December 2, 2014

INTEGRAZIONE

1. Introduzione

Affronteremo due problemi detti entrambi di *"integrazione"*, apparentemente di natura diversa e che invece risulteranno essere intimamente legati tra loro.

1.1. **Integrazione come problema inverso della derivazione.** Sia $F : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile sull'intervallo aperto I. Dunque, ponendo $f = F'$, diciamo che F è una *primitiva* di f. Supponiamo ora di avere assegnato una (qualsiasi) $f : I \to \mathbb{R}$. Poniamo

$$\int f(x)dx := \{F : I \to \mathbb{R};\ F \text{ derivabile},\ F' = f\}$$

cioè l'*insieme* di tutte le primitive di F. A volte questo insieme è chiamato *l'integrale indefinito di* f. Si noti che la notazione (un po' strana) che abbiamo scelto per denotarlo avrà una certa utilità pratica in seguito, ma non sottintende alcun significato particolare. Potevamo avere utilizzato al suo posto, per esempio, $\mathcal{I}(f)$ e tutto il discorso sarebbe filato ugualmente. Inoltre anche la variabile x non ha in questa notazione alcun significato particolare, se ci conviene, potremo scrivere equivalentemente $\int f(t)dt$. Dunque il problema è di capire come è fatto questo insieme al variare di f.

Osserviamo subito che se $\int f(x)dx$ non è vuoto e $F \in \int f(x)dx$ è una particolare primitiva di f, allora

$$\int f(x)dx = \{G = F + c;\ c \in \mathbb{R}\} := F + \mathbb{R}$$

infatti da una parte è chiaro che $G' = (F+c)' = f$. Dall'altra, se $G \in \int f(x)dx$ è un'altra primitiva di f, allora $(G-F)' = 0$, quindi $G-F$ è una funzione costante sull'intervallo I (vedi [D-INTERVALLI]). Osserviamo anche che $\int f(x)dx$ può essere vuoto. Per esempio sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 0$ se $x < 0$, $f(x) = 1$ se $x \geq 0$. Se fosse $F' = f$ su tutto $\mathbb{R}$, questo fatto dovrebbe valere rispettivamente per le due restrizioni alle due semirette $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$. Ma per quanto detto prima $F = c$ è una costante sulla prima semiretta, $F = x + c'$ sulla seconda. Affinché F sia definita su tutto $\mathbb{R}$ e derivabile, è necessario che F sia continua, questo impone che $c = c'$ e $F(0) = c$. E' facile allora verificare che una tale F non è derivabile in 0. Osserviamo che f in questo esempio non è continua in 0. D'altra parte ci sono funzioni non continue per cui $\int f(x)dx$ non è vuoto. Ad esempio la funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(0) = 0$, $F(x) = x^2 \sin(1/x)$ se $x \neq 0$, è derivabile su tutto $\mathbb{R}$ ma $f = F'$ non è continua in 0 (verificare queste affermazioni per esercizio). Dunque la continuità di f non è necessaria affinché esista una primitiva, ma possiamo sperare che assumendo che f sia continua si eliminino delle "patologie" che impediscono l'esistenza di una primitiva. Abbiamo così individuato un sotto-problema importante:

Supponiamo che $f : I \to \mathbb{R}$ sia continua. E' vero allora che $\int f(x)dx \neq \emptyset$? Se f è definita per mezzo di qualche formula esplicita (per esempio f è elementare derivabile) è possibile determinare una formula esplicita per una primitiva F di f?

Discuteremo e sostanzialmente risolveremo questi problemi di *integrazione indefinita delle funzioni continue.*

1.2. **Integrazione come problema della misurazione di sopra/sotto grafici di funzioni.** Premettiamo brevemente una discussione sulla misura degli intervalli e dei rettangoli *orientati*. Di solito quando abbiamo scritto $[a, b]$, abbiamo sottinteso che $a < b$. Se eliminiamo questa ipotesi (cioè permettiamo che $a > b$), la notazione $[a, b]$ continua ad avere senso se la interpretiamo, in ogni caso, come l'intervallo dei punti compresi tra a e b *orientato* secondo la "freccia" che parte da a e arriva in b. Avendo fissato come unità di misura degli intervalli orientati l'intervallo unitario $[0, 1]$ (per cui $m([0, 1]) = 1$), allora la misura $m([a, b]) = b - a$, da cui $m([a, b]) = -m([b, a])$ ed è positiva se e solo se $b > a$. Se $a = b$ è naturale porre $m([a, a]) = 0$. Cerchiamo ora di estendere questa discussione ai rettangoli di $\mathbb{R}^2$. Consideriamo cioè rettangoli della forma $R = [a, b]\times[0, c] \subset \mathbb{R}^2$. Fissata l'orientazione che va da a a b lungo il lato $[a, b]$ contenuto nell'asse delle ascisse, questa si "propaga" su tutti i lati di R, per cui per esempio il lato verticale di vertice $(b, 0)$ eredita l'orientazione che va da $(b, 0)$ a (b, c), etc. Si vede allora che ci sono due possibilità: il perimetro di R è percorso in senso *antiorario*, oppure in senso *orario*. Se condideriamo $R' = [b, a] \times [0, c]$ (in quanto insiemi R e R' coincidono, ma abbiamo invertito l'orientazione del lato sull'asse delle ascisse) allora il verso di percorrenza del perimetro si inverte. Abbiamo in questo modo introdotto una nozione di orientazione dei rettangoli, così che ogni rettangolo ammette esattamente due orientazioni diverse. Fissiamo ora il quadrato unitario $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ come unità di misura dei rettangoli orientati, così che $m(Q) = 1$. Allora se $R = [a, b] \times [0, c]$ come prima

$$m(R) = (b - a)c$$

da cui si deriva che

$$m(R') = -m(R) = m(R")$$

dove $R" = [a, b] \times [0, -c]$. La misura $m(R) > 0$, se e solo se $b - a \neq 0$, $c \neq 0$ e il perimetro di R è percorso in senso antiorario. Se $b = a$ o $c = 0$ è naturale porre $m(R) = 0$. Si noti che questa discussione sull'orientazione è compatibile e in effetti giustifica la familiare *regola dei segni per il prodotto*: $+\cdot+ = +$, $-\cdot+ = +\cdot- = -$, $-\cdot- = +$.

Sia data ora una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, su cui per il momento facciamo soltanto l'ipotesi che sia *limitata*. Come prima non assumiamo che $a < b$. Associamo ad f la "porzione" di $\mathbb{R}^2$ compresa tra il grafico di f e il segmento $[a, b]$ contenuto nell'asse delle ascisse; precisamente: scomponiamo $[a, b] = D_+ \cup D_-$ nei due pezzi disgiunti $D_+ = \{f(x) \geq 0\}$, $D_- = \{f(x) < 0\}$; chiaramente $D_+ \cap D_- = \emptyset$. Poniamo infine

$$T(f) = \{(x, y); x \in D_+,\ 0 \leq y \leq f(x)\} \cup \{(x, y); x \in D_-,\ 0 \geq y \geq f(x)\}\ .$$

Se per esempio $f \geq 0$, cioè $[a, b] = D_+$, allora $T(f)$ è un "trapezioide" avente il lato orizzontale $[a, b]$ sull'asse delle ascisse, i due lati verticali paralleli $[(a, 0),(a, f(a))]$, $[(b, 0),(b, f(b))]$ e un quarto "lato" opposto a $[a, b]$ formato dal grafico di f.
Fissiamo come sopra il quadrato unitario Q come unità di misura delle "porzioni di piano (orientate)". Possiamo allora formulare informalmente il nuovo problema di integrazione come segue:

Definire una procedura di misurazione tale che per una classe abbastanza ampia di funzioni limitate $f : [a, b] \to \mathbb{R}$*, che includa almeno le funzioni continue, permetta di definire propriamente la misura* $m(T(f))$*, cioè il numero reale che esprime il rapporto tra la grandezza della porzione di piano* $T(f)$ *e quella di* Q*.*

Quando $T(f)$ sarà misurabile, useremo un' altra notazione

$$m(T(f)) := \int_a^b f(x)dx$$

e questo *numero* sarà anche detto *l'integrale definito della funzione* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Come nel caso dei rettangoli l'integrale definito dovrà essere sensibile al cambio di orientazione di $[a, b]$, per cui

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

ed inoltre

$$\int_a^a f(x)dx = 0\ .$$

Discuteremo una specifica procedura di misurazione, detta *integrazione secondo Riemann* che fornirà una risposta al problema. Esistono procedure più raffinate che permettono di misurare $T(f)$ anche in casi in cui l'integrale secondo Riemann non è definito. Ma l'integrazione secondo Riemann è sufficiente per molte applicazioni.

1.3. **Funzioni integrali.** Come detto all'inizio e come suggerito anche dalle notazioni adottate, c' è un legame profondo tra questi due problemi di "integrazione" apparentemente di natura diversa. Un ponte tra i due problemi si costruisce per mezzo della nozione di *funzione integrale*. Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione definita sull'intervallo aperto I che abbia la seguenti proprietà:

La restrizione di f ad ogni sotto-intervallo chiuso e limitato $[a, b] \subset I$ è limitata ed esiste l'integrale definito $\int_a^b f(x)dx$.

Vedremo che questa proprietà è verificata se per esempio f è continua. Fissiamo $a_o \in I$ e per ogni $x \in I$ definiamo
$$F(x) = \int_{a_0}^{x} f(t)dt \ .$$
In questo modo abbiamo definito una nuova funzione $F : I \to \mathbb{R}$ detta *funzione integrale di f di punto base a_0*. Usando le proprietà dell'integrazione secondo Riemann, dimostreremo il seguente *Teorema fondamentale del calcolo integrale*:

Teorema 1.1. *(1) Sia $f : I \to \mathbb{R}$ definita su l'intervallo aperto I, tale che f ammette una primitiva F ed esiste l'integrale definito della restrizione di f ad un intervallo chiuso e limitato $[a, b] \subset I$. Allora*
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \ .$$
(2) Se f è continua ed F è una funzione integrale di f (di punto base scelto arbitrariamente su I), allora F è una primitiva di f.

Nei capitoli seguenti, discuteremo prima separatamente i due problemi di integrazione ed infine il teorema fondamentale.

2. Proprietà dell'integrale indefinito

Conosciamo molte funzioni che ammettono primitive, per esempio tutte le derivate delle funzioni elementari derivabili. Per esempio la scheda alla fine di [DERIVATE] può anche essere letta come una lista di primitive di certe funzioni elementari date. E' utile mettere in evidenza alcune proprietà dell'integrale indefinito che in certi casi permettono di calcolare nuove primitive a partire da primitive già note. Queste sono in effetti riletture di proprietà della derivata che già conosciamo.

Linearità. Siano $f, g : I \to \mathbb{R}$ e F, G rispettive primitive. Allora $F + G$ è una primitiva di $f + g$. Se $c \in \mathbb{R}$, allora cF è una primitiva di cf.

Integrazione per parti. Siano f, g, F, G come sopra. Ricordiamo la regola di derivazione di un prodotto:
$$(FG)' = fG + Fg$$
da cui
$$\int fGdx + \int Fgdx = FG + \mathbb{R}$$
$$\int fGdx = FG - \int Fgdx \ .$$
In questo modo FG realizza una parte dell'integrazione di fG e resta da integrare Fg, che in certi casi è piu' facile da trattare. Per esempio sia $Gf = x\cos(x)$. Per cui $F = \sin(x)$. Dunque
$$\int x\cos(x)dx = x\sin(x) - \int \sin(x) = (x\sin(x) + \cos(x)) + \mathbb{R} \ .$$

Integrazione per sostituzione diretta. Sia F una primitiva di f. Consideriamo una funzione composta di funzioni derivabili, $G(x) = F(\phi(x))$. La regola di derivazione in questo caso è

$$G'(x) = f(\phi(x))\phi'(x) \ .$$

Dunque

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)dx = F(\phi(x)) + \mathbb{R}$$

che si può anche riscrivere formalmente:

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)dx = \int f(t)dt, \quad t = \phi(x) \ .$$

Ad esempio ponendo $F(t) = 1/t$, $t = \phi(x) = 1 + x^2$

$$\int \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int F(\phi(x))dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}dt = \frac{1}{2}\log|t| + \mathbb{R} \ .$$

Notare che per la sotituzione diretta non facciamo ipotesi particolari su ϕ. In particolare non richiediamo che sia invertibile.

Integrazione per cambiamento di variabile. Supponiamo che $x = \phi(t)$ sia un *cambiamento di variabile*, cioè che ϕ è invertibile con inversa derivabile. Allora le considerazioni precedenti permettono di ricondurre $\displaystyle\int f(x)dx$ a $\displaystyle\int f(\phi(t))\phi'(t)dt$. Infatti se $G(t)$ è una primitiva che appartiene all'ultimo integrale indefinito, allora $G(\phi^{-1}(x))$ è una primitiva di f. Ad esempio, ponendo $x = \sin(t)$, $t \in [-\pi/2, \pi/2]$,

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \cos^2(t)dt, \ t = \arcsin(x) \ .$$

$\cos^2(t)$ può essere integrato per parti (esercizio) ottenendo

$$\int \cos^2(t)dt = \frac{t + \sin(t)\cos(t)}{2} + \mathbb{R} \ .$$

Osservazioni 2.1. (Sulle notazioni adottate) (1) Le regole di integrazione per sostituzione diretta o per cambiamento di variabile forniscono una "giustificazione" formale delle particolari notazioni che abbiamo adottato per l'integrale indefinito. Ricordiamo che per la derivata si usa spesso un'altra notazione:

$$\phi' = \frac{d\phi}{dx}$$

ponendo come sopra $t = \phi(x)$ formalmente possiamo scrivere

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)dx = \int f(t)\frac{dt}{dx}dx$$

dunque "semplificando" i due dx che appaiono al "numeratore" e al "denominatore" otteniamo proprio l'altro membro della regola di integrazione:

$$\int f(t)dt \ .$$

Il problema è che in tutto questo dx e dt sono puri simboli, non è stata definita alcuna struttura algebrica consistente per cui quella "semplificazione" corrisponda ad una "operazione" effettiva. Dunque è bene considerarlo come un puro *artificio formale* che può avere una sua utilità pratica, tenendo però sempre sotto controllo quello che sta succedendo sostanzialmente e non solo a livello formale.
(2) *(Rivolta soprattutto ad un lettore particolarmente interessato.)* La notazione deriva storicamente dall'impostazione del calcolo differenziale che discende da Leibniz (uno dei due fondatori con Newton) e che ha un approccio molto più "algebrico". Sono state sviluppate diverse teorie (che possiamo chiamare genericamente di "analisi non-standard") che danno un significato sostanziale ai simboli come dx, dt e per le quali la semplificazione formale diventa una operazione effettiva.

3. L'integrazione secondo Riemann

Il nostro problema è misurare $T(f)$, quando $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è una data funzione. Se per esempio $f = c$ è una funzione costante, $T(f)$ è un rettangolo $R = [a,b] \times [0,c]$ e possiamo naturalmente porre

$$\int_a^b f(x)dx = m(R) = (b-a)c \ .$$

Complichiamo di poco l'esempio. Supponiamo per semplicità che $a < b$. Una *partizione* P di $[a,b]$ è un insieme finito ordinato di punti di $[a,b]$ della forma:

$$P = \{x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = b\}.$$

Si chiama partizione perché determina la decomposizione di $[a,b]$ come unione di sotto-intervarli adiacenti:

$$I = [a = x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \ldots [x_n, x_{n+1} = b] \ .$$

Date due partizioni P_1 e P_2 diremo che P_2 è *più fine* di P_1 se $P_1 \subset P_2$.
Fissata P, una *funzione a gradini* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ rispetto alla partizione P, è tale che la sua restrizione ad ogni $[x_j, x_{j+1})$ è una funzione costante $f_j = c_j$, e $f(b) = c_n$. $T(f)$ è allora un "plurirettangolo". E' naturale porre:

$$\int_a^b f(x)dx = m(T(f)) = \sum_j (x_{j+1} - x_j)c_j \ .$$

Si noti che il risultato può essere anche nullo perché possono esserci cancellazioni tra contributi positivi e negativi. L'idea intuitiva alla base dell'integrazione secondo Riemann è che risulteranno integrabili (cioè avranno $T(f)$ "misurabile") quelle funzioni che possono essere approssimate "bene" per mezzo di funzioni a gradini. Elaboriamo questa idea intuitiva. Sia data allora una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *limitata, supponiamo qui che* $a < b$ e siano rispettivamente $m = \inf f([a,b])$ e $M = \sup f([a,b])$. Fissiamo una partizione P di $[a,b]$ come sopra. La restrizione f_j ad ogni intervallo $[x_j, x_{j+1}]$ è a sua volta limitata. Siano m_j e M_j i rispettivi inf e sup. Abbiamo allora 2 funzioni a gradini relative a P, cioè le due funzioni

$$F_\bullet(f,P), \ \ F^\bullet(f,P)$$

che su ogni intervallo $[x_j, x_{j+1})$ valgono m_j e M_j rispettivamente. Passando agli integrali non è molto difficile verificare i seguenti comportamenti di queste due funzioni al variare della partizione P.

- Per ogni P,
$$\int_a^b F_\bullet(f,P) \leq \int_a^b F^\bullet(f,P) \ .$$
- Se P_2 è più fine di P_1 (cioè $P_1 \subset P_2$)) allora:
$$\int_a^b F_\bullet(f,P_1)dx \leq \int_a^b F_\bullet(f,P_2)dx$$
$$\int_a^b F^\bullet(f,P_1)dx \geq \int_a^b F^\bullet(f,P_2)dx$$
- Se P_1 e P_2 sono due arbitrarie partizioni, allora esiste P_3 che è più fine di entrambe (basta prendere $P_3 = P_1 \cup P_2$).
- Se P_1 e P_2 sono due arbitrarie partizioni, e P_3 è più fine di entrambe, allora:

$$m(b-a) \leq \int_a^b F_\bullet(f,P_1)dx \leq \int_a^b F_\bullet(f,P_3) \leq \int_a^b F^\bullet(f,P_3)dx \leq \int_a^b F^\bullet(f,P_2) \leq M(b-a) \ .$$

Ne segue allora che al variare della partizione P di $[a,b]$

$$\int_\bullet f = \sup\{\int_a^b F_\bullet(f,P)dx\}$$

$$\int^\bullet f = \inf\{\int_a^b F^\bullet(f,P)dx\}$$

sono ben definiti numeri reali e

$$\int^{\bullet} f \geq \int_{\bullet} f \ .$$

Diciamo infine che $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata, $a < b$, è *integrabile secondo Riemann* se tali estremi coincidono e poniamo

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\bullet} f = \int^{\bullet} f$$

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \ .$$

Nel seguito diremo semplicemente "integrabile", omettendo di dire "secondo Riemann". Mettiamo in evidenza alcune proprietà di questa procedura di integrazione, che sono conseguenze abbastanza semplici della definizione e delle disuguaglianze sopra indicate.

(1) Se f è a gradini, allora f è integrabile e ritroviamo l'integrale definito da cui siamo partiti.

(2) f è integrabile se e solo se per ogni $\epsilon > 0$, esiste una partizione P di $[a,b]$ (che dobbiamo immaginare sufficientemente fine) tale che

$$\int_a^b F^{\bullet}(f,P) - \int_a^b F_{\bullet}(f,P) < \epsilon \ .$$

(3) **Addittività sugli intervalli.** Consideriamo $a < c < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile e tale che anche le due restrizioni di f agli intervalli $[a,c]$ e $[c,b]$ siano integrabili. Allora:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \ .$$

(4) **Linearità.** Se $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sono entrambe integrabili, allora anche $f+g$ lo è e

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \ .$$

Per ogni $c \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx \ .$$

(5) Se $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sono entrambe integrabili e $f \geq g$, allora

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx \ .$$

(6) Se f è integrabile su $[a,b]$ $(a < b)$ allora

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Esistono funzioni che non sono integrabili. Per esempio la funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ se $x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$, $f(x) = 0$ altrimenti, non è integrabile perchè (a causa della densità sia di $\mathbb{Q}$ sia del suo complementare) risulta che

$$0 = \int_{\bullet} f \neq \int^{\bullet} f = 1 \ .$$

Dimostriamo adesso che le funzioni continue sono integrabili.

Teorema 3.1. *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $a < b$, continua. Allora f è integrabile.*

Dim. Sappiamo (vedi [C-INTERVALLI]) che f è limitata e uniformemente continua. Basta dimostrare che per ogni $\epsilon > 0$, esiste una partizione abbastanza fine P di $[a, b]$ tale che

$$\int_a^b F^\bullet(f,P)dx - \int_a^b F_\bullet(f,P)dx < \epsilon \ .$$

Per la continuità uniforme esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x, y \in [a, b]$ tali che $|x - y| < \delta$ si ha che $|f(x) - f(y)| < \dfrac{\epsilon}{b-a}$. Sia allora P una partizione abbastanza fine tale che per ogni j, $|x_j - x_{j+1}| < \delta$. Ne segue che per ogni j, $M_j - m_j < \dfrac{\epsilon}{b-a}$, quindi

$$\int_a^b F^\bullet(f,P)dx - \int_a^b F_\bullet(f,P)dx = \sum_j (M_j - m_j)(x_{j+1} - x_j) < \frac{\epsilon}{b-a} \sum_j (x_{j+1} - x_j) = \epsilon \ .$$

□

4. Dimostrazione del teorema fondamentale

Dimostriamo infine il *Teorema fondamentale del calcolo integrale* enunciato nell'Introduzione.
Dimostriamo l'enunciato (1). Sia $f : I \to \mathbb{R}$, sia F una primitiva di f, sia $[a, b] \subset I$, $a < b$, e supponiamo che esista l'integrale definito della restrizione $\int_a^b f(x)dx$. Fissata una arbitraria partizione P di $[a, b]$, si ha che

$$F(b) - F(a) = \sum_j (F(x_{j+1}) - F(x_j))$$

perché i termini si cancellano due a due eccetto il primo e l'ultimo. Poiché f è la derivata di F, per il teorema del valor medio (vedi [D-INTERVALLI]), per ogni j esiste $y_j \in (x_j, x_{j+1})$ tale che

$$F(b) - F(a) = \sum_j (F(x_{j+1}) - F(x_j)) = \sum_j f(y_j)(x_{j+1} - x_j) \ .$$

Poiché $m_j \leq f(y_j) \leq M_j$, ne segue che

$$\int_a^b F_\bullet(f,P)dx \leq (F(b) - F(a)) \leq \int_a^b F^\bullet(f,P)dx \ .$$

Per l'arbitrarietà di P, deduciamo che

$$\int_\bullet f \leq (F(b) - F(a)) \leq \int^\bullet f$$

infine, sapendo che f è integrabile concludiamo che

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \ .$$

□

Dimostriamo infine il punto (2). Supponiamo che $f : I \to \mathbb{R}$ sia continua, fissiamo arbitrariamente un punto a_0 in I e consideriamo la corrispondente funzione integrale

$$F(x) = \int_{a_0}^x f(t)dt \ .$$

Questa funzione è ben definita perché abbiamo visto prima che essendo f continua l'integrale definito $\int_{a_0}^x f(t)dt$ esiste per ogni x. Vogliamo dimostrare che F è una primitiva di f. Premettiamo un lemma.

Lemma 4.1. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ continua, $a, b \in I$. Allora esiste y compreso tra a e b tale che*

$$\int_a^b f(x)dx = f(y)(b - a) \ .$$

Dim. Supponiamo che $a < b$. Siano m e M rispettivamente il valore minimo e il valore massimo della restrizione di f a $[a, b]$. Allora sappiamo che

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq M$$

per il Teorema dei valori intermedi (vedi [C-INTERVALLI]) esiste $y \in [a, b]$ tale che verifica la tesi. Se $a > b$ allora

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx = -f(y)(a-b) = f(y)(b-a) \ .$$

□

Applicando il Lemma si può anche dimostrare il seguente fatto che a volte è utile:

Corollario 4.2. *Nelle ipotesi del lemma precedente, si ha*

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq M|b-a| \ .$$

Torniamo all'enunciato (1). Analizziamo il rapporto incrementale

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \ .$$

Applicando la proprietà di addittività sugli intervalli ricordata sopra,

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h} \ .$$

Applicando il lemma, sappiamo che esiste y compreso tra x e $x + h$ tale che

$$\frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h} = f(y)$$

quando $h \to 0$, poiché f è continua, $f(y) \to f(x)$ e lo stesso vale per il rapporto incrementale. Abbiamo quindi dimostrato che

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = F'(x) = f(x) \ .$$

□

Osservazioni 4.3. (Sull'uso pratico del teorema fondamentale) Sia come al solito $f : I \to \mathbb{R}$ continua, $[a, b] \subset I$ e vogliamo calcolare l'integrale definito $\int_a^b f(x)dx$. Possiamo allora studiare preliminarmente l'integrale indefinito $\int f(x)dx$, determinare una primitiva F di f e poi concludere che $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. La cosa può essere particolarmente effettiva se per esempio f è elementare ed ammette una primitiva elementare che può essere esplicitata. Tutto bene, però nella pratica bisogna agire con una certa cautela. Infatti nel trattare l'integrale indefinito si fanno spesso delle manipolazioni (per esempio dei cambiamenti di variabile) che non hanno senso su tutto I ma solo su certi sotto-intervalli. Perché la procedura sopra descritta sia corretta bisogna essere certi che $[a, b]$ sia contenuto in uno dei sottointervalli su cui abbiamo effettivamente determinato le primitive. Il seguente esempio chiarisce questa osservazione. Sia $f(x) = \dfrac{1}{1 + \sin^2(x)}$ definita su $I = \mathbb{R}$. Vogliamo calcolare

$$\int_0^{\pi} f(x)dx \ .$$

Studiamo prima $\int f(x)dx$. Facciamo il cambiamento di variabile $t = \tan(x)$. Semplici calcoli mostrano che

$$f(x) = \frac{1 + t^2}{1 + 2t^2}$$

inoltre

$$dx = \frac{1}{1+t^2}dt$$

$$\int \frac{1}{1+2t^2} = (1/\sqrt{2})\arctan(\sqrt{2}t) + \mathbb{R}$$

ed infine

$$\int \frac{1}{1+\sin^2(x)}dx = F(x) + \mathbb{R}$$

dove

$$F(x) = (1/\sqrt{2})\arctan(\sqrt{2}\tan(x)) \ .$$

Allora potremmo essere tentati di concludere che

$$\int_0^\pi \frac{1}{1+\sin^2(x)}dx = F(\pi) - F(0) = 0 \ .$$

Ma questa conclusione è certamente sbagliata perché $f > 0$ e così deve essere quel suo integrale definito. Il punto è che il cambiamento di variabile $t = \tan(x)$ ha senso solo sugli intervalli del tipo $(-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$ dove $k \in \mathbb{Z}$. Nessuno di questi contiene $[0,\pi]$. In questo caso possiamo aggiustare la cosa nel modo seguente. Consideriamo $(-\pi/2,\pi/2) \cup (\pi/2,(3/2)\pi)$. Sul primo la generica primitiva è della forma $F(x) + c$, sul secondo della forma $F(x) + c'$, dove le due costanti c e c' sono tra loro *indipendenti*. Scegliendo (per esempio) $c = 0$, $c' = \pi\sqrt{2}$, si verifica che la funzione $G(x) = F(x)$ su $(-\pi/2,\pi/2]$, $G(x) = F(x) + \pi\sqrt{2}$ su $[\pi/2,(3/2)\pi)$ è continua e derivabile su tutto l'intervallo $(-\pi/2,(3/2)\pi)$ (che contiene $[0,\pi]$) e che $G' = f$. Applicando adesso correttamente il teorema fondamentale, si conclude che

$$\int_0^\pi \frac{1}{1+\sin^2(x)}dx = G(\pi) - G(0) = \pi\sqrt{2} \ .$$

5. Complementi

(1)**Approssimanti a gradini di funzioni continue.** Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(a < b)$ è *continua*, esistono procedure più semplici di quelle suggerite dalla definizione, per approssimare $\int_a^b f(x)dx$ con l'integrale definito di opportune funzioni a gradini. Possiamo procedere per esempio nel modo seguente: per ogni $n > 0$ sia $\epsilon_n = (b-a)/n$ e fissiamo la partizione $P(n)$ di $[a,b]$ tale che per ogni j, $|x_j - x_{j+1}| = \epsilon_n$. Sia $G(f,n) : [a,b] \to \mathbb{R}$ la funzione a gradini relativa a $P(n)$ tale che, per ogni j, la restrizione all'intervallo $[x_j, x_{j+1})$ è la costante $c_j = f(x_j)$. Chiaramente $\epsilon_n \to 0$ quando $n \to +\infty$. Si può allora dimostrare che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b G(f,n)(x)dx = \int_a^b f(x)dx \ .$$

(2)**Sulle funzioni integrali.** Come è chiaro dalla definizione data nell'Introduzione, è sufficiente ma non necessario che $f : I \to \mathbb{R}$ sia continua affichè esistano funzioni integrali di f. Per esempio se f ha solo *un numero finito di punti di discontinuità*, allora esistono le funzioni integrali di f (rispetto a un punto base scelto arbitrariamente su I). Lo stesso fatto vale (anche se è un po' più complicato da dimostrare) se f è *monotona* (crescente o decrescente). Mentre la derivazione in generale fa perdere di regolarità (per esempio ci sono funzioni derivabili, quindi continue, la cui derivata non è continua; in generale la derivata di una funzione $\mathcal{C}^k$ è solo $\mathcal{C}^{k-1}$), le funzioni integrali (quando esistono) hanno un effetto "regolarizzante". Per esempio se f è continua (ma non derivabile), una sua funzione integrale è derivabile e di classe $\mathcal{C}^1$. Consideriamo l'esempio già usato prima: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ se $x < 0$, $f(x) = 1$ se $x \geq 0$; f non è continua solo in 0. La funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = 0$ se $x < 0$, $F(x) = x$ se $x \geq 0$ è la funzione integrale di f di punto base $a_0 = 0$. Come già sappiamo F *non* è una primitiva di f perché non è derivabile in 0. Però è continua su tutto $\mathbb{R}$ ed è una primitiva di f ristretta a $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Possiamo dire che F è derivabile "quasi ovunque" (intendendo sul complementare di un insieme finito di punti) e che è "quasi ovunque" una primitiva di f. Si osservi che: F è la funzione integrale di punto base $a_0 = 0$ anche della funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 0$ se $x \leq 0$, $g(x) = 1$ se $x > 0$; $g \neq f$ perchè $1 = f(0) \neq g(0) = 0$, però g e f sono uguali "quasi ovunque" perchè $g(x) = f(x)$ se $x \neq 0$.

(3) **Regole di integrazione definita.** Il teorema fondamentale del calcolo integrale e l'uso delle funzioni integrali, trasforma le proprietà dell'integrale indefinito viste prima in regole di integrazione definita. Ci limitiamo a scrivere le formule:

Integrazione per parti.

$$\int_a^b f(x)g'(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx \ .$$

Integrazione per sostituzione diretta.

$$\int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)dt \ .$$

Integrazione per cambiamento di variabile.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(t))\phi'(t)dt \ .$$

(4) **Integrali impropri.** Supponiamo che $f : I \to \mathbb{R}$ sia continua e definita su un intervallo $I = (c, d)$ dove $c < d$, $c, d \in \overline{\mathbb{R}}$. Fissato $a \in I$ possiamo considerare la funzione integrale $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(x)dx$ e studiare il suo andamento quando $x \to d^-$ oppure $x \to c^+$. Se uno di questi limiti esiste diciamo che è definito il corrispondente integrale improprio e poniamo

$$\int_a^d f(x)dx = \lim_{x \to d^-} F(x)$$
$$\int_a^c f(x)dx = \lim_{x \to c^+} F(x) \ .$$

Se esistono entrambi poniamo anche

$$\int_c^d f(x)dx = \int_a^d f(x)dx - \int_a^c f(x)dx \ .$$

Per trattare gli integrali impropri non è necessario che f sia continua. Basta che per ogni $a \in I$ sia definita la funzione integrale di f di punto base a. In questo modo vediamo per esempio che lo studio delle serie numeriche può essere visto come un caso particolare di studio di integrali impropri. Si consideri infatti una serie numerica $\displaystyle\sum_{n \geq 0} a_n$. Sia $I = \{x > -1\}$. Consideriamo la partizione di $\bar{I} = \{x \geq 0\}$ di vertici in $\mathbb{N}$. Consideriamo la funzione a gradini A su $\bar{I}$ che vale a_n su ogni intervallo $[n, n+1)$ e estendiamola ad I ponendola uguale a a_0 anche su $(-1, 0)$. Allora la serie è convergente se e solo se esiste l'integrale improprio di A per $x \to +\infty$ e risulta che la somma della serie

$$\sum_n a_n = \int_0^{+\infty} A(x)dx \ .$$

(5) **Metodi di integrazione più raffinati.** (*Queste considerazioni sono piuttosto rivolte ad un lettore particolarmente interessato*).

Abbiamo accennato nell'Introduzione che esistono metodi di integrazione più raffinati rispetto a quella "secondo Riemann". Un'idea guida (mutuata anche dal semplice esempio visto nel punto (2) sopra) è la seguente:

Quale che sia la procedura di misurazione adottata, se $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *sono uguali "quasi ovunque" allora* $T(f)$ *è "misurabile" se e solo se* $T(g)$ *lo è; se sono misurabili allora* $m(T(f)) = m(T(g))$.

E' chiaro che dobbiamo dare un senso a "quasi ovunque". Procediamo nel modo seguente. Dato $X \subset [a, b]$, sia $1_X : [a, b] \to \mathbb{R}$, $1_X(x) = 1$ se $x \in X$, $1_X(x) = 0$ se $x \in [a, b] \setminus X$. Questa è anche chiamata la *funzione indicatrice di* X. Supponiamo di avere fissato una procedura di integrazione. Diciamo allora che X *è trascurabile (rispetto alla procedura)* se 1_X è integrabile e il valore dell'integrale definito $\int_a^b 1_X(x)dx = 0$. Per esempio, se adottiamo l'integrazione secondo Riemann, è chiaro che se X è finito allora è trascurabile. Diremo infine che due funzioni f e g sono *quasi ovunque uguali (rispetto alla procedura di integrazione data)* se esiste un insieme trascurabile X tale che $f = g$ su $[a, b] \setminus X$. Per esempio, se X è trascurabile 1_X è quasi ovunque uguale alla funzione costante nulla. Messa così la cosa, una caratteristica fondamentale di una procedura di integrazione è la sua classe di insiemi trascurabili. Come deve essere fatta la classe degli insiemi trascurabili affinché la procedura di integrazione sia veramente "soddisfacente"? Potremmo richiedere per esempio che X è trascurabile non solo quando è finito ma anche quando è *numerabile*. Questo non è il caso per l'integrazione secondo Riemann: $X = [a, b] \cap \mathbb{Q}$ è numerabile ma abbiamo visto prima che 1_X non è integrabile secondo Riemann. In effetti esistono procedure di integrazione più raffinate (una è detta integrazione secondo Lebesgue) per le quali anche gli insiemi numerabili sono trascurabili.