Analisi I - IngBM - 2014-15
COMPITO A 21 Febbraio 2015

COGNOME .... NOME ....

MATRICOLA .... VALUTAZIONE ..... + ... = ...

1. Istruzioni

Gli esercizi devono essere svolti negli appositi spazi del presente fascicolo; **solo questo sarà ritirato e valutato.** *I fogli a quadretti messi a disposizione possono essere usati liberamente ma in nessun caso saranno ritirati. Il compito è composto di due parti. La prima parte deve essere svolta preliminarmente. Essa verrà corretta per prima e valutata con un punteggio di* $0 \le x \le 10$ *punti. Condizione necessaria affinché venga preso in considerazione l'eventuale svolgimento della seconda parte è che* $x \ge 6$. *In tal caso la seconda parte viene valutata con un punteggio di* $0 \le y \le 24$ *punti. Il compito sarà sufficiente per l'ammissione alla prova orale se* $x + y \ge 18$. *In tal caso il voto di ammissione all'orale sarà* $v = \min(28, x + y)$.

2. Prima parte

Esercizio 0. (0 punti) Leggere e capire le istruzioni.

Esercizio 1. (3,5 punti) Dire se la successione

$$a_n = \frac{n^5 + 7^n}{n^5}$$

ammette limite per $n \to \infty$ e, in caso affermativo, calcolarlo.

SOLUZIONE

$\square$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ non esiste $\boxed{\text{X}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ esiste e vale ∞

perché risulta

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^5 + 7^n}{n^5} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^5\left(1 + \frac{7^n}{n^5}\right)}{n^5} = \frac{1 + \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{7^n}{n^5}\right)}{1}$$

e si ha (cfr. dispensa [LIMITI2] pag 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7^n}{n^5} = \infty$.

Esercizio 2. (3,5 punti)
Dire quale delle frasi (1) (2) (3) (4) (5) (6) è la negazione della frase

Tutte le mucche abbaiano o ragliano

(1) Esiste almeno una mucca che non abbaia e che non raglia
(2) Nessuna mucca abbaia e nessuna mucca raglia
(3) Esiste una mucca che abbaia e che non raglia
(4) Tutti i cani abbaiano e tutti i somari ragliano
(5) Nesuna mucca abbaia o raglia
(6) Tutte le mucche muggiscono

SOLUZIONE.

$\boxed{\text{X}}$ 1 $\square$2 $\square$3

$\square$4 $\square$5 $\square$6

$\square$Nessuna di tutte queste; la negazione corretta è

Esercizio 3. (3 punti) Calcolare la derivata della funzione $f = \sin \log \sqrt{x^2+1}$
SOLUZIONE. Applicando le regole di derivazione alla funzione f, che risulta definita e derivabile in tutto $\mathbf{R}$, si ha

$$f' = \frac{x \cos(\log(\sqrt{x^2+1}))}{x^2+1}$$

3. Seconda parte

Esercizio 1. (6 punti) Sia $f(x)$ la funzione $x^5 + \dfrac{e^x}{e^x+1}$.

(1) Calcolare, se esistono, i limiti $L_- = \lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $L_+ = \lim_{x\to+\infty} f(x)$

(2) Dire per quali $a \in \mathbf{R}$ esiste $u \in \mathbf{R}$ tale che $f(u) = a$

(3) Per gli a per cui un siffatto u esiste, dire se tale u è unico o no.

SOLUZIONE.

(1) $\boxed{\text{X}}$ $L_- = -\infty$ $\square$Il limite L_- non esiste

$\boxed{\text{X}}$ $L_+ = +\infty$ $\square$Il limite L_+ non esiste

perché

$$L_{\mp} = \lim_{x\to\mp\infty}\left(x^5 + \frac{e^x}{e^x+1}\right) = \lim_{x\to\mp\infty} x^5\left(1 + \frac{\frac{e^x}{e^x+1}}{x^5}\right) = \lim_{x\to\mp\infty} x^5 = \mp\infty$$

perché $\lim_{x\to\pm\infty} x^5 = \pm\infty$ e la funzione $\dfrac{e^x}{e^x+1}$ è limitata ($0 < \dfrac{e^x}{e^x+1} < 1$).

(2) *Gli a per cui tale u esiste sono tutti gli $a \in \mathbf{R}$.* Infatti, poiche' $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, per ogni a esistono $c < b$ tali che $f(c) < a$, $f(b) > a$, cioe' $a \in [f(c), f(b)]$. Poichè la funzione è definita su tutto $\mathbf{R}$ ed è una funzione elementare continua, è continua la sua restrizione su l'intervallo $[c, b]$. Allora per il teorema dei valori intermedi (cfr. dispensa [C-INTERVALLI]) esiste allora $u \in [c, b]$ tale che $f(u) = a$.

(3) *Per ogni a esiste un unico u tale che $f(u) = a$.* Infatti la funzione è derivabile elementare. Se ne esistessero due distinti $u_1 < u_2$, per il Teorema di Rolle esisterebbe $x \in [u_1, u_2]$ tale che $f'(x) = 0$. Ma si verifica immediatamente che per ogni $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) > 0$.

Esercizio 2. (6 punti)
Siano f_1, f_2, f_3, f_4 le funzioni definite su $\mathbf{R} \setminus 0$ dalle formule

$$f_1 = \frac{\sin x}{e^x - 1}, f_2 = \frac{\cos(x) - 1}{e^x - 1}, f_3 = \frac{|\sin x|}{e^x - 1}, f_4 = \frac{\cos|x| - 1}{e^x - 1}$$

Dire quali di queste funzioni si estendono ad una funzione continua su tutto $\mathbf{R}$.
SOLUZIONE.
Per vedere se la funzione $f = f_1, f_2, f_3, f_4$ si estende ad una funzione continua su tutto $\mathbf{R}$ studiamone il limite per $x \to 0$. Se esiste finito e uguale a $l \in \mathbf{R}$, f si estende in modo continuo ponendo $f(0) = l$. Altrimenti non si estende.
Per $f = f_1$ e per $f = f_2$ si vede immediatamente, sia utilizzando la regola dellHopital sia considerando gli sviluppi di Taylor fino ad un ordine sufficiente, che tale limite finito esiste e vale rispettivamente 1 e 0.
Per $f = f_3$, nel calcolare il limite occorre tener conto che a seconda che si considerino le x vicino a 0 positive o negative, il numeratore vale rispettivamente $\sin x$ o $-\sin x$, poiché $\sin(-x) = -\sin x$, e che quindi il $\lim_{x\to 0^+} f_3 = 1$ mentre $\lim_{x\to 0^-} f_3 = -1$: pertanto f_3 non è prolungabile con continuità nell'origine.
Infine per $f = f_4$, tenendo conto del fatto che le x vicino a 0 positive o negative non influenzano il valore del coseno poiché $\cos x = \cos(-x)$ e quindi che $\cos|x| - 1 = \cos x - 1$ si ha che il $\lim_{x\to 0^+} f_4 = 0$ come anche $\lim_{x\to 0^-} f_4 = 0$ e quindi f_4 è prolungabile con continuità nell'origine.

Esercizio 3. (6 punti) Sia F la funzione razionale

$$F = \frac{2x^4 + 5x^3 + 2}{x^4 + 1}$$

Determinare l'insieme di definizione di F e l'insieme di tutte le primitive.
SOLUZIONE.
L'insieme di definizione della funzione F è tutto $\mathbf{R}$ essendo il denominatore della frazione una funzione sempre diversa da 0.
Per calcolare l'insieme delle primitive conviene esprimere la funzione F

$$F = \frac{2x^4 + 5x^3 + 2}{x^4 + 1} = 2 + \frac{5x^3}{x^4 + 1} = 2 + \frac{5}{4}\frac{4x^3}{x^4 + 1} =$$

Da cui integrando si ha che l'insieme delle primitive è costituito dalla classe di funzioni

$$\{2x + \frac{5}{4}\log(x^4 + 1) + c\}$$

al variare della costante c.
Esercizio 4. (6 punti) Si consideri l'equazione differenziale

$$(e^x + 1)^2 y' = e^x \ .$$

Determinare tutte le soluzioni massimali, specificando in particolare per ognuna l'intervallo di definizione.
SOLUZIONE. L'equazione è a variabili separabili, quindi otteniamo al fine della ricerca delle soluzioni

$$y' = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$$

da cui integrando otteniamo la famiglia di funzioni

$$y = \frac{e^x}{(e^x+1)} + c$$

il cui intervallo massimale di definizione è tutto $\mathbf{R}$.