Asintoti

Il grafico di una funzione è un riassunto "visivo" di informazioni sul comportamento della funzione stessa, nel senso che vi annotiamo informazioni con un codice che ci risulti rapidamente comprensibile; ad esempio, quando all'avvicinarsi ad un punto x_0 il limite della funzione tende ad infinito, noi raffiguriamo questo comportamento disegnando quello che si chiama un *asintoto verticale*, cioè una retta verticale ($x = x_0$) la cui distanza dal grafico della funzione tende a zero al tendere di x ad x_0.

Analogamente se la funzione, al tendere di x ad ∞, tende ad un limite finito k, graficamente rappresentiamo la situazione con una retta orizzontale $y = k$ la cui distanza del grafico tende a zero al tendere di x ad ∞: un *asintoto orizzontale.*

Tutto ciò porta a immaginare queste rette come tangenti all'infinito.

Un po' di criticismo. Tuttavia questa interpretazione, se pur suggestiva e magari rafforzata da alcuni casi particolari, [1] merita qualche riflessione in più, dove l'idea che la funzione, o meglio il suo grafico, tenda a "sdraiarsi" in qualche senso sull'asintoto, anche in casi in cui le apparenze potrebbero suggerirlo, non corrisponde a realtà.

E' più facile convincerci di ciò nel caso di asintoti orizzontali dove nulla vieta al grafico di oscillare come vuole intorno all'asintoto, cosa non possibile per la definizione stessa di funzion nel caso di un asintoto verticale. Come vedremo peró il fenomeno che andiamo a descrivere non è legato alla presenza di oscillazioni.

Prendiamo ad esempio la funzione $\frac{\sin x^2}{x}$. Ci si convince facilmente che il grafico di questa funzione oscilla come il seno tra i grafici delle due funzioni $\frac{1}{x}$ e $-\frac{1}{x}$ che rimodulano l'ampiezza delle oscillazioni. Si verifica inoltre che $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sin x^2}{x} = 0$ e che quindi l'asse delle x è un asintoto orizzontale.

L'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x)$ in un punto $(x_0, f(x_0))$ è $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$; nel caso specifico il coefficiente angolare è quindi $2\cos x^2 - \dfrac{\sin x^2}{x^2}$. Poiché per x tendente ad infinito $\dfrac{\sin x^2}{x^2}$ tende a 0, il limite di $f'(x) = 2\cos x^2 - \dfrac{\sin x^2}{x^2}$ non esiste, come suggerisce anche il comportamento del grafico dove la retta tangente assume svariate posizioni senza tendere a stabilizzarsi, ripetendosi periodicamente.

Pertanto, pur tendendo la funzione con i valori a 0, non vi tende con le derivate e quindi l'asse delle x non è il limite delle rette tangenti.

Come si diceva il fenomeno non è legato alla presenza di fenomeni oscillatori: ad esempio anche nel caso di un asintoto verticale nulla vieta di immaginare una successione di punti x_n tendente ad x_0, punto ove il limite della funzione va ad ∞,

[1] Come ad esempio $y = \frac{1}{x}$ dove gli asintoti sono effettivamente quelle rette che vengono interpretate come rette tangenti all'infinito.

che siano tutti punti di flesso orizzontale per f e con ordinate $f(x_n)$ che vanno ad infinito. L'asintoto ancora non è il limite delle tangenti.

Talvolta è utile conoscere in modo qualitativo il comportamento di una funzione per valori molto grandi della variabile. Abbiamo sintetizzato due di queste situazioni dicendo che la funzione, o meglio il suo grafico, ammette un asintoto (orizzontale o verticale).

Può darsi che una funzione al tendere di x all'infinito tenda ad infinito secondo una precisa direzione. Esprimeremo ciò con il concetto di *asintoto obliquo* che potremmo definire come una retta la cui distanza dal grafico tende a zero al tendere della variable x a infinito.

Se l'equazione di una tale retta è $y = mx + n$ come possiamo calcolare m, n ?

La differenza $f(x) - (mx + n)$ delle due ordinate differisce per un fattore tipo $\cos\alpha$ dalla distanza per cui si deve avere $0 = \lim_{x\to\infty}\{f(x) - (mx + n)\} = \lim_{x\to\infty} x\{\frac{f(x)}{x} - m - \frac{n}{x}\}$ e quindi deve essere $\lim_{x\to\infty}\{\frac{f(x)}{x} - m\} = 0$ da cui $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = m$.

Di conseguenza si deve avere $n = \lim_{x\to\infty}\{f(x) - mx\}$. E ovviamente se i limiti $m = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ e $n = \lim_{x\to\infty}\{f(x) - mx\}$ allora la retta $y = mx + n$ è un asintoto obliquo.

Anche qui è bene tener presente quanto detto nell'osservazione *critica* precedente, e cioè che ancora l'immagine dell'asintoto obliquo come tangente all'infinito non significa che tale retta possa esser vista come posizione limite delle tangenti. Poiché $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ con ogni probabilità si presenterà come forma indeterminata, si avrà, per l' Hospital, $m = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = f'(x)$: ma come abbiamo visto nella dispensa sul teorema dell'Hospital, l'esistenza del limite di $f'(x)$ è condizione solo sufficiente e il limite $\frac{f(x)}{x}$ può esistere anche se il limite di $f'(x)$ non esiste, come tra l'altro abbiamo visto anche nel caso dell'asintoto orizzontale.

Si può costriure immediatamente un esempio a partire da una situazione verificantesi con un asintoto orizzontale perché è immediato verificare che se f è una funzione tale che $\lim_{x\to\infty} f(x) = k$ allora la funzione $g(x) = f(x) - k + mx + n$ ammette la retta $y = mx + n$ come asintoto oblquo. Infatti $\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\{\frac{f(x) - k}{x} + m + \frac{n}{x}\} = m$ ed analogamente $\lim_{x\to\infty}\{g(x) - mx\} = \lim_{x\to\infty}\{f(x) - k + n\} = n$.

*Appendice1.*Un esempio, che forse risulta più immediato, di una successione di funzioni γ_n che tende ad una funzione γ senza però che ciò avvenga per la successione γ'_n delle derivate si può visualizzare in questo modo.

Punto di partenza una funzione il cui grafico γ_1 sia una semicirconferenza di centro l'origine, del tipo $y = \sqrt{1 - x^2}$. Si pensi poi alla funzione γ_2 il cui grafico è formato da due semicirconferenze entrambe di raggio $\frac{1}{2}$ e di centro rispettivamente $(-\frac{1}{2}, 0)$ e $(\frac{1}{2}, 0)$. Esplicitamente:

$$\gamma_2(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{4} - (x + \frac{1}{2})^2} & \text{se } x \in [-1, 0] \\ \sqrt{\frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2} & \text{se } x \in [0, 1] \end{cases}$$

Possiamo iterare il procedimento e considerare la curva γ_n formata da $2n$ semicirconferenze tangenti di raggio $\frac{1}{2n}$ e di centri in $(-\frac{1}{n}, 0)$ e $(\frac{1}{n}, 0)$. Questa curva è grafico di una funzione definita "a tratti" sull'intervallo $[-1, 1]$ in modo del tutto analogo a γ_2. Ci si convince facilmente che i valori delle funzioni γ_n convergono alla curva limite rappresentata dal segmento $-1, 1$ ma ciò non può avvenire per la successione delle derivate avendo tutte le curve, a differenza del segmento, nel punto $(-1, 0)$ tangente verticale.

Non è difficile provare che un eventuale convincimento (errato) del fatto che la successione converga al segmento con tutte le derivate porterebbe a provare la razionalità di π in quanto, indicata con $l(\gamma_n)$ la lunghezza della curva γ_n, si avrebbe $\lim l(\gamma_n) = l([-1, 1]) = 2$ ed è immediato che tutte le curve hanno la stessa lunghezza π. Il concetto di lunghezza coinvolge (vedi la nota[ARCHI] "Archi di curve") la derivata e se la successione non converge con le derivate è un po' azzardato, anzi non è corretto, dire che la lunghezza delle curve converge alla lunghezza della curva limite.

Appendice 2. Un asintoto obliquo è una curva tale che la sua distanza dal grafico della funzione tende a 0 al tendere di x ad infinito.

Possiamo estendere tale definizione chiamando *curva asintotica* una qualsiasi funzione $g(x)$ tale che $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - g(x)) = 0$. Ad esempio se consideriamo la funzione $f(x) = p(x) + \dfrac{\log x}{x}$ la funzione $y = p(x)$ è una curva asintotica per $f(x)$ per $x \to \infty$. Analogamente se abbiamo una funzione razionale $\frac{p(x)}{q(x)}$ in cui il grado di p sia maggiore di quello di q abbiamo, operando la divisione tra polinomi, che $p(x) = a(x) + \dfrac{b(x)}{q(x)}$ ed essendo $\deg b < \deg q$ si ha che $\lim\limits_{x\to\infty} (p(x) - a(x)) = 0$ e quindi che il polinomio $a(x)$ è una curva asintotica per $p(x)$.