Analisi I - IngBM - 2013-14

COMPITO A 11 Gennaio 2014

COGNOME .... NOME ....

MATRICOLA............................. VALUTAZIONE ...... + ... = ...

1. Istruzioni

Il compito è composto di due parti. La prima parte deve essere svolta preliminarmente. Essa verrà corretta per prima e valutata con un punteggio di $0 \le x \le 10$ punti. Condizione necessaria affinché venga preso in considerazione l'eventuale svolgimento della seconda parte è che $x \ge 6$. In tal caso la seconda parte viene valutata con un punteggio di $0 \le y \le 24$ punti. Il compito sarà sufficiente per l'ammissione alla prova orale se $x+y \ge 19$. In tal caso il voto di ammissione all'orale sarà $v/30$, dove $v = \min(28, x+y)$.

2. Prima parte

Esercizio 0 (punti 0). Leggere e capire le istruzioni.

Esercizio 1 (punti 1). Per ogni $m \in \mathbf{Z}$, indichiamo con $m\mathbf{Z}$ il sottoinsieme di $\mathbf{Z}$ formato dai multipli di m. Costruire un'applicazione iniettiva ma non surgettiva

$$f : 3\mathbf{Z} \to 11\mathbf{Z}\ .$$

$f(x) = f(3n) = 2(11n)$. E' iniettiva perché $22n = 22m$ se e solo se $n = m$. Non è surgettiva perché, per esempio $y = 11$, che è dispari, non appartiene all'immagine di f che è formata di numeri pari.

Nota. E' solo una delle infinite soluzioni.

Esercizio 2 (5 punti).

a) Determinare il più grande sottoinsieme D di $\mathbf{R}$ tale che la formula $f(x) = \log(\frac{|x|}{|x-1|})$ definisce una funzione $f : D \to \mathbf{R}$. Determinare l'insieme $\mathrm{Int}(D)$ dei punti interni di D.

b) Dire se f è derivabile su $\mathrm{Int}(D)$, se lo è calcolare f'.

a) $D = \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$

`Int` $D = D$

b) ☐ `No, non è derivabile perché`

☒ `Si,è derivabile e` $f'(x) = \dfrac{1}{x(1-x)}$

Esercizio 3 (2 punti). Calcolare la derivata f' della funzione $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x) = \sin(e^x) + \log(x^2(1+x^4)) \ .$$

$$f' = e^x \cos(e^x) + \frac{2}{x} + \frac{4x^3}{1+x^4}$$

Esercizio 4 (2 punti). Consideriamo la funzione integrale $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{5}{1+t^2} dt$. Dire se esiste $L \in \overline{\mathbf{R}}$ tale che $L = \lim_{x \to +\infty} F(x)$

a ☐ `No il limite` L `non esiste perché`

b ☒ `Si il limite` L `esiste e` $L = \dfrac{5\pi}{2}$

3. Seconda parte

Esercizio 1 (punti 4). Si consideri la funzione $s : \{n \in \mathbb{N};\ n \geq 2\} \to \mathbb{N}$, definita per induzione come segue:

$$s(2) = 1, \quad s(n+1) = \binom{n+1}{2}(n-1)! + \binom{n+1}{1}s(n) \ .$$

(a) Calcolare $s(5)$.
(b) Siano A, B insiemi finiti, $|A| = n$, $|B| = n-1$. Sia

$$s(A, B) = \{f : A \to B |\ f \text{ è surgettiva } \}.$$

Dimostrare per induzione su $n \geq 2$ che $|s(A, B)| = s(n)$.

a $s(5) = 240$

b Prova. Verifichiamo che l'uguaglianza vale per $n = 1$. Sappiamo che $s(2) = 1$. Se $|A| = 2$ e $|B| = 1$, esiste un'unica applicazione $f : A \to B$ che è necessariamente surgettiva, quindi anche $|s(A, B)| = 1$. Dimostriamo adesso il passo induttivo.

Se $|A| = n+1$ e $|B| = n$, si fissa $b \in B$ e si pone $B' = B \setminus \{b\}$, $|B'| = n-1$. Poniamo $C = f^{-1}(b)$, $A' = A \setminus C$. Ci sono due possibilità per il numero di elementi $|C|$ di C, cioè 1 e 2. Se $|C| = 1$, ci sono

$$\binom{n+1}{1}$$

possibilità per l'insieme C, e per ciascuna di queste possibilità, la funzione costante $h : C \to \{b\}$ può essere completata ad una $f : A \to B$ surgettiva mediante la scelta di una $g : A' \to B'$ surgettiva. Poiché $|A'| = n$, per induzione ci sono $|s(A', B')| = s(n)$ scelte possibili per g. Se $|C| = 2$, ci sono

$$\binom{n+1}{2}$$

possibilità per l'insieme C, e per ciascuna di queste possibilità, la funzione costante $h : C \to \{b\}$ può essere completata ad una $f : A \to B$ surgettiva mediante la scelta di una $g : A' \to B'$ surgettiva. Poiché $|A'| = n-1 = |B'|$, una tale g è bigettiva e quindi ci sono $|i(A', B')| = (n-1)!$ scelte possibili per g. Ne segue che

$$|s(A, B)| = \binom{n+1}{2}(n-1)! + \binom{n+1}{1}s(n) = s(n+1)$$

e la tesi è dimostrata.

Esercizio 2 (punti 8). Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = x^2 - 3x + 2$.

(a) Dire se la funzione integrale $F(x) = \int_0^x (f(t))^{50} dt$ è iniettiva.

(b) Dire se la funzione integrale $G(x) = \int_0^x (f(t))^{51} dt$ ha un punto di minimo locale.

a) $\boxed{\text{x}}$ Si F è iniettiva. Poiché 50 è pari $F'(x) = f(x)^{50} \geq 0$ e si annulla solo negli zeri di f, cioè nei punti $x = 1, 2$. Ne segue che F è crescente (con due punti di flesso orizzontali nei due zeri).
In particolare F è iniettiva.

$\boxed{}$ No F non è iniettiva perché

b) $\boxed{\text{x}}$ Si G ha punti di minimo locale perché: La derivata $G'(x) = f(x)^{51}$. Poiché 51 è dispari $G'(x) = f(x)^{51}$ ha lo stesso segno e gli stessi zeri di $f(x)$. In un intorno dello zero $x = 2$, $f(x) < 0$ per $x < 2$, $f(x) > 0$ per $x > 2$. Quindi $x = 2$ è un punto di minimo locale di G.

$\boxed{}$ No G non ha punti di minimo locale perché:

Esercizio 3 (punti 12). Si consideri l'equazione differenziale del secondo ordine

$$y'' - 4y' + 3y = e^t$$

(a) Dire se $y = \sin(t)$ è una soluzione dell'equazione.
(b) Determinare tutte le soluzioni massimali dell'equazione tali che $y(1) = 1$.
(c) Descrivere il grafico della soluzione massimale tale che $y(1) = y'(1) = 1$.

a ☐ Si $y = \sin(t)$ è una soluzione dell'equazione perché

☒ No $y = \sin(t)$ non è una soluzione dell'equazione perché sostituendo $\sin(t)$ nel primo membro dell'equazione otteniamo la funzione

$$h(t) = -4\cos(t) + 2\sin(t)$$

che è limitata e quindi è differente dalla funzione e^t che non è limitata (**Nota:** Questa è solo una delle possibili giustificazioni del fatto che $h(t) \neq e^t$. Un'altra è per esempio la seguente: $h(\pi) = -4$ mentre $e^t > 0$).

b Le soluzioni massimali dell'equazione tali che $y(1) = 1$ sono
L'integrale generale dell'equazione è

$$y(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^t - \frac{1}{2} t e^t, \quad c_1, c_2 \in \mathbf{R} \ .$$

Tutte le soluzioni sono massimali perché definite su tutto $\mathbf{R}$. La condizione $y(1) = 1$ è verificata se e solo se i parametri c_1, c_2 verificano la relazione

$$c_2 = \frac{2 + e - 2c_1 e^3}{2e} \ .$$

(**Note:** Ci sono quindi infinite soluzioni che verificano la condizione $y(1) = 1$, che dipendono dalla scelta di un parametro libero. Ci sono anche altri modi equivalenti di esprimere la relazione tra i parametri; il modo più simmetrico è

$$2c_1 e^3 + 2c_2 e - e = 2$$

)

c Imponendo anche la condizione $y'(1) = 1$, si determina l'unica soluzione

$$y(t) = \frac{1}{4e^2}(e^{3t} + (e^2 + 4e)e^t - 2e^2 t e^t) \ .$$

Il suo grafico ha qualitativamente lo stesso aspetto del grafico della funzione esponenziale.