

Versione: 9 settembre 2022

UNIVERSITÀ DI PISA
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

PROVE SCRITTE DELL'ESAME DI

Analisi Matematica 3 (547AA), a.a. 2021-22

Testi e soluzioni

GIOVANNI ALBERTI
Dipartimento di Matematica
Università di Pisa
largo Pontecorvo 5
56127 Pisa

<http://pagine.dm.unipi.it/alberti>

Gli scritti d'esame per il corso di Analisi 3 consistono di otto domande a cui dare una risposta articolata. Di queste, le prime sono solitamente più semplici, nel senso che possono essere facilmente ricondotte a fatti o calcoli noti. Il tempo a disposizione è di tre ore.

Questa raccolta contiene i testi e le soluzioni degli scritti di tutti gli appelli dell'a.a. 2021-22, incluse le prove in itinere.

Programma del corso [versione: 10 gennaio 2022]. Sono riportati in corsivo gli argomenti non fondamentali e/o fuori programma.

1. RICHIAMO DI TEORIA DELL'INTEGRAZIONE (fuori programma)

- *Misure σ -additive su σ -algebre. Esempi fondamentali: la misura di Lebesgue e la σ -algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue su \mathbb{R}^d ; la misura che conta i punti.*
- *Funzioni misurabili (rispetto ad una data σ -algebra). Integrale delle funzioni misurabile positive partendo dalle funzioni semplici. Integrale delle funzioni misurabili a valori reali e a valori vettoriali.*
- *Teoremi fondamentali: di convergenza monotona (o di Beppo Levi), di Fatou, di convergenza dominata (o di Lebesgue), di Fubini, di cambio di variabile.*

2. SPAZI L^p

- Disuguaglianze di Jensen, Hölder e Minkowski.
- Norma L^p di una funzione; spazi L^p ; completezza degli spazi L^p .
- Confronto tra le varie nozioni di convergenza per una successione di funzioni.
- Approssimazione con funzioni continue; teorema di Lusin.

3. CONVOLUZIONE

- Prodotto di convoluzione di funzioni su \mathbb{R}^d e disuguaglianze collegate alle norme L^p .
- Regolarità del prodotto di convoluzione in funzione della regolarità dei fattori.
- Approssimazione per convoluzione delle funzioni in $L^p(\mathbb{R}^d)$; approssimazione con funzioni C^∞ a supporto compatto.

4. SPAZI DI HILBERT

- Spazi di Hilbert reali; basi di Hilbert (sistemi ortonormali completi); rappresentazione di un elemento dello spazio di Hilbert H in termini di una base.
- Proiezione ortogonale di un vettore di H su un sottospazio chiuso V e caratterizzazione in termini di distanza; rappresentazione di H come $H = V + V^\perp$.
- Rappresentazione di un funzionale lineare e continuo su H tramite prodotto scalare (Teorema di Riesz).
- *Spazi di Hilbert sul campo complesso.*

5. SERIE DI FOURIER

- Le funzioni esponenziali e^{inx} (opportunamente rinormalizzate) formano una base di Hilbert di $L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$. Serie di Fourier di una funzione in $L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$; identità di Parseval.
- Relazione tra la regolarità di una funzione e il comportamento asintotico dei coefficienti di Fourier; convergenza uniforme della serie di Fourier delle funzioni 2π -periodiche di classe C^1 .
- Rappresentazione delle somme parziali della serie di Fourier come convoluzione con il nucleo di Dirichlet; convergenza della serie di Fourier nei punti di continuità Hölderiana.

6. SERIE DI FOURIER: APPLICAZIONI E VARIANTI

- *Derivazione dell'equazione del calore e delle onde in una dimensione spaziale.*
- Risoluzione di equazioni alle derivate parziali lineari con condizioni di periodicità al bordo tramite la serie di Fourier (in primis l'equazione del calore e delle onde).
- Dimostrazione della disuguaglianza isoperimetrica nel piano.

- Varianti della serie di Fourier: serie di Fourier in d variabili, serie di Fourier reale, rappresentazione in serie di seni (per le funzioni in $L^2(0, \pi)$). Applicazione alla risoluzione di EDP con diverse condizioni al bordo.
- Operatori autoaggiunti; esempi di basi di Hilbert di autovettori di operatori autoaggiunti.

7. TRASFORMATA DI FOURIER E APPLICAZIONI

- *Derivazione euristica della trasformata di Fourier a partire dalla serie di Fourier.* Trasformata di Fourier delle funzioni in $L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$.
- Proprietà elementari della TdF; trasformata del prodotto di convoluzione di funzioni in L^1 ; trasformata della derivata e derivata della trasformata.
- Formula di inversione per funzioni in L^1 con trasformata in L^1 .
- La TdF preserva il prodotto scalare e la norma L^2 a meno di un fattore costante (identità di Plancherel). Definizione della TdF di funzioni in $L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$; trasformata del prodotto di funzioni in L^2 .
- Relazione tra la regolarità della funzione e il comportamento asintotico della trasformata, relazione tra la sommabilità della funzione e la regolarità della trasformata. La TdF di una funzione con supporto compatto è analitica (teorema di Paley-Wiener).
- *Risoluzione dell'equazione del calore su \mathbb{R} tramite trasformata di Fourier e rappresentazione della soluzione tramite il nucleo del calore. Disuguaglianza di Heisenberg.*

8. INTEGRAZIONE SU SUPERFICI

- Superfici (senza bordo) di dimensione k e classe C^m in \mathbb{R}^d : definizione in termini di parametrizzazioni regolari e caratterizzazione come luogo di zeri di una mappa. Definizione di spazio tangente ad una superficie. *Mappe regolari su superfici e tra superfici, differenziale di queste mappe.*
- Misura di Lebesgue su uno spazio vettoriale con prodotto scalare. Definizione di $|\det T|$ per un'applicazione lineare T tra spazi vettoriali con prodotto scalare; formule alternative per $|\det T|$ per un'applicazione lineare $T: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^d$.
- Determinante Jacobiano di una mappa di classe C^1 da un aperto di \mathbb{R}^k in \mathbb{R}^d ; formule alternative per lo Jacobiano. Costruzione della misura di volume su una superficie tramite parametrizzazioni regolari; caratterizzazione della misura di volume in termini di quasi-isometrie. Integrazione di funzioni su una superficie tramite parametrizzazioni anche non regolari (formula dell'area).
- Applicazioni k -lineari alternanti (k -covettori) su uno spazio vettoriale V ; prodotto esterno, pull-back tramite un'applicazione lineare. Base dello spazio dei k -covettori su V associata ad una base di V . Formula di Binet generalizzata.
- *Forme differenziali (su un aperto di \mathbb{R}^d), pull-back, derivata esterna (differenziale). Integrazione di una k -forma su una superficie k -dimensionale orientata. Teorema di Stokes (solo enunciato).*

TESTI E SOLUZIONI

- 1] Sia X il sottospazio di $L^2([0, 1])$ generato dalle funzioni x e x^2 . Trovare la proiezione ortogonale della funzione x^3 su X .

SOLUZIONE. La proiezione $p(x^3)$ deve essere della forma $p(x^3) = ax + bx^2$ ed è caratterizzata dal fatto che $x^3 - p(x^3)$ è ortogonale sia ad x che ad x^2 , vale a dire

$$\begin{cases} 0 = \langle x^3 - p(x^3); x \rangle = \int_0^1 x^4 - ax^2 - bx^3 dx = \frac{1}{5} - \frac{1}{3}a - \frac{1}{4}b, \\ 0 = \langle x^3 - p(x^3); x^2 \rangle = \int_0^1 x^5 - ax^3 - bx^4 dx = \frac{1}{6} - \frac{1}{4}a - \frac{1}{5}b. \end{cases}$$

Risolvendo questo sistema ottengo $a = -\frac{2}{5}$ e $b = \frac{4}{3}$, ovvero

$$p(x^3) = -\frac{2}{5}x + \frac{4}{3}x^2.$$

- 2] Calcolare i coefficienti di Fourier reali e complessi della funzione $u(x) := \sin^3 x$.

SOLUZIONE. Usando l'identità $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$ ottengo:

$$\begin{aligned} \sin^3 x &= \left(\frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})\right)^3 = \frac{i}{8}e^{3ix} - \frac{3i}{8}e^{ix} + \frac{3i}{8}e^{-ix} - \frac{i}{8}e^{-3ix} \\ &= -\frac{1}{4}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin x. \end{aligned}$$

Dalle ultime due identità (e dall'unicità della rappresentazione in serie di una funzione) segue che i coefficienti complessi di u sono

$$c_n(u) = \begin{cases} \mp \frac{3i}{8} & \text{per } n = \pm 1, \\ \pm \frac{i}{8} & \text{per } n = \pm 3, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

mentre quelli reali sono

$$a_n(u) = 0 \text{ per ogni } n, \quad b_n(u) = \begin{cases} \frac{3}{4} & \text{per } n = 1, \\ -\frac{1}{4} & \text{per } n = 3, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- 3] Sia $u : [\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 tale che $u(-\pi) = u(\pi)$. Scrivere $\|u\|_2$ e $\|\dot{u}\|_2$ in termini dei coefficienti della serie di Fourier reale di u .

SOLUZIONE. Al solito, indico con a_n e b_n i coefficienti della serie di Fourier reale di u e con c_n quelli della serie complessa. Partendo dalla serie di Fourier reale ed usando le formule $\cos(nx) = \frac{1}{2}(e^{inx} + e^{-inx})$ e $\sin(nx) = \frac{1}{2i}(e^{inx} - e^{-inx})$ ottengo la serie di Fourier complessa e le seguenti relazioni tra i coefficienti:

$$c_0 = a_0 \quad \text{e} \quad \begin{cases} c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \\ c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \end{cases} \quad \text{per } n = 1, 2, \dots$$

Utilizzando queste relazioni, la formula di Parseval (per la serie di Fourier complessa) e l'identità $c_n(\dot{u}) = inc_n$ ottengo quindi

$$\begin{aligned} \|u\|_2^2 &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 + b_n^2, \\ \|\dot{u}\|_2^2 &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2 |c_n|^2 = \pi \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2). \end{aligned}$$

OSSERVAZIONI. L'esercizio poteva essere risolto senza passare per la serie di Fourier complessa, usando l'identità di Parseval per la serie di Fourier reale, vale a dire

$$\|u\|_2^2 = 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 + b_n^2,$$

e l'identità che collega la serie di Fourier reale di \dot{u} con quella di u , vale a dire

$$\dot{u} = \sum_{n=1}^{+\infty} -na_n \sin(nx) + nb_n \cos(nx).$$

(La prima formula può essere ottenuta a partire dall'ortogonalità delle funzioni $\cos(nx)$ e $\sin(nx)$ e dal valore delle loro norme L^2 , la seconda può essere ottenuta in modo formale derivando la rappresentazione in serie di u , e in modo rigoroso applicando un'integrazione per parti alla formula per i coefficienti di \dot{u} .)

4 Dato $a > 0$, sia f_a la funzione su $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ data da

$$f_a(x) := \frac{1}{(|x_1| + \dots + |x_d|)^a (1 + |\log(|x|)|)}.$$

Dire per quali $p \in [1, +\infty)$ la funzione f_a appartiene a $L^p(B(0, 1))$.

SOLUZIONE. Osservo che per ogni $x \in \mathbb{R}^d$ vale

$$|x| \leq |x_1| + \dots + |x_d| \leq d|x|$$

e quindi

$$\frac{1}{d^a} g_a(x) \leq f_a(x) \leq g_a(x) \quad \text{dove} \quad g_a(x) := \frac{1}{|x|^a (1 + |\log(|x|)|)}.$$

Pertanto la norma $\|f_a\|_p$ è finita se e solo se $\|g_a\|_p$ è finita, e per quanto riguarda quest'ultima ho che:

$$\|g_a\|_p^p = \int_{B(0,1)} \frac{1}{|x|^{ap} (1 + \log(|x|))^p} dx = c_d \int_0^1 \frac{1}{\rho^{ap-d+1} (1 + |\log \rho|)^p} d\rho$$

(nel secondo passaggio ho applicato la solita formula per l'integrazione delle funzioni radiali, e c_d sta per il volume $(d-1)$ -dimensionale della sfera \mathbb{S}^{d-1}).

Noto ora che l'ultimo integrale è improprio in 0 e si comporta come

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{\rho^{ap-d+1} |\log \rho|^p} d\rho$$

che è finito se e solo se $ap - d + 1 < 1$ oppure $ap - d + 1 = 1$ e $p > 1$. Ne deduco che g_a e f_a appartengono a $L^p(B(0, 1))$ se e solo se

$$p < \frac{d}{a} \quad \text{oppure} \quad p = \frac{d}{a} \quad \text{e} \quad d > a.$$

5 Data $\varphi : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ funzione continua con coefficienti di Fourier c_n^0 sommabili, consideriamo il problema (P) dato dall'equazione $u_t = 2u_{xx} + u - \varphi(x)$ sull'intervallo spaziale $[-\pi, \pi]$ con le solite condizioni di periodicità al bordo e la condizione iniziale $u(0, \cdot) = 0$.

a) Dimostrare che (P) ammette una soluzione definita per ogni $t \geq 0$ e discuterne la regolarità.

b) Discutere il comportamento asintotico della soluzione per $t \rightarrow +\infty$.

SOLUZIONE. Risolvo formalmente l'equazione scrivendo l'incognita u in serie di Fourier (complessa) rispetto alla variabile x . Procedendo come al solito ottengo che i coefficienti c_n risolvono il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = (1 - 2n^2)y - c_n^0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

e quindi sono dati da

$$c_n(t) = \frac{c_n^0}{1 - 2n^2} (1 - e^{(1-2n^2)t}).$$

Pertanto la soluzione u dovrebbe essere

$$u(t, x) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{c_n^0}{1 - 2n^2} (1 - e^{(1-2n^2)t})}_{u_n} e^{inx}. \tag{1}$$

a) Dimostro ora che: la funzione u definita in (1) è

- (i) ben definita su $[0, +\infty) \times \mathbb{R}$, 2π -periodica in x , di classe C^1 in t e C^2 in x ,
- (ii) di classe C^∞ in t su $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$,
- (iii) una soluzione del problema (P).

Per dimostrare (i) mi basta far vedere che la serie $\sum_{n \neq 0} D_t^h D_x^k u_n$ converge totalmente su $R := [0, +\infty) \times \mathbb{R}$ se $h = 0$ e $k = 0, 1, 2$, oppure se $h = 1$ e $k = 0$.¹

In effetti per $k = 0, 1, \dots$ vale che

$$D_x^k u_n = \frac{c_n^0}{1 - 2n^2} (in)^k (1 - e^{(1-2n^2)t}) e^{inx},$$

e quindi, tenendo conto che $0 \leq 1 - e^{(1-2n^2)t} \leq 1$ per $t \geq 0$ e $n \neq 0$, ottengo

$$\|D_x^k u_n\|_{L^\infty(R)} \leq \frac{|c_n^0| |n|^k}{2n^2 - 1} = O(|n|^{k-2} |c_n^0|),$$

che è sommabile (in n) per $k \leq 2$ grazie all'ipotesi che i coefficienti c_n^0 sono sommabili. Inoltre per $h = 1, 2, \dots$ vale che

$$D_t^h u_n = -c_n^0 (1 - 2n^2)^{h-1} e^{(1-2n^2)t} e^{inx}, \tag{2}$$

e quindi

$$\|D_t^h u_n\|_{L^\infty(R)} \leq |c_n^0| (2n^2 - 1)^{h-1} = O(|n|^{2h-2} |c_n^0|),$$

che è sommabile (in n) per $h \leq 1$.

Per dimostrare (ii) faccio vedere che la serie delle derivate parziali $\sum_{n \neq 0} D_t^h u_n$ converge totalmente su $R_\delta := (\delta, +\infty) \times \mathbb{R}$ per ogni $\delta > 0$ e $h = 1, 2, \dots$

In effetti utilizzando la formula (2) ottengo

$$\|D_t^h u_n\|_{L^\infty(R_\delta)} \leq |c_n^0| (2n^2 - 1)^{h-1} e^{(1-2n^2)\delta} = O(|c_n^0| e^{-2\delta n^2} n^{2h-2}) = O(|c_n^0|)$$

che è sommabile (in n) per ogni h .

Per dimostrare (iii) mi basta osservare che u soddisfa chiaramente le condizioni al bordo e la condizione iniziale di (P); inoltre ogni addendo u_n in (1) risolve l'equazione

$$u_t = 2u_{xx} + u - c_n^0 e^{inx}$$

e sommando su tutti gli n ottengo che u risolve l'equazione in (P).

b) Sia $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ la funzione con coefficienti di Fourier

$$c_n(v) := \frac{c_n^0}{1 - 2n^2}.$$

Siccome la serie $\sum_n |n|^k |c_n(v)|$ è finita per $k \leq 2$, v è una funzione in C^2 per.

Dimostro che, per $t \rightarrow +\infty$, la funzione $u(t, \cdot) + c_0^0 e^t$ converge a v uniformemente in x ed esponenzialmente in t . Dalla formula (1) segue infatti che

$$u(t, x) + c_0^0 e^t - v(x) = \sum_{n \neq 0} \frac{c_n^0}{2n^2 - 1} e^{(1-2n^2)t} e^{inx},$$

e quindi

$$\|u(t, \cdot) + c_0^0 e^t - v(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \sum_{n \neq 0} \frac{|c_n^0|}{|2n^2 - 1|} e^{(1-2n^2)t} \leq \left(\sum_{n \neq 0} |c_n^0| \right) e^{-t}.$$

(Nel secondo passaggio ho usato che $2n^2 - 1 \geq 1$ e $e^{(1-2n^2)t} \leq e^{-t}$ per ogni $n \neq 0$.)

OSSERVAZIONI. La regolarità della soluzione u dimostrata sopra è sostanzialmente ottimale. Riscrivendo infatti l'equazione come $\varphi = 2u_{xx} + u - u_t$ si vede che se $u(t, \cdot)$ è di classe C^3 per qualche $t > 0$, allora φ deve essere di classe C^1 , ma esistono funzioni φ continue e con coefficienti sommabili che non sono di classe C^1 . Quindi, in generale, $u(t, \cdot)$ non è di classe C^3 per alcun $t > 0$.

¹ Qui e in seguito ho escluso dalla serie l'addendo di indice $n = 0$ perché nessuna delle stime usate vale per questo indice (notare che l'esponenziale $e^{(1-2n^2)t}$ diverge per $t \rightarrow +\infty$, invece di tendere a zero).

Anche il dominio di esistenza temporale è ottimale: come per l'equazione del calore, in generale non esiste alcuna soluzione nel passato.

Riguardo al punto b), il fatto che $u(t, \cdot) + c_0^0 e^t$ converge uniformemente a v per $t \rightarrow +\infty$ segue dal fatto che la serie $\sum_{n \neq 0} u_n$ converge totalmente su $[0, +\infty) \times \mathbb{R}$. Infatti la convergenza totale permette di scambiare serie e limite.

6 Sia X l'insieme delle funzioni $f \in C(\mathbb{R})$ tali che $(1 + |x|)f(x)$ è limitata. Dimostrare che:

- a) se $f \in X$ e $g \in L^1(\mathbb{R})$ allora $f * g$ è ben definita in ogni punto e appartiene a $C_0(\mathbb{R})$;
- b) se $f \in X$ e g è tale che $(1 + |x|)g(x) \in L^1$, allora $f * g$ appartiene a X .

SOLUZIONE. a) Dall'ipotesi su f segue che questa funzione appartiene a L^∞ , e siccome g appartiene a L^1 , per un risultato visto a lezione il prodotto $f * g$ è ben definito in ogni punto e continuo. Inoltre

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x - y)g(y) dy \rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow \pm\infty$$

per il teorema di convergenza dominata: la convergenza puntuale $f(x - y) \rightarrow 0$ (per ogni y) segue dal fatto che f è infinitesima all'infinito, mentre la dominazione è $|f(x, y)g(y)| \leq m|g(y)|$ con $m := \|f\|_\infty$.

b) Per dimostrare che la funzione $(1 + |x|)f * g$ è limitata, la stimo come segue

$$\begin{aligned} (1 + |x|)|f * g(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}} (1 + |x|)|f(x - y)||g(y)| dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} h(x, y)\tilde{f}(x - y)\tilde{g}(y) dy, \end{aligned} \tag{3}$$

dove ho posto

$$h(x, y) := \frac{1 + |x|}{(1 + |x - y|)(1 + |y|)}, \quad \tilde{f}(x) := (1 + |x|)|f(x)|, \quad \tilde{g}(y) := (1 + |y|)|g(y)|.$$

Osservo ora che

$$h(x, y) \leq \frac{1 + |x|}{1 + |x - y| + |y|} \leq 1,$$

e quindi la stima (3) diventa

$$(1 + |x|)|f * g(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(x - y)\tilde{g}(y) dy = \tilde{f} * \tilde{g}(x) \leq \|\tilde{f}\|_\infty \|\tilde{g}\|_1.$$

Concludo osservando che le due norme nell'ultimo termine sono finite per ipotesi.

7 Sia X l'insieme delle $u \in L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$ con media nulla, e sia Y l'insieme delle $v \in C([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$ tali che $v(\pi) = v(-\pi) = 0$. Per ogni $u \in X$ consideriamo la funzione $Tu : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ data da

$$Tu(x) := \int_{-\pi}^x u(t) dt.$$

- a) Dimostrare che Tu appartiene a Y .
- b) Scrivere i coefficienti della serie di Fourier complessa di Tu in termini di quelli di u e della quantità $m := \int_{-\pi}^{\pi} u(x) x dx$.
- c) Dimostrare che $T(X)$ coincide con l'insieme Z delle $v \in Y$ tali che $\sum_n n^2 |c_n(v)|^2 < +\infty$.
- d) Dimostrare che $T(X)$ è denso in Y .

SOLUZIONE. a) La continuità di Tu segue dal teorema di convergenza dominata e dal fatto che u appartiene a L^1 ; che $Tu(-\pi) = 0$ è ovvio, mentre $Tu(\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} u(t) dt$ vale 0 perché u appartiene a X .

b) Per $n \neq 0$ vale che

$$\begin{aligned} c_n(Tu) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Tu(x) e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} 1_{\{t \leq x\}} u(t) dt \right) e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} 1_{\{t \leq x\}} e^{-inx} dx \right) u(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{e^{-inx}}{-inx} \right]_t^{\pi} u(t) dt = \frac{1}{2\pi in} \int_{-\pi}^{\pi} (e^{-int} - (-1)^n) u(t) dt = \frac{c_n(u)}{in} \end{aligned}$$

(nel terzo passaggio ho applicato il teorema di Fubini-Tonelli e scambiato l'ordine di integrazione, nell'ultimo passaggio ho usato il fatto che u ha integrale nullo su $[-\pi, \pi]$).

Invece per $n = 0$ ho che

$$\begin{aligned} c_0(Tu) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} 1_{\{t \leq x\}} u(t) dt \right) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} 1_{\{t \leq x\}} dx \right) u(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi - t) u(t) dt = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t u(t) dt = -m \end{aligned}$$

(nell'ultimo passaggio ho nuovamente usato il fatto che u ha integrale nullo su $[-\pi, \pi]$).

c) Data $u \in X$, per quanto fatto al punto precedente ho che per ogni $n \neq 0$ vale $in c_n(Tu) = c_n(u)$ e quindi

$$\sum_{n \neq 0} n^2 |c_n(Tu)|^2 = \sum_{n \neq 0} |c_n(u)|^2 < +\infty.$$

Questo dimostra che $Tu \in Z$, e dunque $T(X) \subset Z$.

Per dimostrare l'inclusione $Z \subset T(X)$ prendo $v \in Z$ e costruisco $u \in X$ tale che $v = Tu$. Per la precisione, prendo la funzione u i cui coefficienti sono definiti come segue:

$$c_0(u) := 0, \quad c_n(u) := \frac{c_n(v)}{in} \text{ per } n \neq 0.$$

La successione dei coefficienti di u è in ℓ^2 per via della definizione di Y , e quindi u è una ben definita funzione in $L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$; inoltre u ha media nulla perché $c_0(u) = 0$, e quindi $u \in X$. Per via di quanto fatto al punto b) ho anche che $c_n(Tu) = c_n(v)$ per ogni $n \neq 0$, e quindi $Tu - v$ è una costante. Inoltre $Tu(-\pi) - v(\pi) = 0$, e quindi $Tu - v = 0$.

d) È stato visto a lezione che ogni funzione continua $v : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ con $v(-\pi) = v(\pi)$ si approssima uniformemente con una successione p_n di polinomi trigonometrici. Se v appartiene a Y allora anche i polinomi trigonometrici $\tilde{p}_n(x) := p_n(x) - p_n(\pi)$ approssimano v (perché $p_n(\pi) \rightarrow v(\pi) = 0$); inoltre appartengono a Y perché $\tilde{p}_n(-\pi) = \tilde{p}_n(\pi) = 0$, e appartengono anche a $Z = T(X)$ perché hanno coefficienti definitivamente nulli.

OSSERVAZIONI. Si può dimostrare direttamente che la funzione Tu è Hölderiana di esponente $1/2$ usando la disuguaglianza di Hölder: dati infatti $x_0 < x_1$ si ha

$$|Tu(x_1) - Tu(x_0)| \leq \int_{x_0}^{x_1} |u| dt = \int_{-\pi}^{\pi} 1_{[x_0, x_1]} |u| dt \leq \|1_{[x_0, x_1]}\|_2 \|u\|_2 = |x_1 - x_0|^{1/2} \|u\|_2.$$

8 Data u nella classe C_{per}^1 delle funzioni da \mathbb{R} in \mathbb{R} di classe C^1 e 2π -periodiche, pongo

$$E(u) := \int_{-\pi}^{\pi} \dot{u}^2 + \sin^3 x u dx.$$

a) Scrivere $E(u)$ in termini dei coefficienti della serie di Fourier reale di u .

b) Dimostrare che esiste una funzione $u \in C_{\text{per}}^1$ per cui il valore di $E(u)$ è minimo.

c) Data $\varphi \in L^2([-\pi, \pi])$, definisco $E_\varphi(u)$ come sopra, sostituendo la funzione $\sin^3 x$ con φ ; discutere l'esistenza del minimo di $E_\varphi(u)$ tra tutte le funzioni in C_{per}^1 .

SOLUZIONE. a) Indico con a_n e b_n i coefficienti della serie di Fourier reale di u . Usando quanto fatto negli esercizi 2 e 3, e l'identità di Parseval (per la serie di Fourier reale) ottengo

$$\begin{aligned} E(u) &= \langle \sin^3 x; u \rangle + \|\dot{u}\|_2^2 \\ &= \pi\left(\frac{3}{4}b_1 - \frac{1}{4}b_3\right) + \pi \sum_{n=1}^{+\infty} n^2(a_n^2 + b_n^2) \\ &= \pi\left(\frac{3}{4}b_1 + b_1^2\right) + \pi\left(-\frac{1}{4}b_3 + 9b_3^2\right) + \sum_{n \neq 1,3} n^2 b_n^2 + \sum_n n^2 a_n^2. \end{aligned} \quad (4)$$

b) Per via della formula (4), minimizzare $E(u)$ equivale a trovare i coefficienti a_n e b_n che minimizzano le seguenti quantità:

$$\frac{3}{4}b_1 + b_1^2, \quad -\frac{1}{4}b_3 + 9b_3^2, \quad b_n^2 \text{ per } n = 2 \text{ e } n \geq 4, \quad a_n^2 \text{ per } n \geq 1,$$

vale a dire

$$b_1 = -\frac{3}{8}, \quad b_3 = \frac{1}{72}, \quad b_n = 0 \text{ per } n = 2 \text{ e } n \geq 4, \quad a_n = 0 \text{ per } n \geq 1.$$

Dunque il minimo di $E(u)$ è la funzione

$$u(x) := -\frac{3}{8} \sin x + \frac{1}{72} \sin(3x).$$

c) Indico con A_n e B_n i coefficienti di Fourier reali della funzione φ . Procedendo come sopra ottengo

$$E_\varphi(u) = \langle \varphi; u \rangle + \|\dot{u}\|_2^2 = 2\pi A_0 a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n a_n + n^2 a_n^2) + (B_n b_n + n^2 b_n^2).$$

Devo ora distinguere due casi.

Caso 1: $A_0 \neq 0$ (cioè se φ non ha media nulla). In questo caso l'estremo inferiore di $E(u)$ è $-\infty$, ottenuto considerando tutte le funzioni costanti, cioè quelle per cui $a_n = b_n = 0$ per $n \geq 1$. Infatti per queste funzioni vale che $E_\varphi(u) = 2\pi A_0 a_0$, e prendendo l'estremo inferiore al variare di $a_0 \in \mathbb{R}$ ottengo $-\infty$.

Caso 2: $A_0 = 0$ (cioè se φ ha media nulla). In questo caso

$$E_\varphi(u) = \sum_{n=1}^{+\infty} [(A_n a_n + n^2 a_n^2) + (B_n b_n + n^2 b_n^2)],$$

e il punto di minimo di $E(u)$ (se esiste) dovrebbe essere la funzione u i cui coefficienti minimizzano

$$A_n a_n + n^2 a_n^2 \quad \text{e} \quad B_n b_n + n^2 b_n^2$$

per ogni $n = 1, 2, \dots$, vale a dire

$$a_n = -\frac{A_n}{2n^2} \quad \text{e} \quad b_n = -\frac{B_n}{2n^2},$$

ovvero

$$u(x) := -\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A_n}{2n^2} \cos(nx) + \frac{B_n}{2n^2} \sin(nx)}_{u_n}. \quad (5)$$

Per concludere dimostro che la serie in (5) definisce una funzione in C_{per}^1 , e per la precisione faccio vedere che la serie delle funzioni u_n e la serie delle derivate \dot{u}_n convergono totalmente su \mathbb{R} . Osservo per cominciare che

$$\|u_n\|_\infty \leq \frac{1}{2n^2} (|A_n| + |B_n|),$$

inoltre

$$\dot{u}_n = -\frac{A_n}{2n} \sin(nx) + \frac{B_n}{2n} \cos(nx),$$

e quindi

$$\|\dot{i}_n\|_\infty \leq \frac{1}{2n}(|A_n| + |B_n|).$$

Pertanto, per far vedere che le serie $\sum u_n$ e $\sum \dot{i}_n$ convergono totalmente mi basta far vedere che le serie $\sum \frac{1}{n}|A_n|$ e $\sum \frac{1}{n}|B_n|$ sono finite. Usando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz in ℓ^2 ottengo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}|A_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |A_n|^2 \right)^{1/2} < +\infty$$

(ricordo che $\sum |A_n|^2 < +\infty$ perché si tratta dei coefficienti di una funzione in L^2). Allo stesso modo si fa vedere che $\sum \frac{1}{n}|B_n| < +\infty$.

- 1] Calcolare la TdF di $u(x) := e^{-|x|} \cos^2 x$.

SOLUZIONE. Usando il fatto che

$$\cos^2 x = \left(\frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})\right)^2 = \frac{1}{4}e^{2ix} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-2ix}$$

e le note identità $\mathcal{F}(e^{iax}u) = \tau_a \widehat{u}$ e $\mathcal{F}(e^{-|x|}) = \frac{2}{1+y^2}$, ottengo

$$\begin{aligned} \widehat{u} &= \mathcal{F}\left(\left(\frac{1}{4}e^{2ix} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-2ix}\right)e^{-|x|}\right) \\ &= \left(\frac{1}{4}\tau_2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\tau_{-2}\right) \frac{2}{1+y^2} \\ &= \frac{1}{2+2(y-2)^2} + \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{2+2(y+2)^2} = \frac{2y^4+30}{(y^2+1)(y^4-6y^2+25)}. \end{aligned}$$

- 2] Sia $\omega := dx_1 \wedge dx_2 - dx_2 \wedge dx_3 + dx_3 \wedge dx_4$. Calcolare $\omega \wedge \omega$.

SOLUZIONE. Scrivo $\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ con $\omega_1 := dx_1 \wedge dx_2$, $\omega_2 = -dx_2 \wedge dx_3$, $\omega_3 := dx_3 \wedge dx_4$, ed osservo che $\omega_i \wedge \omega_j = 0$ tranne che per $i = 1, j = 3$ oppure $i = 3, j = 1$; pertanto

$$\omega \wedge \omega = \omega_1 \wedge \omega_3 + \omega_3 \wedge \omega_1 = 2 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4.$$

- 3] Sia H lo spazio di Hilbert $L^2([0, 1], \mathbb{C})$, sia D il sottospazio formato dalle funzioni u di classe C^1 tali che $u(0) = u(1) = 0$, e dato $\lambda \in \mathbb{C}$ sia $T : D \rightarrow H$ l'operatore lineare dato da $T := \lambda \dot{u}$. Dire per quali λ questo operatore è autoaggiunto, e se, in tal caso, è definito positivo.

SOLUZIONE. Date $u, v \in D$ vale che

$$\langle Tu; v \rangle = \int_0^1 \lambda \dot{u} \bar{v} dx = - \int_0^1 \lambda u \dot{\bar{v}} dx = -\lambda \langle u; \dot{v} \rangle \quad (1)$$

(nel secondo passaggio ho integrato per parti e usato che $u(0) = u(1) = 0$), e quindi

$$\langle u; Tv \rangle - \langle Tu; v \rangle = (\bar{\lambda} + \lambda) \langle u; \dot{v} \rangle. \quad (2)$$

Da questa identità segue che T è autoaggiunto se $\bar{\lambda} + \lambda = 0$, ovvero se λ è immaginario puro. In caso contrario T non è autoaggiunto, e per dimostrarlo basta esibire due funzioni $u, v \in D$ tali che $\langle u; \dot{v} \rangle \neq 0$, per esempio $u := \sin(2\pi x)$ e $v := 1 - \cos(2\pi x)$.

Osservo infine che T non è mai definito positivo: scrivo $\lambda = im$ con m reale e posto $u := e^{2\pi ix} - 1$, usando la formula (1) ottengo

$$\begin{aligned} \langle Tu; u \rangle &= -\lambda \langle u; \dot{u} \rangle = -\lambda \int_0^1 (e^{2\pi ix} - 1) \overline{2\pi i e^{2\pi ix}} dx \\ &= -2\pi m \int_0^1 1 - e^{-2\pi ix} dx = -2\pi m, \end{aligned}$$

e questo dimostra che T non è definito positivo per $m \geq 0$. Prendendo invece $u := e^{-2\pi ix} - 1$ ottengo che T non è definito positivo per $m \leq 0$.

- 4] Sia $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione continua e 2π -periodica con coefficienti di Fourier c_n sommabili, e sia $u \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$. Dimostrare che

$$\widehat{uv}(y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \widehat{u}(y-n) \quad \text{per ogni } y \in \mathbb{R}.$$

SOLUZIONE. Siccome i coefficienti di Fourier di v sono sommabili, la serie di Fourier di v converge totalmente e quindi anche puntualmente e coincide quasi ovunque con v . Pertanto posso sostituire v con la sua serie di Fourier all'interno dell'integrale che definisce \widehat{uv} ; così

facendo ottengo

$$\begin{aligned}\widehat{v}(y) &= \int_{\mathbb{R}} u(x) v(x) e^{-iyx} dx = \int_{\mathbb{R}} u(x) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} e^{-iyx} dx \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} u(x) c_n e^{-i(y-n)x} dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \widehat{u}(y-n).\end{aligned}$$

Attenzione: nel terzo passaggio ho scambiato serie ed integrale, ed ho potuto farlo perché

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} |u(x) c_n e^{-i(y-n)x}| dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| \int_{\mathbb{R}} |u(x)| dx = \|u\|_1 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| < +\infty.$$

5 Sia I un intervallo e sia $u : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione misurabile tale che $u(t, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ per ogni $t \in I$ e $u(\cdot, x)$ è di classe C^1 per ogni $x \in \mathbb{R}$, e sia $\widehat{u} : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ la funzione ottenuta prendendo la TdF di u rispetto alla seconda variabile x . Dimostrare che

- a) se esiste $g \in L^1(\mathbb{R})$ tale che $|u(t, x)| \leq g(x)$, allora \widehat{u} è continua;
- b) se inoltre esiste $h \in L^1(\mathbb{R})$ tale che $|u_t(t, x)| \leq h(x)$, allora \widehat{u} è C^1 in t e $(\widehat{u})_t = \widehat{u}_t$;
- c) se si richiede solo che $\|u(t, \cdot)\|_1$ sia limitata in t , non è detto che \widehat{u} sia continua.

SOLUZIONE. a) Data una successione di punti (t_n, y_n) in $I \times \mathbb{R}$ che converge a (t, y) , devo far vedere che $\widehat{u}(t_n, y_n)$ converge a $u(t, y)$ quando $n \rightarrow +\infty$. In effetti

$$\widehat{u}(t_n, y_n) = \int_{\mathbb{R}} u(t_n, x) e^{-iy_n x} dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}} u(t, x) e^{-iyx} dx = u(t, y)$$

dove nel secondo passaggio ho usato il teorema di convergenza dominata; per la precisione, la convergenza puntuale $u(t_n, x) e^{-iy_n x} \rightarrow u(t, x) e^{-iyx}$ segue dal fatto che u è continua rispetto alla variabile t per ogni x , mentre una dominazione è

$$|u(t_n, x) e^{-iy_n x}| = |u(t_n, x)| \leq g(x).$$

b) Osservo per cominciare che la funzione \widehat{u}_t è continua (basta applicare la dimostrazione nel punto precedente con u_t al posto di u), e per dimostrare che \widehat{u}_t è la derivata rispetto a t di \widehat{u} uso il teorema di derivazione sotto il segno di integrale:

$$(\widehat{u})_t = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{\mathbb{R}} u(t, x) e^{-iyx} dx \right) = \int_{\mathbb{R}} u_t(t, x) e^{-iyx} dx = \widehat{u}_t.$$

L'uso del teorema è reso possibile dalle dominazioni

$$|u(t, x) e^{-iyx}| = |u(t, x)| \leq g(x), \quad |u_t(t, x) e^{-iyx}| = |u_t(t, x)| \leq h(x).$$

c) Suppongo per semplicità che $I = (-1, 1)$, prendo una funzione $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ diversa da 0, e pongo

$$u(t, x) := \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0, \\ \varphi(x - \frac{1}{t}) & \text{se } t > 0. \end{cases}$$

Allora

- $u(t, \cdot)$ appartiene a $L^1(\mathbb{R})$ per ogni t , e per la precisione $\|u(t, \cdot)\|_1 = 0$ per $t \leq 0$ mentre $\|u(t, \cdot)\|_1 = \|\varphi\|_1$ per $t > 0$;
- u è di classe C^∞ su $I \times \mathbb{R}$; infatti per la formula sopra u è di classe C^∞ sull'aperto A dei punti $(t, x) \in \times \mathbb{R}$ tali che $t > 0$, inoltre, preso a tale che il supporto di φ è contenuto in $[a, +\infty)$, $u = 0$ nell'aperto A' dato dai punti (t, x) tali che $t < \frac{1}{x-a}$ quando $x > a$, ed in particolare u è C^∞ su A' ; per concludere osservo che $A \cup A' = I \times \mathbb{R}$;
- infine

$$\widehat{u}(t, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0, \\ e^{-iy/t} \widehat{\varphi}(y) & \text{se } t > 0, \end{cases}$$

e in particolare \widehat{u} è discontinua in ogni punto $(0, y)$ tale che $\widehat{\varphi}(y) \neq 0$.

6 Sia Σ l'insieme dei punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ tali che $|x| = 2$ e $|x - y| = 1$.

- a) Dimostrare che Σ è una superficie (senza bordo) di dimensione 2, compatta e di classe C^∞ .
 b) Trovare una parametrizzazione di Σ e calcolarne l'area.

SOLUZIONE. a) L'insieme Σ è il luogo di zeri della mappa $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da

$$f(x, y) := (|x|^2 - 4, |x - y|^2 - 1),$$

e siccome questa mappa è di classe C^∞ (anzi, è polinomiale), per dimostrare che Σ è una superficie di classe C^∞ mi basta far vedere che il suo gradiente ha rango 2 in ogni punto di Σ . In effetti, interpretando x e y come vettori riga,

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 2(x - y) & 2(y - x) \end{pmatrix},$$

e si verifica facilmente che questa matrice ha rango 2 in tutti i punti (x, y) tali che $x \neq 0$ e $y \neq x$, e questo include tutti i punti di Σ perché $|x| = 2$ e $|x - y| = 1$. Infatti l'ipotesi $x \neq 0$ implica che la prima riga della matrice è diversa da zero, e quindi il rango è minore stretto di 2 solo se la seconda riga è un multiplo della prima, cosa che non è possibile perché $2(y - x) \neq 0$.

Per quanto riguarda la compattezza, osservo che Σ è chiuso in quanto controimmagine di un punto (che è chiuso) secondo una mappa continua. Inoltre Σ è limitato, infatti per ogni $(x, y) \in \Sigma$ si ha $|x| = 2$ e $|y| \leq |x| + |y - x| = 3$.

b) Dati $x, y \in \mathbb{R}^2$, osservo che $|x| = 2$ se e solo se x è della forma

$$x = (2 \cos \alpha, 2 \sin \alpha)$$

per qualche $\alpha \in [0, 2\pi)$ (e tale α è unico), ed analogamente $|y - x| = 1$ se e solo

$$y = x + (\cos \beta, \sin \beta)$$

per qualche $\beta \in [0, 2\pi)$ (e tale β è unico).

Ne deduco che Σ è parametrizzata dalla mappa $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ data da

$$\Phi(\alpha, \beta) := (2 \cos \alpha, 2 \sin \alpha, 2 \cos \alpha + \cos \beta, 2 \sin \alpha + \sin \beta), \quad (3)$$

e per la precisione Φ è una bigezione da $D := [0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$ in Σ .

Calcolo ora il determinante Jacobiano di Φ : osservo per cominciare che

$$\nabla \Phi = \begin{pmatrix} -2 \sin \alpha & 0 \\ 2 \cos \alpha & 0 \\ -2 \sin \alpha & -\sin \beta \\ 2 \cos \alpha & \cos \beta \end{pmatrix},$$

quindi

$$\nabla^t \Phi \nabla \Phi = \begin{pmatrix} 8 & 2 \cos(\alpha - \beta) \\ 2 \cos(\alpha - \beta) & 1 \end{pmatrix},$$

e dunque

$$J\Phi = \sqrt{\det(\nabla^t \Phi \nabla \Phi)} = 2\sqrt{2 - \cos^2(\alpha - \beta)} = 2\sqrt{1 + \sin^2(\alpha - \beta)}.$$

Calcolo infine l'area di Σ :

$$\begin{aligned} \sigma_2(\Sigma) &= \int_D J\Phi(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sin^2(\alpha - \beta)} d\alpha \right) d\beta \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sin^2 s} ds \right) d\beta = 4\pi \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sin^2 s} ds \end{aligned}$$

(nel secondo passaggio ho usato il cambio di variabile $s = \alpha - \beta$, e il fatto che l'integrale di una funzione 2π -periodica su ogni intervallo di lunghezza 2π è lo stesso).

7 Data $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ in $L^1 \cap L^2$, e $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ in C_c^1 , consideriamo il problema (P) dato dalla condizione iniziale $u(0, \cdot) = u_0(\cdot)$ e dall'equazione $u_t = u * \rho$.¹ Dimostrare che:

- a) (P) ammette una soluzione $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continua, C^∞ in t , con $u(t, \cdot)$ limitata per ogni t ;
- b) Data $u : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ soluzione di (P) continua, C^1 in t , e tale che $\|u(t, \cdot)\|_2$ è localmente limitata in t , allora vale la stima alla Gronwall $\|u(t, \cdot)\|_2 \leq \|u_0\|_2 \exp(\|\rho\|_1 |t|)$.²

SOLUZIONE. Nella risoluzione di questo esercizio userò i seguenti fatti, che seguono facilmente dalle ipotesi su u_0 e ρ e da risultati noti:

$$\widehat{u}_0 \in L^1 \cap L^2, \quad \widehat{\rho} \in L^\infty \cap L^2. \tag{4}$$

a) Risolvo formalmente (P) applicando la trasformata di Fourier all'incognita u rispetto alla variabile x . Così facendo l'equazione $u_t = u * \rho$ diventa $(\widehat{u})_t = \widehat{\rho} \widehat{u}$, e la condizione iniziale $u(0, \cdot) = u_0(\cdot)$ diventa $\widehat{u}(0, \cdot) = \widehat{u}_0(\cdot)$. In altre parole la funzione $\widehat{u}(\cdot, y)$ risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{z} = \widehat{\rho}(y) z, \\ z(0) = \widehat{u}_0(y), \end{cases}$$

e dunque

$$\widehat{u}(t, y) = \widehat{u}_0(y) \exp(t \widehat{\rho}(y)). \tag{5}$$

Applicando la formula di inversione ottengo quindi la seguente formula risolutiva:

$$u = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}^* \left(\underbrace{\widehat{u}_0 \exp(t \widehat{\rho})}_w \right), \tag{6}$$

dove l'antitrasformata viene fatta rispetto alla variabile y (cioè la variabile di \widehat{u}_0 e $\widehat{\rho}$).

Dimostro ora i seguenti enunciati: *la funzione u data in (6)*

- (i) è ben definita su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e soddisfa $|u(t, x)| \leq \frac{1}{2\pi} \|\widehat{u}_0\|_1 \exp(\|\widehat{\rho}\|_\infty |t|)$,
- (ii) è continua e C^∞ in t ,
- (iii) soddisfa la condizione iniziale $u(0, \cdot) = u_0(\cdot)$,
- (iv) soddisfa l'equazione $u_t = u * \rho$.

(i) Per ogni $t \in \mathbb{R}$ vale che

$$\|w(t, \cdot)\|_1 \leq \|\widehat{u}_0\|_1 \|\exp(t \widehat{\rho})\|_\infty \leq \|\widehat{u}_0\|_1 \exp(\|\widehat{\rho}\|_\infty |t|),$$

quindi (4) implica che $v(t, \cdot)$ appartiene a L^1 e pertanto $u(t, \cdot)$ è ben definita in ogni punto e continua. Inoltre, ricordando che l'usuale stima per la norma del sup della trasformata vale anche per l'antitrasformata,

$$2\pi \|u(t, \cdot)\|_\infty = \|\mathcal{F}^*(w(t, \cdot))\|_\infty \leq \|w(t, \cdot)\|_1 \leq \|\widehat{u}_0\|_1 \exp(\|\widehat{\rho}\|_\infty |t|).$$

(ii) Basta dimostrare che u è continua e C^∞ in t su $[-m, m] \times \mathbb{R}$ per ogni $m > 0$. La dimostrazione la ottengo applicando iterativamente il risultato visto nell'esercizio 5 con l'antitrasformata al posto della trasformata e $D^k v$ al posto di u ; a questo scopo osservo che per ogni $k = 0, 1, \dots$ vale la dominazione

$$|D_t^k w(t, y)| = |\widehat{u}_0(y) \exp(t \widehat{\rho}(y)) (\widehat{\rho}(y))^k| \leq \exp(m \|\widehat{\rho}\|_\infty) \|\widehat{\rho}\|_\infty^k |\widehat{u}_0(y)|.$$

(iii) Siccome u_0 e \widehat{u}_0 appartengono a L^1 e u_0 è continua, per la formula di inversione ho che

$$\widehat{u}_0 = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}^*(\widehat{u}_0) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}^*(w(0, \cdot)) = u(0, \cdot).$$

(iv) La funzione w in (6) soddisfa l'equazione

$$w_t = \widehat{\rho} w,$$

ed applicando l'antitrasformata ottengo

$$\mathcal{F}^*(w_t) = \mathcal{F}^*(\widehat{\rho} w) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}^*(\widehat{\rho}) * \mathcal{F}^*(w) = \rho * (2\pi u). \tag{7}$$

¹ Qui $*$ rappresenta la convoluzione nella variabile x .

² Potrebbe essere utile la seguente variante del lemma di Gronwall: data $v : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ continua e $m \in \mathbb{R}$ tale che $v(t) \leq v(0) + m \int_0^t v(s) ds$ per ogni t , allora $v(t) \leq v(0) \exp(mt)$ per ogni t .

(Nel secondo passaggio ho usato la formula $\widehat{g_1 g_2} = \frac{1}{2\pi} \widehat{g_1} * \widehat{g_2}$ con l'antitrasformata al posto della trasformata e $g_1 := \widehat{\rho}$, $g_2 := w(t, \cdot)$; ho potuto farlo perché $\widehat{\rho} \in L^2$ e $w(t, \cdot) \in L^2$, cosa che segue dal fatto che $\widehat{u_0} \in L^2$ e $\exp(t\widehat{\rho}) \in L^\infty$. Nel terzo passaggio ho usato la definizione di u e la formula di inversione in L^2 .)

Infine l'identità $u_t = u * \rho$ segue dalla (7) e dal fatto che $\mathcal{F}^*(v_t) = (\mathcal{F}^*v)_t = 2\pi u_t$ per quanto visto nell'esercizio 5.

b) Mi limito a dimostrare la stima per $t \geq 0$. Per ogni $t \geq 0$ pongo

$$v(t) := \|u(t, \cdot)\|_2^2$$

e dimostro che $v(t)$ soddisfa le ipotesi del lemma di Gronwall. Preso infatti $t > 0$ si ha che

$$v(t) - v(0) \leq 2\|\rho\|_1 \int_0^t v(s) ds. \tag{8}$$

Infatti

$$\begin{aligned} v(t) - v(0) &= \int_{\mathbb{R}} u^2(t, x) - u^2(0, x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^t 2u(s, x) u_t(s, x) ds \right) dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^t 2|u(s, x)| |u_t(s, x)| ds \right) dx \\ &= 2 \int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}} |u(s, x)| |u_t(s, x)| dx \right) ds \\ &= 2 \int_0^t \|u(s, \cdot)\|_2 \|u_t(s, \cdot)\|_2 ds \\ &= 2 \int_0^t \|u(s, \cdot)\|_2^2 \|\rho\|_1 ds = 2\|\rho\|_1 \int_0^t v(s) ds \end{aligned}$$

(nel secondo passaggio ho usato il fatto che $(u^2)_t = 2u u_t$ e il teorema fondamentale del calcolo integrale, nel quarto il teorema di Fubini, nel quinto la disuguaglianza di Hölder, infine nel sesto l'identità $u_t = u * \rho$ e la stima generale $\|g_1 * g_2\|_2 \leq \|g_1\|_2 \|g_2\|_1$).

Sostanzialmente allo stesso modo si dimostra la seguente generalizzazione di (8): per ogni $t_0 < t_1$

$$|v(t_1) - v(t_0)| \leq 2\|\rho\|_1 \int_{t_0}^{t_1} v(s) ds$$

e quindi l'ipotesi che $\|u(t, \cdot)\|_2$ è localmente limitata in t implica che v è localmente Lipschitziana, e in particolare è continua.

Una volta dimostrato che v è continua e soddisfa (8), usando il lemma di Gronwall ottengo

$$v(t) \leq v(0) \exp(2\|\rho\|_1 t),$$

e la tesi segue prendendo la radice quadrata di entrambi i termini.

OSSERVAZIONI. (i) Partendo dalla formula (6) uno sarebbe tentato di scrivere

$$u(t, \cdot) := u_0 * g(t, \cdot) \quad \text{con} \quad g(t, \cdot) := \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}^*(\exp(t\widehat{\rho})).$$

Purtroppo la funzione $\exp(t\widehat{\rho})$ tende a 1 per $x \rightarrow \pm\infty$ e dunque non appartiene né a L^1 né a L^2 , e la definizione di g è mal posta.

(ii) È facile vedere che la soluzione data dalla formula (6) soddisfa la stima alla Gronwall in b), e avendo un teorema di unicità per (P) questo sarebbe sufficiente per dimostrare il punto b). Un modo per dimostrare il teorema di unicità è far vedere che $(\widehat{u})_t = \widehat{u} * \rho$, ma questo richiede sapere che $u(t, \cdot)$ appartiene a L^1 , e che vale l'identità $\widehat{u}_t = (\widehat{u})_t$, che a sua volta richiede una dominazione su u_t che manca.

In realtà si procede spesso al contrario, e si usano le stima alla Gronwall per dimostrare l'unicità.

(iii) Una dimostrazione alternativa del punto b) è la seguente: per il teorema fondamentale del calcolo

$$u(t, x) = u(0, x) + \int_0^t u_t(s, x) dx,$$

quindi

$$\begin{aligned} \|u(t, \cdot)\|_2 &\leq \|u(0, \cdot)\|_2 + \left\| \int_0^t u_t(s, \cdot) ds \right\|_2 \\ &\leq \|u(0, \cdot)\|_2 + \int_0^t \|u_t(s, \cdot)\|_2 ds \leq \|u(0, \cdot)\|_2 + \|\rho_1\| \int_0^t \|u(s, \cdot)\|_2 ds, \end{aligned}$$

e da questa disuguaglianza si conclude usando il lemma di Gronwall. Tuttavia, anche se il secondo passaggio è corretto, non mi sembra seguire da un argomento elementare.

(iv) Una dimostrazione alternativa del punto a), proposta da uno dei presenti e molto più semplice ed elegante di quella data sopra, è la seguente: riparto dalla formula (5) della risoluzione formale e scrivo l'esponenziale come serie di potenze:

$$\begin{aligned} \widehat{u}(t, \cdot) &= \widehat{u}_0 \exp(t\widehat{\rho}) = \widehat{u}_0 \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \widehat{\rho}^n \right) \\ &= \widehat{u}_0 \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \widehat{\rho}_n \right) \quad \text{dove} \quad \rho_n := \underbrace{\rho * \dots * \rho}_{n \text{ volte}} \\ &= \mathcal{F} \left(u_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} u_0 * \rho_n \right) \end{aligned}$$

(nel terzo e quarto passaggio ho usato ripetutamente l'identità $\widehat{g}_1 \widehat{g}_2 = \widehat{g_1 * g_2}$). Questo suggerisce la seguente formula risolutiva:

$$u(t, \cdot) := u_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \underbrace{u_0 * \rho_n}_{u_n}. \tag{9}$$

A questo punto è facile far vedere che se u_0 è continua e limitata allora la serie delle funzioni u_n in (9) converge totalmente su $[-r, r] \times \mathbb{R}$ per ogni $r > 0$, e lo stesso vale per la serie delle derivate $D_t^h u_n$ per qualunque $h = 1, 2, \dots$

Questo dimostra che la funzione u è ben definita su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, continua, e C^∞ in t .

Inoltre

$$\begin{aligned} u_t &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} u_0 * \rho_n = u_0 * \rho + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} u_0 * \rho_{n-1} * \rho \\ &= \rho * \left(u_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} u_0 * \rho_{n-1} \right) = \rho * u, \end{aligned}$$

dove nel secondo passaggio ho scritto ρ_n come $\rho_{n-1} * \rho$ per ogni $n \geq 2$, e nel terzo ho raccolto il fattore ρ . Attenzione: per quest'ultimo passaggio ho bisogno della seguente versione della proprietà distributiva del prodotto di convoluzione: data una serie di funzioni g_n , continue e limitate su \mathbb{R} , che converge totalmente e $\rho \in L^1(\mathbb{R})$, allora

$$\rho * \left(\sum_n g_n \right) = \sum_n \rho * g_n.$$

- 1] Scrivere la funzione $u_0(x) := \sin x \cos^2 x$ in serie di seni su $[0, \pi]$.

SOLUZIONE. Scrivendo seno e coseno in termini di esponenziali complessi ottengo:

$$\begin{aligned} u_0(x) &= \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) \left(\frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \right)^2 \\ &= \frac{1}{8i}(e^{3ix} - e^{-3ix}) + \frac{1}{8i}(e^{ix} - e^{-ix}) = \frac{1}{4} \sin(3x) + \frac{1}{4} \sin x. \end{aligned}$$

Quindi i coefficienti della serie in seni di u_0 sono dati da $b_n = \frac{1}{4}$ per $n = 1, 3$, e $b_n = 0$ altrimenti.

- 2] Sia $R := [-1, 1] \times [0, 1]$ e sia V il sottospazio di $L^2(R)$ generato dalle funzioni $x_1 x_2, x_1^2, x_2^2$. Determinare la proiezione ortogonale su V della funzione costante 1.

SOLUZIONE. La proiezione in questione deve essere della forma

$$u(x) = ax_1 x_2 + bx_1^2 + cx_2^2$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$, e deve soddisfare $1 - u \perp V$, cioè deve essere soddisfatto il seguente sistema

$$\begin{cases} 0 = \langle u - 1; x_1 x_2 \rangle = \int_R (ax_1 x_2 + bx_1^2 + cx_2^2 - 1) x_1 x_2 dx = \frac{2}{9} a, \\ 0 = \langle u - 1; x_1^2 \rangle = \int_R (ax_1 x_2 + bx_1^2 + cx_2^2 - 1) x_1^2 dx = \frac{2}{5} b + \frac{2}{9} c - \frac{2}{3}, \\ 0 = \langle u - 1; x_2^2 \rangle = \int_R (ax_1 x_2 + bx_1^2 + cx_2^2 - 1) x_2^2 dx = \frac{2}{9} b + \frac{2}{5} c - \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Risolvendolo ottengo $a = 0$ e $b = c = \frac{15}{14}$, e quindi la proiezione cercata è

$$u(x) = \frac{15}{14}(x_1^2 + x_2^2).$$

- 3] Data u in $L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ dimostrare che la funzione $v(x_1, x_2) := u(x_1 + x_2) u(x_1 - x_2)$ appartiene a $L^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{C})$ e calcolarne la TdF in termini di quella di u .

SOLUZIONE. Calcolo la norma L^1 di v usando il cambio di variabile $s_1 := x_1 + x_2$ e $s_2 := x_1 - x_2$ (e il fatto che $ds = 2 dx$):

$$\|v\|_1 = \int_{\mathbb{R}^2} |u(x_1 + x_2)| |u(x_1 - x_2)| dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |u(s_1)| |u(s_2)| ds = \frac{1}{2} \|u\|_1^2.$$

Calcolo la TdF di v usando lo stesso cambio di variabile:

$$\begin{aligned} \hat{v}(y) &:= \int_{\mathbb{R}^2} u(x_1 + x_2) u(x_1 - x_2) \exp(-iy_1 x_1 - iy_2 x_2) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} u(s_1) u(s_2) \exp\left(-\frac{i}{2}(y_1 + y_2)s_1 - \frac{i}{2}(y_1 - y_2)s_2\right) ds \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_{\mathbb{R}} u(s_1) \exp\left(-\frac{i}{2}(y_1 + y_2)s_1\right) ds_1 \right] \left[\int_{\mathbb{R}} u(s_2) \exp\left(-\frac{i}{2}(y_1 - y_2)s_2\right) ds_2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \hat{u}\left(\frac{1}{2}(y_1 + y_2)\right) \hat{u}\left(\frac{1}{2}(y_1 - y_2)\right) \end{aligned}$$

(nel secondo passaggio ho usato che $x_1 = \frac{1}{2}(s_1 + s_2)$, $x_2 = \frac{1}{2}(s_1 - s_2)$, e $ds = 2 dx$; nel terzo passaggio ho usato il teorema di Fubini—posso farlo perché u appartiene a L^1).

- 4] Sia Σ l'insieme dei punti $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ottenuto ruotando la curva nel piano xy di equazione $y(1 + x^4) = 1$ attorno all'asse x .

a) Dimostrare che Σ è una superficie senza bordo di classe C^∞ .

b) Dire per quali $p \in [1, +\infty)$ la funzione $f(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2$ appartiene a $L^p(\Sigma)$.

SOLUZIONE. a) L'equazione di Σ si ottiene sostituendo la y nell'equazione della curva con la distanza del punto (x, y, z) dall'asse delle x , vale a dire $\sqrt{y^2 + z^2}$; in questo modo ottengo

$$\sqrt{y^2 + z^2} (1 + x^4) = 1,$$

ovvero Σ è il luogo di zeri della funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$f(x, y, z) := (y^2 + z^2)(1 + x^4)^2 - 1.$$

Questa funzione è di classe C^∞ (è un polinomio!) e per concludere mi basta verificare che il suo gradiente non si annulla mai su Σ . Dato infatti un punto (x, y, z) in cui il gradiente

$$\nabla f(x, y, z) = (8x^3(y^2 + z^2)(1 + x^4), 2y(1 + x^4)^2, 2z(1 + x^4)^2)$$

è nullo, in particolare sono nulle le ultime due coordinate, e quindi $y = z = 0$. Ma in tal caso $f(x, y, z) = -1$, cosa che non si verifica per i punti di Σ .

b) Fissato $x \in \mathbb{R}$, l'insieme dei punti (x, y) tali che $(x, y, z) \in \Sigma$ è una circonferenza centrata nell'origine con raggio $r(x) = \frac{1}{1+x^4}$.

Pertanto Σ è parametrizzata dalla mappa $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da

$$\Phi(x, \alpha) := (x, r(x) \cos \alpha, r(x) \sin \alpha),$$

e per la precisione Φ è una bigezione da $\mathbb{R} \times [0, 2\pi)$ in Σ .

Per calcolare la norma L^p di f mi serve il determinante Jacobiano $J\Phi$: osservo che

$$\nabla \Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dot{r}(x) \cos \alpha & -r(x) \sin \alpha \\ \dot{r}(x) \sin \alpha & r(x) \cos \alpha \end{pmatrix},$$

e scrivendo $J\Phi$ in termini dei determinanti dei minori 2×2 di $\nabla \Phi$ ottengo

$$\begin{aligned} J\Phi &= \sqrt{(-r(x) \sin \alpha)^2 + (r(x) \cos \alpha)^2 + (\dot{r}(x) r(x))^2} \\ &= r(x) \sqrt{1 + (\dot{r}(x))^2} = \frac{1}{1+x^4} \underbrace{\sqrt{1 + \frac{16x^6}{(1+x^4)^4}}}_{m(x)}. \end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^p(\Sigma)}^p &= \int_{\Sigma} |x^2 + y^2 + z^2|^p d\sigma_2(x, y, z) \\ &= \int_D |x^2 + (r(x))^2|^p J\Phi(x, \alpha) dx d\alpha = 2\pi \int_{\mathbb{R}} |x^2 + (r(x))^2|^p m(x) dx. \end{aligned}$$

Ora, tenendo conto che $m(x) \sim \frac{1}{x^4}$ e $x^2 + (r(x))^2 \sim x^2$ per $x \rightarrow \pm\infty$, l'ultimo integrale improprio si comporta come

$$\int_1^{+\infty} x^{2p-4} dx,$$

e in particolare la norma $\|f\|_{L^p(\Sigma)}^p$ è finita se e solo se $2p - 4 < -1$, ovvero $p < \frac{3}{2}$.

5 Sia $H := L^2([0, 1])$, e per ogni $k = 0, \dots, 3$ sia D_k il sottospazio delle funzioni $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^4 tali che $u(0) = u(1) = 0$ e $D^k u(0) = D^k u(1) = 0$, e sia $T : D_k \rightarrow H$ l'operatore lineare dato da $Tu := D^4 u$.

a) Dire per quali $k = 0, \dots, 3$ l'operatore T è autoaggiunto.

b) Per tali k , dire se T è (semi-) definito (positivo o negativo), o altro.

SOLUZIONE. a) Date $u, v \in D_0$, integrando per parti due volte ottengo

$$\langle Tu; v \rangle = \int_0^1 D^4 u v dx = \underbrace{\left| D^3 u v \right|_0^1}_0 - \int_0^1 D^3 u Dv dx = -\left| \ddot{u} \dot{v} \right|_0^1 + \int_0^1 \ddot{u} \ddot{v} dx \quad (1)$$

(il termine di bordo della prima integrazione per parti è nullo perché $v \in D_0$). Applicando questa formula a $\langle u; Tv \rangle$ ottengo quindi

$$\langle Tu; v \rangle - \langle u; Tv \rangle = \left| \dot{u} \ddot{v} - \ddot{u} \dot{v} \right|_0^1. \quad (2)$$

Osservo ora che questa identità vale anche per $u, v \in D^k$ con $k = 1, 2, 3$, perché questi spazi sono contenuti in D_0 , e inoltre il termine di destra della (2) è sempre nullo per $k = 1$ e per $k = 2$, ovvero T è autoaggiunto per tali k .

Per concludere dimostro che T non è autoaggiunto per $k = 0$ e $k = 3$. Siccome D_3 è contenuto in D_0 , mi basta esibire $u, v \in D_3$ tali che il termine di destra di (2) è diverso da zero. Per esempio

$$u(x) := x^2 - x, \quad v(x) := (\sin(\pi x))^2.$$

Per vedere che $u \in D_3$ basta un semplice calcolo; per vedere che $v \in D_3$ osservo che lo sviluppo di Taylor di ordine 3 di v in 0 è

$$v(x) = (\pi x + O(x^3))^2 = \pi^2 x^2 + O(x^4),$$

e da questo segue che $v(0) = D^3 v(0) = 0$; inoltre v è simmetrica rispetto a $x = \frac{1}{2}$, e quindi vale anche $v(1) = D^3 v(1) = 0$.

Per vedere che il termine di destra di (2) è diverso da zero osservo che, sempre per lo sviluppo dato sopra, $\dot{v}(0) = 0$ e $\ddot{v}(0) = 2\pi^2$, e per la simmetria rispetto a $x = \frac{1}{2}$ vale anche $\dot{v}(1) = 0$ e $\ddot{v}(1) = 2\pi^2$; inoltre un semplice calcolo mostra che $\dot{u}(0) = -1$ e $\dot{u}(1) = 1$, e quindi

$$\left| \dot{u} \ddot{v} - \ddot{u} \dot{v} \right|_0^1 = \left| \dot{u} \ddot{v} \right|_0^1 = 4\pi^2.$$

b) Data $u \in D_k$ con $k = 1, 2$, l'identità (1) dà

$$\langle Tu; u \rangle = \int_0^1 \ddot{u}^2 dx, \tag{3}$$

e dunque T è semi-definito positivo. In effetti T è anche definito positivo: se infatti $\langle Tu; u \rangle = 0$ allora $\ddot{u} = 0$, da cui segue che u è un polinomio di grado ≤ 1 , e la condizione $u(0) = u(1) = 0$ implica $u = 0$.

OSSERVAZIONI. Un altro modo per far vedere che T non è autoaggiunto nei casi $k = 0$ e $k = 3$, ovvero per esibire due funzioni $u, v \in D_3$ tali che il termine di destra dell'identità (2) non è nullo, basta sapere che si può trovare una funzione u per cui i valori $D^h u(x)$ con $h = 0, \dots, 3$ e $x = 0, 1$ sono arbitrariamente prescritti. Questo è un caso particolare del seguente fatto più generale (che è un semplice esercizio di algebra lineare): scelti dei punti distinti $x_i \in \mathbb{R}$ con $i = 1, \dots, n$ e dei numeri $a_{ij} \in \mathbb{R}$ con $i = 1, \dots, n$ e $j = 0, \dots, m$, esiste un polinomio p di grado al più $n(m+1)$ tale che $D^j p(x_i) = a_{ij}$ per ogni i, j .

6 Dato $k = 0, 1, \dots$, sia $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^k e sia ρ una funzione in $L^1(\mathbb{R})$ con supporto compatto. Dimostrare che:

- a) il prodotto di convoluzione $\rho * u$ è ben definito e appartiene a C^k ;
- b) se $\int_{\mathbb{R}} x^h \rho(x) dx = 0$ per $h = 0, \dots, k-1$, allora per ogni $x \in \mathbb{R}$ vale che

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\delta^k} \sigma_\delta \rho * u(x) = m D^k u(x) \quad \text{dove} \quad m := \frac{(-1)^k}{k!} \int_{\mathbb{R}} x^k \rho(x) dx = 0.$$

SOLUZIONE. a) Comincio dal caso $k = 0$: fisso $x \in \mathbb{R}$ e prendo $r > 0$ tale che l'intervallo $[-r, r]$ contiene il supporto di ρ ; allora

$$|u * \rho|(x) = \int_{-r}^r |u(x-y)| |\rho(y)| dy \leq \|u\|_{L^\infty([-r, x+r])} \|\rho\|_{L^1(\mathbb{R})} < +\infty,$$

e per un lemma visto a lezione questo implica che $u * \rho(x)$ esiste ed è finito. Dunque la funzione $u * \rho$ è definita (e finita) ovunque. Faccio ora vedere che è continua: data una successione x_n che converge a x per $n \rightarrow +\infty$, per il teorema di convergenza dominata si ha

$$u * \rho(x_n) = \int_{\mathbb{R}} u(x_n - y) \rho(y) dy \rightarrow \int_{\mathbb{R}} u(x - y) \rho(y) dy = u * \rho(x).$$

Per la precisione, la convergenza puntuale segue dalla continuità di u , mentre la dominazione è

$$|u(x_n - y) \rho(y)| \leq \|u\|_{L^\infty([-m-r, m+r])} |\rho(y)|$$

dove m è scelto in modo che $[-m, m]$ contiene tutti i punti x_n .

Dimostro ora il caso $k = 1$. Osservo per cominciare che le funzioni $u * \rho$ e $\dot{u} * \rho$ sono ben definite e continue su tutto \mathbb{R} grazie al caso $k = 0$. Dimostro ora che per ogni $x_0 < x_1$ vale

$$\int_{x_0}^{x_1} \dot{u} * \rho(s) ds = u * \rho(x_1) - u * \rho(x_0),$$

e quindi $u * \rho$ è di classe C^1 e $\dot{u} * \rho$ è la derivata di $u * \rho$ per via del teorema fondamentale del calcolo integrale. In effetti

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} \dot{u} * \rho(s) ds &= \int_{x_0}^{x_1} \left(\int_{\mathbb{R}} \dot{u}(s-y) \rho(y) dy \right) ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{x_0}^{x_1} \dot{u}(s-y) ds \right) \rho(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} (u(x_1-y) - u(x_0-y)) \rho(y) dy = u * \rho(x_1) - u * \rho(x_0). \end{aligned}$$

Attenzione: nel secondo passaggio ho usato il teorema di Fubini, e ho potuto farlo perché

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} \left(\int_{\mathbb{R}} |\dot{u}(s-y)| |\rho(y)| dy \right) ds &= \int_{x_0}^{x_1} \left(\int_{-r}^r |\dot{u}(s-y)| |\rho(y)| dy \right) ds \\ &\leq \int_{x_0}^{x_1} \|\dot{u}\|_{L^\infty([x_0-r, x_1+r])} \left(\int_{-r}^r |\rho(y)| dy \right) ds \\ &\leq |x_1 - x_0| \|\dot{u}\|_{L^\infty([x_0-r, x_1+r])} \|\rho\|_{L^1(\mathbb{R})} < +\infty. \end{aligned}$$

Infine il caso k arbitrario si dimostra facilmente per induzione su k .

b) Fissato $x \in \mathbb{R}$, posso scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine k di u in x come

$$u(x+s) = \sum_{h=0}^k D^h u(x) \frac{s^h}{h!} + s^k \omega(s) \tag{4}$$

dove $\omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua nulla in 0. Pertanto, per ogni $\delta > 0$,

$$\begin{aligned} \sigma_\delta \rho * u(x) &= \int_{\mathbb{R}} u(x-y) \sigma_\delta \rho(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} u(x-\delta t) \rho(t) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{h=0}^k D^h u(x) \frac{(-\delta t)^h}{h!} + (-\delta t)^k \omega(-\delta t) \right) \rho(t) dt \\ &= \sum_{h=0}^k D^h u(x) \frac{(-\delta)^h}{h!} \int_{\mathbb{R}} t^h \rho(t) dt + (-\delta)^k \int_{\mathbb{R}} t^k \omega(-\delta t) \rho(t) dt \\ &= \delta^k \left[m D^k u(x) + (-1)^k \int_{\mathbb{R}} t^k \omega(-\delta t) \rho(t) dt \right] \end{aligned}$$

(nel secondo passaggio ho usato il cambio di variabile $y = \delta t$, nel terzo ho usato la formula (4), e nel quinto l'ipotesi che $\int_{\mathbb{R}} t^h \rho(t) dt = 0$ per $h < k$ e la definizione di m).

Dunque per dimostrare la tesi mi basta far vedere che l'ultimo integrale nella formula precedente tende a 0 per $\delta \rightarrow 0$. In effetti

$$\left| \int_{\mathbb{R}} t^k \omega(-\delta t) \rho(t) dt \right| \leq \int_{-r}^r |t|^k |\omega(-\delta t)| |\rho(t)| dt \leq r^k \|\rho\|_1 \sup_{|s| \leq r\delta} |\omega(s)|,$$

e chiaramente il sup nell'ultimo termine tende a 0 per $\delta \rightarrow 0$ perché ω è continua e nulla in 0.

7 Sia (P) il problema dato dall'equazione $u_t = -D_x^4 u$ sull'intervallo spaziale $[0, \pi]$ con le condizioni al bordo $u(\cdot, 0) = u(\cdot, \pi) = 0$ e la condizione iniziale $u(0, \cdot) = u_0$, dove u_0 è data nell'esercizio 1.

a) Trovare una soluzione u .

b) Discutere l'unicità di tale soluzione. [Suggerimento: considerare il problema con la condizione al bordo aggiuntiva $D_x^2 u(t, 0) = D_x^2 u(t, \pi) = t$.]

SOLUZIONE. a) Scrivo l'incognita u in serie di seni nella variabile x , vale a dire

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin(nx)$$

dove $b_n(t)$ sono i coefficienti della serie in seni di $u(t, \cdot)$.

Per via della condizione al bordo $u(\cdot, 0) = u(\cdot, \pi) = 0$, i coefficienti di $D_x^2 u(t, \cdot)$ sono $-n^2 b_n(t)$. Aggiungendo l'ulteriore condizione al bordo

$$D_x^2 u(\cdot, 0) = D_x^2 u(\cdot, \pi) = 0 \tag{5}$$

ottengo che i coefficienti di $D_x^4 u(t, \cdot)$ sono $n^4 b_n(t)$.

Pertanto, se u soddisfa l'equazione $u_t = -D_x^4 u$ e la condizione iniziale $u(0, \cdot) = u_0$, allora i coefficienti b_n risolvono il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = n^4 y \\ y(0) = b_n^0 \end{cases}$$

dove b_n^0 sono i coefficienti della serie di seni del dato iniziale u_0 . Per quanto visto nell'esercizio 1, $b_1^0 = b_3^0 = \frac{1}{4}$ e $b_n^0 = 0$ per $n \neq 1, 3$, e risolvendo questo problema di Cauchy ottengo

$$b_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{4} e^{-t} & \text{per } n = 1, \\ \frac{1}{4} e^{-81t} & \text{per } n = 3, \\ 0 & \text{per } n \neq 1, 3. \end{cases}$$

Mi aspetto quindi che una soluzione di (P) sia

$$u(t, x) = \frac{1}{4} e^{-t} \sin x + \frac{1}{4} e^{-81t} \sin(3x).$$

In effetti u è una funzione di classe C^∞ definita su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ che risolve il problema (P) con la condizione al bordo aggiuntiva (5).

b) Un modo per far vedere che la soluzione trovata al punto a) non è unica è dimostrare l'esistenza di una soluzione di (P) che soddisfa un'ulteriore condizione al bordo incompatibile con (5), per esempio

$$D_x^2 u(t, 0) = D_x^2 u(t, \pi) = t \tag{6}$$

per ogni t . Indico con (P') il problema dato da (P) più la condizione (6). Per risolverlo, scelgo una funzione regolare v_0 che soddisfa entrambe le condizioni al bordo in (P') , per esempio

$$v_0(t, x) := \frac{1}{2} t(x^2 - \pi x),$$

e scrivo l'incognita u nella forma

$$u = v + v_0 + u_0,$$

dove v è la nuova incognita. Si vede subito con questo cambio di variabile

- l'equazione $u_t = -D_x^4 u$ diventa $v_t = -D_x^4 v + \varphi$ con $\varphi := -D_t v_0 = \frac{1}{2}(\pi x - x^2)$,
- v soddisfa la condizioni al bordo in (P) e la (5),
- la condizione iniziale $u(0, \cdot) = u_0$ diventa $v(0, \cdot) = 0$.¹

Chiamo (P'') questo problema, e cerco una soluzione scrivendo v in serie di seni rispetto alla variabile x , come fatto in precedenza con la u . In questo caso si ottiene che ogni coefficiente $b_n(\cdot)$ di v deve risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = n^4 y + c_n \\ y(0) = b_n^0 \end{cases}$$

dove c_n sono i coefficienti della serie in seni di $\varphi = \frac{1}{2}(\pi x - x^2)$, e quindi

$$b_n(t) = \frac{c_n}{n^4} (1 - e^{-n^4 t}).$$

¹ Ho scelto la funzione v_0 nel cambio di variabile in modo da passare dalla condizione al bordo (6) alla (5), che è compatibile con l'uso dello sviluppo in serie di seni. Ho inserito anche u_0 in modo da avere la condizione iniziale $v(0, \cdot) = 0$, ma anche il cambio di variabile $u = v + v_0$ sarebbe andato bene.

Pertanto una soluzione di (P'') dovrebbe essere

$$v(t, x) := \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{c_n}{n^4} (1 - e^{-n^4 t})}_{v_n} \sin(nx). \quad (7)$$

Per concludere dimostro il seguente enunciato: *la funzione v in (7)*

- (i) *è ben definita e continua su $R := [0, +\infty) \times \mathbb{R}$,*
- (ii) *è di classe C^1 in t e C^5 in x su R ,*
- (iii) *risolve (P'') .*

Per la dimostrazione utilizzo che

$$c_n := \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{1}{2} (\pi x - x^2) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi n^2} \int_0^\pi \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi n^3} (1 - (-1)^n)$$

(nel secondo passaggio ho integrato due volte per parti), ed in particolare

$$c_n = O\left(\frac{1}{n^3}\right) \quad \text{per } n \rightarrow +\infty.$$

Osservo ora che

$$\|v_n\|_{L^\infty(R)} \leq \frac{|c_n|}{n^4} = O\left(\frac{1}{n^7}\right),$$

quindi la serie in (7) converge totalmente su R , e questo implica (i).

Per dimostrare (ii) osservo che per $h = 1, 2, \dots$ vale

$$D_t^h v_n = \pm \frac{c_n}{n^{4-4h}} e^{-n^4 t} \sin(nx),$$

quindi

$$\|D_t^h v_n\|_{L^\infty(R)} \leq |c_n| = O\left(\frac{1}{n^{7-4h}}\right),$$

quindi la serie delle derivate $D_t^h v_n$ converge totalmente su R per $h = 1$, quindi v è C^1 in t .

Inoltre, per $k = 1, 2, \dots$,

$$D_x^k v_n = \frac{c_n}{n^{4-k}} (1 - e^{-n^4 t}) g_k(nx)$$

dove $g_k(s) = \pm \sin s$ oppure $g_k(s) = \pm \cos s$; quindi

$$\|D_x^k v_n\|_{L^\infty(R)} \leq \frac{|c_n|}{n^{4-k}} = O\left(\frac{1}{n^{7-k}}\right),$$

quindi la serie delle derivate $D_x^k v_n$ converge totalmente su R per $k \leq 5$, quindi v è C^5 in x .

La dimostrazione dell'enunciato (iii) è la solita, e la ometto.

- 8** a) Dimostrare che per ogni $u \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ vale $\|\widehat{u}\|_4^4 = \|(\widehat{u})^2\|_2^2 = 2\pi \|u * u\|_2^2$.
 b) Dimostrare che per ogni $u \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ vale $\|\widehat{u}\|_4 \leq \sqrt[4]{2\pi} \|u\|_{4/3}$.
 c) Definire la TdF per le funzioni in $L^{4/3}(\mathbb{R}; \mathbb{C})$.

SOLUZIONE. a) Si tratta di un semplice calcolo:

$$\|\widehat{u}\|_4^4 = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{u}|^4 dy = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{u}^2|^2 dy = \|\widehat{u}^2\|_2^2 = \|\widehat{u * u}\|_2^2 = 2\pi \|u * u\|_2^2.$$

(Nel secondo passaggio ho usato che $|z|^2 = |z^2|$ per ogni $z \in \mathbb{C}$, nel quarto che $\widehat{u_1 u_2} = \widehat{u_1} * \widehat{u_2}$ per ogni $u_1, u_2 \in L^1$, e nel quinto l'identità di Plancherel.²)

b) Basta applicare la formula ottenuta al punto a) e la disuguaglianza di Young $\|u_1 * u_2\|_r \leq \|u_1\|_{p_1} \|u_2\|_{p_2}$ con $r = 2$, $p_1, p_2 = \frac{4}{3}$ (per questi valori vale infatti che $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$):

$$\|\widehat{u}\|_4^2 = \sqrt{2\pi} \|u * u\|_2 = \sqrt{2\pi} \|u\|_{4/3}^2.$$

c) Procedo come per la costruzione della TdF su L^2 : indico con D il sottospazio di $L^{4/3}$ dato da $D := L^1 \cap L^{4/3}$ ed osservo che, per via della stima in b), la restrizione della TdF \mathcal{F} a D è un operatore lineare e continuo da D (dotato della norma $L^{4/3}$) in L^4 . Inoltre D è denso in $L^{4/3}$, per esempio perché contiene l'insieme delle funzioni misurabili limitate e con supporto

² Per la precisione, uso che l'identità di Plancherel vale per ogni $u \in L^1$ (anche se a lezione è stata dimostrata solo per $u \in L^1 \cap L^2$).

limitato, che per quanto visto a lezione è denso in L^p per ogni $p \in [1, \infty)$, e quindi, sempre per un lemma visto a lezione, \mathcal{F} ammette un'estensione lineare e continua da $L^{4/3}$ in L^4 .

- 1** Sappiamo che $\|\widehat{u}\|_\infty \leq \|u\|_1$ per ogni $u \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$. Far vedere che questa stima è ottimale, cioè che non esiste alcuna costante $c < 1$ tale che $\|\widehat{u}\|_\infty \leq c\|u\|_1$ per ogni $u \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$.

SOLUZIONE. Basta trovare una funzione $u \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ tale che $\|\widehat{u}\|_\infty = \|u\|_1$. Per esempio

$$u(x) := \frac{1}{1+x^2}.$$

Infatti $\widehat{u}(y) = \pi e^{-|y|}$, e $\|\widehat{u}\|_\infty = \pi = \|u\|_1$.

OSSERVAZIONI. In effetti ogni funzione u reale e positiva soddisfa $\|\widehat{u}\|_\infty = \|u\|_1$, perché

$$\|\widehat{u}\|_\infty \geq |\widehat{u}(0)| \geq \widehat{u}(0) = \int_{\mathbb{R}} u(x) dx = \|u\|_1$$

(e siccome vale $\|\widehat{u}\|_\infty \leq \|u\|_1$, tutte le disuguaglianze devono essere uguaglianze).

- 2** Dato $a > 0$, sia $u_a : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione data da

$$u_a(x) := \frac{1}{1+|x|^2+|x|^a}.$$

Dire per quali $a > 0$ e $p \geq 1$ la funzione u_a appartiene a $L^p(\mathbb{R}^d)$.

SOLUZIONE. Usando la nota formula per l'integrale delle funzioni radiali ottengo

$$\|u_a\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(1+|x|^2+|x|^a)^p} dx = c_d \int_0^{+\infty} \frac{\rho^{d-1}}{(1+\rho^2+\rho^a)^p} d\rho$$

dove c_d indica il volume della sfera di raggio 1 in \mathbb{R}^d .

Osservo ora che il secondo integrale è improprio solo in $+\infty$, e che $1+\rho^2+\rho^a \sim \rho^{2 \vee a}$ per $\rho \rightarrow +\infty$, dove $2 \vee a := \max\{2, a\}$.¹ Pertanto il secondo integrale nella formula sopra e si comporta come

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\rho^{(2 \vee a)p-d+1}} d\rho,$$

e quindi è finito se e solo se $(2 \vee a)p - d + 1 > 1$, cioè $p > \frac{d}{2 \vee a}$.

In conclusione u appartiene a $L^p(\mathbb{R}^d)$ se e solo se $p > \frac{d}{2 \vee a}$.

- 3** Calcolare la trasformata di Fourier di $u(x) := \frac{1}{4x^2+4x+2}$.

SOLUZIONE. Osservo che

$$u(x) = \frac{1}{4x^2+4x+2} = \frac{1}{(2x+1)^2+1}.$$

Usando la formula $\widehat{\tau_h u} = e^{-ihy} \widehat{u}$ e la formula per la TdF di $\frac{1}{1+x^2}$ ottengo

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{(x+1)^2+1}\right) = \mathcal{F}\left(\tau_{-1} \frac{1}{x^2+1}\right) = e^{iy} \mathcal{F}\left(\frac{1}{x^2+1}\right) = \pi e^{iy-|y|},$$

e usando la formula $\widehat{\sigma_\delta u} = \widehat{u}(\delta y)$ ottengo

$$\widehat{u} = \mathcal{F}\left(\frac{1}{(2x+1)^2+1}\right) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{2} \sigma_{1/2} \frac{1}{(x+1)^2+1}\right) = \frac{\pi}{2} e^{(iy-|y|)/2}.$$

- 4** Sia $I := [0, 1]$ e sia D lo spazio delle funzioni $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 tali che $u(0) = \dot{u}(0) = 0$.
- Dimostrare che D è denso in $L^p(I)$ per ogni $p \in [1, \infty)$.
 - Determinare la chiusura di D nello spazio $C(I)$ delle funzioni continue su I .

SOLUZIONE. a) Sia $p \in [1, \infty)$. Abbiamo visto a lezione che $C^1(I)$ è denso in $L^p(I)$, e quindi basta dimostrare che D è denso in $C^1(I)$ rispetto alla norma L^p .

¹ Per $a = 2$ si deve aggiungere un fattore 2 a destra di \sim ; questa correzione non ha conseguenza.

Per farlo prendo una funzione $\varphi : [0, +\infty) \rightarrow [0, 1]$ di classe C^1 tale che

$$\varphi(x) = \dot{\varphi}(x) = 0 \text{ e } \varphi(x) = 1 \text{ per } |x| \geq 1.^2$$

Data quindi $u \in C^1(I)$ e $\delta > 0$, considero la funzione $u_\delta : I \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$u_\delta(x) := u(x) \varphi(x/\delta);$$

si verifica facilmente che u_δ appartiene a $C^1(I)$, e che $u_\delta(0) = \dot{u}_\delta(0) = 0$, e quindi u_δ appartiene a D ; resta da verificare che u_δ tende a u in L^p per $\delta \rightarrow 0$: utilizzando il fatto che $u_\delta(x) = u(x)$ per $x \geq 2\delta$ e che $0 \leq 1 - \varphi \leq 1$ ottengo

$$\|u - u_\delta\|_p^p = \int_0^{2\delta} |u(x)|^p |1 - \varphi(x/\delta)|^p dx \leq 2\delta \|u\|_\infty^p,$$

e dunque $\|u - u_\delta\|_p \rightarrow 0$ per $\delta \rightarrow 0$.

b) Voglio dimostrare che la chiusura di D in $C(I)$ è data da

$$X := \{u \in C(I) : u(0) = 0\}.$$

È facile vedere che X è un sottospazio chiuso di $C(I)$ che contiene D , e da questo segue l'inclusione $\overline{D} \subset X$. Per mostrare l'inclusione opposta, vale a dire che D è denso in X rispetto alla norma del sup, considero l'insieme di funzioni

$$X' := \{u \in C^1(I) : u(0) = 0\},$$

e dimostro che X' è denso in X e poi che D è denso in X' (in entrambi i casi la densità si riferisce alla norma del sup).

Per dimostrare che X' è denso in X uso il fatto che $C^1(I)$ è denso in $C(I)$ (questo segue per esempio dal teorema di Weierstrass) e pertanto, data $u \in X$, esiste una successione di funzioni $u_n \in C^1(I)$ che converge uniformemente a u , ed in particolare $u_n(0) \rightarrow u(0) = 0$; quindi le funzioni $v_n(x) := u_n(x) - u_n(0)$ appartengono a X' e convergono uniformemente a u .

Per dimostrare che D è denso in X' , prendo $u \in X'$ e considero le funzioni u_δ definite al punto a). Anche in questo caso u_δ appartiene a D , e resta quindi da verificare che u_δ converge uniformemente a u per $\delta \rightarrow 0$: poiché $u(x) = u_\delta(x)$ per $x \geq 2\delta$, allora

$$\|u - u_\delta\|_\infty = \sup_{x \leq 2\delta} |u(x) - u_\delta(x)| = \sup_{x \leq 2\delta} |u(x)| (1 - \varphi(x/\delta)) \leq \sup_{x \leq 2\delta} |u(x)|,$$

e l'ultimo sup tende a 0 per $\delta \rightarrow 0$ perché $u(0) = 0$ e u è continua in 0.

5 a) Calcolare i coefficienti di Fourier $c_n(x)$ della funzione x .

b) Determinare la funzione $u : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ i cui coefficienti di Fourier sono

$$c_0(u) := 0, \quad c_n(u) := \frac{i(-1)^n}{n(1+n^2)} \text{ per } n \neq 0. \tag{1}$$

[Suggerimento: osservare che per ogni intero n vale $(1+n^2)c_n(u) = a c_n(x)$ con a costante da determinare; dedurre che u deve soddisfare un'opportuna equazione differenziale.]

SOLUZIONE. a) Si tratta di un semplice calcolo (già visto a lezione):

$$c_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0$$

perché x è dispari, mentre per $n \neq 0$

$$c_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \left[x \frac{e^{-inx}}{-in} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-inx}}{-in} dx = \frac{i(-1)^n}{n}.$$

b) Per quanto visto al punto a), la condizione (1) si traduce in

$$(1+n^2)c_n(u) = c_n(x) \tag{2}$$

² Per esempio $\varphi(x) := 2x^2$ per $x < \frac{1}{2}$, $\varphi(x) := -2x^2 + 4x - 1$ per $\frac{1}{2} \leq x < 1$, $\varphi(x) := 1$ per $x \geq 1$.

per ogni $n \in \mathbb{Z}$. Suppongo ora che u sia una funzione di classe C^2 e che soddisfi le condizioni di periodicità

$$\begin{cases} u(\pi) = u(-\pi), \\ \dot{u}(\pi) = \dot{u}(-\pi); \end{cases} \quad (3)$$

allora

$$(1 + n^2) c_n(u) = c_n(u - \ddot{u}),$$

quindi la (2) si riscrive come $c_n(u - \ddot{u}) = c_n(x)$, ed equivale all'equazione differenziale

$$u - \ddot{u} = x. \quad (4)$$

Pertanto, se tra le soluzioni di (4) (che sono tutte di classe C^∞) ce n'è una che soddisfa (3), allora tale soluzione è la funzione u cercata.

Osservo ora che la soluzione generale dell'equazione (4) è della forma

$$u = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + x$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, e tenendo conto che $\dot{u} = c_1 e^x - c_2 e^{-x} + 1$, per questa u le condizioni (3) diventano

$$\begin{cases} c_1 e^\pi + c_2 e^{-\pi} + \pi = c_1 e^{-\pi} + c_2 e^\pi - \pi, \\ c_1 e^\pi - c_2 e^{-\pi} + 1 = c_1 e^{-\pi} - c_2 e^\pi + 1. \end{cases}$$

Risolvendo questo sistema ottengo infine

$$c_1 = -\frac{\pi}{e^\pi - e^{-\pi}}, \quad c_2 = \frac{\pi}{e^\pi - e^{-\pi}},$$

e dunque la funzione u cercata è

$$u(x) = -\pi \frac{e^x - e^{-x}}{e^\pi - e^{-\pi}} + x.$$

OSSERVAZIONI. Un modo di procedere alternativo è questo: in modo del tutto formale si vede che u deve risolvere l'equazione differenziale $u - \ddot{u} = x$ e quindi deve essere della forma

$$u = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + x, \quad (5)$$

poi si calcolano i coefficienti $c_n(u)$ in funzione di c_1, c_2 e si trovano i valori di questi parametri per cui vale $c_n(u) = (1 + n^2) c_n(x)$ per ogni intero n . In questo modo si trovano i valori di c_1, c_2 visti sopra, e non è necessario giustificare i passaggi che hanno portato alla formula (5).

6 Dati $R, r > 0$, sia Σ l'insieme dei punti in \mathbb{R}^3 ottenuto ruotando la circonferenza di raggio r e centro $(0, R)$ nel piano xy attorno all'asse x .

- Dimostrare che Σ è una superficie senza bordo di classe C^∞ se $R > r$.
- Dimostrare che Σ non è una superficie se $R = r$.
- Per $R > r$ trovare una parametrizzazione di Σ e calcolarne l'area.

SOLUZIONE. a) Siccome l'equazione della circonferenza di raggio r e centro $(0, R)$ nel piano xy è $x^2 + (y - R)^2 = r^2$, quella dell'insieme Σ è

$$\underbrace{x^2 + (\sqrt{y^2 + z^2} - R)^2}_{f(x, y, z)} = r^2.$$

Siccome f è una funzione di classe C^∞ sull'aperto $\Omega := \mathbb{R}^3 \setminus R$ dove R è la retta dei punti $(x, 0, 0)$ con $x \in \mathbb{R}$, per dimostrare che Σ è una superficie (di dimensione 2) senza bordo e di classe C^∞ mi basta far vedere che

- Σ è contenuto in Ω , cioè non interseca R ;
- $\nabla f \neq 0$ per ogni punto di Σ .

Per dimostrare (i) osservo che un punto della forma $(x, 0, 0)$ non appartiene mai a Σ se $R > r$, infatti $f(x, 0, 0) = x^2 + R^2 \geq R^2 > r^2$.

Per dimostrare (ii) osservo che

$$\nabla f = \left(2x, 2(\sqrt{y^2 + z^2} - R) \frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}}, 2(\sqrt{y^2 + z^2} - R) \frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}} \right),$$

e quindi se $\nabla f = 0$ allora vale una delle seguenti condizioni: a) $x = y = z = 0$ oppure b) $x = 0$ e $\sqrt{y^2 + z^2} = R$. Abbiamo già visto che i punti che soddisfano la condizione $y = z = 0$ non appartengono a Σ , e lo stesso vale per i punti che soddisfano $x = 0$ e $\sqrt{y^2 + z^2} = R$ (per questi ultimi vale infatti $f(x, y, z) = 0$).

b) Suppongo per assurdo che Σ sia una superficie di classe C^1 per $R = r$. In tal caso $0 = (0, 0, 0)$ appartiene a Σ , e siccome Σ è invariante per rotazioni attorno all'asse delle x , lo stesso deve valere per lo spazio tangente $T_0\Sigma$, e siccome l'unico piano in \mathbb{R}^3 invariante per rotazioni attorno all'asse x è il piano yz , dovremmo avere che $T_0\Sigma$ è il piano yz . Ma questo è assurdo, ad esempio perché $T_0\Sigma$ deve contenere il vettore $(1, 0, 0)$, come si vede prendendo un cammino che parametrizza la circonferenza che genera Σ , vale a dire $\gamma(t) := (\cos t, r + \sin t, 0)$.

c) Un punto (x, y, z) appartiene a Σ se e solo se il punto $(x, \sqrt{y^2 + z^2})$ appartiene alla circonferenza nel piano di centro $(0, R)$ e raggio r , ovvero se e solo se esiste $\alpha \in [0, 2\pi)$ tale che

$$x = r \cos \alpha, \quad \sqrt{y^2 + z^2} = R + r \sin \alpha,$$

inoltre la seconda equazione equivale a dire che (y, z) appartiene alla circonferenza nel piano di centro $(0, 0)$ e raggio $R + r \sin \alpha$, che equivale a dire che esiste $\beta \in [0, 2\pi)$ tale che

$$y = (R + r \sin \alpha) \cos \beta, \quad z = (R + r \sin \alpha) \sin \beta.$$

In altre parole la superficie Σ è parametrizzata bigettivamente dall'insieme $D := [0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$ tramite la mappa

$$\Phi(\alpha, \beta) := (r \cos \alpha, (R + r \sin \alpha) \cos \beta, (R + r \sin \alpha) \sin \beta).$$

Siccome questa mappa è di classe C^1 , può essere usata per calcolare l'area di Σ . Per farlo devo prima calcolare il determinante Jacobiano di Φ : usando che

$$\nabla \Phi = \begin{pmatrix} -r \sin \alpha & 0 \\ r \cos \alpha \cos \beta & -(R + r \sin \alpha) \sin \beta \\ r \cos \alpha \sin \beta & (R + r \sin \alpha) \cos \beta \end{pmatrix},$$

e l'espressione di $J\Phi$ in termini dei determinanti dei minori 2×2 di $\nabla \Phi$ ottengo, con qualche conto,

$$J\Phi = r(R + r \sin \alpha),$$

e quindi l'area di Σ è

$$\sigma_2(\Sigma) = \int_D J\Phi(\alpha, \beta) d\alpha d\beta = 2\pi \int_0^{2\pi} r(R + r \sin \alpha) d\alpha = 4\pi^2 rR.$$

7 Dati $a > 0$ e una funzione continua $u_0 : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ tale che $\sum n^2 |c_n(u_0)| < +\infty$, consideriamo il problema (P_a) dato dall'equazione alle derivate parziali $u_t = (1 + \cos(at)) u_{xx}$ sull'intervallo spaziale $[-\pi, \pi]$, dalle condizioni di periodicità al bordo $u(\cdot, -\pi) = u(\cdot, \pi)$ e $u_x(\cdot, -\pi) = u_x(\cdot, \pi)$, e dalla condizione iniziale $u(0, \cdot) = u_0$.

- Dimostrare che (P_a) ha una soluzione u_a definita per $t \geq 0$, di classe C^1 in t e C^2 in x .
- Dimostrare che, per $a \rightarrow +\infty$, u_a converge puntualmente alla soluzione dell'equazione del calore con le stesse condizioni al bordo e la stessa condizione iniziale.
- Dire se la convergenza al punto b) è uniforme, specificando dove.

SOLUZIONE. a) Date le condizioni al bordo, trovo una formula per la soluzione scrivendo l'incognita u in serie di Fourier rispetto alla variabile x :

$$u(t, x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(t) e^{inx}.$$

Procedendo come al solito ottengo che i coefficienti c_n devono risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -n^2(1 + \cos(at))y, \\ y(0) = c_n^0, \end{cases}$$

e sono quindi dati da $c_n(t) = c_n^0 \exp(-n^2\varphi_a(t))$ dove

$$\varphi_a(t) := t + \frac{1}{a} \sin(at). \quad (6)$$

Pertanto la soluzione di (P_a) dovrebbe essere

$$u_a(t, x) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{c_n^0 \exp(-n^2\varphi_a(t) + inx)}_{u_{a,n}}. \quad (7)$$

Dimostro quindi che: la funzione u in (7) è ben definita su tutto $R := [0, +\infty) \times \mathbb{R}$, continua, di classe C^1 in t e C^2 in x , e risolve (P_a) .

Osservo per cominciare che $\varphi_a(t) \geq 0$ per ogni $t \geq 0$ (questo segue dal fatto che $\varphi_a(0) = 0$ e $\dot{\varphi}_a(t) = 1 + \cos(at) \geq 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$), e quindi

$$|\exp(-n^2\varphi_a(t) + inx)| = \exp(-n^2\varphi_a(t)) \leq 1 \quad \text{per } t \geq 0. \quad (8)$$

Usando questa stima ottengo

$$\|u_{a,n}\|_{L^\infty(R)} \leq |c_n^0|,$$

quindi la serie in (7) converge totalmente su R e dunque u è ben definita e continua su R .

Usando poi la formula

$$D_t u_{a,n} = -c_n^0 n^2 (1 + \cos(at)) \exp(-n^2\varphi_a(t) + inx)$$

e la stima (8) ottengo

$$\|D_t u_{a,n}\|_{L^\infty(R)} \leq 2n^2 |c_n^0|,$$

e ricordando l'ipotesi sulla sommabilità dei coefficienti c_n^0 ottengo che la serie delle derivate $D_t u_{a,n}$ converge totalmente su R , e dunque u_a è di classe C^1 in t .

Infine, usando la formula

$$D_x^k u_{a,n} = -c_n^0 (-in)^k \exp(-n^2\varphi_a(t) + inx)$$

e la stima (8) ottengo

$$\|D_x^k u_{a,n}\|_{L^\infty(R)} \leq |n|^k |c_n^0|,$$

e ricordando l'ipotesi sulla sommabilità dei coefficienti c_n^0 ottengo che la serie delle derivate $D_x^k u_{a,n}$ converge totalmente su R per $k \leq 2$, e dunque u_a è di classe C^2 in x .

Il fatto che u_a risolve (P_a) segue da un argomento completamente standard che non riporto.

b) e c) Ricordo che la soluzione dell'equazione del calore con le stesse condizioni al bordo e le stesse condizioni iniziali di (P_a) è data da

$$u(t, x) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{c_n^0 \exp(-n^2t + inx)}_{u_n}. \quad (9)$$

Ricordando la formula (6) si vede subito che gli addendi $u_{a,n}$ in (7) convergono puntualmente agli addendi u_n in (9) quando $a \rightarrow +\infty$, e questo suggerisce che u_a converga ad u .

Dimostro direttamente che u_a converge a u uniformemente su R . Per farlo uso la disuguaglianza

$$|\exp(y_1) - \exp(y_2)| \leq |y_1 - y_2| \quad \text{per } y_1, y_2 \leq 0, \quad (10)$$

che segue dal fatto che la derivata dell'esponenziale è compresa tra 0 e 1 per $y \leq 0$. Ricordando la definizione di $u_{a,n}$ e u_n ottengo

$$\begin{aligned} |u_{a,n}(t, x) - u_n(t, x)| &= |c_n^0 \exp(inx) (\exp(-n^2\varphi_a(t)) - \exp(-n^2t))| \\ &= |c_n^0| |\exp(-n^2\varphi_a(t)) - \exp(-n^2t)| \\ &\leq |c_n^0| |n^2\varphi_a(t) - n^2t| = |c_n^0| \frac{n^2}{a} |\sin(at)| \leq \frac{n^2}{a} |c_n^0| \end{aligned}$$

(nel terzo passaggio ho applicato la disuguaglianza (10), e per farlo ho bisogno di dimostrare che $-n^2\varphi_a(t) \leq 0$, cosa che segue dalla disuguaglianza $\varphi_a(t) \geq 0$ per $t \geq 0$, vista in precedenza). Dunque

$$\|u_{a,n} - u_n\|_{L^\infty(R)} \leq \frac{n^2}{a} |c_n^0|,$$

e da questa stima segue che

$$\|u_a - u\|_{L^\infty(R)} \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \|u_{a,n} - u_n\|_{L^\infty(R)} \leq \frac{1}{a} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2 |c_n^0|;$$

siccome la serie nell'ultimo termine è finita per ipotesi,

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \|u_a - u\|_{L^\infty(R)} = 0.$$

OSSERVAZIONI. Si può dimostrare il punto b), la convergenza puntuale di u_a ad u , separatamente dal punto c). Si osserva per cominciare che per ogni $(t, x) \in \mathbb{R}$ gli addendi $u_{a,n}(t, x)$ della serie che rappresenta $u_a(t, x)$ convergono per $a \rightarrow +\infty$ agli addendi $u_n(t, x)$ della serie che rappresenta $u(t, x)$. Per far vedere che anche le serie convergono si può quindi usare il teorema di convergenza dominata per le serie, con la dominazione

$$|u_{a,n}(t, x)| \leq |c_n^0|.$$

(La successione $|c_n^0|$ è una dominazione perché non dipende da a ed è sommabile in n ; poiché inoltre non dipende da t, x , si può spingere questo metodo fino a dimostrare anche la convergenza uniforme.)

8 Sia $H := L^2([0, \pi])$, sia D il sottospazio di H dato dalle funzioni $u : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^2 tali che $u(0) = 0$ e $\dot{u}(\pi) = 0$, e sia infine $T : D \rightarrow H$ l'operatore lineare dato da $Tu := \ddot{u} - u$.

- Dimostrare che T è autoaggiunto.
- Dire se T è (semi-) definito positivo/negativo o altro.
- Determinare gli autovalori di T e i corrispondenti autospazi.
- È possibile trovare una base di Hilbert di H costituita da autovettori di T ?

SOLUZIONE. a) Dati $u, v \in D$, vale che

$$\begin{aligned} \langle Tu; v \rangle &= \int_0^\pi \ddot{u}v \, dx - \int_0^\pi uv \, dx \\ &= \left[\dot{u}v \right]_0^\pi - \int_0^\pi \dot{u}\dot{v} \, dx - \int_0^\pi uv \, dx = - \int_0^\pi \dot{u}\dot{v} + uv \, dx \end{aligned} \quad (11)$$

(nel secondo passaggio ho integrato per parti il primo integrale, nel terzo ho usato che $u, v \in D$ per dire che $\left[\dot{u}v \right]_0^\pi = 0$). Osservo ora che l'ultimo integrale in (11) resta invariato se si scambia u con v , quindi $\langle Tu; v \rangle = \langle Tv; u \rangle$, e dunque T è autoaggiunto.

b) Applicando la formula (11) con $v = u$ ottengo che per ogni $u \in D$ vale

$$\langle Tu; u \rangle = - \int_0^\pi \dot{u}^2 + u^2 \, dx \leq 0, \quad (12)$$

e questo significa che T è semidefinito negativo. Inoltre T è definito negativo perché se vale l'uguaglianza in (12) allora $u = 0$ q.o.

c) Osservo che u soddisfa $Tu = \lambda u$ se risolve l'equazione differenziale

$$\ddot{u} - (1 + \lambda)u = 0. \quad (13)$$

Se $\lambda = -1$ ogni soluzione di questa equazione è della forma

$$u(x) = c_1 + c_2x \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

e se tale u appartiene a D allora $0 = u(0) = c_1$ e $0 = \dot{u}(\pi) = c_2$, vale a dire $u = 0$; pertanto $\lambda = -1$ non è un autovalore di T .

Se $\lambda \neq -1$, indico con $\pm\omega$ le due radici quadrate (reali o immaginarie) di $\lambda + 1$; allora le soluzioni dell'equazione (13) sono della forma

$$u(x) = c_1 e^{\omega x} + c_2 e^{-\omega x} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{C},$$

e se tale u appartiene a D allora $0 = u(0) = c_1 + c_2$ e $0 = \dot{u}(\pi) = c_1 \omega e^{\pi\omega} - c_2 \omega e^{-\pi\omega}$, vale a dire

$$\begin{cases} c_2 = -c_1, \\ c_1(e^{\pi\omega} + e^{-\pi\omega}) = 0. \end{cases}$$

In particolare questo sistema ammette soluzioni diverse da $c_1 = c_2 = 0$ se e solo se

$$e^{\pi\omega} + e^{-\pi\omega} = 0 \Leftrightarrow e^{2\pi\omega} + 1 = 0 \Leftrightarrow e^{2\pi\omega} = e^{\pi i} \Leftrightarrow \omega = i\left(\frac{1}{2} + k\right) \text{ con } k \in \mathbb{Z}.$$

In tal caso $\lambda = -\left(\frac{1}{2} + k\right)^2 - 1$, e u è della forma

$$u(x) = c_1 e^{i\left(\frac{1}{2} + k\right)x} - c_1 e^{-i\left(\frac{1}{2} + k\right)x} = 2ic_1 \sin\left(\left(\frac{1}{2} + k\right)x\right)$$

(notare che u è reale se c_1 è immaginario).

Riassumendo, gli autovalori di T sono

$$\lambda_k = -\left(\frac{1}{2} + k\right)^2 - 1 \quad \text{con } k = 0, 1, 2, \dots,$$

e i corrispondenti autospazi hanno dimensione 1 e sono generati dalle funzioni

$$u_k(x) := \sin\left(\left(\frac{1}{2} + k\right)x\right). \tag{14}$$

d) La teoria dice che le funzioni u_k in (14) formano un sistema ortogonale, ed ottengo un sistema ortonormale dividendo ogni u_k per la sua norma L^2 , vale a dire

$$\mathcal{F} := \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} u_k : k = 0, 1, \dots \right\}.$$

Dimostro che \mathcal{F} è una base di Hilbert di $L^2([0, \pi])$ facendo vedere che ogni $u \in L^2([0, \pi])$ si rappresenta come combinazione lineare infinita delle funzioni u_k (con coefficienti in ℓ^2).

Data dunque tale u , la estendo ad una funzione $\tilde{u} \in L^2([0, 2\pi])$ per simmetria rispetto ad $x = \pi$, cioè pongo

$$\tilde{u}(x) := \begin{cases} u(x) & \text{per } 0 \leq x \leq \pi, \\ u(2\pi - x) & \text{per } \pi < x \leq 2\pi. \end{cases}$$

Uso quindi il fatto che \tilde{u} può essere rappresentata in serie di seni su $[0, 2\pi]$, vale a dire

$$\tilde{u}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\left(\frac{1}{2}nx\right) \tag{15}$$

(il fattore $\frac{1}{2}$ è dovuto al fatto che sto usando la serie in seni su $[0, 2\pi]$ invece che su $[0, \pi]$).

Osservo ora che per costruzione \tilde{u} è *pari* rispetto a $x = \pi$, cioè soddisfa $\tilde{u}(x) = \tilde{u}(2\pi - x)$.

D'altra parte le funzioni $v_n(x) := \sin\left(\frac{1}{2}nx\right)$ sono *dispari* rispetto a $x = \pi$ quando n è *pari*, cioè soddisfano $v_n(x) = -v_n(2\pi - x)$.

Queste due affermazioni implicano che \tilde{u} e v_n sono ortogonali su $[0, 2\pi]$, ed in particolare i coefficienti b_n nella formula (15) devono essere nulli per ogni n pari. Dunque la (15) diventa

$$\tilde{u}(x) = \sum_{n \text{ dispari}} b_n \sin\left(\frac{1}{2}nx\right) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+1} \sin\left(\left(\frac{1}{2} + k\right)x\right),$$

e questo conclude la dimostrazione.

- 1] Calcolare i coefficienti di Fourier della funzione $u(x) := e^{|x|}$ (ristretta all'intervallo $[-\pi, \pi]$).

SOLUZIONE. Si tratta di un calcolo diretto:

$$\begin{aligned} c_n(u) &:= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{|x|} e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{(1-in)x} dx + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 e^{(-1-in)x} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| \frac{e^{(1-in)x}}{1-in} \right|_0^{\pi} + \frac{1}{2\pi} \left| \frac{e^{(-1-in)x}}{-1-in} \right|_{-\pi}^0 = \frac{(-1)^n e^{\pi} - 1}{\pi(1+n^2)}. \end{aligned}$$

- 2] Calcolare la trasformata di Fourier della funzione $u(x) := \begin{cases} e^{-2x} & \text{se } x \geq 0, \\ -e^{2x} & \text{se } x < 0. \end{cases}$

SOLUZIONE. Si tratta di un calcolo diretto:

$$\begin{aligned} \hat{u}(y) &:= \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) e^{-iyx} dx = \int_0^{+\infty} e^{(-2-iy)x} dx - \int_{-\infty}^0 e^{(2-iy)x} dx \\ &= \left| \frac{e^{(-2-iy)x}}{-2-iy} \right|_0^{+\infty} - \left| \frac{e^{(2-iy)x}}{2-iy} \right|_{-\infty}^0 = -\frac{2iy}{y^2+4}. \end{aligned}$$

- 3] Sia X il sottospazio di ℓ^2 formato dagli elementi $x = (x(0), x(1), \dots)$ tali che $x(m) = 0$ definitivamente in m . Dimostrare che X è denso in ℓ^2 , e dedurne che X non è uno spazio di Hilbert.

SOLUZIONE. Dato $x \in \ell^2$, mi basta costruire una successione (x_n) in X che tende a x . In particolare prendo x_m uguale a x troncato a 0 dopo l' n -esimo elemento, vale a dire

$$x_n(m) := \begin{cases} x(m) & \text{se } m \leq n, \\ 0 & \text{se } m > n. \end{cases}$$

Chiaramente x_m appartiene a X . Inoltre

$$\|x - x_n\|_{\ell^2}^2 = \sum_{m=n+1}^{+\infty} (x(m))^2,$$

e la serie a sinistra dell'uguale tende a 0 per $n \rightarrow +\infty$ in quanto coda di una serie convergente.

Per far vedere che X non è uno spazio di Hilbert, basta prendere una successione (x_n) in X che converge ad un elemento x di $\ell^2 \setminus X$ (per esempio quello definito da $x(m) := 1/2^m$). Allora (x_n) è una successione di Cauchy in ℓ^2 e quindi anche in X , ma non converge ad alcun elemento di X perchè il limite x appartiene appunto a $\ell^2 \setminus X$.

- 4] Sia E l'insieme dei punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $y^4(1+x^6) \leq 1$. Dire per quali $p \in [1, +\infty)$ la funzione $f(x, y) := 1+x^2$ appartiene a $L^p(E)$.

SOLUZIONE. Conviene scrivere E come

$$E = \left\{ (x, y) : x \in \mathbb{R}, |y| \leq (1+x^6)^{-\frac{1}{4}} \right\}.$$

Preso $p \in [1, +\infty)$ si ha quindi che

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^p(E)}^p &:= \int_E (1+x^2)^p dx dy = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} (1+x^2)^p (1+x^6)^{-\frac{1}{4}} dx \\ &= 4 \int_0^{+\infty} (1+x^2)^p (1+x^6)^{-\frac{1}{4}} dx \approx \int_1^{+\infty} x^{2p-\frac{3}{2}} dx, \end{aligned}$$

dove nel secondo passaggio ho usato il teorema di Fubini, integrando prima nella variabile y , mentre nel quarto ho usato il simbolo \approx per dire che gli integrali impropri a destra e sinistra

hanno lo stesso comportamento.

Ne segue che la norma $\|u\|_{L^p(E)}$ è finita se e solo se $2p - \frac{3}{2} < -1$, cioè per nessun $p \geq 1$.

5 Sia $I := [-1, 1]$, sia $a \in L^\infty(I)$, e infine sia $T : L^2(I) \rightarrow L^2(I)$ l'operatore lineare dato da

$$[Tu](x) := a(x)u(-x).$$

- a) Dimostrare che T è continuo.
- b) Caratterizzare le funzioni a tali che T è autoaggiunto.
- c) Esistono funzioni a tali che T è autoaggiunto e definito positivo?

SOLUZIONE. a) Essendo T un'applicazione lineare, per un risultato visto a lezione la continuità di T segue da una stima del tipo $\|Tu\|_2 \leq m\|u\|_2$ con m costante finita. In questo caso posso far vedere che tale stima vale con $m := \|a\|_\infty$:

$$\begin{aligned} \|Tu\|_2^2 &:= \int_{-1}^1 (a(x)u(-x))^2 dx \leq \|a\|_\infty^2 \int_{-1}^1 (u(-x))^2 dx \\ &= \|a\|_\infty^2 \int_{-1}^1 (u(t))^2 dt = \|a\|_\infty^2 \|u\|_2^2 \end{aligned}$$

(nel terzo passaggio ho usato il cambio di variabile $t = -x$).

b) Comincio con un'osservazione preliminare: date $u, v \in L^2(I)$ vale che

$$\langle u; Tv \rangle = \int_{-1}^1 u(t)a(t)v(-t) dt = \int_{-1}^1 a(-x)u(-x)v(x) dx$$

(nel secondo passaggio ho usato il cambio di variabile $x = -t$), e quindi

$$\langle Tu; v \rangle - \langle u; Tv \rangle = \int_{-1}^1 (a(x) - a(-x))u(-x)v(x) dx. \quad (1)$$

Dimostro ora che T è autoaggiunto se e solo se a è pari (cioè $a(x) = a(-x)$ per q.o. x).

In effetti, se a è pari, allora la formula (1) implica $\langle Tu; v \rangle - \langle u; Tv \rangle = 0$ per ogni $u, v \in L^2(I)$, ovvero che T è autoaggiunto.

Viceversa, se T è autoaggiunto, allora, prendendo $v(x) := a(x) - a(-x)$ e $u(x) := 1$, la formula (1) dà

$$0 = \langle Tu; v \rangle - \langle u; Tv \rangle = \int_{-1}^1 (a(x) - a(-x))^2 dx$$

da cui segue che $a(x) - a(-x) = 0$ q.o., cioè a è pari (ricordo che una funzione positiva ha integrale nullo se e solo la funzione integranda è q.o. nulla).

c) Supponendo che T sia autoaggiunto, allora la funzione a è pari, e quindi per ogni $u \in L^2(I)$ la funzione $a(x)u(-x)u(x)$ è pari e vale che

$$\langle Tu; u \rangle = \int_{-1}^1 a(x)u(-x)u(x) dx = 2 \int_0^1 a(x)u(-x)u(x) dx.$$

Prendendo ora

$$u(x) := \begin{cases} a(x) & \text{per } 0 \leq x \leq 1, \\ -\frac{1}{2} & \text{per } -1 \leq x < 0, \end{cases}$$

ottengo

$$\langle Tu; u \rangle = - \int_0^1 (a(x))^2 dx \leq 0,$$

e questo dimostra che T non è mai definito positivo.

6 Sia v una funzione continua su $[-\pi, \pi]$ i cui coefficienti di Fourier c_n^0 soddisfano $\sum |n| |c_n^0| < +\infty$. Consideriamo quindi il problema (P) dato dall'equazione $u_{tt} = u_{xx} - 2u$ sull'intervallo spaziale $[-\pi, \pi]$, dalle solite condizioni di periodicità al bordo, e dalle condizioni iniziali $u(0, \cdot) = 0$ e

$u_t(0, \cdot) = v(\cdot)$. Discutere l'intervallo temporale di esistenza e la regolarità della soluzione di (P) (l'unicità può essere data per scontata).

SOLUZIONE. Procedo come al solito, scrivendo l'incognita u in serie di Fourier (complessa) rispetto alla variabile x :

$$u(t, x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(t) e^{inx}.$$

Otengo quindi che i coefficienti c_n di un'eventuale soluzione u del problema (*) risolvono il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \ddot{y} = -(n^2 + 2)y \\ y(0) = 0, \dot{y}(0) = c_n^0 \end{cases}$$

e sono dunque dati dalla formula

$$c_n(t) := \frac{c_n^0}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \quad \text{con } \omega_n := \sqrt{n^2 + 2}.$$

Pertanto la soluzione di (*) dovrebbe essere data dalla formula

$$u(t, x) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{c_n^0}{\omega_n} \sin(\omega_n t) e^{inx}}_{u_n(t, x)}. \quad (2)$$

Concludo l'esercizio dimostrando il seguente enunciato: *la funzione u nella formula (2)*

- (i) *è ben definita e continua su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, 2π -periodica nella variabile x ,*
- (ii) *è di classe C^2 nella variabile x e separatamente nella variabile t ,*
- (iii) *risolve il problema (*).*

Per dimostrare (i) mi basta far vedere che la serie in (2) converge totalmente su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. A tale scopo osservo che

$$\|u_n\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})} = \frac{|c_n^0|}{\omega_n} \sim \frac{|c_n^0|}{|n|} = o(|n| |c_n^0|) \quad \text{per } n \rightarrow \pm\infty,$$

e dunque $\sum_n \|u_n\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})}$ è finita per via dell'ipotesi sui coefficienti c_n^0 .

Per dimostrare (ii) mi basta far vedere che le serie delle derivate $D_x^h u_n$ e $D_t^h u_n$ convergono totalmente su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ per $h = 1, 2$. A tale scopo osservo che per ogni $h = 0, 1, \dots$ vale

$$D_x^h u_n = \frac{c_n^0}{\omega_n} \sin(\omega_n t) (in)^h e^{inx},$$

quindi

$$\|D_x^h u_n\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})} = \frac{|c_n^0|}{\omega_n} |n|^h \sim |n|^{h-1} |c_n^0| \quad \text{per } n \rightarrow \pm\infty,$$

e dunque $\sum_n \|D_x^h u_n\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})}$ è finita se $h = 1, 2$ per via l'ipotesi sui coefficienti c_n^0 .

Analogamente

$$D_t^h u_n = c_n^0 \omega_n^{h-1} g_h(\omega_n t) e^{inx},$$

dove $g_h(s)$ è uguale a $\pm \sin s$ oppure a $\pm \cos s$ a seconda di h , e da questo segue che

$$\|D_t^h u_n\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})} = |c_n^0| \omega_n^{h-1} \sim |n|^{h-1} |c_n^0| \quad \text{per } n \rightarrow \pm\infty,$$

e di nuovo $\sum_n \|D_t^h u_n\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})}$ è finita se $h = 1, 2$.

La dimostrazione di (iii) è completamente standard e la ometto.

7 Per ogni $n = 0, 1, \dots$ sia X_n il sottospazio di ℓ^2 formato dagli $x = (x(0), x(1), \dots)$ tali che $x(m) = 0$ per $m > n$, e sia X il sottospazio formato dagli x tali che $x(m) = 0$ definitivamente in m . Sia infine e_0 un vettore unitario in $\ell^2 \setminus X$ con $e_0(0) \neq 0$.

a) Fare vedere che per ogni $n = 1, 2, \dots$ esistono $e_n \in X_n$ tali che $\mathcal{F} := \{e_n : n = 0, 1, \dots\}$ è un sistema ortonormale in ℓ^2 .

b) Dimostrare che \mathcal{F} è una base di Hilbert di ℓ^2 .

c) Dimostrare che $\mathcal{F}^* := \{e_n : n = 1, 2, \dots\}$ è un sistema ortonormale massimale in X , il cui span non è denso in X .¹

SOLUZIONE. Comincio con alcune definizioni ed osservazioni preliminari. Per ogni $n = 0, 1, \dots$, indico con p_n la proiezione ortogonale di ℓ^2 su X_n , vale a dire la mappa (lineare) data da

$$[p_n x](m) := \begin{cases} x(m) & \text{se } m \leq n, \\ 0 & \text{se } m > n. \end{cases}$$

Se inoltre $x(0) \neq 0$, allora $p_n x \neq 0$, e in tal caso indico con $\widehat{p_n x}$ il vettore unitario ottenuto rinormalizzando $p_n x$, vale a dire

$$\widehat{p_n x} := \frac{p_n x}{\|p_n x\|}.$$

Valgono allora i seguenti fatti, di immediata dimostrazione:

- (i) *dati* $x_0 \in \ell^2$ e $x_1 \in X_n$, allora $\langle x_0; x_1 \rangle = \langle p_n x_0; p_n x_1 \rangle$, in particolare $x_0 \perp x_1$ se e solo se $p_n x_0 \perp x_1$;
- (ii) *dati* $x_0 \in \ell^2$ e $x_1, \dots, x_m \in X_n$, allora $\{x_0, \dots, x_m\}$ è un sistema ortogonale se e solo se $\{p_n x_0, x_1, \dots, x_m\}$ è un sistema ortogonale;
- (iii) *dati infine* $x_0 \in \ell^2$ con $x(0) \neq 0$ e $x_1, \dots, x_m \in X_n$, allora $\{x_0, \dots, x_m\}$ è un sistema ortonormale se e solo se $\{\widehat{p_n x_0}, x_1, \dots, x_m\}$ è un sistema ortonormale.

a) Costruisco per induzione su n una successione (e_n) tale che e_0 è dato come sopra, e per ogni $n = 1, 2, \dots$, si ha che $e_n \in X_n$ e $\{e_0, \dots, e_n\}$ è un sistema ortonormale.

Siccome e_0 è già stato definito, devo solo descrivere il passo induttivo. Suppongo dunque di aver già costruito e_m per ogni $m < n$. Allora, per l'ipotesi induttiva,

$$\{e_0, \dots, e_{n-1}\} \text{ è un sistema ortonormale,}$$

e quindi, per l'enunciato (iv) dato sopra,

$$\{\widehat{p_n e_0}, e_1, \dots, e_{n-1}\} \text{ è un sistema ortonormale;}$$

siccome questo sistema ha n elementi ed è contenuto in X_n , che ha dimensione $n + 1$, posso trovare $e_n \in X_n$ tale che

$$\{\widehat{p_n e_0}, e_1, \dots, e_n\} \text{ è un sistema ortonormale,}$$

e sempre grazie all'enunciato (iii) ottengo infine che

$$\{e_0, \dots, e_n\} \text{ è un sistema ortonormale.}$$

b) Devo far vedere che $\text{Span}(\mathcal{F})$ è denso in ℓ^2 . Siccome X è denso in ℓ^2 mi basta far vedere che X è contenuto nella chiusura di $\text{Span}(\mathcal{F})$, ovvero che per ogni $x \in X$, esiste una successione (x_n) in $\text{Span}(\mathcal{F})$ che converge a x .

Dato $x \in X$, esiste \bar{n} tale che x appartiene a $X_{\bar{n}}$. Osservo quindi che, per ogni n ,

$$\mathcal{F}_n := \{\widehat{p_n e_0}, e_1, \dots, e_n\}$$

è un sistema ortonormale di $n + 1$ elementi contenuto in X_n (enunciato (iii)) e siccome X_n ha dimensione $n + 1$, \mathcal{F}_n è una base ortonormale di X_n . In particolare, siccome $x \in X_n$ per ogni $n \geq \bar{n}$,

$$x = \langle x; \widehat{p_n e_0} \rangle \widehat{p_n e_0} + \sum_{m=1}^n \langle x; e_m \rangle e_m. \tag{3}$$

Definisco allora

$$x_n := \langle x; \widehat{p_n e_0} \rangle e_0 + \sum_{m=1}^n \langle x; e_m \rangle e_m. \tag{4}$$

Chiaramente x_n appartiene a $\text{Span}(\mathcal{F})$, e devo solo dimostrare che $x_n \rightarrow x$ per $n \rightarrow +\infty$.

Grazie a (3) e (4) ottengo che

$$x_n - x = \langle x; \widehat{p_n e_0} \rangle (e_0 - \widehat{p_n e_0}),$$

¹ Questo esempio mostra che, in uno spazio X con prodotto scalare, non è vero che ogni sistema ortonormale massimale è anche completo, contrariamente a quello che succede se X è uno spazio di Hilbert.

quindi

$$\|x_n - x\| = |\langle x; \widehat{p_n e_0} \rangle| \|e_0 - \widehat{p_n e_0}\|,$$

e per concludere mi basta dimostrare che

$$\widehat{p_n e_0} \rightarrow e_0 \text{ in } \ell^2, \tag{5}$$

e usare la continuità della norma e del prodotto scalare.

Per dimostrare (5) noto che

$$\|\widehat{p_n e_0} - e_0\| \leq \|\widehat{p_n e_0} - p_n e_0\| + \|p_n e_0 - e_0\| \leq 1 - \|p_n e_0\| + \|p_n e_0 - e_0\|,$$

e dimostro che l'ultimo termine di questa catena di disuguaglianze tende a 0 per via della continuità della norma e del fatto che $p_n e_0 \rightarrow e_0$, già dimostrato nella soluzione dell'esercizio 3.

c) Siccome \mathcal{F} è una base di Hilbert di ℓ^2 , il complemento ortogonale di \mathcal{F}^* in ℓ^2 è

$$(\mathcal{F}^*)^\perp = \text{Span}(\{e_0\}),$$

e siccome e_0 non appartiene a X ,

$$(\mathcal{F}^*)^\perp \cap X = \{0\},$$

cosa che implica che \mathcal{F}^* è massimale tra i sistemi ortonormali contenuti in X .

Dimostro ora che $\text{Span}(\mathcal{F}^*)$ non è denso in X . Supponendo per assurdo che lo sia, allora è denso anche in ℓ^2 (per via dell'esercizio 3), quindi è una base di Hilbert di ℓ^2 , e di conseguenza è un sistema ortonormale massimale in ℓ^2 ; siccome \mathcal{F}^* è strettamente contenuto in \mathcal{F} , ne segue che \mathcal{F} non può essere un sistema ortonormale, contraddicendo quanto dimostrato al punto b).

8 Dato $d = 2 \dots$, sia d' l'esponente coniugato di d e sia $f(x) := 1/|x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}^d$, $x \neq 0$.

a) Dato $p > d'$, trovare $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ tale che $f * g(x) = +\infty$ per ogni x .

b) Trovare $g \in L^{d'}(\mathbb{R}^d)$ tale che $f * g(x) = +\infty$ per ogni x .

c) Sia A l'insieme dei $p \in [1, +\infty)$ tali che $f * g(x)$ è ben definito e finito per q.o. x e per ogni $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Dimostrare che l'insieme A non è vuoto, e se possibile determinarlo. [Suggerimento: scomporre f come $f = f_1 + f_2$ dove f_1 è la restrizione di f alla palla $B = B(0, 1)$ e f_2 è la restrizione al complementare di B , e considerare separatamente $f_1 * g$ e $f_2 * g$.]

SOLUZIONE. Risolvo a) e b) insieme: posto infatti

$$g(x) := \begin{cases} \frac{1}{|x|^{d-1} \log |x|} & \text{se } |x| \geq e, \\ 0 & \text{se } |x| < e, \end{cases}$$

faccio vedere che: (i) $f * g(x) = +\infty$ per ogni $x \in \mathbb{R}^d$; (ii) $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ per ogni $p \geq d'$.

Per dimostrare (i) osservo che

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) g(y) dy = \int_E \frac{1}{|y-x| |y|^{d-1} \log |y|} dy,$$

dove $E := \{y \in \mathbb{R}^d : |y| \geq e\}$, e che la funzione nel secondo integrale è continua e asintoticamente equivalente a $g(y) := \frac{1}{|y|^{d-1} \log |y|}$ per $|y| \rightarrow +\infty$; quindi $f * g(x) = +\infty$ perché

$$\int_E g(y) dy = +\infty.$$

Quest'ultima affermazione segue da un calcolo diretto:

$$\int_E g(y) dy = \int_E \frac{1}{|y|^{d-1} \log |y|} dy = c_d \int_e^{+\infty} \frac{1}{\rho \log \rho} d\rho = c_d \left| \log \log \rho \right|_e^{+\infty} = +\infty$$

(nel secondo passaggio ho usato la nota formula per l'integrale di funzioni radiali—ricordo che c_d è il volume $(d-1)$ -dimensionale della sfera unitaria in \mathbb{R}^d).

Per dimostrare (ii) basta un semplice calcolo: dato $p \geq d'$ vale che

$$\begin{aligned} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}^p &= \int_E \frac{dx}{(|x|^{d-1} \log |x|)^p} \leq \int_E \frac{dx}{(|x|^{d-1} \log |x|)^{d'}} \\ &= c_d \int_e^{+\infty} \frac{d\rho}{\rho (\log \rho)^{d'}} = c_d \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{d'}} < +\infty. \end{aligned}$$

(Nel secondo passaggio ho usato che $y := |x|^{d-1} \log |x| \geq 1$ per $|x| \geq e$ (cioè per $x \in E$) e quindi $y^p \geq y^{d'}$ perché $p \geq d'$; nel terzo passaggio ho usato la formula per l'integrale di funzioni radiali già usata sopra e il fatto che $d' = \frac{d}{d-1}$; nel quarto ho usato il cambio di variabile $t = \log \rho$; infine nel quinto ho usato che $d' > 1$.)

c) Dal punto b) segue che A è contenuto in $[1, d')$, e voglio ora far vedere che vale l'uguaglianza, cioè che preso $p < d'$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ allora $f * g(x)$ esiste ed è finito per q.o. $x \in \mathbb{R}^d$.

Prendo f_1 ed f_2 come nel suggerimento e osservo per cominciare che ciascuna delle seguenti affermazioni è implicata dalla successiva:

- (i) $f * g(x)$ esiste ed è finito per q.o. x ;
- (ii) $f_1 * g(x)$ e $f_2 * g(x)$ esistono e sono finiti per q.o. x ;
- (iii) $f_1 * g(x)$ e $f_2 * g(x)$ esistono per q.o. x e inoltre $f_1 * g \in L^p$ e $f_2 * g \in L^\infty$;
- (iv) $f_1 \in L^1$ e $f_2 \in L^{p'}$.

Per la precisione, l'implicazione (iii) \Leftarrow (iv) segue dalla disuguaglianza di Young e dal fatto che $|g| \in L^p$, mentre tutte le altre implicazioni sono ovvie.

Per concludere mi basta quindi dimostrare l'enunciato (iv), che però segue da semplici calcoli; in particolare si vede che $f_2 \in L^{p'}$ se $p' > d$, cosa che è implicata dall'ipotesi $p < d'$.

- 1) Dati a_1, \dots, a_d numeri reali, consideriamo i covettori $\omega \in \wedge^1(\mathbb{R}^d)$ e $\omega' \in \wedge^{d-1}(\mathbb{R}^d)$ definiti da

$$\omega := \sum_{i=1}^d a_i dx_i, \quad \omega' := \sum_{i=1}^d a_i \omega_i \quad \text{dove} \quad \omega_i := \bigwedge_{j \neq i} dx_j.$$

Calcolare $\omega \wedge \omega'$.

SOLUZIONE. Detto $dx := dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d$, vale che

$$dx_i \wedge \omega_i = (-1)^{i-1} dx \quad \text{per ogni } i$$

($dx_i \wedge \omega_i$ coincide con il prodotto dei fattori dx_1, \dots, dx_d ma in un altro ordine; per riportarlo all'ordine giusto servono $i - 1$ scambi). Inoltre

$$dx_i \wedge \omega_j = 0 \quad \text{per ogni } j \neq i$$

(perché ω_j è un prodotto di 1-covettori tra cui dx_i). Usando queste formule ottengo

$$\omega \wedge \omega' = \sum_i a_i^2 dx_i \wedge \omega_i = \left(\sum_i (-1)^{i-1} a_i^2 \right) dx.$$

- 2) Calcolare i coefficienti di Fourier della funzione $v(x) := e^{2x} + e^{-2x}$.

SOLUZIONE. Si tratta di un calcolo diretto:

$$\begin{aligned} c_n(v) &:= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(2-in)x} + e^{-(2+in)x} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{(2-in)x}}{2-in} - \frac{e^{-(2+in)x}}{2+in} \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{2\pi}(-1)^n}{2-in} - \frac{e^{-2\pi}(-1)^n}{2+in} - \frac{e^{-2\pi}(-1)^n}{2-in} + \frac{e^{2\pi}(-1)^n}{2+in} \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{(-1)^n}{2\pi} (e^{2\pi} - e^{-2\pi}) \left(\frac{1}{2-in} + \frac{1}{2+in} \right) \\ &= \frac{2(-1)^n (e^{2\pi} - e^{-2\pi})}{\pi(n^2 + 4)}. \end{aligned}$$

- 3) Sia $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione continua tale che $u(x) = O(|x|^{-4})$ per $x \rightarrow \pm\infty$. Cosa si può dire sulla regolarità di \hat{u} ?

SOLUZIONE. Dato k intero positivo si ha che $x^k u(x)$ è una funzione continua su \mathbb{R} che soddisfa $x^k u(x) = O(|x|^{k-4})$ per $x \rightarrow \pm\infty$. Pertanto $x^k u(x)$ appartiene a $L^1(\mathbb{R})$ per $k = 0, 1, 2$, e per un risultato visto a lezione questo implica che \hat{u} è di classe C^2 .

- 4) Sia $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ data da $f(x) := |x|^2$, sia Σ la superficie in $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ data dal grafico di f , e sia infine $u : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione data da

$$u(x, y) := \frac{1}{1 + y^2}.$$

Dire per quali p la funzione u appartiene a $L^p(\Sigma)$.

SOLUZIONE. È noto che Σ è una superficie senza bordo di classe C^∞ (anzi, analitica) e dimensione d in $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$, parametrizzata dalla mappa $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ definita da

$$F(x) := (x, f(x)) = (x, |x|^2).$$

Inoltre è noto che lo Jacobiano di F è

$$JF(x) = \sqrt{1 + |\nabla f(x)|^2} = \sqrt{1 + 4|x|^2}.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^p(\Sigma)}^p &= \int_{\Sigma} |u|^p d\sigma_d = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{1}{1+|x|^2}\right)^p \sqrt{1+4|x|^2} dx \\ &= c_d \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+\rho^4}\right)^p \sqrt{1+4\rho^2} \rho^{d-1} d\rho \end{aligned} \quad (1)$$

(nell'ultimo passaggio ho usato la nota formula per l'integrale delle funzioni radiali su \mathbb{R}^d ; in particolare c_d è volume $(d-1)$ -dimensionale della sfera unitaria \mathbb{S}^{d-1}).

Per concludere osservo che l'integrale in (1) è improprio semplice in $+\infty$, e in particolare si comporta come l'integrale improprio standard

$$\int_1^{+\infty} \rho^{d-4p} d\rho,$$

che è finito se e solo se $d-4p < -1$, cioè $p > \frac{1}{4}(d+1)$. Questi sono dunque tutti e soli i valori di p per cui $u \in L^p(\Sigma)$.

- 5] Sia X il sottospazio di $L^2 = L^2([-1, 1])$ formato dalle funzioni $u : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 tali che $u(1) = 0$, e sia infine $T : X \rightarrow L^2$ l'operatore definito da $[Tu](x) := \dot{u}(-x)$. Dire se T è a) continuo; b) autoaggiunto.

SOLUZIONE. a) T non è continuo. Essendo T lineare, per far vedere che T non è continuo mi basta mostrare che non esiste alcuna costante finita c tale che $\|Tu\|_2 \leq c\|u\|_2$ per ogni $u \in X$, ovvero che esiste una successione di funzioni $u_n \in X$ tali che le norme $\|u_n\|_2$ sono equilimitate, mentre le norme $\|Tu_n\|_2$ tendono a $+\infty$. Per esempio, prendendo

$$u_n(x) := \sin(\pi n x)$$

si vede con semplici calcoli che per ogni n vale

$$\|u_n\|_2 = 1, \quad \|Tu_n\|_2 = \|\dot{u}_n\|_2 = \pi n.$$

b) T è autoaggiunto. Dati infatti $u, v \in X$, un calcolo diretto dà:

$$\begin{aligned} \langle Tu; v \rangle &= \int_{-1}^1 \dot{u}(-x) v(x) dx = \left| -u(-x) v(x) \right|_{-1}^1 + \int_{-1}^1 u(-x) \dot{v}(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 u(t) \dot{v}(-t) dt = \langle u; Tv \rangle. \end{aligned}$$

Nel secondo passaggio ho integrato per parti, usando il fatto che $-u(-x)$ è una primitiva di $\dot{u}(-x)$; il termine di bordo dell'integrazione per parti vale 0 perché $u(-x)v(x)$ si annulla sia in 1 che in -1 (ricordo che $u(1) = v(1) = 0$ perché $u, v \in X$). Infine nel terzo passaggio ho applicato il cambio di variabile $t = -x$ nell'integrale.

- 6] Sia $p \in [1, +\infty)$, sia E insieme misurabile in \mathbb{R}^d , e sia $u_n : E \rightarrow \mathbb{R}$ una successione di funzioni misurabili. Dimostrare che:
- $\liminf \|u_n\|_p \geq \|u\|_p$ se $u_n \rightarrow u$ q.o.;
 - $\liminf \|u_n\|_p \geq \|u\|_p$ se $u_n \rightarrow u$ in $L^q(E)$ con $1 \leq q < \infty$;
 - non è sempre vero che $\lim \|u_n\|_p = \|u\|_p$ se $u_n \rightarrow u$ q.o.

SOLUZIONE. a) Siccome $t \mapsto t^{1/p}$ è una funzione continua e crescente (per $t \geq 0$), mi basta dimostrare che

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|_p^p \geq \|u\|_p^p,$$

disuguaglianza che ottengo applicando il lemma di Fatou all'integrale che definisce $\|u_n\|_p^p$

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|_p^p &= \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_E |u_n(x)|^p dx \\ &\geq \int_E \liminf_{n \rightarrow +\infty} |u_n(x)|^p dx = \int_E |u(x)|^p dx = \|u\|_p^p. \end{aligned}$$

b) Passando ad un'opportuna sottosuccessione posso assumere che il liminf di $\|u_n\|_p$ sia in realtà un limite (questo è una proprietà nota di liminf e limsup). Inoltre, per un risultato visto a lezione, passando ad un'ulteriore sottosuccessione, che indico con u_{n_k} , posso supporre che u_{n_k} converga a u puntualmente q.o., e posso quindi applicare quanto dimostrato al punto a):

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|_p^p = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|_p^p = \lim_{k \rightarrow +\infty} \|u_{n_k}\|_p^p \geq \|u\|_p^p.$$

c) Sia $E := \mathbb{R}$ e sia $u_n := n^2 \mathbf{1}_{(0,1/n)}$. Si vede facilmente che $u_n(x)$ converge puntualmente alla funzione costante 0, mentre $\|u_n\|_p = n^{2-1/p} \rightarrow +\infty$.

OSSERVAZIONI. Riflettere su questo punto della risoluzione punto b): a che serve il primo passaggio, cioè prendere una sottosuccessione per cui il liminf di $\|u_n\|_p$ è un limite?

7 Sia v la funzione definita nell'esercizio 2. Consideriamo il problema (P) dato dall'equazione alle derivate parziali $u_t = u_{xx} + v$ sull'intervallo spaziale $[-\pi, \pi]$ con le condizioni di periodicità al bordo $u(\cdot, -\pi) = u(\cdot, \pi)$ e $u_x(\cdot, -\pi) = u_x(\cdot, \pi)$, e la condizione iniziale $u(0, \cdot) = 0$. Dimostrare che (P) ammette una soluzione u definita per $t \geq 0$, e discuterne la regolarità.

SOLUZIONE. Procedo come al solito, scrivendo la funzione incognita u in serie di Fourier rispetto alla variabile x :

$$u(t, x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(t) e^{inx}.$$

Scrivendo (formalmente) u_t , u_{xx} e v in serie di Fourier, l'equazione $u_t = u_{xx} + v$ si riduce al fatto che, per ogni $n \in \mathbb{Z}$, c_n soddisfa l'equazione differenziale $\dot{c}_n = -n^2 c_n + c_n^0$ dove c_n^0 sono i coefficienti di Fourier di v , mentre la condizione iniziale $u(0, \cdot) = 0$ si riduce a $c_n(0) = 0$. In altre parole, ogni c_n deve risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = -n^2 y + c_n^0, \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

da cui si ottiene con qualche calcolo che $c_0(t) = c_0^0 t$ e $c_n(t) = \frac{1}{n^2} c_n^0 (1 - e^{-n^2 t})$ per ogni $n \neq 0$. Pertanto la soluzione u dovrebbe essere data da

$$u(t, x) := c_0^0 t + \underbrace{\sum_{n \neq 0} \frac{c_n^0}{n^2} (1 - e^{-n^2 t}) e^{inx}}_{u_n(t, x)}. \quad (2)$$

Dimostro ora il seguente enunciato: *la funzione u definita in (2)*

- (i) è ben definita e continua su $R := [0, +\infty) \times \mathbb{R}$ e 2π -periodica in x ,
- (ii) è di classe C^1 in t e di classe C^2 in x ,
- (iii) risolve il problema (P) .

Dimostrazione di (i). Nella risoluzione dell'esercizio 2 ho fatto vedere che $c_n^0 = O(|n|^{-2})$ per $n \rightarrow \pm\infty$. Usando questo fatto ottengo che

$$\|u_n\|_{L^\infty(R)} \leq \frac{|c_n^0|}{n^2} = O(|n|^{-4})$$

(per la disuguaglianza ho usato che $0 \leq 1 - e^{-n^2 t} \leq 1$ per $t \geq 0$ e che $|e^{inx}| = 1$ per ogni x). Quindi la serie di funzioni in (2) converge totalmente su R , da cui segue che la funzione u è ben definita e continua su R . È inoltre ovvio dalla formula che u è 2π -periodica nella variabile x .

Dimostrazione di (ii). Sia $k = 1, 2, \dots$, vale allora che

$$D_x^k u_n = \frac{c_n^0}{n^2} (in)^k (1 - e^{-n^2 t}) e^{inx},$$

da cui segue che

$$\|D_x^k u_n\|_{L^\infty(R)} \leq |c_n^0| |n|^{k-2} = O(|n|^{k-4}),$$

e quindi la serie delle derivate $D_x^k u_n$ converge totalmente su R per $k = 1, 2$. Questo dimostra che la funzione u è di classe C^2 nella variabile x .

Analogamente, per $h = 1, 2, \dots$, vale che

$$D_t^h u_n = -\frac{c_n^0}{n^2} n^{2h} e^{-n^2 t} e^{inx},$$

da cui segue che

$$\|D_t^h u_n\|_{L^\infty(R)} \leq |c_n^0| |n|^{2h-2} = O(|n|^{2h-4}),$$

e quindi la serie delle derivate $D_t^h u_n$ converge totalmente su R per $k = 1$. Questo dimostra che la funzione u è di classe C^1 nella variabile t .

La dimostrazione di (iii) è completamente standard e la ometto.

Si può inoltre dimostrare che u è di classe C^∞ su $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$. Questa dimostrazione è più delicata perché non si riesce a ottenere una buona stima per la norma di $D_x^k u_n$, neanche su $(\delta, +\infty) \times \mathbb{R}$. Un modo per aggirare il problema è scrivere u in forma leggermente diversa, vale a dire

$$u(t, x) := c_0^0 t + \underbrace{\sum_{n \neq 0} \frac{c_n^0}{n^2} e^{inx}}_{w(x)} - \sum_{n \neq 0} \frac{c_n^0}{n^2} e^{-n^2 t} e^{inx}. \quad (3)$$

Procedendo come per la soluzione dell'equazione del calore si dimostra che la seconda serie converge ad una funzione di classe C^∞ su $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$. Per concludere mi basta quindi far vedere che la prima serie definisce una funzione w di classe C^∞ su $[-\pi, \pi]$.

Si verifica facilmente che la serie converge totalmente su \mathbb{R} e lo stesso vale per la serie delle derivate prime e per la serie delle derivate seconde. Questo implica che w è una funzione su \mathbb{R} di classe C^2 (e 2π -periodica). Inoltre, derivando due volte w si ottiene

$$\ddot{w} = -\sum_{n \neq 0} c_n^0 e^{inx} = c_0^0 - v$$

e siccome v è di classe C^∞ su $[-\pi, \pi]$, lo stesso vale per $c_0^0 - v$, e quindi anche per w .

OSSERVAZIONI. La funzione w definita in (3) è solo di classe C^2 su tutto \mathbb{R} , e non di classe C^∞ . La ragione è che l'equazione $\ddot{w} = c_0^0 - v$ vale a patto di considerare come v la funzione definita da $v(x) = e^{2x} + e^{-2x}$ su $[-\pi, \pi]$, ed estesa per periodicità a tutto \mathbb{R} . Tale funzione è solo continua su \mathbb{R} (nei punti della forma $x = (1 + 2k)\pi$ la derivata è discontinua), e quindi w è solo di classe C^2 .

8 Dimostrare i seguenti enunciati, dove $L^p = L^p(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ e $C_0 = C_0(\mathbb{R}; \mathbb{C})$:

- a) se $u \in L^1$ e $\widehat{u} \in L^2$ allora $u \in L^2$ [suggerimento: approssimare u con $u * \sigma_\delta \rho$ dove $\rho \in L^1 \cap L^2$];
- b) $\|\widehat{u}\|_2 = \sqrt{2\pi} \|u\|_2$ per ogni $u \in L^1$; ¹
- c) la Trasformata di Fourier è iniettiva su $L^1 \cup L^2$;
- d) è possibile definire la Trasformata di Fourier da $L^1 + L^2$ a $C_0 + L^2$, ed è iniettiva.

SOLUZIONE. a) Prendo

$$\rho(x) := \frac{1}{2} e^{-|x|},$$

in particolare ρ appartiene a L^p per ogni $p \geq 1$ e ha integrale 1, inoltre

$$\widehat{\rho}(y) = \frac{1}{1+y^2} \quad \text{e} \quad \widehat{\sigma_\delta \rho}(y) = \frac{1}{1+\delta^2 y^2}.$$

Per ogni $\delta > 0$ pongo

$$u_\delta := u * \sigma_\delta \rho.$$

Siccome $u \in L^1$ e $\rho \in L^2$, ho che $u_\delta \in L^2$ e quindi

$$\sqrt{2\pi} \|u_\delta\|_2 = \|\widehat{u}_\delta\|_2. \quad (4)$$

¹ Identità dimostrata a lezione solo per $u \in L^1 \cap L^2$

Siccome $u, \rho \in L^1$, usando la formula per la trasformata del prodotto di convoluzione di funzioni in L^1 ottengo

$$\widehat{u_\delta}(y) = \widehat{u}(y) \cdot \widehat{\sigma_\delta \rho}(y) = \widehat{u}(y) \cdot \frac{1}{1 + \delta^2 y^2},$$

quindi $|\widehat{u_\delta}(y)| \leq |\widehat{u}(y)|$, da cui segue che

$$\|\widehat{u_\delta}\|_2 \leq \|\widehat{u}\|_2. \tag{5}$$

Mettendo insieme (4) e (5) ottengo

$$\sqrt{2\pi} \|u_\delta\|_2 \leq \|\widehat{u}\|_2. \tag{6}$$

Infine uso il fatto che u_δ converge a u in L^1 (ricordo che ρ ha integrale 1) insieme l'enunciato b) dell'esercizio 6 e alla disuguaglianza (6), e ottengo

$$\|u\|_2 \leq \liminf_{\delta \rightarrow 0} \|u_\delta\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\widehat{u}\|_2,$$

da cui segue che $\|u\|_2$ è finita.

b) L'identità in questione è stata dimostrata a lezione per $u \in L^1 \cap L^2$, e devo dimostrarla per $u \in L^1 \setminus L^2$. In tal caso $\|u\|_2 = +\infty$ e quindi $\|\widehat{u}\|_2 = +\infty$ per via del punto a).

Nel resto dell'esercizio indico per chiarezza con \mathcal{F}_1 la TdF su L^1 e con \mathcal{F}_2 la TdF su L^2 . È stato visto a lezione $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$ su $L^1 \cap L^2$, che \mathcal{F}_1 è iniettiva su L^1 , e che \mathcal{F}_2 è iniettiva su L^2 .

c) Siccome so già che \mathcal{F}_1 ed \mathcal{F}_2 sono iniettive, mi basta dimostrare che date $u_1 \in L^1$ e $u_2 \in L^2$ tali che $\mathcal{F}_1(u_1) = \mathcal{F}_2(u_2)$ allora $u_1 = u_2$. Per farlo osservo che $\mathcal{F}_1(u_1) = \mathcal{F}_2(u_2)$ appartiene a L^2 perché u_2 appartiene a L^2 , quindi u_1 appartiene a L^2 per via del punto a) e $\mathcal{F}_1(u_1) = \mathcal{F}_2(u_1) = \mathcal{F}_2(u_2)$, e quindi $u_1 = u_2$ per via dell'iniettività di \mathcal{F}_2 su L^2 .

d) Scrivo ogni $u \in L^1 + L^2$ come $u = u_1 + u_2$ con $u_1 \in L^1$ e $u_2 \in L^2$ e definisco la TdF di u come

$$\mathcal{F}(u) := \mathcal{F}_1(u_1) + \mathcal{F}_2(u_2).$$

Per prima cosa devo far vedere che questa definizione è ben posta, cioè che data un'altra rappresentazione $u = v_1 + v_2$ con $v_1 \in L^1$ e $v_2 \in L^2$ allora

$$\mathcal{F}_1(u_1) + \mathcal{F}_2(u_2) = \mathcal{F}_1(v_1) + \mathcal{F}_2(v_2). \tag{7}$$

In effetti le uguaglianze $u = u_1 + u_2 = v_1 + v_2$ implicano che le funzioni $u_1 - v_1$ e $v_2 - u_2$ sono uguali e appartengono sia a L^1 che a L^2 . Pertanto $\mathcal{F}_1(u_1 - v_1) = \mathcal{F}_2(v_2 - u_2)$, da cui segue la (7) (per linearità).

Siccome $L^1 + L^2$ è uno spazio vettoriale ed \mathcal{F} è lineare (cosa che *non* verifico), per dimostrare che \mathcal{F} è iniettiva mi basta far vedere che $\mathcal{F}(u) = 0$ implica $u = 0$. Scrivendo $u = u_1 + u_2$ come sopra, ho che

$$\mathcal{F}(u) = 0 \Rightarrow \mathcal{F}_1(u_1) + \mathcal{F}_2(u_2) = 0 \Rightarrow \mathcal{F}_1(u_1) = \mathcal{F}_2(-u_2),$$

e siccome la TdF è iniettiva su $L^1 \cup L^2$ (punto c)) ne deduco che $u_1 = -u_2$, ovvero $u = 0$.

OSSERVAZIONI. Per scrivere in maniera precisa gli enunciati dei punti c) e d) e le relative dimostrazioni si dovrebbe prestare attenzione al fatto che la TdF di una funzione in L^2 è una funzione in L^2 , e quindi è definita solo a meno di insiemi di misura nulla (mentre la TdF di una funzione in L^1 è una funzione continua definita in ogni punto). Questo implica in particolare che diverse identità di funzioni scritte sopra (per esempio la (7)) vanno intese come valide q.o., cosa che ho omesso volutamente di specificare.

- 1** Calcolare la serie di Fourier complessa di $f(x) := 16 \cos^2 x \sin^2 x$.

SOLUZIONE. Esprimendo $\cos x$ e $\sin x$ in termini di e^{ix} e e^{-ix} ottengo

$$\begin{aligned} f(x) &= 16 \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^2 \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^2 \\ &= -((e^{ix} + e^{-ix})(e^{ix} - e^{-ix}))^2 = -(e^{2ix} - e^{-2ix})^2 = 2 - e^{4ix} - e^{-4ix}. \end{aligned}$$

Chiaramente l'ultimo termine coincide con la rappresentazione di f in serie di Fourier.

- 2** Dato $a > 0$, calcolare la Trasformata di Fourier della funzione indicatrice $u := \mathbf{1}_{[-a,a]}$.

SOLUZIONE. Si tratta di un calcolo diretto:

$$\hat{u}(y) := \int_{-a}^a e^{-ixy} dx = \left| \frac{e^{-ixy}}{-iy} \right|_{-a}^a = \frac{e^{iay} - e^{-iay}}{iy} = \frac{2}{y} \sin(ay).$$

- 3** Al solito, siano $b_n(u)$ i coefficienti della serie in seni di una funzione $u : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$.

- a) Esprimere $b_n(\ddot{u})$ in funzione di $b_n(u)$ ed a quando u è di classe C^2 e $u(0) = u(\pi) = a$.
 b) Calcolare $b_n(u)$ per $u(x) := x(\pi - x)$.

SOLUZIONE. a) Parto dall'espressione di $b_n(\ddot{u})$ come integrale e integro per parti due volte:

$$\begin{aligned} b_n(\ddot{u}) &:= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \ddot{u}(x) \sin(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\dot{u}(x) \sin(nx) \right]_0^\pi + \frac{2n}{\pi} \int_0^\pi \dot{u}(x) \cos(nx) dx \\ &= \frac{2n}{\pi} \left[u(x) \cos(nx) \right]_0^\pi + \frac{2n^2}{\pi} \int_0^\pi u(x) \sin(nx) dx \\ &= \begin{cases} -n^2 b_n(u) & \text{per } n \text{ pari,} \\ -\frac{4}{\pi} an - n^2 b_n(u) & \text{per } n \text{ dispari.} \end{cases} \end{aligned}$$

- b) In questo caso $u(0) = u(\pi) = 0$, e la formula ottenuta al punto a) diventa $b_n(\ddot{u}) = -n^2 b_n(u)$; usando che $\ddot{u} = -2$, ottengo quindi

$$b_n(u) = -\frac{1}{n^2} b_n(\ddot{u}) = \frac{4}{\pi n^2} \int_0^\pi \sin(nx) dx = \begin{cases} 0 & \text{per } n \text{ pari,} \\ \frac{8}{\pi n^3} & \text{per } n \text{ dispari.} \end{cases}$$

- 4** Sia $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^d$ una mappa "conforme", cioè una mappa di classe C^1 tale che per ogni $x \in \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare $d_x u$ coincide a meno di una costante $a(x)$ con un'isometria (da \mathbb{R}^2 in \mathbb{R}^d).

- a) Dimostrare che i vettori $\frac{\partial u}{\partial x_1}(x)$ e $\frac{\partial u}{\partial x_2}(x)$ sono ortogonali e hanno lunghezza $|a(x)|$.
 b) Esprimere lo Jacobiano $Ju(x)$ in termini di $a(x)$.

SOLUZIONE. a) Ricordo che la derivata parziale i -esima è data da

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = d_x u e_i$$

dove e_i è l' i -esimo vettore della base canonica di \mathbb{R}^2 . Scrivendo ora $d_x u = a(x) I(x)$ dove $I(x)$ è un'isometria (ovvero un'applicazione lineare che conserva il prodotto scalare) ottengo

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}(x); \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \right\rangle &= \langle d_x u e_i; d_x u e_j \rangle \\ &= (a(x))^2 \langle I(x) e_i; I(x) e_j \rangle = (a(x))^2 \langle e_i; e_j \rangle = (a(x))^2 \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Da questa formula deduco immediatamente la tesi.

b) Il gradiente di u è la matrice $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}; \frac{\partial u}{\partial x_2}\right)$,¹ dove le derivate parziali sono viste come vettori colonna. Pertanto, tenendo conto di quanto dimostrato al punto a),

$$\nabla^t u \nabla u = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^t \\ \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_1} & \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_1} & \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix},$$

e quindi

$$Ju = \sqrt{\det(\nabla^t u \nabla u)} = a^2.$$

5 Dimostrare che la funzione $f(x) := \frac{\sin x}{x \log(e + |x|)}$ appartiene a $L^p(\mathbb{R})$ se e solo se $p > 1$.

SOLUZIONE. Comincio dimostrando che $f \in L^p(\mathbb{R})$ per $p > 1$.

Osservo innanzitutto che la funzione $f(x)$ può essere estesa ad una funzione continua su tutto \mathbb{R} ponendo $f(0) := 1$. Quindi

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R})}^p = 2 \int_0^{+\infty} |f(x)|^p dx \approx \int_1^{+\infty} |f(x)|^p dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{|x|^p} dx.$$

(Il primo passaggio segue dal fatto che f è pari, nel secondo ho usato che l'integrale è improprio solo a $+\infty$, nel terzo che $|f(x)| \leq 1/x^p$, cosa che segue dalle stime $|\sin x| \leq 1$ e $\log(e + |x|) \geq 1$.) Per concludere mi basta osservare che l'ultimo integrale è finito per $p > 1$.

Dimostro ora che f non appartiene a $L^1(\mathbb{R})$. Per ogni $n = 1, 2, \dots$ considero l'intervallo

$$I_n := \left[n\pi - \frac{2\pi}{3}, n\pi - \frac{\pi}{3}\right]$$

ed osservo che

$$\begin{aligned} \|f\|_1 &\geq \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{I_n} |f(x)| dx \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{I_n} \frac{1}{2x \log(e+x)} dx \\ &\geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{6n \log(e+\pi n)} \approx \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \log n} \approx \int_{n=2}^{+\infty} \frac{dx}{x \log x} = +\infty. \end{aligned}$$

(Nel primo passaggio ho usato che gli intervalli I_n sono disgiunti; nel secondo ho usato che $|\sin x| \geq \frac{1}{2}$ su ogni I_n ; nel terzo ho usato che l'intervallo I_n ha lunghezza $\frac{\pi}{3}$ e per ogni $x \in I_n$ vale $x \leq n\pi$ e quindi $x \log(e+x) \leq n\pi \log(e+n\pi)$; il quarto passaggio segue dal criterio del confronto asintotico per le serie a termini positivi, e il quinto dal criterio del confronto di serie e integrali).

6 Consideriamo il problema (P) dato dall'equazione $u_t = u_{xx} + x(\pi - x)$ sull'intervallo spaziale $[0, \pi]$, dalle condizioni al bordo $u(\cdot, 0) = u(\cdot, \pi) = 0$, e dalla condizione iniziale $u(0, \cdot) = 0$. Discutere l'esistenza e la regolarità della soluzione.

SOLUZIONE. Scrivo l'incognita u in serie di seni rispetto alla variabile x :

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(t) \sin(nx).$$

Usando le condizioni al bordo di (P) , la formula $b_n(\ddot{v}) = -n^2 b_n(v)$, e i coefficienti della serie in seni della funzione $x(\pi - x)$ calcolati nell'esercizio 3, ottengo che se u risolve (P) allora b_n risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = -n^2 y + \frac{8}{\pi n^3} \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad \text{per } n \text{ dispari}; \quad \begin{cases} \dot{y} = -n^2 y \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad \text{per } n \text{ pari}.$$

Da questo segue che

$$b_n(t) = \begin{cases} \frac{8}{\pi n^3} (1 - e^{-n^2 t}) & \text{per } n \text{ dispari,} \\ 0 & \text{per } n \text{ pari.} \end{cases} \quad (1)$$

¹ Per semplificare la notazione ometto di esplicitare la dipendenza da x .

Da questa formula segue immediatamente che la soluzione u non è definita per alcun $t < 0$. Infatti per $t < 0$ i coefficienti $b_n(t)$ di $u(t, \cdot)$ non tendono a 0 per $n \rightarrow +\infty$, come invece succede per ogni funzione in $L^2(0, \pi)$, e a maggior ragione per ogni funzione di classe C^2 su $[0, \pi]$.

Dalla (1) segue che la soluzione di (P) è data da

$$u(t, x) := \frac{8}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots} \underbrace{\frac{1}{n^5}(1 - e^{-n^2t}) \sin(nx)}_{u_n(t, x)}. \quad (2)$$

Per la precisione dimostro ora il seguente enunciato: *La funzione u in (2) è ben definita su $R := [0, +\infty) \times \mathbb{R}$, continua, di classe C^1 nella variabile t e di classe C^3 in x , e risolve (P).*

Usando la stima

$$\|u_n\|_{L^\infty(R)} \leq \frac{1}{n^5}$$

ottengo che la serie in (2) converge totalmente su R , e quindi u è ben definita e continua su R .

Dato $h = 1, 2, \dots$ vale che

$$D_t^h u_n = \pm \frac{1}{n^{5-2h}} e^{-n^2t} \sin(nx);$$

pertanto ho la stima

$$\|D_t^h u_n\|_{L^\infty(R)} \leq \frac{1}{n^{5-2h}},$$

da questa segue che la serie delle derivate $D_t^h u_n$ converge totalmente su R per $h = 1$, e di conseguenza u è di classe C^1 in t .

Dato $k = 1, 2, \dots$ vale che

$$D_x^k u_n = \frac{1}{n^{5-k}} (1 - e^{-n^2t}) g_n(nx)$$

dove $g_n(t) = \pm \sin t$ oppure $\pm \cos t$, e pertanto ho la stima

$$\|D_x^k u_n\|_{L^\infty(R)} \leq \frac{1}{n^{5-k}};$$

da questa segue che la serie delle derivate $D_x^k u_n$ converge totalmente su R per $k \leq 3$, e di conseguenza u è di classe C^3 in x .

La dimostrazione del fatto che u risolve (P) è completamente standard e la ometto.

Dimostro infine che la soluzione u è di classe C^∞ per $t > 0$.

Questa affermazione non la posso dimostrare procedendo come sopra, perché per $k \geq 3$ la serie delle derivate $D_x^k u_n$ non converge totalmente su alcun sottoinsieme di R (con parte interna non vuota).

Riscrivendo però la formula (2) come

$$u(t, x) := \underbrace{\sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{8}{\pi n^5} \sin(nx)}_{v(x)} - \frac{8}{\pi} \underbrace{\sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^5} (1 - e^{-n^2t}) \sin(nx)}_{w(t, x)}, \quad (3)$$

posso dimostrare che:

- $v(x) = \frac{1}{12}(x^4 - 2\pi x^3 + \pi^3 x)$ e in particolare v è una funzione di classe C^∞ su $[0, \pi]$;
- w è una funzione di classe C^∞ su $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$.

Per quanto riguarda il primo punto, osservo che i coefficienti di v soddisfano la relazione $n^2 b_n(v) = b_n(x(\pi - x))$, e quindi v è l'unica funzione che soddisfa $\ddot{v}(x) = -x(\pi - x)$ e $v(0) = v(\pi) = 0$, vale a dire $v(x) = \frac{1}{12}(x^4 - 2\pi x^3 + \pi^3 x)$.

Per quanto riguarda il secondo punto, si procede come visto a lezione: si dimostra che la serie che definisce w converge totalmente su $R_\delta := (\delta, +\infty) \times \mathbb{R}$ per ogni $\delta > 0$, e che lo stesso vale per la serie delle derivate di qualunque ordine. Quindi w è una funzione di classe C^∞ su \mathbb{R}_δ , e di conseguenza anche sull'unione di tutti gli R_δ , vale a dire $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$.

OSSERVAZIONI. Un modo più veloce ed elegante di risolvere l'esercizio (suggerito dalla formula (3)) è il seguente: si scrive l'incognita u come $u = v + w$ dove $v(x) := \frac{1}{12}(x^4 - 2\pi x^3 + \pi^3 x)$ e w

è la nuova incognita.

Facendo i calcoli si vede che w risolve il problema (P') dato dall'equazione del calore $w_t = w_{xx}$ con le condizioni al bordo $w(\cdot, 0) = w(\cdot, \pi) = 0$ e la condizione iniziale $w(0, \cdot) = -v(x)$. A questo è chiaro che la regolarità della soluzione è quella della soluzione dell'equazione del calore...

7 Sia $\rho : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ una funzione continua, e per ogni $u \in L^1 := L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ sia

$$\Phi(u) := \left(\int_{\mathbb{R}} |\widehat{u}(y)|^2 \rho(y) dy \right)^{1/2};$$

sia inoltre $X := \{u \in L^1 : \Phi(u) < +\infty\}$.

- a) Dimostrare che Φ è una norma su X indotta da un prodotto scalare complesso.
- b) Dimostrare che $\Phi(u * v) \leq \Phi(u) \cdot \|v\|_1$ per ogni $u \in X, v \in L^1$.
- c) Sia $k = 0, 1, \dots$; trovare delle condizioni sul comportamento asintotico di ρ a $\pm\infty$ che implicano che X contiene tutte le funzioni di classe C^k con supporto compatto.
- d) Cosa si può dire sulla completezza di Φ ?

SOLUZIONE. a) Dico che la norma Φ è derivata dal prodotto scalare

$$\Lambda(u_1; u_2) := \int_{\mathbb{R}} \widehat{u}_1 \overline{\widehat{u}_2} \rho dy = \langle \sqrt{\rho} \widehat{u}_1; \sqrt{\rho} \widehat{u}_2 \rangle,$$

dove $\langle \cdot; \cdot \rangle$ è il prodotto hermitiano standard in $L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$.

Per dimostrare questo enunciato devo verificare quanto segue:

- (i) $\Lambda(u_1; u_2)$ è ben definito per ogni u_1, u_2 in X ;
- (ii) $\Lambda(u_1; u_2)$ è lineare in u_1 e $\Lambda(u_2; u_1) = \overline{\Lambda(u_1; u_2)}$;
- (iii) Λ è definita positiva.

Per quanto riguarda (i), osservo che dato $u \in X$ allora $u \in L^1$ e in particolare \widehat{u} è una funzione continua ben definita; inoltre la norma

$$\Phi(u) = \|\sqrt{\rho} \widehat{u}\|_2 \tag{4}$$

è finita, e quindi $\sqrt{\rho} \widehat{u} \in L^2$. Da questa osservazione segue che, dati $u_1, u_2 \in X$, allora $\sqrt{\rho} \widehat{u}_1$ e $\sqrt{\rho} \widehat{u}_2$ sono funzioni ben definite e in L^2 , e quindi il loro prodotto scalare è ben definito.

Per dimostrare (ii) mi basta osservare che l'applicazione da X in L^2 data da $u \mapsto \sqrt{\rho} \widehat{u}$ è lineare (in senso complesso), cosa che segue dalla linearità della trasformata di Fourier e dalla linearità del prodotto per una funzione assegnata ρ .

Per quanto riguarda (iii), il fatto che $\Lambda(u, u) \geq 0$ segue dall'analogia proprietà di $\langle \cdot; \cdot \rangle$; inoltre se $\Lambda(u, u) = 0$ allora $\langle \sqrt{\rho} \widehat{u}; \sqrt{\rho} \widehat{u} \rangle = 0$, da cui segue che $\sqrt{\rho} \widehat{u} = 0$ q.o., e quindi anche $\widehat{u} = 0$ q.o. (ricordo che $\rho > 0$ ovunque per ipotesi), e allora $u = 0$ q.o. per l'iniettività della TdF su L^1 .

b) Si tratta di un semplice calcolo:

$$(\Phi(u * v))^2 = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{v}|^2 |\widehat{u}|^2 \rho dy \leq \|\widehat{v}\|_{\infty}^2 \int_{\mathbb{R}} |\widehat{u}|^2 \rho dy \leq \|v\|_1^2 (\Phi(u))^2.$$

(Nel primo passaggio ho usato che la nota formula $\widehat{u * v} = \widehat{u} \widehat{v}$, nel secondo ho usato la disuguaglianza di Hölder, nel terzo la disuguaglianza $\|\widehat{v}\|_{\infty} \leq \|v\|_1$.)

c) Dico che se $\rho(y) = O(|y|^{2k})$ per $y \rightarrow \pm\infty$ allora X contiene ogni funzione $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ di classe C^k e con supporto compatto.

L'osservazione chiave è questa: per quanto visto a lezione, $D^k u \in L^1$ e $\widehat{D^k u} = (iy)^k \widehat{u}$. Inoltre vale anche $D^k u \in L^2$, e quindi, per l'identità di Plancherel, $\widehat{D^k u} = (iy)^k \widehat{u} \in L^2$, ovvero

$$\int_{\mathbb{R}} |\widehat{u}(y)|^2 |y|^{2k} dy < +\infty.$$

Per il teorema del confronto asintotico per integrali impropri ottengo quindi

$$\Phi(u) := \int_{\mathbb{R}} |\widehat{u}(y)|^2 \rho(y) dy < +\infty.$$

d) La norma Φ non è mai completa. Prendo per esempio la funzione $v = \mathbf{1}_{[-1,1]}$ ed una successione di funzioni pari v_n di classe C^1 con supporto in $[-2,2]$ convergono a v in L^2 , e pongo

$$u_n := \frac{1}{2\pi} \widehat{v}_n.$$

Voglio dimostrare che le funzioni u_n appartengono a X e formano una successione di Cauchy rispetto alla norma Φ , che però non converge ad alcuna $u \in X$.

Osservo innanzitutto che le funzioni v_n sono di classe C^1 e a supporto compatto, e per quanto visto a lezione le trasformate (e quindi anche le funzioni u_n) appartengono a L^1 . Allora vale il teorema di inversione, e ricordando che per le funzioni pari trasformata e anti-trasformata coincidono, ottengo che

$$\widehat{u}_n = v_n$$

ed in particolare le funzioni \widehat{u}_n convergono a v in L^2 .

Trattandosi inoltre di funzioni con supporto in $[-2,2]$ e che su questo intervallo ρ è limitata (in quanto continua), ottengo che le funzioni $\sqrt{\rho} \widehat{u}_n$ convergono a $\sqrt{\rho} v$ in L^2 . In particolare le funzioni $\sqrt{\rho} \widehat{u}_n$ formano una successione di Cauchy rispetto alla norma L^2 , e di conseguenza, ricordando la formula (4), le funzioni u_n formano una successione di Cauchy rispetto alla norma Φ .

Infine, se u_n convergesse ad una qualche $u \in X$ rispetto alla norma Φ , allora $\sqrt{\rho} \widehat{u}_n$ convergerebbe a $\sqrt{\rho} \widehat{u}$ in L^2 , e dunque $\sqrt{\rho} \widehat{u} = \sqrt{\rho} v$ q.o., ovvero $\widehat{u} = v$ q.o., ma questo è assurdo perché \widehat{u} è continua, mentre $v = \mathbf{1}_{[-1,1]}$ non coincide q.o. con alcuna funzione continua.

8 Sia $L^p := L^p(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ e $C_0 := C_0(\mathbb{R}; \mathbb{C})$. Dimostrare che la Trasformata di Fourier $\mathcal{F} : L^1 \rightarrow C_0$ non è surgettiva completando la seguente traccia di dimostrazione: supponendo per assurdo che lo sia, allora esiste $\varphi \in L^1$ tale che

$$\widehat{\varphi}(y) = \frac{1}{\log(e + |y|)};$$

posto $u := \mathbf{1}_{[-1,1]}$, dimostrare che $\widehat{\varphi * u} \in L^2 \setminus L^1$, e poi che $\varphi * u \in C_0 \setminus \mathcal{F}(L^1)$.

[Se serve si può dare per acquisito che la TdF è iniettiva su $L^1 \cup L^2$.]

SOLUZIONE. Siccome φ e u appartengono a L^1 , ho che

$$\widehat{\varphi * u} = \widehat{\varphi} \widehat{u} = \frac{2 \sin y}{y \log(|e| + y)}$$

e quindi $\widehat{\varphi * u}$ appartiene a $L^2 \setminus L^1$ per quanto dimostrato nell'esercizio 5.

Ma allora, per l'unicità della TdF su $L^2 \cup L^1$, la trasformata $\widehat{\varphi * u}$ appartiene a $L^2 \setminus \mathcal{F}(L^1)$, e siccome questa trasformata coincide con $\varphi * u$ a meno di un fattore 2π e di un cambio di segno nella variabile, anche $\varphi * u$ appartiene a $L^2 \setminus \mathcal{F}(L^1)$.

Resta da dimostrare che $\varphi * u$ appartiene a C_0 . Siccome $u \in L^1$ e $\varphi \in L^\infty$, per il teorema di Young sulla convoluzione so che $\varphi * u$ è continua e limitata. Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \varphi * u(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \int_{\mathbb{R}} u(y) \varphi(x - y) dy = 0$$

per il teorema di convergenza dominata (ometto i dettagli).