di Fourier di è invertibile su L^2.)

b) *Per quali m l'operatore T è autoaggiunto?* Grazie all'identità di Plancherel ho che per ogni $u, v \in L^2$ vale

$$\begin{aligned}\langle Tu\,;\,v\rangle - \langle u\,;\,Tv\rangle &= \frac{1}{2\pi}\big[\langle \widehat{Tu}\,;\,\hat{v}\rangle - \langle \hat{u}\,;\,\widehat{Tv}\rangle\big] \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} (m - \overline{m})\,\hat{u}\,\overline{\hat{v}}\,dy = \frac{i}{\pi}\int_{\mathbb{R}} (\operatorname{Im} m)\,\hat{u}\,\overline{\hat{v}}\,dy\,.\end{aligned} \tag{2.2}$$

Questa identità mostra chiaramente che T è autoaggiunto se m ha valori reali q.o.

Faccio ora vedere che vale anche il viceversa, cioè che se T è autoaggiunto allora m ha valori reali q.o. Partendo dalla (2.2) ottengo che per ogni $u, v \in L^2$ vale

$$0 = \int_{\mathbb{R}} (\operatorname{Im} m)\,\hat{u}\,\overline{\hat{v}}\,dy = \langle (\operatorname{Im} m)\,\hat{u}\,;\,\hat{v}\rangle\ ,$$

e siccome la trasformata di Fourier è surgettiva su L^2, questo significa che $(\operatorname{Im} m)\,\hat{u} = 0$ q.o. per ogni $u \in L^2$, ed in particolare per una u tale che $\hat{u} \neq 0$ q.o. (per esempio $u(x) = e^{-|x|}$), da cui segue che $\operatorname{Im} m = 0$ q.o.

Per quali m l'operatore T è definito positivo? Suppongo adesso che T sia autoaggiunto, cioè che m abbia valori reali q.o. Sempre usando l'identità di Plancherel ottengo

$$\langle Tu\,;\,u\rangle = \frac{1}{2\pi}\langle \widehat{Tu}\,;\,\hat{u}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} m|\hat{u}|^2\,dy\,, \tag{2.3}$$

da cui segue che T è definito positivo se $m > 0$ q.o.

Faccio ora vedere che vale anche il viceversa, cioè che se T è definito positivo allora l'insieme E dei punti dove $m \leq 0$ ha misura nulla. Supponendo per assurdo che così non sia trovo un sottoinsieme $F \subset E$ con $0 < |F| < \infty$, e siccome l'indicatrice 1_F appartiene a L^2, trovo anche $u \in L^2$ tale che $\hat{u} = 1_F$. Quindi la formula (2.3) dà

$$0 = \langle Tu\,;\,u\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} m\,(1_F)^2\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_F \operatorname{Im} m\,dy \leq 0$$

e questo contraddice il fatto che T sia definito positivo.

6. a) So già che la formula $\widehat{\dot{u}} = iy\,\hat{u}$ vale se invece di $\dot{u} \in L^2$ avessi $\dot{u} \in L^1$. Suppongo dunque di avere una successione di funzioni u_n in $C^1(\mathbb{R})$ tali che
   (a) $u_n \in L^1$ e $\dot{u}_n \in L^2 \cap L^1$ per ogni n;

(b) $u_n \to u$ in L^1 e $\dot u_n \to \dot u$ in L^2.
Allora
(c) $\widehat{\dot u_n} = iy\,\hat u_n$ per ogni n per via di (a);
(d) $\widehat{u_n} \to \hat u$ uniformemente per via di (b);
(e) $\widehat{\dot u_n} \to \widehat{\dot u}$ in L^2 per via di (b), e quindi esiste una sottosuccessione tale che $\widehat{\dot u_{n_k}} \to \widehat{\dot u}$ q.o.
Passando al limite nella (c) e usando (d) ed (e) ottengo che $\widehat{\dot u} = iy\,\hat u$ q.o. (non posso dire di più, visto che so solo che $\widehat{\dot u}$ sta in L^2).
Per completare la dimostrazione devo trovare una successione di funzioni u_n che soddisfano (a) e (b). Si verifica facilmente che presa una funzione $\sigma : \mathbb{R} \to [0,1]$ di classe C^1 tale che $\sigma(x) = 1$ per $x \le 0$ e $\sigma(x) = 0$ per $x \ge 1$ allora le funzioni $u_n(x) := u(x)\cdot\sigma(x-n)$ soddisfano (a) e (b).

b) Siccome $\hat u$ è una funzione continua e limitata, mi basta dimostrare che $\hat u$ appartiene a $L^1(E)$ con $E := \mathbb{R} \setminus [-1,1]$. In effetti

$$\|\hat u\|_{L^1(E)} = \int_E |\hat u|\,dy = \int_E |y\hat u|\,|1/y|\,dy \le \|y\hat u\|_{L^2(E)}\|1/y\|_{L^2(E)} < +\infty\,.$$

Nel terzo passaggio ho usato la disuguaglianza di Hölder, nel quarto ho usato che $y\hat u$ appartiene a $L^2(\mathbb{R})$ (per via del punto (a)) e che $1/y$ appartiene a $L^2(E)$, cosa che si verifica con un semplice calcolo.

7. Date le condizioni al bordo, conviene risolvere il problema (P) scrivendo la soluzione u come combinazione lineare delle funzioni $\sin(nx)$ con coefficienti che dipendono da t, vale a dire

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\,\sin(nx) \quad \text{con} \quad b_n(t) := \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u(t,x)\,\sin(nx)\,dx\,. \tag{2.4}$$

Derivando in t e in x ottengo, almeno a livello formale,

$$u_t(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dot b_n(t)\,\sin(nx)\;, \quad u_{xx}(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} -n^2 \dot b_n(t)\,\sin(nx)\,, \tag{2.5}$$

e dunque l'equazione $u_t = u_{xx}$ si riscrive come uguaglianza dei coefficienti delle due derivate parziali, ovvero $\dot b_n(t) = -n^2 b_n(t)$.
Scrivendo inoltre il dato $u_0(x) := 8\cos^2 x\,\sin x$ come combinazione lineare di $\sin(nx)$, cioè

$$\begin{aligned} u_0(x) &= 4\cos x\,\sin(2x) \\ &= 4\Big(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\Big)\Big(\frac{e^{2ix}-e^{-2ix}}{2i}\Big) \\ &= 2\frac{e^{ix}-e^{-ix}+e^{3ix}-e^{-3ix}}{2i} = 2\sin x + 2\sin(3x)\,, \end{aligned}$$

ottengo che la condizione iniziale $u(0,\cdot) = u_0$ si riscrive come $b_n(0) = 2$ per $n = 1,3$ e $b_n(0) = 0$ altrimenti. Pertanto $b_n(t)$ risolve il problema di Cauchy

$$\dot y = -n^2 y\;, \quad y(0) = \begin{cases} 2 & \text{se } n = 1,3, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{2.6}$$

da cui segue che

$$b_n(t) = \begin{cases} 2e^{-n^2 t} & \text{se } n = 1,3, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

La soluzione di (P) dovrebbe dunque essere

$$u(t,x) = 2e^{-t}\sin x + 2e^{-9t}\sin(3x)\,. \tag{2.7}$$

a) Non essendoci sono problemi di convergenza, verificare che la funzione u data in (2.7) è effettivamente una soluzione di (P) definita per $t \in \mathbb{R}$ e $x \in [0,\pi]$ è immediato: ogni addendo risolve l'equazione di partenza con le giuste condizioni al bordo, e quindi lo stesso vale per u (per linearità dell'equazione e delle condizioni al bordo), e chiaramente la condizione iniziale è soddisfatta.

b) Supponiamo di avere una soluzione u di (P) definita su $I \times [0, \pi]$ dove I è un intervallo di tempi che contiene 0 (all'interno o come estremo), e per la precisione supponiamo che u sia continua sull'insieme di definizione, C^1 nella variabile t e C^2 nella variabile x su $(I \setminus \{0\}) \times [0, \pi]$. Per far vedere che tale soluzione è unica (e dunque coincide con la funzione in (2.7)) la scrivo in serie come in (2.4) e mostro che i coefficienti $b_n(t)$ sono funzioni continue su I e derivabili per $t \neq 0$ che risolvono il problema di Cauchy (2.6), e sono pertanto univocamente determinati per tutti i tempi t.
Per la precisione osservo che, per via della formula in (2.4) che la definisce, la funzione b_n è continua su I, e per il teorema di derivazione sotto il segno di integrale è derivabile in $I \setminus \{0\}$ e $\dot{b}_n(t)$ è il coefficiente n-esimo di $u_t(t, \cdot)$. Inoltre integrando due volte per parti l'integrale che definisce b_n ottengo che $-n^2 b_n(t)$ è il coefficiente n-esimo di $u_{xx}(t, \cdot)$ (in questo passaggio è essenziale che $u(t, 0) = u(t, \pi) = 0$).
Siccome u_t e u_{xx} sono uguali, anche i loro coefficienti devono essere uguali, il che significa che b_n soddisfa l'equazione in (2.6) per $t \neq 0$. Che valga la condizione iniziale in (2.6) è ovvio.

c) È chiaro il ruolo di entrambe le condizioni al bordo nella dimostrazione dell'unicità: servono a garantire che i coefficienti di u_{xx} sono quelli che ci si aspetta. Per mostrare la mancanza di unicità scelgo una funzione g non identicamente nulla, e cerco una soluzione v del problema (P') dato dall'equazione $v_t = v_{xx}$, le condizioni al bordo $v(\cdot, 0) = 0$ e $v(\cdot, \pi) = g$, e la condizione iniziale $v(0, \cdot) = 0$. Se u è la soluzione di (P), allora la funzione $\tilde{u} = u + v$ risolve l'equazione $u_t = u_{xx}$ con le condizioni al bordo $u(\cdot, 0) = 0$ e $u(\cdot, \pi) = g$ e la condizione iniziale $u(0, \cdot) = u_0$, ma differisce da u perché non soddisfa le stesse condizioni al bordo.
In mancanza di teoremi di esistenza generali, la difficoltà è trovare una funzione g per cui si riesce a risolvere (P'). Una possibilità è prendere $g(t) := \pi t$. Per risolvere (P') uso il cambio di variabile

$$v(t, x) = w(t, x) + \frac{1}{6}(x^3 - \pi^2 x) + tx$$

ed ottengo che la nuova incognita w deve risolvere il problema (P'') dato dall'equazione $w_t = w_{xx}$, le condizioni al bordo $w(\cdot, 0) = w(\cdot, \pi) = 0$, e la condizione iniziale $w(0, \cdot) = w_0$ con $w_0 := \frac{1}{6}(\pi^2 x - x^3)$.
Trovo una soluzione di (P'') come ho fatto per (P): usando il fatto che i coefficienti di w_0 per la rappresentazione come serie di $\sin(nx)$ sono $b_n^0 := \frac{2}{n^3}(-1)^{n-1}$ ottengo che i coefficienti $b_n(t)$ della soluzione $w(t, \cdot)$ sono $b_n(t) = \frac{2}{n^3}(-1)^{n-1} e^{-n^2 t}$.
Dunque w dovrebbe essere

$$w(t, x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3}(-1)^{n-1} e^{-n^2 t} \sin(nx)\,.$$

È facile vedere che questa serie definisce una funzione continua su $[0, +\infty) \times [0, \pi]$ e di classe C^∞ su $(0, +\infty) \times [0, \pi]$ che risolve (P'').

8. Prendo $x \in \Omega$ e $r = d(x)/2$, e osservo che la chiusura della palla $B(x, r)$ di centro x e raggio r è contenuta in Ω. Inoltre ogni derivata parziale $D_i u$ è pure una funzione armonica e quindi, usando la proprietà della media,

$$D_i u(x) = \fint_{B(x,r)} D_i u(y)\, dy = \fint_{B(0,r)} D_i u(x + h)\, dh = \frac{1}{a_d r^d} \int_{B(0,r)} \operatorname{div} v(h)\, dh$$

dove v è il campo di vettori $v(h) := u(x + h)\, e_i$, la divergenza è calcolata rispetto alla variabile h, e a_d è il volume della palla unitaria in $\mathbb{R}^d$. Applicando quindi il teorema della divergenza ottengo

$$D_i u(x) = \frac{1}{a_d r^d} \int_{\partial B(0,r)} v(h) \cdot \eta(h)\, d\sigma(h) = \frac{1}{a_d r^d} \int_{\partial B(0,r)} u(x + h)\, e_1 \cdot \eta(h)\, d\sigma(h)\,,$$

dove $\eta(h)$ è la normale esterna a $\partial B(0, r)$ nel punto h. Usando questa formula ottengo la stima

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right| &\leq \frac{1}{a_d r^d} \int_{\partial B(0,r)} |u(x + h)|\, |e_1 \cdot \eta(h)|\, d\sigma(h) \\ &\leq \frac{1}{a_d r^d} \int_{\partial B(0,r)} \|u\|_\infty\, d\sigma(h) = \frac{\operatorname{vol}_{d-1}(\partial B(0, r))}{a_d r^d} \|u\|_\infty = \frac{2d}{d(x)} \|u\|_\infty\,.\end{aligned}$$

(Nel penultimo passaggio ho usato la stima $|e_1 \cdot \eta| \leq |e_1|\,|\eta| = 1$, nell'ultimo il fatto che il volume $(d-1)$-dimensionale della sfera di raggio r in $\mathbb{R}^d$ è $d\alpha_d r^{d-1}$ e che $r = d(x)/2$.)
Usando la stima precedente ottengo infine

$$|\nabla u(x)| \leq \frac{2d^{3/2}}{d(x)} \|u\|_\infty \,.$$

b) Fissato $x \in \mathbb{R}^d$, applico la stima trovata al punto a) con $\Omega := B(x,r)$ ed ottengo

$$|\nabla u(x)| \leq \frac{C}{r} \sup_{y \in B(x,r)} |u(y)| = \frac{C}{r} o(r)\,.$$

Prendendo il limite per $r \to +\infty$ ottengo $\nabla u(x) = 0$, e siccome questo vale per ogni $x \in \mathbb{R}^d$ ne deduco che u è costante.

c) Dimostro che per ogni k esiste una costante C_k dipendente da k e da d tale che

$$|\nabla^k u(x)| \leq \frac{C_k}{(d(x))^k} \|u\|_\infty \,. \tag{2.8}$$

Dimostro questa stima per induzione su k. So infatti che vale per $k = 1$, e supponendola vera per un certo k la dimostro per $k+1$. Dato $x \in \Omega$, indico con Ω' l'insieme dei punti $y \in \Omega$ tali che $d(y) > d(x)/2$, e e pongo $v := \nabla u$. Si verifica immediatamente che anche v è una funzione armonica, e quindi, detta $d'(x)$ la distanza di x da $\partial\Omega'$, ho che

$$\begin{aligned}|\nabla^{k+1} u(x)| = |\nabla^k v(x)| &\leq \frac{C_k}{(d'(x))^k} \sup_{y \in \Omega'} |v(y)| \\ &\leq \frac{C_k}{(d'(x))^k} \sup_{y \in \Omega'} \left(\frac{C_1}{d(y)} \|u\|_\infty\right) \leq \frac{2^{k+1} C_k C_1}{(d(x))^{k+1}} \|u\|_\infty \,.\end{aligned}$$

(Nel secondo passaggio ho usato l'ipotesi induttiva, applicando la stima (2.8) alla funzione v e all'aperto Ω'; nel terzo ho applicato la stima (2.8) con $k = 1$ alla funzione u e all'aperto Ω, nel quarto ho usato il fatto che per la definizione di Ω' si ha $d(y) \geq d(x)/2$ per ogni $y \in \Omega'$, e $d'(x) \geq d(x)/2$.)

d) Procedo come al punto b) usando la stima (2.8):

$$|\nabla^k u(x)| \leq \frac{C}{r^k} \sup_{y \in B(x,r)} |u(y)| = \frac{C}{r^k} o(r^k)\,.$$

Prendendo il limite per $r \to +\infty$ ottengo quindi $\nabla^k u(x) = 0$, e siccome questo vale per ogni $x \in \mathbb{R}^d$ ne deduco che u è un polinomio di grado minore stretto di k.

COMMENTI

- Esercizio 2. Nella notazione della soluzione data sopra, vale anche l'identità $u = \sigma_2 \tau_{-1/2} v$, che pure permette di calcolare la trasformata $\hat{u}$.
  Tuttavia alcuni dei presenti hanno fatto un po' di confusione, scrivendo che $u = \sigma_2 \tau_{-1} v$, cosa che porta ad una formula sbagliata per $\hat{u}$.

- Esercizio 2. Alcuni dei presenti hanno scritto che $\hat{v}(y) = e^{-|y|}$, dimenticando un fattore π...

- Esercizio 2. In alternativa a quanto scritto sopra, è possibile calcolare $\hat{u}(y)$ usando direttamente il metodo dei residui. Per la precisione, fissato $y \in \mathbb{R}$, considero la funzione meromorfa (su $\mathbb{C}$)

  $$f(z) := \frac{e^{-iyz}}{z^2 + 2z + 5}\,.$$

  ed osservo che

  $$\hat{u}(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = \lim_{r \to \infty} \int_{\gamma_{1,r}} f(z)\, dz \tag{2.9}$$

  dove il cammino $\gamma_{1,r}(t) := (t, 0)$ con $t \in [-r, r]$ parametrizza del segmento (orientato) in $\mathbb{C}$ di estremi $-r$ e r.

Primo caso: $y \le 0$. Considero il cammino $\gamma_{2,r}(t) := re^{it}$ con $t \in [0, \pi]$, che parametrizza la semicirconferenza di centro 0 e raggio r nel semipiano superiore ($\operatorname{Im} z \ge 0$), e osservo che

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_{2,r}} f(z)\, dz = 0 \tag{2.10}$$

Infatti per ogni z nel semipiano superiore vale

$$|f(z)| = \frac{e^{y \operatorname{Im} z}}{|z^2 + 2z + 5|} \le \frac{1}{|z^2 + 2z + 5|} = O(1/|z^2|) \quad \text{per } |z| \to \infty,$$

(in questo punto è essenziale che $y \le 0$) e quindi, indicando con $L(\gamma_{2,r})$ la lunghezza di $\gamma_{2,r}$,

$$\left| \int_{\gamma_{2,r}} f(z)\, dz \right| \le \sup_t \left| f(\gamma_{2,r}(t)) \right| \cdot L(\gamma_{2,r}) = O(1/r^2) \cdot \pi r = O(1/r) \xrightarrow[r\to 0]{} 0\,.$$

Inoltre i cammini $\gamma_{1,r}$ e $\gamma_{2,r}$ formano un cammino chiuso orientato in senso *antiorario* che per $r > \sqrt{5}$ racchiude l'unico polo della funzione $f(z)$ nel semipiano superiore, vale a dire $z_1 = -1 + 2i$, e quindi

$$\int_{\gamma_{1,r}} f(z)\, dz + \int_{\gamma_{2,r}} f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_1)\,. \tag{2.11}$$

Mettendo insieme le formule (2.9), (2.10) e (2.11) ottengo che, per $y \le 0$,

$$\hat{u}(y) = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_1) = 2\pi i \left. \frac{e^{-iyz}}{2z + 2} \right|_{z=z_1} = \frac{\pi}{2} e^{(2+i)y}\,. \tag{2.12}$$

Secondo caso: $y > 0$. Procedo in modo analogo al primo caso, definendo $\gamma_{2,r}(t) := re^{-it}$ con $t \in [0, \pi]$, cammino cha parametrizza la semicirconferenza di centro 0 e raggio r nel semipiano inferiore ($\operatorname{Im} z \le 0$). In tal caso la (2.10) continua a valere, mentre la (2.11) va modificata tenendo conto che $\gamma_{1,r}$ e $\gamma_{2,r}$ formano un cammino chiuso orientato in senso *orario* che per $r > \sqrt{5}$ racchiude l'unico polo della funzione $f(z)$ nel semipiano inferiore, vale a dire $z_2 = -1 - 2i$. Pertanto

$$\hat{u}(y) = -2\pi i \operatorname{Res}(f, z_2) = -2\pi i \left. \frac{e^{-iyz}}{2z + 2} \right|_{z=z_2} = \frac{\pi}{2} e^{(-2+i)y}\,. \tag{2.13}$$

Mettendo insieme la (2.12) e la (2.13) ottengo infine

$$\hat{u}(y) = \frac{\pi}{2} e^{-2|y| + iy} \quad \text{per ogni } y \in \mathbb{R}.$$

- Esercizio 3. Alcuni dei presenti si sono limitati ad esibire la soluzione del problema senza spiegare come l'hanno ottenuta. Ma non era questo il punto dell'esercizio...

- Esercizio 4a). Nel teorema della divergenza appare l'integrale sul bordo di Ω della componente normale (esterna) del campo di vettori. Alcuni hanno indicato questa componente normale con un apposito simbolo, invece di scrivere il prodotto scalare del campo con la normale esterna. Altri hanno semplicemente scritto il campo al posto della componente normale...

- Esercizio 4a). Osservazione di linguaggio: molti dei presenti hanno usato una forma del teorema della divergenza che non è quella solita, pur chiamandolo semplicemente teorema della divergenza. Qualcuno l'ha anche chiamato teorema di Gauss-Green, che però è inappropriato (il teorema di Gauss-Green riguarda l'integrale di una 1-forma su bordo di un aperto del piano, non il flusso di un campo di vettori).

- Esercizio 4b). Diversi dei presenti hanno scritto che una funzione di classe C^1 sull'aperto Ω che ha gradiente nullo allora è costante, ma questo è vero solo se Ω è connesso.

- Esercizio 5b). Per far vedere che se T è autoaggiunto allora m ha valori reali q.o., si può anche far vedere che gli insiemi E^+ ed E^- dei punti dove $\operatorname{Im} m > 0$ e $\operatorname{Im} m < 0$, rispettivamente, hanno misura nulla. Supponendo infatti per assurdo che $|E^+| > 0$ trovo un sottoinsieme $F \subset E^+$ con

$0 < |F| < \infty$, e siccome la funzione indicatrice 1_F appartiene a L^2 trovo anche $u \in L^2$ tale che $\hat{u} = 1_F$. Quindi la formula (2.2) dà

$$0 = \langle Tu\,;\,u\rangle - \langle u\,;\,Tu\rangle = \frac{i}{\pi}\int_{\mathbb{R}} (\operatorname{Im} m)\,(1_F)^2\,dy = \frac{i}{\pi}\int_F \operatorname{Im} m\,dy$$

ma l'integrale non è zero perché $\operatorname{Im} m > 0$ su F ed F ha misura positiva. (Allo stesso modo si dimostra che $|E^-| = 0$.)

- Esercizio 5b). Diversi dei presenti hanno scritto che la trasformata di Fourier è un'isometria su L^2, mentre invece è un isometria a meno di un fattore $\sqrt{2\pi}$.
Alcuni hanno sbagliato a scrivere il prodotto nello spazio di Hilbert *complesso* $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, e hanno concluso che T è sempre autoaggiunto (o peggio).
Altri hanno cercato di dimostrare che T è autoaggiunto partendo dall'identità

$$\langle Tu\,;\,v\rangle = \int Tu\,\bar{v}\,dx = \int \mathscr{F}^{-1}(m\hat{u})\,\bar{v}\,dx$$

scrivendo poi $\mathscr{F}(m\hat{u})$ come integrale. Purtroppo questa formula per l'inversa della TdF vale solo se $m\hat{u}$ appartiene a L^1.
Infine alcuni hanno fatto l'ipotesi che m si possa scrivere come $m = \hat{\varphi}$ per un'opportuna funzione φ, per poi ottenere $Tu = m\,\hat{u} = \hat{\varphi}\,\hat{u} = \widehat{u * \varphi}$. Purtroppo le funzioni limitate, come m, non sono necessariamente le TdF di funzioni in L^1 o L^2. Inoltre la formula $\hat{\varphi}\,\hat{u} = \widehat{u * \varphi}$ vale se u e φ sono in L^1, e non si applica a questo caso.

- Esercizio 6a). Diversi dei presenti hanno cercato di dimostrare l'enunciato approssimando la funzione u con funzioni u_n in $C^1 \cap L^1$ con derivata in L^1, come ho fatto io sopra, ma non hanno saputo trovare la successione approssimante. In particolare alcuni hanno preso $u_n := u \cdot 1_{[-n.n]}$, che però non è di classe C^1, mentre altri hanno preso $u_n := u * \rho_n$, che è C^1 però non ha derivata in L^1.
Infine diversi dei presenti hanno scritto l'argomento di approssimazione in forma troppo vaga per essere considerata corretta.

- Esercizio 6a). Una dimostrazione alternativa è la seguente. Siccome u è in L^1, il liminf di $|u(x)|$ per $x \to \pm\infty$ deve essere uguale a 0, e quindi posso trovare una successione $r_n \to -\infty$ ed una successione $s_n \to +\infty$ tali che

$$u(r_n) \to 0\,, \quad u(s_N) \to 0\,.$$

Pongo quindi

$$v_n := \dot{u}\,1_{[r_n, s_n]}\,.$$

Chiaramente $v_n \to \dot{u}$ in L^2, e quindi

$$\hat{v}_n \to \widehat{\dot{u}}\,.$$

Inoltre, dato che u è di classe C^1, integrando per parti ottengo che per ogni $y \in \mathbb{R}$ vale

$$\hat{v}_n(y) = \int_{r_n}^{s_n} \dot{u}(x)\,e^{-ixy}dx = u(s_n)\,e^{-is_n y} - u(r_n)\,e^{-ir_n y} - iy\int_{r_n}^{s_n} u(x)\,e^{-ixy}dx\,,$$

e ora osservo che per la scelta di r_n e s_n i termini $u(s_n)\,e^{-is_n y}$ e $u(r_n)\,e^{-ir_n y}$ convergono a 0, mentre l'ultimo integrale converge a $\hat{u}(y)$ per il teorema di convergenza dominata (ricordo che u è in L^1) e dunque

$$\hat{v}_n(y) \to iy\,\hat{u}(y)\,.$$

Quindi le funzioni $\hat{v}_n$ convergono a $\widehat{\dot{u}}$ in L^2 e a $iy\,\hat{u}$ puntualmente. Siccome la convergenza in L^2 implica a meno di sottosuccessioni la convergenza puntuale quasi ovunque, ne deduco che $\widehat{\dot{u}}(y) = iy\,\hat{u}(y)$ per q.o. y.

- Esercizio 6a). Diversi dei presenti hanno scritto che ("come visto a lezione") data una funzione u in L^2 allora il limite

$$\lim_{N \to +\infty} \int_{-N}^{N} u(x)\,e^{-iyx}dx$$

esiste sempre e vale $\hat{u}(y)$. Quello che è stato detto a lezione è leggermente diverso, e cioè che tale uguaglianza vale per quasi ogni y per cui il limite esiste, ma a priori potrebbe non essercene neanche uno.

- Esercizio 6a). Alcuni dei presenti hanno proposto varianti (più o meno corrette) della seguente dimostrazione, che trovo molto elegante: si prende la funzione $\rho(x) := e^{-x^2/2}$ e si osserva che
  - $v := \rho * u$ appartiene a C^1 e $\dot{v} = \dot{\rho} * u$ perché $u \in L^1$ e $\rho \in C^1 \cap L^\infty$, $\dot{\rho} \in L^\infty$;
  - $\dot{v} = \rho * \dot{u}$ perché $\rho \in L^1 \cap L^2$ e $u \in C^1 \cap L^1$, $\dot{u} \in L^2$ (si tratta di una variante di un risultato dimostrato a lezione, la dimostrazione è abbastanza semplice);
  - dunque $\dot{\rho} * u = \rho * \dot{u}$;
  - $\widehat{\dot{\rho} * u} = \widehat{\dot{\rho}}\, \hat{u}$ perché $\dot{\rho}, u \in L^2$;
  - $\widehat{\dot{\rho}} = iy\hat{\rho}$ perché $\rho \in C^1 \cap L^1$ e $\dot{\rho} \in L^1$ (questo è il risultato visto a lezione);
  - $\widehat{\rho * \dot{u}} = \hat{\rho}\, \widehat{\dot{u}}$ perché $\rho, \dot{u} \in L^2$.

  Mettendo insieme gli ultimi quattro passi si ottiene $iy\hat{\rho}\, \hat{u} = \hat{\rho}\, \widehat{\dot{u}}$, e dividendo per $\hat{\rho}$ (che è una funzione mai nulla!) si ottiene infine $iy\, \hat{u} = \widehat{\dot{u}}$.

- Esercizio 7a). La versione originale di questo esercizio aveva un dato iniziale diverso, vale a dire $u_0(x) := 8 \cos x \sin^2 x$. Questo dato è più complicato da gestire perché si scrive come
$$u_0(x) = e^{ix} + e^{-ix} - e^{3ix} - e^{-3ix} = 2\cos x - 2\cos(3x)\,,$$
  ma non si scrive come combinazione lineare finita di $\sin(nx)$. Vale la pena di osservare un fatto curioso: cercando una soluzione dell'equazione $u_t = u_x x$ della forma
$$u(t, x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(t) e^{inx}$$
  si ottiene
$$u(t, x) = e^{-t}(e^{ix} + e^{-ix}) - e^{-9t}(e^{3ix} - e^{-3ix}) = 2e^{-t} \cos x - 2e^{-9t} \cos(3x)\,.$$
  Questa funzione risolve l'equazione su $\mathbb{R} \times [-\pi, \pi]$ con condizioni di periodicità al bordo, come previsto per questo tipo di soluzione, ma si risolve anche il problema iniziale (P). (Sembra una coincidenza fortuita ma non lo è.)

- Esercizio 7c). Molti dei presenti hanno messo in luce il ruolo della condizione al bordo $u(\cdot, \pi) = 0$ nell'unicità. La difficoltà per tutti è stata quella di trovare un esempio di condizione al bordo differente da quella data per cui fosse effettivamente possibile risolvere l'equazione.

- Esercizio 7c). In alternativa a quanto fatto sopra si può dimostrare la non unicità sommando alla soluzione u ottenuta in precedenza una soluzione v non identicamente nulla dell'equazione $v_t = v_{xx}$ con condizione al bordo $v(\cdot, 0) = 0$ e condizione iniziale $v(0, \cdot) = 0$.
  Uno dei presenti ha trovato v usando più o meno questa idea (che trovo brillante): si prende una funzione uniformemente continua e limitata $v_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che sia dispari, nulla su $[0, \pi]$ e strettamente positiva su $(\pi, +\infty)$, e quindi si prende la soluzione v dell'equazione $v_t = v_{xx}$ su $[0, +\infty) \times \mathbb{R}$ con dato iniziale v_0, ottenuta tramite il nucleo del calore. Ovviamente v soddisfa $v(0, x) = v_0(x) = 0$ per $x \in [0, \pi]$, e si verifica facilmente a partire dalla formula risolutiva che v è dispari nella variabile x (e quindi $v(t, 0) = 0$ per ogni $t \geq 0$) e strettamente positiva per $t > 0$ e $x > 0$ (e quindi non è identicamente nulla sulla striscia $[0, +\infty) \times [0, \pi]$). Dunque v è la funzione arminica cercata.

- Esercizio 8(c). La soluzione scritta sopra non è molto precisa, innanzitutto perché ponendo $v = \nabla u$ si passa dalle funzioni armoniche scalari alle funzioni armoniche vettoriali, e poi perché non è del tutto chiaro cosa si debba intendere con $\nabla^k u$. Volendo essere precisi si dovrebbe quindi sostituire alla (2.8) una stima per ogni derivata parziale di u di ordine k calcolata in x, e nella dimostrazione di questa stima si dovrebbe prendere come v l'opportuna derivata parziale di u.

1. L'insieme $X^\perp$ consiste delle funzioni $v \in L^2([0,2])$ tali che per ogni $u \in X$ vale
$$0 = \langle u\,;\,v\rangle = \int_0^2 uv\,dx = \int_1^2 uv\,dx\,. \tag{3.1}$$
Siccome la restrizione di u a $[1,2]$ è un arbitraria funzione L^2 ottengo che la (3.1) vale per ogni $u \in X$ se e solo se $v(x) = 0$ per q.o. $x \in [1,2]$, ovvero
$$X^\perp = \big\{v \in L^2([0,2])\colon v(x) = 0 \text{ per q.o. } x \in [1,2]\big\}\,.$$
Ciò detto, è immediato vedere che le proiezioni ortogonali di $u \in L^2([0,2])$ su X e $X^\perp$ sono rispettivamente $u \cdot 1_{[1,2]}$ e $u \cdot 1_{[0,1]}$.

2. Ricordo i seguenti fatti noti: la TdF di $e^{-|x|}$ è $2/(1+y^2)$, e per ogni $u \in L^1$ con $xu \in L^1$ si ha che $\widehat{-ix\,u} = (\hat u)'$, vale a dire $\widehat{x\,u} = i(\hat u)'$. Pertanto
$$\widehat{xe^{-|x|}} = i\Big(\widehat{e^{-|x|}}\Big)' = 2i\Big(\frac{1}{1+y^2}\Big)' = \frac{-4iy}{(1+y^2)^2}\,.$$

3. a) Che T sia ben definita è ovvio, perchè $f_1 f_2$ è una funzione misurabile limitata e quindi è integrabile su $[0,1]$. La continuità di T nella prima variabile segue dalla stima
$$\big|T(f_1,f_2)\big| \le \int_0^1 |f_1|\,|f_2|\,dx \le \|f_2\|_\infty\,\|f_1\|_1\,,$$
e la continuità di T nella seconda variabile segue dal fatto che è simmetrica.
b) Prendo la seguente successione di funzioni:
$$f_n := \sqrt{n}\cdot 1_{[0,\,1/n]}\,.$$
Si vede subito che $\|f_n\|_1 = 1/\sqrt{n}$ e quindi $f_n \to 0$ in X, ma d'altra parte $T(f_n,f_n) = 1$ e quindi non tende a $T(0,0) = 0$.

4. a) Basta prendere $v(x) := |x|^2 = x_1^2 + x_2^2$.
b) Utilizzando il cambio di variabile $u = v + w$, mi riconduco a risolvere l'equazione $\Delta w = 0$ con la condizione al bordo $w(e^{it}) = |t| - 1$. Per farlo scrivo la funzione $w_0(t) := |t| - 1$ in serie di Fourier: i coefficienti di Fourier di w_0 sono
$$c_0 := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} w_0(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi t - 1\,dt = \frac{\pi}{2} - 1\,,$$
e per $n \ne 0$,
$$c_n := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} w_0(t)\,e^{-int}dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi t\,\cos(nt)\,dt = \begin{cases} -\dfrac{2}{\pi n^2} & \text{per } n \text{ dispari,} \\ 0 & \text{per } n \text{ pari.}\end{cases}$$
Siccome $c_n = O(1/n^2)$, ho che $\sum |c_n| < +\infty$ e dunque
$$w_0(t) = \frac{\pi}{2} - 1 - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1,3,\dots}\frac{e^{int}+e^{-int}}{n^2} = \frac{\pi}{2} - 1 - \frac{4}{\pi}\operatorname{Re}\Big(\sum_{n=1,3,\dots}\frac{e^{int}}{n^2}\Big)\,,$$
e la serie converge totalmente. Pertanto la funzione armonica w con $w(e^{-it} = w_0(t)$ è data da
$$w(x) = \frac{\pi}{2} - 1 - \frac{4}{\pi}\operatorname{Re}\Big(\sum_{n=1,3,\dots}\frac{x^n}{n^2}\Big)\,,$$
e la serie converge totalmente sulla $\overline{D} = \{x\colon |x| \le 1\}$. Infine la soluzione u del problema originale è
$$u(x) = v(x) + w(x) = |x|^2 + \frac{\pi}{2} - 1 - \frac{4}{\pi}\operatorname{Re}\Big(\sum_{n=1,3,\dots}\frac{x^n}{n^2}\Big)\,.$$

5. a) $u_0(x) := 2 - 16\cos^2 x\,\sin^2 x = 2 - \big(2\sin(2x)\big)^2 = 2 + \big(e^{2ix} - e^{-2ix}\big)^2 = e^{4ix} + e^{-4ix}$.

b) Scrivendo l'eventuale soluzione u in serie di Fourier rispetto alla variabile x, cioè

$$u(t,x) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(t)\, e^{inx}\,, \tag{3.2}$$

ottengo che i coefficienti di $u_t(t,\cdot)$, $u_{tt}(t,\cdot)$ e $u_{xx}(t,\cdot)$ sono rispettivamente $\dot c_n(t)$, $\ddot c_n(t)$ e $-n^2 c_n(t)$, e quindi le funzioni c_n dovrebbero soddisfare il problema di Cauchy

$$\ddot y + 4\dot y + n^2 y = 0\,, \quad y(0) = c_n^0\,, \quad \dot y(0) = 0\,, \tag{3.3}$$

dove c_n^0 sono i coefficienti di Fourier del dato iniziale u_0.
Per via del punto a) ho che $c_n^0 = 1$ per $n = \pm 4$ e $c_n^0 = 0$ altrimenti, e quindi un semplice calcolo mostra che le soluzioni c_n di (3.3)

$$c_n(t) = \begin{cases} e^{-2t}\big(\cos\big(\sqrt{12}\,t\big) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\big(\sqrt{12}\,t\big)\big) & \text{se } n = \pm 4, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dunque, ricordando la (3.2), la soluzione u dovrebbe essere

$$u(t,x) = 2\cos(4x)\, e^{-2t}\big(\cos\big(\sqrt{12}\,t\big) + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\big(\sqrt{12}\,t\big)\big)\,,$$

e in effetti è immediato verificare che questa funzione risolve (P) su $\mathbb{R} \times [-\pi,\pi]$.
c) Riparto dal problema di Cauchy (3.3), osservando che le soluzioni dell'equazione caratteristica associata all'equazione differenziale $\ddot y + 4\dot y + n^2 y = 0$ sono

$$\lambda_{1,2}^n = \begin{cases} -2 \pm \sqrt{4-n^2} & \text{se } |n| \le 2, \\ -2 \pm i\omega_n & \text{con } \omega_n := \sqrt{n^2-4} \text{ se } |n| > 2; \end{cases} \tag{3.4}$$

un semplice calcolo mostra allora che per $|n| > 2$ la soluzione c_n di (3.3) è

$$c_n(t) = c_n^0\, e^{-2t}\Big(\cos(\omega_n t) + \frac{2}{\omega_n}\sin(\omega_n t)\Big)\,.$$

Dunque la soluzione u di (P) dovrebbe essere

$$u(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n(t,x) \tag{3.5}$$

dove $u_n(t,x) := c_n(t)\, e^{inx}$; in particolare per $|n| > 2$ ho che

$$u_n(t,x) = c_n^0\, e^{inx}\, e^{-2t}\Big(\cos(\omega_n t) + \frac{2}{\omega_n}\sin(\omega_n t)\Big)\,. \tag{3.6}$$

Usando questa formula e il fatto che $\omega_n \sim |n|$ per $n \to \pm\infty$ ottengo le seguenti stime asintotiche per la norma del sup su $[0,+\infty) \times \mathbb{R}$ di u_n e delle sue derivate parziali del primo e secondo ordine:

$$\|u_n\|_\infty \sim |c_n^0|\,, \quad \|(u_n)_t\|_\infty \sim \|(u_n)_x\|_\infty \sim |nc_n^0|\,, \quad \|(u_n)_{tt}\|_\infty \sim \|(u_n)_{xx}\|_\infty \sim |n^2 c_n^0|\,.$$

Pertanto, facendo l'ipotesi che

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2 |c_n^0| < +\infty\,, \tag{3.7}$$

ottengo che la serie di funzioni in (3.5) converge totalmente su $[0,+\infty) \times \mathbb{R}$ con tutte le derivate parziali del primo e secondo ordine, e quindi u è una funzione di classe C^2 su $[0,+\infty) \times \mathbb{R}$, 2π-periodica nella variabile x, che risolve il problema (P).
Studio adesso il comportamento della soluzione u per $t \to +\infty$. Per ogni n con $|n| > 2$ ho che $\omega_n \ge 2$ e utilizzando la formula (3.6) ottengo

$$\|u_n(t,\cdot)\|_\infty \le 2|c_n^0|\, e^{-2t}\,,$$

e tenendo conto del fatto che $\sum |c_n| < +\infty$ è finita,

$$\sum_{|n|>2} \|u_n(t,\cdot)\|_\infty \le 2\Big(\sum_{|n|>2} |c_n^0|\Big) e^{-2t} = O(e^{-2t})\,.$$

In particolare la funzione

$$\tilde{u}(t,x) := \sum_{|n|>2} u_n(t,x)$$

tende a zero per $t \to +\infty$, uniformemente in x.
Considero ora il comportamento individuale dei rimanenti addendi della serie che definisce la soluzione u, vale a dire u_n con $n = 0, \pm 1, \pm 2$. Per $n = \pm 1, \pm 2$ le soluzioni $\lambda^n_{1,2}$ dell'equazione caratteristica date in (3.4) sono reali e strettamente negative; quindi i coefficienti $c_n(t)$, essendo combinazioni lineari di $e^{\lambda^n_1 t}$ ed $e^{\lambda^n_2 t}$, tendono a 0 per $t \to +\infty$, e pertanto $u_n(t,x) = c_n(t)\, e^{inx}$ tende a 0 uniformemente in x. Invece per $n = 0$ si ha che $c_0(t) = c_0$ e quindi $u_0(t,x) = c_0$.
Mettendo insieme quanto detto otteniamo che, per $t \to +\infty$, la soluzione $u(t,x)$ tende a c_0 uniformemente in x; in particolare tende a 0 (uniformemente in x) se e solo se $c_0 = 0$.

6. a) Osservo che la norma

$$\|f_a\|_p^p = \int_{\mathbb{R}} |f_a(x)|^p\, dx = 2\int_0^1 \frac{dx}{x^{ap}}$$

è finita se e solo se $ap < 1$, e dunque $f_a \in L^p(\mathbb{R})$ se e solo se $a < 1$ e $1 \le p < 1/a$.
b) Se $a < 1/2$ allora $2 < 1/a$ e dunque $f_a \in L^2$, e in tal caso, per quanto visto a lezione $f_a * f_a$ è una funzione continua e limitata (anzi, infinitesima all'infinito). Invece per $a \ge 1/2$ ho che

$$f_a * f_a(0) = \int_{\mathbb{R}} f_a(0-t) f_a(t)\, dt = 2\int_0^1 \frac{dt}{t^{2a}} = +\infty\,,$$

e quindi $f_a * f_a$ non è una funzione limitata.

7. a) *La funzione* $\|\cdot\|_X$ *è 1 omogenea.* Data u funzione misurabile su E, $\lambda \ne 0$, e u_1, u_2 funzioni misurabili su E tali che $u = u_1 + u_2$, ho che

$$\|\lambda u\|_X = \|\lambda u_1 + \lambda u_2\|_X \le \|\lambda u_1\|_{p_1} + \|\lambda u_2\|_{p_2} = |\lambda|\big(\|u_1\|_{p_1} + \|u_2\|_{p_2}\big)$$

e prendendo l'inf su tutte le coppie u_1, u_2 ammissibili ottengo

$$\|\lambda u\|_X \le |\lambda|\, \|u\|_X\,.$$

Applicando questa stessa disuguaglianza con λu al posto di u e $1/\lambda$ ottengo

$$\|u\|_X \le \frac{1}{|\lambda|}\, \|\lambda u\|_X\,,$$

che insieme alla stima precedente dà

$$\|\lambda u\|_X = |\lambda|\, \|u\|_X\,.$$

La funzione $\|\cdot\|_X$ *è subadditiva.* Prese u, v funzioni misurabili su E e u_1, u_2, v_1, v_2 funzioni misurabili su E tali che $u = u_1 + u_2$ e $v = v_1 + v_2$ ho che

$$\begin{aligned}\|u+v\|_X &= \|(u_1+v_1) + (u_2+v_2)\|_X \\ &\le \|u_1+v_1\|_{p_1} + \|u_2+v_2\|_{p_2} \\ &\le \big(\|u_1\|_{p_1} + \|u_2\|_{p_2}\big) + \big(\|v_1\|_{p_1} + \|v_2\|_{p_2}\big)\end{aligned}$$

e prendendo l'inf su tutte le quadruplette u_1, u_2, v_1, v_2 ammissibili ottengo

$$\|u+v\|_X \le \|u\|_X + \|v\|_X\,.$$

$\|u\|_X = 0$ *se e solo se* $u = 0$ *q.o.* Il "se" è ovvio, passo quindi al "solo se". Se $\|u\|_X = 0$ posso trovare una successione di coppie di funzioni $u_{n,1}, u_{n,2}$ tali che $u = u_{n,1} + u_{n,2}$ per ogni n e

$$\|u_{n,1}\|_{p_1} + \|u_{n,2}\|_{p_2} \to 0 \quad \text{per } n \to \infty.$$

Ma allora $u_{n,1}$ tende a 0 in $L^{p_1}(E)$ e $u_{n,2}$ tende a 0 in $L^{p_2}(E)$. In particolare, a patto di passare ad un'opportuna sottosuccessione, $u_{n,1}(x) \to 0$ e $u_{n,2}(x) \to 0$ per q.o. $x \in E$. Da questo segue che $u(x) = 0$ per q.o. $x \in E$.

b) Divido la stima in due casi, cominciando da $|t_1| \geq |t_2|$. In questo caso $|t_1 + t_2| \leq 2|t_1|$ e quindi

$$\begin{aligned} g(t_1+t_2) &= |t_1+t_2|^{p_1} \wedge |t_1+t_2|^{p_2} \\ &\leq 2^{p_1}|t_1|^{p_1} \wedge 2^{p_2}|t_1|^{p_2} \leq 2^{p_1}|t_1|^{p_1} \leq 2^{p_1}\big(|t_1|^{p_1} + |t_2|^{p_2}\big)\,. \end{aligned}$$

Analogamente per $|t_1| \leq |t_2|$ si dimostra che

$$g(t_1+t_2) \leq 2^{p_2}\big(|t_1|^{p_1} + |t_2|^{p_2}\big)$$

e dunque la stima desiderata vale con $C = 2^{p_2}$.

c) Sia u una funzione misurabile su E. Pongo allora

$$F := \big\{x \in E\colon |u(x)| \geq 1\big\}\,, \quad u_1 := u \cdot 1_F\,, \quad u_2 := u \cdot 1_{E\setminus F}\,,$$

e osservo che, per via della scelta di F e della definizione di g,

$$\begin{aligned} \|u_1\|_{p_1}^{p_1} + \|u_2\|_{p_2}^{p_2} &= \int_F |u(x)|^{p_1}\,dx + \int_{E\setminus F} |u(x)|^{p_2}\,dx \\ &= \int_F g(u(x))\,dx + \int_{E\setminus F} g(u(x))\,dx = \int_E g(u(x))\,dx\,, \end{aligned}$$

e questo dimostra che se $\int_E g(u(x))\,dx$ è finito allora le norme $\|u_1\|_{p_1}$ e $\|u_2\|_{p_2}$ sono finite, e quindi, tenuto conto che $u = u_1 + u_2$, anche $\|u\|_X$ è finita.
Viceversa, se $\|u\|_X$ è finita posso trovare $u_1 \in L^{p_1}(E)$ e $u_2 \in L^{p_2}(E)$ tali che $u = u_1 + u_2$, e usando la stima al punto b) ottengo

$$\begin{aligned} \int_E g(u(x))\,dx &= \int_E g\big(u_1(x) + u_2(x)\big)\,dx \\ &\leq C\int_E |u_1(x)|^{p_1} + |u_2(x)|^{p_2}\,dx = C\big(\|u_1\|_{p_1}^{p_1} + \|u_2\|_{p_2}^{p_2}\big)\,, \end{aligned}$$

da cui segue che $\int_E g(u(x))\,dx$ è finito.

d) Sicome $X = L^{p_1} + L^{p_2}$ e in questo caso $L^{p_2} \subset L^{p_1}$, ho che $X = L^{p_1}$. Dimostro ora l'equivalenza delle norme, vale a dire che esistono delle costanti c e c' tali che per ogni $u \in L^{p_1}$ vale

$$c'\,\|u\|_X \leq \|u\|_{p_1} \leq c\,\|u\|_X\,.$$

La prima disuguaglianza è ovvia, e anzi vale con $c' = 1$. Riguardo alla seconda, considero u_1, u_2 tali che $u = u_1 + u_2$ e ricordo che

$$\|u_2\|_{p_1} \leq |E|^a\,\|u_2\|_{p_2} \quad \text{con } a := \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}$$

(disuguaglianza vista a lezione); quindi

$$\|u\|_{p_1} \leq \|u\|_{p_1} + \|u_2\|_{p_1} \leq C\big(\|u\|_{p_1} + \|u_2\|_{p_2}\big) \quad \text{con } c := \max\{1, |E|^a\}\,,$$

e prendendo l'inf su tutte le coppie u_1, u_2 ammissibili ottengo infine

$$\|u\|_{p_1} \leq c\,\|u\|_X\,.$$

e) Devo far vedere che ogni successione di Cauchy u_n in X ammette limite. Come visto a lezione parlando della completezza di L^p, mi basta dimostrare che una sottosuccessione di u_n converge, e scelgo la sottosuccessione in modo che

$$\|u_n - u_{n-1}\|_X \leq 2^{-n} \quad \text{per } n = 1, 2, \dots. \tag{3.8}$$

Posso inoltre supporre che $u_n = 0$.
Voglio ora scomporre ogni u_n come $u_n = u_{1,n} + u_{2,n}$ in modo che $(u_{1,n})$ sia una successione di Cauchy in $L^{p_1}(E)$ e $(u_{2,n})$ sia una successione di Cauchy in $L^{p_2}(E)$. Per farlo osservo che, per via della (7.3), posso scomporre ogni $u_n - u_{n-1}$ come

$$u_n - u_{n-1} = v_{1,n} + v_{2,n} \tag{3.9}$$

con

$$\|v_{1,n}\|_{p_1} + \|v_{2,n}\|_{p_2} \leq 2^{1-n}\,; \tag{3.10}$$

pongo quindi

$$u_{1,n} := \sum_{m=1}^{n} v_{1,m} \,, \quad u_{2,n} := \sum_{m=1}^{n} v_{2,m} \,.$$

Usando (3.9) e il fatto che $u_0 = 0$ ottengo che $u_n = u_{1,n} + u_{2,n}$, mentre la stima (3.10) implica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|u_{1,n} - u_{1,n-1}\|_{p_1} + \sum_{n=1}^{\infty} \|u_{2,n} - u_{2,n-1}\|_{p_2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{1-n} < +\infty \,,$$

da cui segue che $(u_{1,n})$ e $(u_{2,n})$ sono successioni di Cauchy in $L^{p_1}(E)$ e $L^{p_2}(E)$ rispettivamente, e quindi convergono (in questi spazi) a delle funzioni $u_{1,\infty}$ e $u_{2,\infty}$. Da questo segue immediatamente che u_n converge in X a $u_\infty := u_{1,\infty} + u_{2,\infty}$ (per dimostrarlo basta usare che $\|u_n - u_\infty\|_X \leq \|u_{1,n} - u_{1,\infty}\|_{p_1} + \|u_{2,n} - u_{2,\infty}\|_{p_2}$).

8. a) Data $u \in X = X(\mathbb{R}, 1, 2)$ la scrivo come $u = u_1 + u_2$ con $u_1 \in L^1(\mathbb{R})$ e $u_2 \in L^2(\mathbb{R})$, e definisco la TdF di u come

$$\mathscr{F}_X u := \mathscr{F}_1 u_1 + \mathscr{F}_2 u_2 \,,$$

dove $\mathscr{F}_1$ e $\mathscr{F}_2$ denotano le TdF su L^1 e L^2, rispettivamente; siccome $\mathscr{F}_1 u_1$ appartiene a $L^\infty(\mathbb{R})$ e $\mathscr{F}_2 u_2$ appartiene a $L^2(\mathbb{R})$ è chiaro che $\mathscr{F}_X u$ appartiene a $X' = X(\mathbb{R}, 2, \infty)$.
Per prima cosa devo far vedere che questa definizione è ben posta, vale a dire che non dipende dalla specifica scomposizione di u: presa infatti un'altra scomposizione $u = u_1' + u_2'$ ho che

$$u_1 - u_1' = u_2' - u_2$$

e in particolare queste due funzioni appartengono a $L^1 \cap L^2$; quindi, ricordando che $\mathscr{F}_1$ e $\mathscr{F}_2$ coincidono su $L^1 \cap L^2$,

$$\big(\mathscr{F}_1 u_1 + \mathscr{F}_2 u_2\big) - \big(\mathscr{F}_1 u_1' + \mathscr{F}_2 u_2'\big) = \mathscr{F}_1(u_1 - u_1') - \mathscr{F}_2(u_2' - u_2) = 0 \,.$$

La linearità di $\mathscr{F}_X$ è immediata.
Per quanto riguarda la continuità mi basta osservare che presi u_1 e u_2 come sopra vale

$$\|\mathscr{F}_X u\|_{X'} \leq \|\mathscr{F}_1 u_1\|_\infty + \|\mathscr{F}_2 u_2\|_2 \leq \|u_1\|_1 + \sqrt{2\pi}\,\|u_2\|_2 \leq \sqrt{2\pi}\,\big(\|u_1\|_1 + \|u_2\|_2\big) \,,$$

e prendendo l'inf su tutte le scelte di u_1 e u_2 ammissibili ottengo

$$\|\mathscr{F}_X u\|_{X'} \leq \sqrt{2\pi}\,\|u\|_X \,.$$

b) Per quanto fatto nell'esercizio precedente, una funzione misurabile u su $\mathbb{R}$ appartiene a X se e solo se l'integrale $\int_{\mathbb{R}} g(u)\,dx$ è finito, dove g è la funzione

$$g(t) := |t| \wedge |t|^2 = \begin{cases} |t| & \text{per } |t| \geq 1, \\ |t|^2 & \text{per } |t| < 1. \end{cases}$$

Osservo quindi che se $u(x) := 1/|x|^a$ allora

$$\int_{\mathbb{R}} g(u)\,dx = \int_{|x|\geq 1} \frac{dx}{|x|^a} + \int_{|x|<1} \frac{dx}{|x|^{2a}} = 2\bigg[\int_0^1 \frac{dx}{x^a} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{2a}}\bigg]$$

e quindi $u \in X$ se e solo se $\frac{1}{2} < a < 1$.

c) Fissato $\frac{1}{2} < a < 1$, per ogni $r > 0$ pongo $u_r := u \cdot 1_{[-r,r]}$, e osservo che le funzioni u_r sono in L^1 e soddisfano

$$\|u - u_r\|_2^2 = 2\int_r^{+\infty} \frac{dx}{x^{2a}} = \frac{2}{(2a-1)r^{2a-1}} \underset{r\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \,,$$

e dunque u_r converge a u in L^2 per $r \to +\infty$; di conseguenza $\mathscr{F}_1 u_r$ converge a $\mathscr{F}_X u$ in L^2, e passando ad una opportuna sottosuccessione di r, converge anche puntualmente q.o. Posso quindi trovare $\mathscr{F}_X u(y)$ calcolando il limite *puntuale* di $\mathscr{F}_1 u_r(y)$, sperando che tale limite esista almeno per q.o. y. In effetti per $y \neq 0$ vale che

$$\mathscr{F}_1 u_r(y) = \int_{-r}^{r} \frac{e^{-iyx}}{|x|^a}\,dx = 2\int_0^r \frac{\cos(yx)}{|x|^a}\,dx = \frac{2}{|y|^{1-a}} \int_0^{r|y|} \frac{\cos t}{t^a}\,dt$$

(nell'ultimo passaggio ho usato il cambio di variabile $t = yx$) e quindi

$$\mathscr{F}_X u(y) = \lim_{r\to+\infty} \mathscr{F}_1 u_r(y) = \frac{c}{|y|^{1-a}} \,,$$

dove la costante c è data da

$$c := 2 \lim_{s\to+\infty} \int_0^s \frac{\cos t}{t^a}\, dt = 2a \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{a+1}}\, dt\,. \tag{3.11}$$

Qui servono alcune precisazioni:

- la funzione $f(t) := \cos t/t^a$ appartiene a $L^1([0,s])$ per ogni $s>0$, ma non a $L^1([0,+\infty))$ e quindi il limite in (3.11) potrebbe non anche esistere, e comunque non può essere scritto come $\int_0^\infty f(t)\,dt$ (a meno di non resuscitare la definizione di *integrale improprio*);
- la funzione $h(t) := \sin t/t^{a+1}$ appartiene a $L^1([0,+\infty))$ perché $|h(t)| \sim 1/t^a$ per $t\to 0$ e $|h(t)| = O(1/t^{1+a})$ per $t\to+\infty$, e quindi il secondo integrale in (3.11) esiste ed è finito;
- per dimostrare la seconda uguaglianza in (3.11) osservo che per ogni $0 < s' < s < \infty$ vale

$$\int_{s'}^s \frac{\cos t}{t^a}\, dt = \left|\frac{\sin t}{t^a}\right|_{s'}^{s} + a\int_{s'}^s \frac{\sin t}{t^{a+1}}\, dt$$

(si tratta di un'integrazione per parti); passando al limite per $s'\to 0$ ottengo

$$\int_0^s \frac{\cos t}{t^a}\, dt = \frac{\sin s}{s^a} + a\int_0^s \frac{\sin t}{t^{a+1}}\, dt\,,$$

e passando al limite per $s\to+\infty$ ottengo la seconda uguaglianza in (3.11).

Commenti

- Esercizio 1. Avendo intuito cos'è $X^\perp$, si può risolvere l'esercizio in modo più elegante di quanto fatto sopra. Per la precisione si indica con X' il sottospazio delle funzioni $v \in L^2 = L^2([0,2])$ tali che $v(x) = 0$ per q.o. $x\in[0,2]$ e si osserva che $X' \subset X^\perp$ e che si può scomporre ogni $u\in L^2$ come

$$u = u_1 + u_2 \quad \text{con} \quad u_1 := u\cdot 1_{[0,1]}\,,\ u_2 := u\cdot 1_{[1,2]}\,.$$

Siccome $u_1 \in X'$ e $u_2\in X$, se ne deduce immediatamente che $L^2 = X + X'$, da cui segue che necessariamente $X' = X^\perp$ (e che X è un sottospazio chiuso) e che u_1 e u_2 sono proprio le proiezioni *ortogonali* di u su $X^\perp$ e X, rispettivamente.

- Esercizio 1. Da quel che hanno scritto, sembrerebbe che diversi dei presenti non hanno chiara la distinzione tra proiezione e proiezione ortogonale. Per la precisione, alcuni hanno scritto che siccome $u_2 := u\cdot 1_{[1,2]}$ appartiene a X, allora la mappa $u\mapsto u_2$ è la proiezione *ortogonale* di L^2 su X, mentre è solo legittimo dedurne che $u\mapsto u_2$ è *una* proiezione di L^2 su X; per avere che è *la* proiezione ortogonale serve anche far vedere che $u - u_2 \perp X$, ovvero che $u_2 := u\cdot 1_{[1,2]}$ appartiene a $X^\perp$.

- Esercizio 3a). Diversi dei presenti hanno dimostrato che $T(f_1,f_2)$ è ben definito scrivendo

$$\left|\int_0^1 f_1 f_2\, dx\right| \le \|f_1\|_\infty \|f_2\|_\infty\,.$$

Ad essere pignoli questa giustificazione non è corretta, perché il punto non è tanto stimare l'integrale quanto dimostrare che esiste ed è finito. Scrivendo invece

$$\int_0^1 |f_1 f_2|\, dx \le \|f_1\|_\infty \|f_2\|_\infty$$

si dimostra che la funzione $f_1 f_2$ è in L^1 e quindi $\int_0^1 f_1 f_2\, dx$ esiste ed è finito.

- Esercizio 4b). Moltissimi dei presenti hanno fatto errori più o meno gravi nel calcolo dei coefficienti di Fourier della funzione $|t|$. Alcuni hanno dimenticato di calcolare a parte c_0, altri hanno ottenuto coefficienti complessi (mentre i coeffcienti di una funzione pari e reale sono tutti reali) e infine alcuni hanno ottenuto coefficienti non sommabili (mentre i coefficienti di una funzione C^1 a tratti con valori uguali agli estremi $\pm\pi$ sono sempre sommabili).

- Esercizio 5c). Si può far vedere che sotto l'ipotesi (3.7) la soluzione u definita dalle formule (3.5) e (3.6) è in realtà una soluzione del problema (P) su tutto $\mathbb{R}\times[-\pi,\pi]$. In effetti, fissato un qualunque $T \in \mathbb{R}$, è possibile stimare come segue la norma del sup su $[T, +\infty) \times \mathbb{R}$ di u_n e delle sue derivate parziali del primo e secondo ordine:

$$\|u_n\|_\infty \sim e^{-2T}|c_n^0|\,,$$
$$\|(u_n)_t\|_\infty \sim \|(u_n)_x\|_\infty \sim e^{-2T}|nc_n^0|\,,$$
$$\|(u_n)_{tt}\|_\infty \sim \|(u_n)_{xx}\|_\infty \sim e^{-2T}|n^2c_n^0|\,.$$

- Esercizio 6a). Diversi dei presenti hanno sbagliato questo punto, che è una questione di integrali improprio elementari. Si tratta di un errore grave.

- Esercizio 6b). In effetti si può far vedere un risultato più forte, vale a dire che per $a \geq 1/2$ la funzione $f_a * f_a$ non appartiene a $L^\infty(\mathbb{R})$. Per la precisione si ha che $f_a * f_a$ ha valori finiti ed è continua per $x \neq 0$, e tende a $+\infty$ per $x \to 0$.

- Esercizio 6b). Diversi dei presenti hanno dimostrato che $f_1 * f_a$ è continua e limitata per $a < 1/2$ in modo assai involuto, vale a dire dicendo che f_a appartiene a $L^p \cap L^q$ per un qualche p e per q esponente coniugato di p, senza però dire esplicitamente di che p si tratta.

- Esercizio 7a). Nel dimostrare che $\|u\|_X = 0$ implica $u = 0$ q.o., quasi tutti quelli che ci hanno provato hanno dato per scontato che esistono u_1 e u_2 tali che $u = u_1 + u_2$ e $\|u_1\|_{p_1} = \|u_2\|_{p_2} = 0$, vale a dire che l'estremo inferiore nella definizione della norma $\|\cdot\|_X$ è in realtà un minimo. Ma questo è proprio quello che si chiedeva di dimostrare qui.

- Esercizio 7a). Sarebbe tutto più semplice sapendo che l'estremo inferiore nella definizione della norma $\|\cdot\|_X$ è un minimo. In effetti lo è, ma la dimostrazione richiede nozioni che vengono insegnate nel corso di Istituzioni di Analisi.

- Esercizio 7c). Alcuni dei presenti hanno scritto che la finitezza di $\int_E g(u)\,dx$ equivale a dire che almeno una tra $\|u\|_{p_1}$ e $\|u\|_{p_2}$ è finita, mentre non è questo il caso. In effetti la definizione di g implica che
$$\int_E g(u)\,dx = \int_E |u(x)|^{p_1} \wedge |u(x)|^{p_2}\,dx \leq \min\left\{\int_E |u(x)|^{p_1}\,dx\,,\ \int_E |u(x)|^{p_2}\,dx\right\},$$
ma non è detto che valga l'uguaglianza.

- Esercizio 7e). Una dimostrazione alternativa (e più naturale di quella scritta sopra) potrebbe essere la seguente: data (u_n) successione di Cauchy in X, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste n_ε tale che per ogni $n, m \geq n_\varepsilon$ vale
$$\|u_n - u_m\|_X < \varepsilon\,;$$
quindi, ricordando la definizione di $\|\cdot\|_X$, posso trovare delle scomposizioni $u_n = u_{1,n} + u_{2,n}$ e $u_m = u_{1,m} + u_{2,m}$ in modo tale che
$$\|u_{1,n} - u_{1,m}\|_{p_1} + \|u_{2,n} - u_{2,m}\|_{p_2} < \varepsilon\,,$$
da cui segue che $(u_{1,n})$ e $(u_{2,n})$ sono successioni di Cauchy in $L^{p_1}(E)$ e $L^{p_2}(E)$, rispettivamente, e dunque convergono a degli opportuni $u_{1,\infty}$ e $u_{2,\infty}$, ecc.
Ma questa dimostrazione non funziona! (Lascio agli interessati scoprire il perché.)

- Esercizio 8c). La dimostrazione data sopra è leggermente imprecisa dove scrivo che "u_r converge a u in L^2 per $r \to +\infty$ e di conseguenza $\mathscr{F}_1 u_r$ converge a $\mathscr{F}_X u$ in L^2", e l'imprecisione sta nel fatto che le funzioni u_r e u non appartengono a L^2. La versione corretta sarebbe la seguente: "$u_r - u$ converge a 0 in L^2 per $r \to +\infty$ e di conseguenza $\mathscr{F}_1 u_r - \mathscr{F}_X u = \mathscr{F}_2(u_r - u)$ converge a 0 in L^2". Da questo si deduce comunque che, passando ad un'opportuna sottosuccessione di r, $\mathscr{F}_1 u_r$ converge a $\mathscr{F}_X u$ q.o.

1. Indico con B il quarto di cerchio dato dall'intersezione di Q con il cerchio di centro l'origine e raggio 1; siccome la funzione $|f|^p$ ha sempre integrale finito su $Q \setminus B$ ne segue che f appartiene a $L^p(Q)$ se e solo se appartiene a $L^p(B)$. Osservo poi che, usando le coordinate polari (e il teorema di Fubini),
$$\begin{aligned}\|f\|^p_{L^p(B)} &= \int_B \frac{x_1^{pa}}{(x_1^4+x_2^4)^p}\,dx \\ &= \int_0^{\pi/4}\!\!\int_0^1 \frac{(\rho\cos\theta)^{pa}}{\big((\rho\cos\theta)^4+(\rho\sin\theta)^4\big)^p}\,\rho\,d\rho\,d\theta \\ &= \underbrace{\Big(\int_0^{\pi/4} \frac{(\cos\theta)^{pa}}{(\cos^4\theta+\sin^4\theta)^p}\,d\theta\Big)}_{I}\underbrace{\Big(\int_0^1 \frac{d\rho}{\rho^{p(4-a)-1}}\Big)}_{II}.\end{aligned}$$
Osservo ora che l'integrale I è sempre finito e strettamente positivo perché la funzione integranda è bene definita, continua, positiva e non identicamente nulla su tutto l'intervallo $[0,\pi/4]$. Ne segue che f appartiene a $L^p(B)$, ovvero a $L^p(Q)$, se e solo se l'integrale II è finito, vale a dire se e solo se $p(4-a) < 2$, ovvero se e solo se $a > 4 - 2/p$.
Volendo includere anche il caso $p = +\infty$, si vede subito che $f \in L^\infty(Q)$ se e solo se $a \geq 4$.

2. Ricordo che
$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \quad \text{per ogni } z \in \mathbb{C} \text{ con } |z| < 1,$$
e la serie converge totalmente su ogni insieme $\{z\colon |z| \leq m\}$ con $m < 1$. Ne segue che
$$f(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-e^{ix}/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{2^{n+1}} \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R},$$
e la serie converge totalmente su $\mathbb{R}$ e quindi converge anche in $L^2(-\pi,\pi)$; quest'ultima osservazione dimostra che quella scritta sopra è anche la serie di Fourier di f.

3. Comincio con un lemma: *dato $j = 1, \dots, d$ e data $v : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ funzione di classe C^1 tale che v e la derivata parziale $D_j v$ appartengono a $L^1(\mathbb{R}^d)$, allora*
$$\widehat{D_j v}(y) = i y_j\, \widehat{v}(y) \quad \textit{per ogni } y \in \mathbb{R}^d. \tag{4.1}$$
Dimostro questa formula per $j = 1$, riconducendomi all'analogo risultato in dimensione 1. Comincio con l'osservare che per ogni $x' = (x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^{d-1}$ la funzione di una variabile $w_{x'}(x_1) := v(x)$ è di classe C^1; inoltre, per via del teorema di Fubini, $w_{x'}$ e $\dot w_{x'}$ appartengono a $L^1(\mathbb{R})$ per quasi ogni $x' \in \mathbb{R}^{d-1}$, e quindi
$$\widehat{\dot w_{x'}}(y_1) = i y_1\, \widehat{w_{x'}}(y_1) \quad \text{per ogni } y_1 \in \mathbb{R}. \tag{4.2}$$
Preso $y \in \mathbb{R}^d$ e posto $y' := (y_2, \dots, y_d)$ ho che
$$\begin{aligned}\widehat{D_1 v}(y) &= \int_{\mathbb{R}^d} D_1 v(x)\, e^{-iy\cdot x}\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \Big(\int_{\mathbb{R}} D_1 v(x_1,x')\, e^{-iy_1x_1}dx_1\Big) e^{-iy'\cdot x'}\,dx' \\ &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \Big(\int_{\mathbb{R}} \dot w_{x'}(x_1)\, e^{-iy_1x_1}dx_1\Big) e^{-iy'\cdot x'}\,dx' \\ &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} i y_1 \Big(\int_{\mathbb{R}} w_{x'}(x_1)\, e^{-iy_1x_1}dx_1\Big) e^{-iy'\cdot x'}\,dx' \\ &= i y_1 \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \Big(\int_{\mathbb{R}} v(x_1,x')\, e^{-iy_1x_1}dx_1\Big) e^{-iy'\cdot x'}\,dx' \\ &= i y_1 \int_{\mathbb{R}^d} v(x)\, e^{-iy\cdot x}\,dx = i y_1 \widehat{v}(y)\,.\end{aligned}$$

(Nel secondo passaggio ho usato il teorema di Fubini e l'identità $e^{-iy\cdot x} = e^{-iy_1x_1}\, e^{-iy'\cdot x'}$, nel terzo l'identità $D_1v(x_1,x') = \dot w_{x'}(x_1)$, nel quarto l'identità (4.2), nel quinto la definizione di $w_{x'}$, e infine nel sesto di nuovo Fubini e l'identità $e^{-iy\cdot x} = e^{-iy_1x_1}\, e^{-iy'\cdot x'}$.)

Utilizzando la formula (4.1) ottengo subito che

$$\widehat{\nabla u} = i\,\widehat{u}\otimes y\,, \quad \widehat{\operatorname{div} u} = i\,\widehat{u}\cdot y\,.$$

(Ricordo che dati a, b vettori, $a\otimes b$ è la matrice con componenti $(a\otimes b)_{jk} = a_jb_k$.)

4. a) Ricordo che

$$I : u \mapsto \int_{\mathbb{R}} u\,dx$$

è un funzionale lineare continuo su $L^1(\mathbb{R})$, quindi $Y = I^{-1}(0)$ è un sottospazio chiuso di $L^1(\mathbb{R})$, e pertanto la chiusura di X deve essere contenuta in Y.
Resta da dimostrare l'inclusione opposta, vale a dire che per ogni funzione $u \in Y$ esiste una successione di funzioni $u_n \in X$ che converge a u in $L^1(\mathbb{R})$. Siccome $C^\infty_c(\mathbb{R})$ è denso in $L^1(\mathbb{R})$ (fatto noto), posso trovare una successione $v_n \in C^\infty_c(\mathbb{R})$ che converge a u in $L^1(\mathbb{R})$, e la voglio modificare in modo da ottenere una successione du funzioni con integrale nullo. Per farlo scelgo una funzione $w \in C^\infty_c(\mathbb{R})$ con $I(w) = 1$ e pongo

$$u_n := v_n - I(v_n)\,w\,.$$

È chiaro che u_n appartiene a $C^\infty_c(\mathbb{R})$ e che

$$I(u_n) = I(v_n) - I(v_n)\,I(w) = 0\,,$$

ovvero u_n appartiene a X. Inoltre, siccome $I(v_n)$ converge a $I(u) = 0$,

$$\big\|I(v_n)\,w\big\|_1 = |I(v_n)|\,\|w\|_1 \to 0\,,$$

da cui segue che u_n converge a u in $L^1(\mathbb{R})$.
b) Dimostro che la chiusura di X in $L^2(\mathbb{R})$ è tutto lo spazio, ovvero che X è denso in $L^2(\mathbb{R})$. Siccome $C^\infty_c(\mathbb{R})$ è denso in $L^2(\mathbb{R})$ (fatto noto) mi basta dimostrare che X è denso in $C^\infty_c(\mathbb{R})$ rispetto alla norma L^2. Data dunque $u \in C^\infty_c(\mathbb{R})$, prendo la funzione w come sopra e per ogni $\delta > 0$ pongo

$$u_\delta := u - I(u)\,w_\delta \quad \text{dove} \quad w_\delta(x) := \delta\,w(\delta x)\,.$$

È chiaro che u_δ appartiene a $C^\infty_c(\mathbb{R})$, e siccome $I(w_\delta) = I(w) = 1$ (si tratta di un semplice cambio di variabile nell'integrale) allora

$$I(u_\delta) = I(u) - I(u)\,I(w_\delta) = 0\,,$$

ovvero u_δ appartiene a X. Infine u_δ converge a u in norma L^2 per $\delta \to 0$ perchè $\|w_\delta\|_2 \to 0$ (anche questo segue da un semplice cambio di variabile).

5. Scrivo u in funzione di una nuova incognita v scelta in modo che le condizioni al bordo in (P) si trasformino in $v(t,0) = v(t,\pi) = 0$ e v soddisfi sempre l'equazione del calore. Una possibilità è prendere

$$u(t,x) = v(t,x) + tx + g(x)$$

con g scelta in modo tale che
- $g(0) = g(\pi)$, in modo che v soddisfi $v(t,0) = v(t,\pi) = 0$;
- $\ddot g(x) = x$, in modo che v soddisfi $v_t = v_{xx}$.

Si vede subito che una funzione g che soddisfa queste condizioni è

$$g(x) := \frac{x^3 - \pi^2 x}{6}\,.$$

Usando il cambio di variabile summenzionato ottengo che in effetti v risolve il problema (P') dato dall'equazione $v_t = v_{xx}$ con le condizioni al bordo $v(t,0) = v(t,\pi) = 0$ e la condizione iniziale $v(0,x) = -g(x)$.
Discutere l'unicità e l'esistenza per il problema (P) equivale a discuterle per il problema (P'), cosa che farò in seguito.

a) *Unicità.* Sia $v : [0,T) \times [0,\pi] \to \mathbb{R}$ una funzione continua, di classe C^1 in t e C^2 in x su $(0,T) \times [0,\pi]$, che risolve (P'). Scrivo $v(t,\cdot)$ in serie di $\sin(nx)$ per ogni $t \in [0,T)$, vale a dire

$$v(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b(t)\,\sin(nx) \quad \text{con} \quad b(t) := \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} v(t,x)\,\sin(nx)\,dx\,.$$

La funzione b_n è continua su $[0,T)$, differenziabile su $(0,T)$, e la derivata vale

$$\begin{aligned} b_n'(t) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} v_t(t,x)\,\sin(nx)\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} v_{xx}(t,x)\,\sin(nx)\,dx \\ &= -\frac{2n^2}{\pi}\int_0^{\pi} v(t,x)\,\sin(nx)\,dx = -n^2 b_n(t)\,. \end{aligned}$$

(Nel primo passaggio ho usato il teorema di derivazione sotto il segno di integrale, nel secondo ho usato che $v_t = v_{xx}$, nel terzo ho applicato la formula di integrazione per parti per due volte, tenendo conto delle condizioni al bordo soddisfatte da v.)
Infine $b_n(0)$ sono i coefficienti della serie in $\sin(nx)$ di $-g(x)$, vale a dire

$$b_n(0) = -\frac{1}{3\pi}\int_0^{\pi}(x^3 - \pi^2 x)\,\sin(nx)\,dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{n^3}\,.$$

(Ho calcolato l'integrale integrandolo per parti tre volte.)
Dunque la funzione b_n risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = -n^2 y \\ y(0) = \frac{2(-1)^{n+1}}{n^3} \end{cases} \tag{4.3}$$

e quindi è univocamente determinata. Ne segue che anche v è univocamente determinata.

b) Risolvendo il problema (4.3) ottengo

$$b_n(t) = \frac{2(-1)^{n+1}}{n^3}e^{-n^2 t}\,,$$

e quindi la soluzione v dovrebbe essere data da

$$v(t,x) := \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{2(-1)^{n+1}}{n^3}e^{-n^2 t}\sin(nx)}_{v_n(t,x)}\,. \tag{4.4}$$

Trattandosi dell'equazione del calore, mi aspetto che la soluzione esista per tutto l'intervallo temporale $[0,+\infty)$; verifico in effetti che la funzione v data sopra

(i) è ben definita e continua su $[0,+\infty) \times \mathbb{R}$;
(ii) è di classe C^1 in x su $[0,+\infty) \times \mathbb{R}$;
(iii) è di classe C^2 in x e di classe C^1 in t su $(0,+\infty) \times \mathbb{R}$, e soddisfa l'equazione $v_t = v_{xx}$;
(iv) soddisfa le condizioni al bordo $v(t,0) = v(t,\pi) = 0$ e la condizione iniziale $v(0,x) = -g(x)$.

Per dimostrare l'enunciato (i) osservo che le funzioni v_n in (4.4) sono di classe C^∞ e soddisfano

$$\|v_n\|_{L^\infty([0,+\infty)\times\mathbb{R})} \le \frac{2}{n^3}\,,$$

e quindi la serie in (4.4) converge totalmente su $[0,+\infty) \times \mathbb{R}$.
Per dimostrare (ii) osservo che le derivate parziali $(v_n)_x$ sono

$$(v_n)_x = \frac{2(-1)^{n+1}}{n^2}\,e^{-n^2 t}\cos(nx)\,,$$

quindi

$$\big\|(v_n)_x\big\|_{L^\infty([0,+\infty)\times\mathbb{R})} \le \frac{2}{n^2}\,,$$

da cui segue che la serie delle $(v_n)_x$ converge totalmente su $[0,+\infty)\times\mathbb{R}$ e di conseguenza u è di classe C^1 in x su $[0,+\infty)\times\mathbb{R}$.
Per dimostrare (iii) osservo che

$$(v_n)_t = (v_n)_{xx} = \frac{2(-1)^n}{n}\, e^{-n^2 t}\sin(nx)\,,$$

quindi per ogni $\delta > 0$ vale che

$$\big\|(v_n)_t = (v_n)_{xx}\big\|_{L^\infty([\delta,+\infty)\times\mathbb{R})} \le \frac{2}{n}\, e^{-n^2\delta}\,,$$

da cui segue che la serie delle derivate parziali $(v_n)_t = (v_n)_{xx}$ converge totalmente su $[\delta,+\infty)\times\mathbb{R}$ per ogni $\delta > 0$, e di conseguenza u è di classe C^2 in x e C^1 in t su $(0,+\infty)\times\mathbb{R}$. La convergenza totale implica inoltre che $v_t = v_{xx}$.
L'enunciato (iv) è immediato.

6. a) Presi $u, v \in X$ ho che

$$\langle Tu\,;\,v\rangle = \int_0^\pi i\dot u\,\bar v\,dt = \Big| iu\,\bar v\Big|_0^\pi - \int_0^\pi iu\,\dot{\bar v}\,dt = \int_0^\pi u\,\overline{i\dot v}\,dt = \langle u\,;\,Tv\rangle\,.$$

(Nel secondo passaggio ho integrato per parti; nel terzo ho usato il fatto che $u(0) = u(\pi)$ e $v(0) = v(\pi)$ per far vedere che il termine "di bordo" dell'integrazione per parti è nullo, e l'identità $\dot{\bar v} = \bar{\dot v}$.)

c) Gli autovettori di T sono soluzioni non banali sull'intervallo $[0,\pi]$ del problema

$$\begin{cases} i\dot u = \lambda u \\ u(0) = u(\pi) \end{cases} \tag{4.5}$$

(la condizione al bordo esprime il fatto che u appartiene a X). Le soluzioni dell'equazione differenziale in (4.5) sono della forma

$$u(t) = \alpha e^{-i\lambda t} \quad \text{con } \alpha\in\mathbb{C},$$

e per $\alpha \ne 0$ la condizione al bordo in (4.5) è soddisfatta se e solo se $1 = e^{-i\lambda\pi}$, ovvero $\lambda = 2k$ con $k\in\mathbb{Z}$. Pertanto una famiglia di autovettori di T con norma L^2 uguale a 1 è

$$\mathscr{F} := \Big\{ \tfrac{1}{\sqrt{\pi}} e^{2ikt} : k\in\mathbb{Z}\Big\}\,;$$

trattandosi di autovettori corrispondenti ad autovalori differenti queste funzioni sono automaticamente a due a due ortogonali, e quindi $\mathscr{F}$ è un sistema ortonormale in L^2.
Per vedere che $\mathscr{F}$ è un sistema ortornormale completo, e quindi una base di Hilbert, basta procedere come per la base utilizzata nella serie di Fourier, osservando che $\mathrm{Span}(\mathscr{F})$ è una sotto-algebra delle funzioni continue $C(K,\mathbb{C})$ dove K è lo spazio ottenuto identificando gli estremi dell'intervallo $[0,\pi]$, inoltre $\mathrm{Span}(\mathscr{F})$ è chiusa per coniugio e separa i punti di K e pertanto il teorema di Stone–Weierstrass ci dice che è densa in $C(K,\mathbb{C})$; partendo da quest'ultimo fatto si ottiene che è densa anche in $L^2(0,\pi)$.

b) Per quanto visto al punto precedente T ha sia autovalori positivi, che negativi che nulli, e quindi non è semidefinito (né negativo né positivo).

7. a) Devo far vedere che la funzione $g(h)\,u(x-h)\,u(x)$ appartiene a $L^1(\mathbb{R}^2)$. Osservo dunque che detto $\langle\cdot\,;\,\cdot\rangle$ il prodotto scalare in $L^2(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} \big|g(h)\,u(x-h)\,u(x)\big|\,dx\,dh &= \int_{\mathbb{R}}\bigg(\int_{\mathbb{R}} |g(h)|\,|u(x-h)|\,dh\bigg)|u(x)|\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \big(|g| * |u|(x)\big)\,|u(x)|\,dx \\ &= \big\langle |g| * |u|\,;\,|u|\big\rangle \le \big\||g| * |u|\big\|_2\,\big\||u|\big\|_2 \le \|g\|_1\,\|u\|_2^2 < +\infty\,.\end{aligned}$$

(Nel primo passaggio ho usato il teorema di Fubini per funzioni positive, nel quarto la disuguaglianza di Cauchy–Schwarz in L^2, nel quinto la stima per la norma del prodotto di convoluzione di una funzione L^2 e di una funzione L^1.)

b) Ripetendo i passaggi fatti al punto precedente ottengo che $F(u) = \langle g * u\,;\,u\rangle$ e quindi

$$F(u) = \langle g * u\,;\,u\rangle = \frac{1}{2\pi}\langle\widehat{g * u}\,;\,\hat{u}\rangle = \frac{1}{2\pi}\langle\hat{g}\,\hat{u}\,;\,\hat{u}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\hat{g}(y)\,|\hat{u}(y)|^2\,dy\,.$$

(Nel secondo passaggio ho usato il fatto che la TdF è un'isometria su $L^2(\mathbb{R})$ a meno di un fattore $1/(2\pi)$, nel terzo ho usato la formula per la TdF del prodotto di convoluzione–quest'ultima è stata dimostrata a lezione per fattori in L^1 ma può essere facilmente estesa per densità anche al caso in cui uno dei fattori è in L^1 e l'altro in L^2.)

c) Utilizzando la formula ottenuta al punto precedente si vede che T è definito positivo se $\hat{g}$ è reale e strettamente positiva (ricordo che $\hat{g}$ è una funzione continua a valori complessi).

8. Come fatto nel caso in cui D è un disco, identifico $\mathbb{R}^2$ con il piano complesso $\mathbb{C}$ e cerco la soluzione u tra le funzioni che si scrivono come somma di una funzione olomorfa e di una funzione anti-olomorfa definite sulla corona circolare D. Ricordo inoltre che tali funzioni si scrivono in serie di Laurent, cioè come serie in z^n e $\bar{z}^n$, rispettivamente, con n che varia in $\mathbb{Z}$. In altre parole cerco u della forma [1]

$$u(z) := a_0 + \sum_{n\in\mathbb{Z},\,n\neq 0} a_n z^n + \sum_{n\in\mathbb{Z},\,n\neq 0} b_n \bar{z}^{-n}\,. \tag{4.6}$$

Scrivo quindi le funzioni $u_1(e^{i\theta})$ e $u_2(2e^{i\theta})$ in serie di Fourier, cioè

$$u_1(e^{i\theta}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{1,n}e^{in\theta}\,,\quad u_2(2e^{i\theta}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{2,n}e^{in\theta}\,,$$

e ricordo che essendo u_1 e u_2 funzioni di classe C^1, le due serie convergono totalmente, cioè

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_{1,n}| < +\infty\,,\quad \sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_{2,n}| < +\infty\,. \tag{4.7}$$

Osservo quindi che le identità $u_1 = u$ su S_1 e $u_2 = u$ su S_2 si riscrivono come $u_1(e^{i\theta}) = u(e^{i\theta})$ e $u_2(2e^{i\theta}) = u(2e^{i\theta})$ per ogni θ, ovvero

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{1,n}e^{in\theta} &= a_0 + \sum_{n\in\mathbb{Z},\,n\neq 0}(a_n + b_n)e^{in\theta}\,,\\ \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{2,n}e^{in\theta} &= a_0 + \sum_{n\in\mathbb{Z},\,n\neq 0}(2^n a_n + 2^{-n}b_n)e^{in\theta}\,,\end{aligned}$$

e dunque sono implicate dal (e in effetti sono equivalenti al) seguente sistema di equazioni nelle incognite a_n e b_n:

$$c_{1,0} = c_{2,0} = a_0\,,\quad c_{1,n} = a_n + b_n\,,\quad c_{2,n} = 2^n a_n + 2^{-n}b_n \quad (\text{per ogni } n\neq 0).$$

Suppongo ora che $c_{1,0} = c_{2,0}$ (il caso $c_{1,0} \neq c_{2,0}$ lo considero dopo). In questo caso il sistema sopra è risolubile e le soluzioni sono

$$a_0 = c_{1,0} = c_{2,0}\,,\quad a_n = \frac{2^n c_{2,n} - c_{1,n}}{4^n - 1}\,,\quad b_n = \frac{4^n c_{1,n} - c_{2,n}}{4^n - 1}\,.$$

Resta da verificare che con questi coefficienti le due serie di Laurent in (4.6) convergono totalmente su D; questo implica automaticamente che le due serie definiscono funzioni continue su D e olomorfe/anti-olomorfe all'interno di D, e che quindi la funzione u è definita e continua su D e armonica all'interno di D. Mi limito alla prima delle due serie (la seconda è analoga):

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z},\,n\neq 0}\|a_n z^n\|_{L^\infty(D)} &= \sum_{n=1}^\infty 2^n|a_n| + \sum_{n=1}^\infty|a_{-n}|\\ &\leq \sum_{n=1}^\infty\Big(\frac{4^n}{4^n-1}|c_{2,n}| + \frac{2^n}{4^n-1}|c_{1,n}|\Big) + \sum_{n=1}^\infty\Big(\frac{2^n}{4^n-1}|c_{2,-n}| + \frac{4^n}{4^n-1}|c_{1,-n}|\Big)\,,\end{aligned}$$

e la finitezza delle ultime due serie segue dalle stime in (4.7).

Infine nel caso in cui $c_{1,0} \neq c_{2,0}$ modifico la formula (4.6) che definisce la funzione u aggiungendo $c\log|z|$, con c da scegliere opportunamente (ricordo che $\log|z|$ è una funzione armonica).

[1] La scelta dell'esponente $-n$ invece di n nella seconda serie è stata fatta solo per semplificare alcune formule in seguito.

COMMENTI

- Esercizio 2. Molti dei presenti hanno semplicemente scritto $f(x)$ come serie, senza preoccuparsi di spiegare in che senso la serie converge e perché dovrebbe essere la serie di Fourier, ma anche se non sembra, quest'ultimo passaggio richiede una qualche spiegazione (si pensi solo che è possibile trovare una serie $\sum c_n e^{inx}$ con coefficienti non tutti nulli che converge puntualmente a 0 per quasi ogni x—chiaramente la successione dei coefficienti c_n non appartiene a ℓ^2 e tale serie non è la serie di Fourier della funzione 0).
Ciò premesso, questo errore non è stato considerato grave.

- Esercizio 3. Diversi dei presenti hanno scritto formule più o meno giuste per le TdF di ∇u e $\operatorname{div} u$, senza però dare alcuna dimostrazione, neanche parziale. (Ho apprezzato le poche dimostrazioni date, anche quelle parziali.)

- Esercizio 4a). Molti dei presenti hanno dimostrato che la chiusura di X è contenuta in Y (cosa che peraltro segue immediatamente dalla continuità dell'integrale) ma non che i due insiemi coincidono, che invece era la parte significativa di questo esercizio.

- Esercizio 4a). Diversi dei presenti hanno scritto che se una successione di funzioni $u_n \in L^1(\mathbb{R})$ converge quasi ovunque ad una funzione $u \in L^1(\mathbb{R})$, allora l'integrale $\int_{\mathbb{R}} u_n \, dx$ converge a $\int_{\mathbb{R}} u \, dx$ per convergenza dominata; in particolare alcuni hanno anche specificato che la dominazione usata è $|u| + |u_n|$, mentre una dominazione non può dipendere da n. Si tratta di un errore grave.

- Esercizio 4b). Alcuni dei presenti hanno dimostrato il risultato facendo vedere che la chiusura di X in $L^2(\mathbb{R})$ contiene la base di Haar di $L^2(\mathbb{R})$. C'è però problema: la dimostrazione del fatto che la base di Haar è una base di Hilbert di $L^2(\mathbb{R})$ è stata solo accennata a lezione e quindi non può essere data per scontata; in particolare visto che uno dei punti chiave, che è anche il punto chiave di questo esercizio, era stato omesso.

- Esercizio 5. La maggior parte dei presenti ha utilizzato un cambio di variabile diverso da quello proposto sopra ma molto naturale, vale a dire

$$u(t,x) = v(t,x) + xt \,,$$

riducendosi a discutere il problema (P'') dato dall'equazione $v_t = v_{xx} - x$ con le condizioni al bordo $v(t,0) = v(t,\pi) = 0$ e la condizione iniziale $v(0,x) = 0$.
Siccome la rappresentazione della funzione $-x$ in serie di $\sin(nx)$ ha coefficienti $a_n = \frac{2(-1)^n}{n}$, scrivendo $v(t,\cdot)$ in serie di $\sin(nx)$ come sopra si ottiene quindi che i coefficienti $b_n(t)$ risolvono l'equazione differenziale $\dot{y} = -n^2 y + a_n$ con la condizione iniziale $y(0) = 0$, e dunque

$$b_n(t) = \frac{a_n}{n^2}\big(1 - e^{-n^2 t}\big) = \frac{2(-1)^n}{n^3}\big(1 - e^{-n^2 t}\big) \,.$$

In particolare b_n è univocamente determinata, e lo stesso vale per la soluzione v. Per quanto riguarda l'esistenza, la soluzione dovrebbe essere data dalla serie

$$v(t,x) := \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{2(-1)^n}{n^3}\big(1 - e^{-n^2 t}\big)\sin(nx)}_{v_n(t,x)} \,.$$

In effetti è facile verificare che v è una funzione ben definita e continua su $[0,+\infty) \times \mathbb{R}$, soddisfa le condizioni al bordo e la condizione iniziale in (P''), è di classe C^1 in x su $[0,+\infty) \times \mathbb{R}$, ed è di classe C^1 in t su $(0,+\infty) \times \mathbb{R}$.
Il problema è far vedere che v è anche di classe C^2 in x su $(0,+\infty) \times \mathbb{R}$ e soddisfa l'equazione $v_t = v_{xx} - x$, infatti non si vede come dimostrare la convergenza uniforme della serie delle derivate seconde

$$(v_n)_{xx} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}\big(1 - e^{-n^2 t}\big)\sin(nx) \,.$$

Un modo per aggirare questo problema consiste nell'osservare che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^3} \sin(nx) = \frac{1}{6}(x^3 - \pi^2 x)\,,$$

cosa che si può intuire osservando che, formalmente, la derivata seconda della serie a sinistra dell'uguale è la serie della funzione x, mentre $g(x) := \frac{1}{6}(x^3 - \pi^2 x)$ è l'unica funzione tale che $\ddot{g}(x) = x$ e $g(0) = g(\pi) = 0$.
Pertanto conviene definire v in modo leggermente diverso, vale a dire

$$v(t,x) := g(x) + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n^3} e^{-n^2 t} \sin(nx)}_{w(t,x)}\ .$$

Ora è facile vedere che la serie a destra dell'uguale definisce una funzione w che è continua su $[0,+\infty) \times \mathbb{R}$, C^1 in t e C^2 in x su $(0,+\infty) \times \mathbb{R}$, e soddisfa $w_t = w_{xx}$; dunque v ha la stessa regolarità di w e soddisfa $v_t = w_t = w_{xx} = v_{xx} - \ddot{g} = v_{xx} - x$.

- Esercizio 5b). Diversi dei presenti che hanno usato l'approccio illustrato al punto precedente, messi davanti al fatto che la serie delle derivate parziali $(v_n)_{xx}$ non converge totalmente hanno concluso erroneamente che la soluzione v non esiste. L'unica dimostrazione di non esistenza che mi viene in mente consiste nel far vedere che i coefficienti della derivata seconda v_{xx}, vale a dire $-n^2 b_n(t)$, non sono in ℓ^2 per alcun $t > 0$. Ma questa dimostrazione non si applica a questo caso, visto che $-n^2 b_n(t) = O(1/n)$.

- Esercizio 5b). Quasi tutti i presenti che hanno affrontato questo esercizio hanno ottenuto una formula che esprime la soluzione v come una serie di funzioni regolari v_n, e hanno quindi dovuto dimostrare che v ha la regolarità necessaria e risolve effettivamente l'equazione alle derivate parziali in oggetto. Diversi dei presenti hanno cercato di dimostrare tale regolarità a partire dalla convergenza *puntuale* della serie delle derivate parziali rilevanti (vale a dire $(v_n)_t$, $(v_n)_x$, $(v_n)_{xx}$), oppure da una convergenza che è uniforme/totale nella variabile x, ma non in t. Come già spiegato in precedenza, questo approccio è completamente errato.

- Esercizio 6c). Per dimostrare che $\mathscr{F}$ è un sistema ortonormale completo si può anche osservare che il cambio di variabile $t = \frac{1}{2}(x+\pi)$ porta $x \in [-\pi,\pi]$ in $t \in [0,\pi]$ e trasforma (per composizione) $L^2_{\mathbb{C}}(0,\pi)$ in $L^2_{\mathbb{C}}(-\pi,\pi)$, portando la funzione $\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{2ikt}$ in $\mathscr{F}$ nella funzione $\frac{(-1)^k}{\sqrt{\pi}} e^{ikx}$. Dunque $\mathrm{Span}(\mathscr{F})$ viene portato nei polinomi trigonometrici, che com'è noto sono densi in $L^2_{\mathbb{C}}(-\pi,\pi)$; ne segue che $\mathrm{Span}(\mathscr{F})$ deve essere denso in $L^2_{\mathbb{C}}(0,\pi)$.

- Esercizio 6. Nell'affrontare i punti b) e c) molti dei presenti si sono dimenticati che le funzioni u in X devono soddisfare la condizione al bordo $u(0) = u(\pi)$. In particolare alcuni hanno detto che un sistema ortornormale di autovettori di T è dato (a meno di opportune rinormalizzazioni) dalle funzioni e^{ikt} con $k \in \mathbb{Z}$: questo è errato per due ragioni: la prima è che per k dispari queste funzioni non appartengono a X e quindi non possono essere autovettori di T, la seconda è che queste funzioni non sono a due a due ortogonali in $L^2_{\mathbb{C}}(0,\pi)$, anche se lo sono in $L^2_{\mathbb{C}}(-\pi,\pi)$.

- Esercizio 7c). Alcuni dei presenti si sono chiesti se la condizione $\hat{g}$ reale e positiva è necessaria oltre che sufficiente, concludendo erroneamente che lo è. L'errore è piuttosto nascosto, ed è legato al fatto che se u è una funzione in L^2 a valori reali allora $|\hat{u}|$ è una funzione pari. In particolare, contrariamente a quanto sostenuto da costoro, dato un insieme E di misura finita non è sempre possibile trovare una funzione reale u tale che $|\hat{u}| = 1_E$.

1. Ricordo i seguenti fatti noti a proposito della Trasformata di Fourier:
   - $\mathscr{F}\big(\frac{1}{1+x^2}\big) = \pi\, e^{-|y|}$;
   - $\mathscr{F}(e^{iax}v) = \hat{v}(y-a)$ per ogni funzione $v \in L^1(\mathbb{R})$ e ogni $a \in \mathbb{R}$.

   Utilizzando queste formule e l'identità $\sin(2x) = \frac{1}{2i}(e^{2ix} - e^{-2ix})$ ottengo
$$\begin{aligned}\hat{u} &= \frac{1}{2i}\mathscr{F}\bigg(\frac{e^{2ix}}{1+x^2}\bigg) - \frac{1}{2i}\mathscr{F}\bigg(\frac{e^{-2ix}}{1+x^2}\bigg)\\ &= \frac{\pi}{2i}e^{-|y-2|} - \frac{\pi}{2i}e^{-|y+2|} = \frac{\pi i}{2}\big(e^{-|y+2|} - e^{-|y-2|}\big)\,.\end{aligned}$$

2. Sia X il sottospazio di $L^2(-\pi,\pi)$ formato dai polinomi p di grado minore o uguale a due, vale a dire il sottospazio generato dalle funzioni 1, x e x^2. Dalla teoria so che l'elemento di X più vicino ad una data funzione u è la sua proiezione ortogonale su X, indicata con $P_X u$. Per determinare $P_X u$ uso la caratterizzazione $u - P_X u \perp X$, vale a dire $\langle u - P_X u\,;\, x^i\rangle = 0$ per $i = 0, 1, 2$. In particolare per $u(x) := \sin x$ scrivo $P_X u = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ e determino i coefficienti a_i risolvendo il seguente sistema di equazioni lineari:
$$0 = \langle u - P_X u\,;\, x^i\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \big(\sin x - a_0 - a_1 x - a_2 x^2\big) x^i\, dx \quad \text{per } i = 0, 1, 2,$$
   vale a dire
$$\begin{cases} 0 = 2\pi a_0 + \frac{2\pi^3}{3} a_2 \\ 0 = 2\pi + \frac{2\pi^3}{3} a_1 \\ 0 = \frac{2\pi^3}{3} a_0 + \frac{2\pi^5}{5} a_2 \end{cases},$$
   da cui ottengo infine $a_0 = a_2 = 0$ e $a_1 = 3/\pi^2$. Dunque il polinomio cercato è
$$p(x) = \frac{3x}{\pi^2}\,.$$

3. Calcolo la norma $\|f\|_p$ usando le coordinate polari. Osservo per cominciare che le coordinate polari dei punti sulla parabola di equazione $y = x^2$, sono date da
$$\rho = x\sqrt{1+x^2}\,, \quad \theta = \arctan x\,,$$
   vale a dire, $\rho = r(\theta)$ dove
$$r(\theta) := \tan\theta\,\sqrt{1+\tan^2\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\,,$$
   e quindi Ω consiste dei punti (x, y) le cui coordinate polari soddisfano $0 < \theta < \pi/2$ e $\rho > r(\theta)$. Pertanto
$$\|f\|_p^p = \int_\Omega \frac{1}{(x^2+y^2)^{p/2}}\, dx\, dy = \int_0^{\pi/2} \bigg(\int_{r(\theta)}^{+\infty} \frac{1}{\rho^{p-1}} d\rho\bigg)\, d\theta\,.$$
   Osservo ora che per $p \leq 2$ l'integrale più interno nell'ultimo termine di questa catena di uguaglianze vale $+\infty$ per ogni θ, e quindi $\|f\|_p = +\infty$. Se invece $p > 2$ allora
$$\|f\|_p^p = \frac{1}{p-2}\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\big(r(\theta)\big)^{p-2}}\,.$$
   Siccome questo integrale è improprio solo in 0 e $r(\theta) \sim \theta$ per $\theta \to 0$, $\|f\|_p^p$ si comporta come l'integrale improprio
$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\theta^{p-2}}\,,$$
   che è finito se e solo se $p < 3$.
   Riassumendo, $f \in L^p(\Omega)$ se e solo se $2 < p < 3$.

4. Per ogni $i = 1, \dots, d$ ho
$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg(\sum_{j=1}^d x_j^2\bigg)^{a/2} = a x_i \bigg(\sum_{j=1}^d x_j^2\bigg)^{a/2-1}\,,$$

quindi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = a\Big(\sum_{j=1}^d x_j^2\Big)^{a/2-1} + a(a-2)x_i^2\Big(\sum_{j=1}^d x_j^2\Big)^{a/2-2} = a|x|^{a-4}\big(|x|^2+(a-2)x_i^2\big)\,,$$

e infine

$$\Delta f = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = a|x|^{a-4}\big(d|x|^2+(a-2)|x|^2\big) = a(d+a-2)\,|x|^{a-2}\,.$$

Dunque f è armonica per $a = d-2$.

5. Ricordo il seguente fatto noto sulla Trasformata di Fourier: se $u:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ è una funzione in L^1 tale che $xu\in L^1$, allora $\hat u$ è una funzione di classe C^1 con derivata

$$D\hat u = \mathscr{F}(-ixu)\,.$$

Applicando induttivamente questo risultato si ottiene che se $x^k u \in L^1$ per ogni k allora $\hat u$ è di classe C^∞ e

$$D^k\hat u = \mathscr{F}\big((-ix)^k u\big) \quad \text{per ogni } k.$$

In particolare

$$\big[D^k\hat u\big](0) = \int_{\mathbb{R}} (-ix)^k u(x)\,dx\,,$$

e quindi la serie di Taylor di u in 0 è

$$\sum_{k=0}^\infty a_k x^k \quad \text{con} \quad a_k := \frac{1}{k!}\int_{\mathbb{R}} (-ix)^k u(x)\,dx\,.$$

6. La risoluzione segue lo schema standard e quindi tengo i commenti al minimo.

a) Considero una soluzione u del problema (P) su $[0,T)\times[0,\pi]$ e come al solito indico con $b_n(t)$ i coefficienti della rappresentazione della funzione $u(t,\cdot)$ in serie di seni, vale a dire

$$b_n(t) := \frac{2}{\pi}\int_0^\pi u(t,x)\,\sin(nx)\,dx$$

per ogni $n=1,2,\dots$ e ogni $t\in[0,T)$. Osservo quindi che per $t>0$

$$\begin{aligned} b_n'(t) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi u_t(t,x)\,\sin(nx)\,dx \\ &= \frac{8t^3}{\pi}\int_0^\pi u_{xx}(t,x)\,\sin(nx)\,dx \\ &= -\frac{8t^3n^2}{\pi}\int_0^\pi u(t,x)\,\sin(nx)\,dx = -4t^3n^2\,b_n(t)\,. \end{aligned}$$

(Nel primo passaggi ho usato il teorema di derivazione sotto il segno di integrale e il fatto che u è di classe C^1 in t su $(0,T)\times[0,\pi]$, nel secondo ho usato che u soddisfa l'equazione $u_t = 4t^3u_{xx}$, nel terzo ho integrato per parti due volte usando la condizione al bordo $u(t,0)=u(t,\pi)=0$.)
Dunque b_n risolve (sull'intervallo $[0,T)$) il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot y = -4t^3n^2y \\ y(0) = b_n^0 \end{cases} \tag{5.1}$$

dove b_n^0 sono i coefficienti della serie in seni del dato iniziale u_0. Siccome la soluzione di questo problema di Cauchy è univocamente determinata, anche u è univocamente determinata.

b) e c) Per ogni $n=1,2,\dots$ la soluzione del problema di Cauchy (5.1) è

$$b_n(t) = b_n^0 e^{-n^2t^4}\,,$$

e quindi la soluzione di (P) dovrebbe essere data dalla formula

$$u(t,x) := \sum_{n=1}^\infty \underbrace{b_n^0\,e^{-n^2t^4}\sin(nx)}_{u_n} \tag{5.2}$$

Siccome ogni funzione u_n risolve l'equazione $u_t = 4t^3 u_{xx}$ su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e soddisfa le condizioni al bordo $u(\cdot, 0) = u(\cdot, \pi) = 0$, mi resta solo da verificare che la funzione u è ben definita e ha la dovuta regolarità, almeno sotto opportune ipotesi sul dato iniziale u_0.
In effetti dimostrerò che se

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n^0| < +\infty \tag{5.3}$$

allora la funzione u è ben definita e continua su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, e di classe C^∞ per $t \neq 0$, vale a dire sull'aperto $A := (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$. In particolare questo dimostra che (P) è risolubile sia nel passato che nel futuro, e che la soluzione è continua e di classe C^∞ per $t \neq 0$.
Per cominciare osservo che

$$\|u_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R})} = |b_n^0| \, ,$$

e dunque l'ipotesi (5.3) implica che la serie delle funzioni (continue) u_n converge totalmente su tutto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, da cui segue che u è ben definita e continua (e limitata) su tutto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
Fisso ora due interi $h, k \geq 0$ e $\delta > 0$, e pongo

$$A_\delta := \big\{(t, x) \colon \delta < |t| < 1/\delta\big\} \, .$$

Osservo quindi che per k pari vale

$$D_t^h D_x^k u_n(t, x) = b_n^0 \, P_h(n, t) \, e^{-n^2 t^4} (-n^2)^k \sin(nx)$$

dove P_h è un polinomio di grado $2h$ in n e $3h$ in t (la formula per k dispari è simile, ma con $\cos(nx)$ al posto di $\sin(nx)$). Pertanto esiste una costante $C_{\delta,h}$ tale che

$$\big\|D_t^k D_x^h u_n\big\|_{L^\infty(A_\delta)} \leq C_{\delta,h} \, n^{2h+2k} e^{-n^2 \delta^4} \, ,$$

e quindi la serie delle derivate parziali $D_t^h D_x^k u_n$ converge totalmente su A_δ. Siccome questo vale per ogni h, k, δ, la funzione u è di classe C^∞ su A_δ, e quindi anche sull'unione degli aperti A_δ, che è appunto A.

7. Dimostro prima l'enunciato sotto l'ipotesi aggiuntiva che v_n converge a v q.o. in E. La dimostrazione segue quella del teorema di convergenza dominata.
Applicando il lemma di Fatou alle funzioni $v_n + u_n$, che sono positive e convergono q.o. a $u + v$, ottengo

$$\liminf_{n\to\infty} \int_E v_n + u_n \, dx \geq \int_E v + u \, dx$$

L'ipotesi che $v_n \to v$ in $L^1(E)$ implica che gli integrali su E delle funzioni v_n sono tutti finiti e convergono all'integrale di v, che è pure finito, e quindi posso spezzare ciascuno degli integrali nella formula precedente come somma di due integrali, uno per ogni addendo della funzione integranda, e la disuguaglianza diventa

$$\lim_{n\to\infty} \int_E v_n \, dx + \liminf_{n\to\infty} \int_E u_n \, dx \geq \int_E v \, dx + \int_E u \, dx \, ,$$

da cui segue che

$$\liminf_{n\to\infty} \int_E u_n \, dx \geq \int_E u \, dx \, .$$

Applicando invece lemma di Fatou alle funzioni $v_n - u_n$ ottengo

$$\limsup_{n\to\infty} \int_E u_n \, dx \leq \int_E u \, dx \, .$$

Concludo la dimostrazione mettendo insieme le disuguaglianze nelle ultime due formule.

Dimostro ora l'enunciato senza ipotesi aggiuntive. Per farlo uso questa osservazione elementare: *data una successione di numeri reali x_n (che saranno poi gli integrali di u_n) ed un numero x tale che da ogni sottosuccessione di x_n posso estrarre una sotto-sottosuccessione che converge a x, allora tutta la successione x_n converge a x.*
Osservo quindi che data una qualunque sottosuccessione di n, posso estrarre una sotto-sottosuccessione tale che v_n converge a v q.o. (ricordo che v_n converge a v in L^1) e ho dimostrato sopra che per questa sotto-sottosuccessione gli integrali di u_n convergono all'integrale di u.

8. a) L'ipotesi su f equivale a dire che esistono M, m positivi e finiti tali che $|f(t)| \leq M|t|$ per ogni t con $|t| \geq m$. Inoltre $|f|$ è continua, ed è quindi maggiorata da una qualche costante M' sull'intervallo $[-m, m]$, e quindi

$$|f(t)| \leq M' + M|t| \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

Data allora una funzione misurabile $u : I \to \mathbb{R}$ vale che

$$|Tu(x)| \leq M' + M\,|u(x)| \quad \text{per ogni } x \in I, \tag{5.4}$$

e usando la disuguaglianza triangolare per la norma L^p,

$$\|Tu\|_p \leq \big\|M' + M|u|\big\|_p \leq \big\|M'\big\|_p + \big\|M|u|\big\|_p \leq M' + M\|u\|_p\,.$$

Pertanto $u \in L^p(I)$ implica $Tu \in L^p(I)$.

b) Detta L la costante di Lipschitz di f ho che $|f(t) - f(0)| \leq L|t|$, quindi $|f(t)| \leq |f(0)| + L|t|$, in particolare f soddisfa l'ipotesi del punto a) e dunque T porta $L^p(I)$ in sé. Presi inoltre u_1, $u_2 \in L^P(I)$ ho che

$$\begin{aligned}\big\|Tu_1 - Tu_2\big\|_p^p &= \int_I \big|f(u_1(x)) - f(u_2(x))\big|^p dx \\ &\leq \int_I L^p\big|u_1(x) - u_2(x)\big|^p dx = L^p\|u_1 - u_2\|_p^p\,,\end{aligned}$$

e dunque T è una mappa da $L^p(I)$ in sé con costante di Lipschitz minore o uguale a L.

c) Se non vale l'ipotesi al punto a) allora esiste una successione di numeri reali t_n tale che $|t_n|$ e il rapporto $|f(t_n)|/|t_n|$ convergono a $+\infty$. Passando ad un'opportuna sottosuccessione posso supporre che per ogni $n = 1, 2, \dots$ vale

$$|t_n| \geq 2^n\,, \quad |f(t_n)| \geq 2^n|t_n|\,. \tag{5.5}$$

Voglio ora usare i valori t_n per costruire una funzione $u \in L^p(I)$ tale che $Tu \notin L^p(I)$. Per farlo pongo

$$a_n := \frac{1}{2^n|t_n|^p}\,, \tag{5.6}$$

e prendo una successione di intervalli I_n che sono disgiunti, contenuti in I, e con lunghezza a_n. (Posso trovare tali intervalli a patto che la somma degli a_n sia minore della lunghezza di I, che è 1; questa condizione è verificata perché $a_n < 1/2^n$.) Pongo infine

$$u := \sum_{n=1}^{\infty} t_n 1_{I_n}\,.$$

Usando la (5.6) ottengo

$$\|u\|_p^p = \sum_{n=1}^{\infty} |t_n|^p|I_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |t_n|^p a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1\,,$$

e quindi u appartiene a $L^p(I)$. Usando la (5.5) e la (5.6) ottengo

$$\|Tu\|_p^p = \sum_{n=1}^{\infty} |f(t_n)|^p|I_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |f(t_n)|^p a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f(t_n)|^p}{2^n|t_n|^p} \geq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(p-1)} = +\infty\,,$$

e quindi Tu non appartiene a $L^p(I)$.

d) Presa una successione u_n che converge a u in $L^p(I)$, devo far vedere che Tu_n converge a Tu in $L^p(I)$. Dimostro questo fatto sotto l'ipotesi aggiuntiva che u_n converge a u q.o. in I; il caso generale lo si ottiene procedendo come nella soluzione dell'esercizio precedente.
Posto

$$w_n(x) := \big|Tu_n(x) - Tu(x)\big|^p = \big|f(u_n(x)) - f(u(x))\big|^p\,,$$

devo dimostrare che $\int_I w_n\,dx$ tende a 0.
Siccome u_n converge a u q.o. ed f è continua ho che w_n converge a 0 q.o., e per concludere uso la variante del teorema di convergenza dominata vista nell'esercizio precedente: devo quindi trovare una successione di funzioni v_n (le dominazioni) che convergono in $L^1(I)$ e

soddisfano $|w_n| \le v_n$. Osservo dunque che

$$\begin{aligned} |w_n(x)| &\le \Big(\big|f(u_n(x))\big| + \big|f(u(x))\big|\Big)^p \\ &\le \Big(2M' + M\,|u_n(x)| + M\,|u(x)|\Big)^p \\ &\le \Big(2M' + 2M\,|u(x)| + M\,|u_n(x) - u(x)|\Big)^p \\ &\le \underbrace{(6M')^p + (6M)^p|u(x)|^p + (3M)^p|u_n(x) - u(x)|^p}_{v_n(x)} . \end{aligned}$$

(Nel primo passaggio ho usato la disuguaglianza $|a-b| \le |a| + |b|$, che vale per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, nel secondo ho usato la (5.4), nel quarto la disuguaglianza $(a+b+c)^p \le 3^p(a^p + b^p + c^p)$, che vale per ogni $a, b, c \ge 0$; infine noto che le funzioni v_n convergono in $L^1(I)$ alla funzione $v(x) := (6M')^p + (6M)^p|u(x)|^p$.)

Commenti

- Esercizio 1. Qualcuno dei presenti ha calcolato direttamente la TdF di u usando il metodo dei residui, ma senza accorgersi che l'estensione olomorfa della funzione $\sin(2x)$, vale a dire

$$\sin(2z) := \frac{e^{2iz} - e^{-2iz}}{2i} ,$$

non è limitata su piano complesso $\mathbb{C}$ (e anzi non è limitata né sul semipiano inferiore né su quello superiore).

- Esercizio 3. Molti dei presenti hanno risolto questo esercizio in modo completamente diverso da quello illustrato sopra. Per esempio, le stime

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + x^4}} \le f(x,y) \le \frac{1}{x}$$

permettono facilmente dimostrare che f è in $L^p(\Omega \cap B)$, dove B è il disco di centro $(0,0)$ e raggio 1, se e solo se $p < 3$. Usando invece le coordinate polari e le inclusioni

$$\big\{(x,y)\colon \rho \ge 1\,,\ 0 < \theta < \pi/4\big\} \subset \Omega \setminus B \subset \big\{(x,y)\colon \rho \ge 1\,,\ 0 < \theta < \pi/2\big\}$$

si dimostra facilmente che $f \in L^p(\Omega \setminus B)$ se e solo se $p > 2$.

- Esercizio 4. Con mia grande sorpresa, due terzi dei dei presenti non ha fatto questo esercizio oppure ha sbagliato il calcolo (del tutto elementare) delle derivate parziali della funzione f.

- Esercizio 6. L'ipotesi (5.3) è soddisfatta se u_0 è una funzione di classe C^1 su $[0,\pi]$. Questa affermazione può essere dimostrata in modo simile all'analogo enunciato per la serie di Fourier. In alternativa, ci si può ricondurre all'enunciato per la serie di Fourier estendendo f a tutto $[-\pi,\pi]$ per disparità (cioè ponendo $f(x) := -f(-x)$ per $x \in [-\pi, 0)$), e poi a tutto $\mathbb{R}$ per periodicità. La funzione così estesa è di classe C^1 e quindi i suoi coefficienti di Fourier c_n soddisfano $\sum_n |c_n| < +\infty$, e un semplice calcolo mostra che $b^0_n = -2ic_n$.

- Esercizio 6c). La risolubilità del problema (P) nel passato equivale a quella nel futuro: si vede infatti che se $u(t,x)$ risolve l'equazione $u_t = 4t^3 u_{xx}$ allora $u(-t,x)$ risolve la stessa equazione (e chiaramente soddisfa le stesse condizioni iniziali e le stesse condizioni al bordo). Pertanto, avendo dimostrato che (P) è risolubile su $[0,+\infty) \times [0,\pi]$ si ottiene automaticamente che è risolubile anche su $(-\infty, 0] \times [0,\pi]$, e che la soluzione è una funzione pari nella variabile t (per via dell'unicità).

- Esercizio 6. Nel dimostrare che la soluzione u data dalla formula (5.2) è di classe C^∞ per $t \ne 0$, la quasi totalità dei presenti ha usato formule completamente sbagliate per le derivate parziali della funzione $e^{-n^2t^4}\sin(nx)$, ed in particolare per le derivate parziali nella variabile t, per esempio $D^h_t\big(e^{-n^2t^4}\sin(nx)\big) = (-4n^2t^3)^h e^{-n^2t^4}\sin(nx)$.

- Esercizio 7. Molti dei presenti hanno risolto l'esercizio assumendo (senza dichiararlo esplicitamente!) che le funzioni v_n convergono a v q.o., e non solo in L^1. Altri hanno invece ottenuto la convergenza puntuale che gli serviva passando ad una sottosuccessione. In entrambi casi la dimostrazione è stata considerata incompleta, anche se di poco.

- Esercizio 7. Diversi dei presenti hanno utilizzato (implicitamente) la seguente proprietà del liminf:
$$\liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n \,,$$
che però è falsa. Quella che vale sempre è la disuguaglianza $\geq$ (che non serve nella dimostrazione), mentre l'uguaglianza vale se uno dei due liminf è un limite (ed è esattamente questo che si usa).

- Esercizio 8a). Quasi nessuno dei presenti ha scritto che la condizione $f(t) = O(|t|)$ per $t \to \pm\infty$ significa che esistono m, M tali che $|f(t)| \leq M|t|$ se $|t| \geq m$. Alcuni hanno scritto che esiste M tale che $|f(t)| \leq M|t|$ per ogni t (falso); altri hanno scritto che esistono i limiti per $t \to \pm\infty$ del rapporto $|f(t)|/|t|$.

- Esercizio 8b). Quasi nessuno dei presenti ha notato esplicitamente che se è f Lipschitziana allora $f(t) = O(|t|)$ per $t \to \pm\infty$.

1. Indicando come al solito con $c_n(f)$ i coefficienti di Fourier di una funzione f, ottengo

$$\begin{aligned} c_n(f') &:= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\, e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\Big| f(x)\, e^{-inx}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,(-in) e^{-inx} dx \\ &= \frac{(-1)^n}{2\pi}\big(f(\pi)-f(-\pi)\big) + \frac{in}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx} dx = \frac{(-1)^n}{2\pi}\, m(f) + in\, c_n(f)\,. \end{aligned}$$

(Nel secondo passaggio ho integrato per parti.)

2. Siccome u è una funzione reale e pari, la TdF $\hat u$ è pure reale e pari. Calcolo $\hat u(y)$ per $y \le 0$ usando il metodo dei residui; indico quindi con f la funzione meromorfa data da

$$f(z) := \frac{z^2 e^{-iyz}}{z^4+4}\,,$$

e per ogni $r>0$ indico con $\gamma_{1,r} : [-r,r] \to \mathbb{C}$ e $\gamma_{2,r} : [0,\pi] \to \mathbb{C}$ i cammini dati da

$$\gamma_{1,r}(t) := t\,, \quad \gamma_{2,r}(t) := re^{it}\,;$$

infine γ_r è il cammino ottenuto giungendo $\gamma_{1,r}$ e $\gamma_{2,r}$. In particolare γ_r parametrizza *in senso antiorario* il bordo del semidisco D_r ottenuto intersecando il semipiano $\{z\colon \operatorname{Im}(z) > 0\}$ e il disco con centro 0 e raggio r.

Osservo ora che per ogni z nel semipiano superiore si ha $|e^{-iyz}| = e^{y\,\operatorname{Im}(z)} \le 1$, dunque

$$|f(z)| \le \frac{|z|^2}{|z^4+4|} = O(1/|z|^2)\,,$$

da cui segue che

$$\left|\int_{\gamma_{2,r}} f(z)\, dz\right| \le \pi r\, O(1/r^2) =)(1/r)$$

ed in particolare questo integrale tende a 0 per $r \to +\infty$. Pertanto

$$\begin{aligned} \hat u(y) &:= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+4}\, e^{-iyx}\, dx \\ &= \lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_{1,r}} f(z)\, dz \\ &= \lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_r} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{i=1,2} \operatorname{Res}(f, z_i)\,, \end{aligned} \tag{6.1}$$

dove nell'ultimo passaggio ho applicato il teorema dei residui, e in particolare $z_{1,2}$ sono i poli di f nel semipiano $\{z\colon \operatorname{Im}(z) > 0\}$, vale a dire

$$z_{1,2} = \pm 1 + i\,. \tag{6.2}$$

Osservo ora che f si scrive come rapporto delle funzioni intere $g(z) := z^2 e^{-iyz}$ e $h(z) := z^4+4$, e siccome h ha uno zero semplice in $z_{1,2}$, ho che

$$\operatorname{Res}(f, z_i) = \frac{g(z_i)}{h'(z_i)} = \frac{e^{-iyz_i}}{4z_i} = \frac{\overline{z_i}\, e^{-iyz_i}}{4|z_i|^2} = \frac{\overline{z_i}\, e^{-iyz_i}}{8}$$

Mettendo insieme questa formula e le (6.1), (6.2) ottengo infine che per ogni $y \le 0$ vale

$$\hat u(y) = \frac{\pi i}{4}\Big((1-i)\, e^{(1-i)y} - (1+i)\, e^{(1+i)y}\Big) = \frac{\pi}{2} e^{y}\,(\cos y + \sin y)\,,$$

e quindi, ricordando che $\hat u$ è una funzione pari,

$$\hat u(y) = \frac{\pi}{2} e^{-|y|}\,(\cos y - \sin(|y|))\,.$$

3. Come al solito, comincio scrivendo la funzione $u(e^{it}) = t^2$ in serie di Fourier (complessa). Il calcolo dei coefficienti di Fourier mi dà

$$c_n = \begin{cases} \pi^2/3 & \text{per } n = 0, \\ 2(-1)^n/n^2 & \text{per } n \ne 0. \end{cases}$$

Siccome $\sum |c_n| < +\infty$

$$u(e^{it}) = \frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}(e^{int} + e^{-int})$$

e la serie converge totalmente, e abbiamo visto a lezione che l'estensione armonica di u a tutto il disco è

$$u(z) = \frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}(z^n + \bar{z}^n) = \frac{\pi^2}{3} + 4\,\mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} z^n\right).$$

4. Presi $u, v \in X$ una semplice integrazione per parti e il fatto che $a(1) = 0$ danno

$$\langle Tu\,;\, v\rangle = \int_0^1 (a\dot{u})' v\,dx = -a(0)\,\dot{u}(0)\,v(0) - \int_0^1 a\dot{u}\dot{v}\,dx\,, \tag{6.3}$$

da cui segue che

$$\langle Tu\,;\, v\rangle - \langle u\,;\, Tv\rangle = a(0)\big(u(0)\,\dot{v}(0) - \dot{u}(0)\,v(0)\big)\,. \tag{6.4}$$

a) *T è autoaggiunto se e solo se $a(0) = 0$.* L'implicazione "se" segue immediatamente dalla formula (7.6). Per dimostrare l'implicazione "solo se" mi basta trovare due funzioni $u, v \in X$ tali che

$$u(0)\,\dot{v}(0) - \dot{u}(0)\,v(0) \neq 0$$

(per esempio $u(x) = 1 - x$ e $v(x) = \sin(\pi x)$) e a questo punto l'ipotesi che T sia autoaggiunto più la formula (7.6) implicano che $a(0) = 0$.

b) *T è semi-definito positivo se e solo se $a(x) \leq 0$ per ogni $x \in I$.* Osservo per cominciare che essendo $a(0) = 0$ la formula (7.5) implica

$$\langle Tu\,;\, u\rangle = \int_0^1 (-a)\,\dot{u}^2\,dx\,. \tag{6.5}$$

Da questa identità segue immediatamente l'implicazione "se" dell'enunciato. Dimostro l'implicazione "solo se" per assurdo: se esistesse $\bar{x} \in I$ tale che $a(\bar{x}) > 0$ allora, essendo a una funzione continua, esisterebbe anche un intervallo J contenuto all'interno di I tale che $a > 0$ su J, e quindi, presa una funzione $u \in X$ non identicamente nulla con supporto contenuto in J, la formula (6.5) implicherebbe $\langle Tu\,;\, u\rangle < 0$, in contraddizione con l'ipotesi che l'operatore T sia semi-definito positivo.

b) *T è definito positivo se e solo l'insieme aperto $A := \{x\colon a(x) < 0\}$ è denso in I.*[1] Comincio con la dimostrazione dell'implicazione "se": suppongo quindi che A sia denso e faccio vedere che data $u \in X$ tale che $\langle Tu\,;\, u\rangle = 0$ allora $u = 0$ su I. Siccome $g := a\,\dot{u}^2$ è una funzione negativa o nulla, la formula (6.5) implica che $g = 0$ quasi ovunque in I, e quindi ovunque perché g è continua. Ma allora $\dot{u} = 0$ su A, da cui segue che che $\dot{u} = 0$ su tutto I perché A è denso in I e $\dot{u}$ è continua. Dunque u è costante, e il fatto che $u(1) = 0$ implica che u è nulla.
Dimostro l'implicazione "solo se" per assurdo, supponendo che A non sia denso in I. Se così fosse dovrebbe esistere un intervallo J contenuto in I tale che $a \geq 0$ su J, e presa quindi una funzione $u \in X$ non identicamente nulla con supporto contenuto in J, la formula (6.5) implicherebbe $\langle Tu\,;\, u\rangle \leq 0$, in contraddizione con l'ipotesi che T sia definita positiva.

5. Per ogni $m = 1, 2, \dots$ pongo

$$f_m := f\,1_{E_1 \cup \dots \cup E_m}\,. \tag{6.6}$$

Allora le funzioni f_m convergono puntualmente a f su E e

$$\int_E f_m\,dx = \sum_{n=1}^{m} \int_{E_m} f\,dx\,,$$

per cui la tesi diventa

$$\lim_{m\to\infty} \int_E f_m\,dx = \int_E f\,dx\,. \tag{6.7}$$

a) Se la funzione f è positiva, allora, la funzioni f_m sono positive e convergono a f crescendo, e quindi la (7.7) segue dal teorema di convergenza dominata.

[1] Noto che l'ipotesi che A sia denso e la continuità di a implicano che $a \leq 0$ ovunque.

b) Si tratta di un caso particolare del punto c).

c) Indichiamo con $f^\pm$ le parti positive e negative di f, e definiamo $f^\pm_m$ come in (6.6), con $f^\pm$ al posto di f. Per via del punto a) abbiamo che

$$\lim_{m\to\infty}\int_E f^+_m\,dx = \int_E f^+\,dx\,, \quad \lim_{m\to\infty}\int_E f^-_m\,dx = \int_E f^-\,dx\,. \tag{6.8}$$

Siccome f è integrabile su E, almeno uno dei due limiti è finito, e quindi posso sommare i due limiti e scambiare la somma con il limite ottenendo la (7.7).

6. Al solito, per ogni t indico con $c_n(t)$ i coefficienti di Fourier (complessi) della soluzione $u(t,\cdot)$ e ottengo che le funzioni c_n devono soddisfare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \ddot y + (n^2-3)y = 0 \\ y(0) = c^0_n\,,\ \dot y(0) = 0 \end{cases}$$

dove c^0_n sono i coefficienti di Fourier del dato iniziale u_0. Un semplice calcolo dà

$$c_n(t) = \begin{cases} c^0_n \cosh\big(\sqrt{3-n^2}\,t\big) & \text{per } n = 0,\pm1, \\ c^0_n \cos\big(\sqrt{n^2-3}\,t\big) & \text{per } n \neq 0,\pm1, \end{cases}$$

e quindi l'eventuale soluzione del problema $(*)$ è data dalla serie

$$u(t,x) = \sum_{n=0,\pm1} c^0_n \cosh\big(\sqrt{3-n^2}\,t\big)\,e^{inx} + \sum_{n\neq0,\pm1} \underbrace{c^0_n \cos\big(\sqrt{n^2-3}\,t\big)\,e^{inx}}_{u_n}\,. \tag{6.9}$$

a) Se $u_0(x) = \cos x = \frac12(e^{ix}+e^{-ix})$ allora $c^0_{\pm1} = \frac12$ e $c^0_n = 0$ per ogni $n\neq\pm1$, e quindi la formula (7.8) si riduce a

$$u(t,x) = \cosh\big(\sqrt{2}\,t\big)\,\cos(x)\,,$$

e chiaramente questa funzione risolve il problema $(*)$.

b) Se u_0 è una funzione 2π-periodica di classe C^3 allora i suoi coefficienti di Fourier soddisfano

$$\sum_n n^2|c^0_n| < +\infty\,. \tag{6.10}$$

Usando questa stima faccio vedere che la formula (7.8) definisce una funzione u di classe C^2 su $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ che risolve $(*)$. Divido la dimostrazione in più passi.

Passo 1. La prima somma in (7.8) è finita, e chiaramente definisce una funzione di classe C^∞; per far vedere che u è una funzione di classe C^2 mi basta far vedere che la seconda somma in (7.8), quella infinita, converge totalmente su $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, e convergono totalmente anche le serie delle derivate di ordine 1 o 2. In effetti un semplice calcolo mostra che per ogni n

$$\|u_n\|_\infty = \sup_{t,x}\big|c^0_n\cos\big(\sqrt{n^2-3}\,t\big)\,e^{inx}\big| = |c^0_n|\,,$$

e anzi per ogni coppia di interi $h,k = 0,1,\dots$ si ha

$$\|D^h_t D^k_x u_n\|_\infty = (n^2-3)^{h/2}|n|^k|c^0_n| \le |n|^{k+h}|c^0_n|\,,$$

e quindi la tesi segue dalla stima (6.10).

Passo 2. La funzione u soddisfa le condizioni al bordo in $(*)$ perché è 2π-periodica in x, e soddisfa le condizioni iniziali in $(*)$ perchè per $t=0$ il lato destro della (7.8) si riduce alla serie di Fourier di u_0, mentre le derivate in t di tutti gli addendi sono identicamente nulle.

Passo 3. La funzione u soddisfa l'equazione differenziale in $(*)$ perchè la soddisfano tutti gli addendi che appaiono nel lato destro della (7.8), e per via della convergenza dimostrata al passo 1 posso scambiare derivate e integrali.

Per concludere l'esercizio osservo che la seconda somma in (7.8) definisce una funzione limitata (Passo 1) e quindi la soluzione u è limitata se e solo se la prima somma in (7.8) è limitata. Chiaramente questo succede se

$$c^0_n = 0 \quad \text{per } n = 0,\pm1, \tag{6.11}$$

e questa condizione è anche necessaria perché le funzioni $\cosh\big(\sqrt3\,t\big)$ e $\cosh\big(\sqrt2\,t\big)$ tendono a $+\infty$ per $t\to\pm\infty$, e la prima è di un ordine di infinito superiore alla seconda.

7. Utilizzando il fatto che $\mathscr{F}\big(1/(1+x^2)\big) = \pi e^{-|y|}$ e che $\mathscr{F}(u*u) = \hat{u}^2$, l'equazione
$$u*u = \frac{1}{1+x^2}\,. \tag{6.12}$$
può essere riscritta come
$$\hat{u}^2 = \pi e^{-|y|}\,, \tag{6.13}$$
nel senso che ogni funzione $u \in L^1(\mathbb{R})$ che soddisfa la (7.9) deve necessariamente soddisfare la (6.13) e per l'iniettività della TdF vale anche il viceversa.

a) In particolare u risolve (6.13) se
$$\hat{u} = \sqrt{\pi} e^{-|y|/2}\,,$$
e siccome
$$\pi e^{-|y/2|} = \mathscr{F}\Big(\sigma_{1/2}\Big(\frac{1}{1+x^2}\Big)\Big) = \mathscr{F}\Big(\frac{2}{1+4x^2}\Big)\,,$$
una soluzione di (7.9) è data da
$$u(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{1+4x^2}\,.$$
b) Detta u la soluzione trovata al punto a), si vede subito che anche $-u$ è una soluzione di (7.9). Voglio far vedere che non ci sono altre soluzioni: risolvendo l'equazione (6.13) per ogni $y \in \mathbb{R}$ ottengo
$$\hat{u}(y) = \sqrt{\pi} e^{-|y|/2} g(y)\,, \tag{6.14}$$
dove g è una qualunque funzione (misurabile) su $\mathbb{R}$ con valori ± 1. Ma se u appartiene a $L^1(\mathbb{R})$ allora $\hat{u}$ è una funzione continua, e quindi anche
$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{|y|/2}\,\hat{u}(y)$$
è una funzione continua, e pertanto deve essere la funzione costante 1 oppure la funzione costante -1. Quindi l'equazione (7.9) ammette al più due soluzioni.

c) Se $u \in L^2(\mathbb{R})$ allora la funzione $\hat{u}$ non è necessariamente continua, e quindi l'argomento usato al punto b) non è più valido. Anzi, siccome la funzione $e^{-|y|/2}$ appartiene a $L^2(\mathbb{R})$ e la TdF è una bigezione da $L^2(\mathbb{R})$ in sé, ogni funzione della forma
$$u(x) = \mathscr{F}^{-1}\big(\sqrt{\pi} e^{-|y|/2} g(y)\big) \tag{6.15}$$
con g funzione (misurabile) arbitraria a valori ± 1 appartiene a $L^2(\mathbb{R})$ e risolve l'equazione (7.9), Siccome u non appartiene a $L^1(\mathbb{R})$, quest'ultima affermazione va verificata: in effetti è ovvio che u risolve la (7.2), e applicando ad entrambi i termini di questa equazione l'anti-trasformata $\mathscr{F}^*$ ottengo la (7.1).[2]
L'equazione (7.9) ha dunque infinite soluzioni in $L^2(\mathbb{R})$.

8. a) Usando le coordinate sferiche ottengo
$$\|f\|_{L^p(B)} = \int_B \frac{dx}{|x|^p} = 4\pi \int_0^1 \frac{d\rho}{\rho^{d-2}}$$
e dunque f appartiene a $L^p(B)$ se e solo se $p < 3$.
Analogamente si dimostra che f appartiene a $L^p(\mathbb{R}^3 \setminus B)$ se e solo se $p > 3$ (incluso $p = +\infty$).
In particolare f non appartiene a $L^p(\mathbb{R}^3)$ per alcun p.

b) Scompongo f come $f = g_1 + g_2$ con $g_1 := f \cdot 1_B$ e $g_2 := f \cdot 1_{\mathbb{R}^3\setminus B}$. Poiché u ed g_1 appartengono a $L^1(\mathbb{R}^3)$ il prodotto di convoluzione $u * g_1(x)$ è ben definito per q.o. $x \in \mathbb{R}^3$, nel senso che l'integrale che lo definisce esiste ed è finito. Poiché inoltre g_2 appartiene a $L^\infty(\mathbb{R}3)$, il prodotto $u * g_2(x)$ è ben definito per ogni $x \in \mathbb{R}^3$. Da queste due affermazioni segue che $u * f(x)$ è ben definito per q.o. $x \in \mathbb{R}^3$ e vale $u * g_1(x) + u * g_2(x)$.

c) Indico con A^c il complementare di A in $\mathbb{R}^3$, e per ogni $r > 0$ indico con A_r l'insieme dei punti $x \in A$ tali che $\mathrm{dist}(x, A^c) > r$, e pongo
$$f_r := f \cdot 1_{\mathbb{R}^3\setminus B(0,r)}\,.$$

[2] In questo passaggio ho usato il seguente fatto, visto a lezione per $\mathscr{F}$: date $u_1, u_2 \in L^2(\mathbb{R})$ allora il prodotto $u_1 u_2$ appartiene a $L^1(\mathbb{R})$ e $\mathscr{F}^*(u_1 u_2) = \frac{1}{2\pi}\mathscr{F}^*(u_1) * \mathscr{F}^*(u_2)$.

Osservo ora che per ogni $x \in A_r$ vale che

$$u * f(x) = \int_{A^c} u(y)\, f(x-y)\, dy = \int_{A^c} u(y)\, f_r(x-y)\, dy = u * f_r(x)\,. \tag{6.16}$$

(Nel primo e terzo passaggio ho usato che $u(y) = 0$ per q.o. $y \in A$, nel secondo passaggio ho usato che per ogni $x \in A_r$ e $y \in A^c$ si ha $|x-y| > r$ e quindi $f(x-y) = f_r(x-y)$.)
Siccome la funzione f_r appartiene a $L^\infty(\mathbb{R}^3)$, il prodotto $u * f_r(x)$ è ben definito e continuo per ogni $x \in \mathbb{R}^3$, e di conseguenza la (6.16) implica che anche $u * f(x)$ è ben definito e continuo per ogni x in A_r. Per concludere basta osservare che l'unione di tutti gli aperti A_r con $r > 0$ è proprio A.

c) Dimostro che $u * f$ la proprietà della media su A. Prendo una palla chiusa $B' = B(x_0, r)$ contenuta in A ed osservo che

$$\begin{aligned} \fint_{B'} u * f(x)\, dx &= \fint_{B'} \bigg(\int_{A^c} u(y)\, f(x-y)\, dy \bigg) dx \\ &= \int_{A^c} u(y) \bigg(\fint_{B'} f(x-y)\, dx \bigg) dy = \int_{A^c} u(y) \bigg(\fint_{B''_y} f(z)\, dz \bigg) dy \end{aligned} \tag{6.17}$$

dove $B''_y := B(x_0 - y, r)$. (Nel secondo passaggio ho usato il teorema di Fubini, che giustifico dopo, e nel terzo il cambio di variabile $z = x - y$).
Osservo ora che per ogni $y \in A^c$ si ha $|x_0 - y| > r$, quindi la palla B''_y non contiene l'origine, e siccome la funzione f è armonica su $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, ha la proprietà della media su B''_y, cioè

$$\fint_{B''_y} f(z)\, dz = f(x_0 - y)\,.$$

Inserendo questa uguaglianza nella (6.17) ottengo infine

$$\fint_{B'} u * f(x)\, dx = \int_{A^c} u(y)\, f(x_0 - y)\, dy = u * f(x_0)\,,$$

e la proprietà della media è dimostrata.
Per giustificare l'uso del teorema di Fubini in (6.17), prendo $\rho > 0$ tale che $\operatorname{dist}(x_0, A^c) = r + \rho$, e osservo che per ogni $x \in B' = B(x_0, r)$ si ha $\operatorname{dist}(x, A^c) \geq \rho$, e quindi per ogni $y \in A^c$ si ha $|x - y| \geq \rho$, che a sua volta implica $f(x-y) \leq 1/\rho$. Pertanto

$$\int_{A^c} \big|u(y)\big| \bigg(\fint_{B'} f(x-y)\, dx \bigg) dy \leq \frac{1}{\rho} \int_{A^c} \big|u(y)\big|\, dy \leq \frac{\|u\|_1}{\rho} < +\infty\,.$$

COMMENTI

- Esercizio 2. Nella soluzione sopra $\hat{u}(y)$ è stata calcolata solo per $y \leq 0$, usando poi che $\hat{u}$ è funzione pari per ottenere la formula per $y > 0$. Tuttavia è possibile calcolare direttamente $\hat{u}(y)$ anche per $y > 0$: in questo caso il cammino γ_r a cui si applica il teorema dei residui è quello che parametrizza *in senso orario* il bordo del semidisco D_r dato dall'intersezione del semipiano $\{z\colon \operatorname{Im}(z) < 0\}$ con il disco di centro 0 e raggio r. Così facendo si ottiene:

  $$\hat{u}(y) = -2\pi i \sum_{i=3,4} \operatorname{Res}(f, z_i)\,,$$

  dove $z_{3,4}$ sono i poli di f nel semipiano $\{z\colon \operatorname{Im}(z) < 0\}$, vale a dire $z_{3,4} = \pm 1 - i$.
  Molti dei presenti hanno scritto la formula con il segno opposto (forse dimenticando che in questo caso γ_r percorre D_r in senso orario e non antiorario). Questo errore poteva essere rilevato, perché dà luogo a una funzione $\hat{u}$ discontinua in 0 (mentre le TdF di funzioni : L^1 sono sempre continue).

- Esercizio 2. Una soluzione alternativa parte dall'identità

  $$\frac{4x}{x^4+4} = \frac{1}{x^2-2x+2} - \frac{1}{x^2-2x+2} = \frac{1}{(x-1)^2+1} - \frac{1}{(x+1)^2+1}\,.$$

Usando infatti le formule $\mathscr{F}(v(x-h)) = e^{ihy}\,\hat{v}(y)$ e

$$\mathscr{F}\Big(\frac{1}{x^2+1}\Big) = \pi e^{-|y|}$$

ottengo la TdF di $x/(x^4+4)$. Usando poi la formula $\mathscr{F}(-ix\,v(x)) = \hat{v}'(y)$ ottengo infine la TdF di $x^2/(x^4+4)$.

- Esercizio 4. Molti dei presenti hanno scritto le caratterizzazioni richieste ai punti a) e b) correttamente, ma stranamente hanno fatto vedere solo alcune delle implicazioni necessarie a dimostrare queste caratterizzazioni.

- Esercizio 6b). Diversi dei presenti hanno omesso di dimostrato solo che la seconda somma nella formula (7.8) converge totalmente, ma non che convergono le serie delle derivate. Questo basta a dimostrare che un'eventuale soluzione u del problema $(*)$ è limitata se e solo se vale la (6.11), ma non basta a dimostrare che u esiste per tutti i tempi (cosa che è necessaria per risolvere completamente l'esercizio).

- Esercizio 7b). Diversi dei presenti hanno scritto che l'equazione (7.9) ha un'unica soluzione, dimenticando per qualche fatale istante che ogni numero diverso da zero ammette due radici quadrate. . .

1. a) Si tratta di un calcolo diretto:
$$\hat{v}(y) := \int_{-\infty}^{\infty} u(-x)\, e^{-ixy} dx = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, e^{-it(-y)} dt = \hat{u}(-y)$$
(nel secondo passaggio ho usato il cambio di variabile $t = -x$).
b) $\hat{u}$ dispari significa $\hat{u}(y) = -\hat{u}(-y)$ per ogni $y \in \mathbb{R}$; grazie al punto a) posso riscrivere questa identità come $\hat{u} = -\hat{v}$, e per l'iniettività della TdF questa equivale a dire che $u = -v$ q.o., ovvero che u coincide (a meno di un insieme di misura nulla) con una funzione dispari.
Il fatto che $\hat{u}$ ha valori reali significa che per ogni $y \in \mathbb{R}$ vale
$$\hat{u}(y) = \overline{\hat{u}(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{u(x)}\, e^{ixy} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{u(-t)}\, e^{-ity} dt = \widehat{\overline{v}}(y)$$
(nel terzo passaggio ho usato il cambio di variabile $t = -x$). Per l'iniettività della TdF questa identità equivale a dire che $u = \overline{v}$ q.o.
Se inoltre u è dispari questa affermazione equivale a dire che $u = -\overline{u}$ q.o., ovvero che u assume q.o. valori immaginari puri.
Mettendo insieme quanto fatto ottengo che $\hat{u}$ è dispari e reale se e solo se u coincide a meno di un insieme di misura nulla con una funzione dispari e puramente immaginaria.

2. a) Utilizzando l'identità $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$ ottengo
$$u_0(x) := \frac{i}{2}(e^{ix} - e^{-ix})^3 = \frac{i}{2}e^{3ix} - \frac{3i}{2}e^{ix} + \frac{3i}{2}e^{-ix} - \frac{i}{2}e^{-3ix}\,. \tag{7.1}$$
Siccome questa identità vale in ogni punto, vale anche in $L^2(-\pi,\pi)$ e quindi la somma a destra dell'uguale è la serie di Fourier (complessa) di u_0; in altre parole i coefficienti di Fourier di u_0 sono dati da
$$c_n = 0 \text{ per } n \neq \pm 1, \pm 3\,, \quad c_{\pm 1} = \mp\frac{3i}{2}\,, \quad c_{\pm 3} = \pm\frac{i}{2}\,.$$
b) Ripartendo dalla formula (7.1) ottengo infine
$$u_0(x) := 3\sin x - \sin(3x)\,. \tag{7.2}$$

3. a) Per far vedere che $u * v(x)$ è ben definito (e finito) per ogni $x \in \mathbb{R}$ dimostro che la funzione $u(x - \cdot)\, v(\cdot)$ appartiene a $L^1(\mathbb{R})$. In effetti, preso $m > 0$ tale che il supporto di v è contenuto nell'intervallo $[-m, m]$, ho che
$$\int_{-\infty}^{\infty} \big|u(x-y)\, v(y)\big|\, dy = \int_{-m}^{m} \big|u(x-y)\, v(y)\big|\, dy \leq \|v\|_1 \cdot \sup_{t\in[x-m,x+m]} |u(t)|\,, \tag{7.3}$$
e l'ultimo termine è finito perché u è limitata sui limitati.
b) Voglio ricondurmi al caso noto del prodotto di convoluzione di una funzione in L^∞ per una funzione in L^1. A questo scopo fisso $r > 0$, pongo
$$u_r := u \cdot 1_{[-r-m,r+m]}\,,$$
ed osservo che per ogni $x \in [-r, r]$ vale che
$$u * v(x) = \int_{-\infty}^{\infty} u(y)\, v(x-y)\, dy = \int_{-r-m}^{m+r} u(y)\, v(x-y)\, dy = u_r * v(x)$$
(nel secondo passaggio ho usato che il supporto di $v(x - \cdot)$ è contenuto in $[-r-m, r+m]$ perché il supporto di v è contenuto in $[-m, m]$ e $x \in [-r, r]$).
Siccome u_r è una funzione limitata e v appartiene a $L^1(\mathbb{R})$, il prodotto di convoluzione $u_r * v$ è una funzione continua, e dunque $u * v$ è continua su $[-r, r]$; per l'arbitrarietà di r ottengo che $u * v$ è continua su tutto $\mathbb{R}$.
c) Dalla definizione di "o grande" ottengo che esistono C ed x_0 tale che
$$|u(x)| \leq Cx^a \quad \text{per } x \geq x_0.$$
Usando quindi la stima (7.3) ottengo che per ogni $x \geq x_0 + m$ vale
$$|u * v(x)| \leq \|v\|_1 \cdot \sup_{t\in[x-m,x+m]} |u(t)| \leq C\|v\|_1 (x+m)^a\,,$$
che implica la tesi.

4. Indico con E' l'insieme dei punti di E contenuti nel primo quadrante, vale a dire i punti (x, y) tali che
$$x \geq 0\,, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{\frac{2}{1+x^8}}\,. \tag{7.4}$$
Usando il fatto che sia E che u sono simmetrici rispetto agli assi ottengo che
$$\|u\|^p_{L^p(E)} = \int_E u^p\, dx\, dy = 4\int_{E'} u^p\, dx\, dy\,. \tag{7.5}$$
Usando inoltre il fatto che $y \leq \sqrt{2}$ per ogni $(x, y) \in E'$ ottengo che
$$(1+x^2)^a \leq u(x,y) \leq (3+x^2)^a\,. \tag{7.6}$$
Usando infine la (7.5), la seconda disequazione in (7.6), il teorema di Fubini e la (7.4) ottengo
$$\begin{aligned}\|u\|^p_{L^p(E)} &\leq 4\int_{E'} (3+x^2)^{pa}\, dx\, dy \\ &= 4\int_0^\infty (3+x^2)^{pa}\sqrt{\frac{2}{1+x^8}}\, dx \approx \int_1^\infty x^{2pa-4}\, dx\,,\end{aligned}$$
(il simbolo $\approx$ significa che i due integrali hanno lo stesso comportamento, cioè sono entrambi finiti o entrambi infiniti).
Dunque u appartiene a $L^p(E)$ se l'ultimo integrale è finito, cioè se $ap < 3/2$.
Vale anche il viceversa: u appartiene a $L^p(E)$ solo se $ap < 3/2$. Per dimostrarlo procedo in modo simile, usando la prima disequazione in (7.6) per ottenere una stima dal basso di $\|u\|^p_{L^p(E)}$.

5. Sviluppo la funzione incognita u in serie di seni rispetto alla variabile x, vale a dire
$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\, \sin(nx)$$
dove i coefficienti b_n sono dati da
$$b_n(t) := \frac{2}{\pi}\int_0^\pi u(t,x)\, \sin(nx)\, dx\,.$$
Procedendo come al solito ottengo che i coefficienti b_n di un'eventuale soluzione del problema (P) devono soddisfare il problema di Cauchy
$$\begin{cases} \dot{y} + (n^2 - 3t^2)\, y = 0 \\ u(0) = b_{0,n} \end{cases} \tag{7.7}$$
dove $b_{0,n}$ sono i coefficienti della serie in seni del dato iniziale u_0, vale a dire (vedi (7.2))
$$b_{0,n} = 0 \text{ per } n \neq 1, 3\,, \qquad b_{0,1} = 3\,, \qquad b_{0,3} = -1\,.$$
Risolvendo il problema (7.7) ottengo $b_n(t) = b_{0,n} e^{t^3 - nt}$ e dunque la soluzione di (P) dovrebbe essere
$$u(t,x) = 3e^{t^3-t}\sin x - e^{t^3-9t}\sin(3x)\,.$$
È immediato verificare che u è effettivamente una soluzione di (P) (in realtà l'unica).

6. a) Basta applicare il teorema della divergenza e ricordare che $\operatorname{div}(\nabla u) = \Delta u = 0$:
$$[\text{flusso di } \nabla u \text{ uscente da } A] := \int_{\partial A} \nabla u \cdot \eta_A\, d\sigma = \int_A \operatorname{div}(\nabla u)\, dx = 0\,.$$
(Con η_A indico la normale esterna al bordo di A, e con σ la misura di superficie su ∂A.)
b) In questo caso non possibile applicare il teorema della divergenza perché ∇u non è definito (e regolare) in tutta la chiusura di A. In effetti la funzione
$$u(x) := \log(|x|)$$
è armonica in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ (fatto noto) e prendendo A uguale al disco di centro 0 e raggio 1 in $\mathbb{R}^2$ un semplice conto mi dice che il flusso di ∇u attraverso ∂A è uguale a π.

c) Presa una palla chiusa $B = \overline{B(x_0, r)}$ contenuta in A, ho che $A' := A \setminus B$ è un aperto limitato con frontiera regolare la cui chiusura è contenuta in $\mathbb{R}^d \setminus \{x_0\}$; applicando il teorema della divergenza ottengo quindi che

$$0 = \int_{A'} \operatorname{div}(\nabla u)\, dx = \int_{\partial A'} \nabla u \cdot \eta_{A'}\, d\sigma = \int_{\partial A} \nabla u \cdot \eta_A\, d\sigma - \int_{\partial B} \nabla u \cdot \eta_B\, d\sigma\,,$$

e dunque

$$\int_{\partial A} \nabla u \cdot \eta_A\, d\sigma = \int_{\partial B} \nabla u \cdot \eta_B\, d\sigma\,. \tag{7.8}$$

Dati ora due aperti A_1, A_2 che contengono x_0, prendo una palla chiusa B centrata in x_0 che è contenuta in entrambi; applicando quindi l'identità (7.8) con $A := A_1$ e poi con $A := A_2$ ottengo

$$\int_{\partial A_1} \nabla u \cdot \eta_{A_1}\, d\sigma = \int_{\partial B} \nabla u \cdot \eta_B\, d\sigma = \int_{\partial A_2} \nabla u \cdot \eta_{A_2}\, d\sigma\,.$$

7. a) Per ogni $i = 1, \dots, d$ indico con ∂_i la derivata parziale rispetto alla variabile x_i. Usando la formula

$$\partial_i |x| = \frac{x_i}{|x|}$$

(e la formula per la derivata della funzione composta) ottengo

$$\partial_i u(x) = \partial_i\big(v(|x|)\big) = \dot v(|x|)\frac{x_i}{|x|}\,,$$

da cui segue che

$$\nabla u(x) = \dot v(|x|)\frac{x}{|x|}\,.$$

Inoltre

$$\partial_i^2 u(x) = \partial_i\left(\dot v(|x|)\frac{x_i}{|x|}\right) = \ddot v(|x|)\,\frac{x_i^2}{|x|^2} + \dot v(|x|)\left(\frac{1}{|x|} - \frac{x_i^2}{|x|^3}\right),$$

e infine

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^d \partial_i^2 u(x) = \ddot v(|x|) + \dot v(|x|)\,\frac{d-1}{|x|}\,. \tag{7.9}$$

b) Grazie alla formula (7.9) il problema si riduce a trovare le funzioni $v = v(t)$ definite su $(0, +\infty)$ che risolvono l'equazione differenziale

$$\ddot v + \frac{d-1}{t}\dot v = 0\,.$$

Scritta nell'incognita $\dot v$ questa è un'equazione differenziale del primo ordine sia lineare che a variabili separabili, e può quindi essere risolta in modo standard ottenendo $v(t) = c_1 t^{2-d} + c_2$ dove c_1, c_2 sono costanti arbitrarie ($v(t) = c_1 \log t + c_2$ nel caso $d = 2$). Le funzioni armoniche cercate sono dunque

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{c_1}{|x|^{d-2}} + c_2 & \text{per } d > 3, \\[2ex] c_1 \log(|x|) + c_2 & \text{per } d = 3. \end{cases}$$

8. a) Siccome E è limitato, è contenuto in una qualche palla B centrata nell'origine, e chiaramente la convergenza $f_n \to 0$ in $L^1(B)$ implica la convergenza in $L^1(E)$.

b) Indico con $B(r)$ la palla con centro l'origine e raggio r, e prendo

$$f_n := 1_{B(n+1)\setminus B(n)}\,.$$

È chiaro che f_n appartiene a $L^1(\mathbb{R}^d)$ per ogni n e che $f_n \to 0$ in $L^1(B(r))$ per ogni r (anzi, $f_n = 0$ in $B(r)$ per ogni $n \geq r$); per verificare che f_n non converge a 0 in $L^1(\mathbb{R}^d)$ basta osservare che la norma $L^1(\mathbb{R}^d)$ di f_n tende a $+\infty$ per $d > 1$ e tende a 2 per $d = 1$; infatti

$$\|f_n\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = \big|B(n+1) \setminus B(n)\big| = \alpha_d\big((n+1)^d - n^d\big) \sim d\alpha_d n^{d-1}\,,$$

dove α_d è il volume (misura di Lebesgue) della palla unitaria in $\mathbb{R}^d$.

c) Gli insiemi E cercati sono quelli che si scrivono come unione di un insieme limitato E' e di un insieme di misura nulla E''.

In effetti è facile vedere che per un insieme E di questo tipo vale sempre che $f_n \to 0$ to $L^1(E)$: basta applicare quanto visto al punto a) all'insieme E' e osservare che la convergenza in $L^1(E')$ implica quella in $L^1(E)$ perché $E \setminus E'$ ha misura nulla.
Suppongo ora che E non sia un insieme di questo tipo e costruisco una successione f_n che soddisfa le ipotesi dell'esercizio ma non converge a 0 in $L^1(\mathbb{R}^d)$. Osservo come prima cosa che l'insieme $E \setminus B(n)$ ha misura positiva per ogni $n = 1, 2, \dots$ e in particolare contiene un insieme E_n di misura positiva e *finita*. Prendo quindi

$$f_n := \frac{1}{|E_n|} 1_{E_n} .$$

È chiaro che f_n appartiene a $L^1(\mathbb{R}^d)$ per ogni n, e siccome E_n non interseca $B(n)$, $f_n = 0$ in $B(r)$ per ogni $n \geq r$, e in particolare $f_n \to 0$ in $L^1(B(r))$ per ogni r; infine la norma di f_n in $L^1(\mathbb{R}^d)$ è uguale a 1 per ogni n, e quindi f_n non può convergere a 0 in $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Commenti

- Esercizio 3, punto b). I presenti che hanno svolto questo punto hanno tutti dimostrato la continuità di $u * v$ "da zero", cioè senza ricondursi ad enunciati già visti a lezione.

- Esercizio 3, punto c). Molti dei presenti hanno usato definizioni scorrette della nozione di "o grande".

- Esercizio 6, punto b). Nella soluzione sopra ho dato un esempio per $d = 2$ e $x_0 = 0$. Tramite una traslazione posso ottenere un'esempio per x_0 qualunque, e usando l'esercizio 7 ottengo un esempio in dimensione d arbitraria.

- Esercizio 7, punto a). Quasi nessuno dei presenti ha calcolato correttamente il laplaciano di u.