October 28, 2014

SOTTOINSIEMI DI $\mathbb{R}$: NOZIONI E PROPRIETÀ "TOPOLOGICHE"

Questa è una dispensa di "servizio" nel senso che altre dispense faranno in vario modo riferimento alle nozioni qui introdotte. Le affermazioni che non saranno giustificate potrebbero esserlo per (utile) esercizio.

Intervalli. Si tratta dei sottoinsiemi I di $\mathbb{R}$ non vuoti e che verificano la seguente proprietà:

Se $a, b \in I$, $a \leq b$ allora $\{x \in \mathbb{R} |\ a \leq x \leq b\} \subseteq I$.
Nella pratica si distinguono vari tipi di intervallo I:

- (*Intervalli limitati*) Esistono $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ tali che
$$I := \{x \in \mathbb{R} |\ a?x?b\}$$
dove i due simboli "?" possono assumere indipendentemente sia il significato "$<$" sia "$\leq$". Si distinguono allora diversi sottocasi:
  - *I limitato e aperto* cioè della forma $I = (a, b) = \{a < x < b\}$, dove $a < b$;
  - *I chiuso e limitato* cioè della forma $I = [a, b] = \{a \leq x \leq b\}$, dove $a \leq b$; se $a = b$ si ha il caso "degenere" in cui $I = \{a\}$ consiste di un solo punto.
  - *I limitato e semiaperto a destra (risp. sinistra)* cioè della forma $I = [a, b) = \{a \leq x < b\}$ (risp. $I = (a, b] = \{a < x \leq b\}$), dove $a < b$.
- (*Intervalli illimitati*) Si tratta delle semirette aperte o chiuse, illimitate a destra o a sinistra, oppure di tutta la retta reale $\mathbb{R}$. Per esempio I della forma $I := (a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} |\ a < x\}$ è una semiretta aperta illimitata a destra; invece $I := (-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} |\ x \leq b\}$ è una semiretta chiusa illimitata a sinistra.

Sistema di intorni di un punto. Per ogni $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$, per ogni punto $x_0 \in \mathbb{R}$, indicheremo con $I(x_0, \epsilon)$ l'intervallo aperto di centro in x_0 e raggio ϵ definito:
$$I(x_0, \epsilon) := \{x \in \mathbb{R} |\ x_0 - \epsilon < x < x_0 + \epsilon\}$$
oppure equivalentemente:
$$I(x_0, \epsilon) := \{x \in \mathbb{R} |\ |x - x_0| < \epsilon\} \ .$$
$I(x_0, \epsilon)$ è detto *lo ϵ-intorno aperto di x_0*. Al variare di $\epsilon > 0$, gli $I(x_0, \epsilon)$ formano il *sistema (fondamentale) di intorni aperti di x_0 in $\mathbb{R}$*. Si osserva che:

- Se $\epsilon' < \epsilon$ allora $I(x_0, \epsilon') \subseteq I(x_0, \epsilon)$, in effetti è strettamente contenuto.
- Se $x_2 \in I(x_0, \epsilon_0) \cap I(x_1, \epsilon_1)$ allora esiste $\epsilon_2 > 0$ tale che
$$I(x_2, \epsilon_2) \subseteq I(x_0, \epsilon_0) \cap I(x_1, \epsilon_1) \ .$$
- Per ogni $I(x_0, \epsilon)$ esiste $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, tale che $1/n < \epsilon$ e quindi $I(x_0, 1/n) \subseteq I(x_0, \epsilon)$.
- Se $x_0 \neq x_1$, allora esiste $\epsilon > 0$ tale che $I(x_0, \epsilon) \cap I(x_1, \epsilon) = \emptyset$ (basta prendere per esempio $\epsilon = |x_0 - x_1|/3$).

Sottoinsiemi aperti di $\mathbb{R}$. $X \subseteq \mathbb{R}$ è un *sottoinsieme aperto* di $\mathbb{R}$ se per ogni $x_0 \in X$, esiste $\epsilon > 0$ tale che $I(x_0, \epsilon) \subseteq X$. Per esempio:
- $\emptyset \subseteq \mathbb{R}$ è un sottoinsieme aperto perché la proprietà da verificare è vuota ($\emptyset$ non ha elementi).
- $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}$ è un sottoinsieme aperto. Più in generale un intervallo (limitato o illimitato) "aperto" secondo la terminologia relativa agli intervalli introdotta in precedenza, è anche un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}$ secondo la definizione generale.
- Un intervallo chiuso (limitato o illimitato) diverso da $\mathbb{R}$ non è un aperto.

Si osserva che:

Se A e B sono aperti di $\mathbb{R}$ allora anche $A \cup B$ e $A \cap B$ sono aperti.

Parte interna di un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Dati $x_0 \in X \subseteq \mathbb{R}$, x_0 è *un punto interno* di X se esiste $\epsilon > 0$ tale che $I(x_0, \epsilon) \subseteq X$. La *parte interna di X* (indicata con $\mathrm{Int}(X) \subseteq X$) consiste dei punti interni

di X. Dunque $X \subseteq \mathbb{R}$ è un aperto di $\mathbb{R}$ se e solo se coincide con la sua parte interna ($X = \text{Int}(X)$).
Per esempio:
- Se $I = [a, b]$, $a < b$ è un intervallo chiuso e limitato, allora la sua parte interna coincide con l'intervallo aperto (a, b).
- La parte interna di $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ è vuota.

Punti di accumulazione di un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ (*non* stiamo richiedendo che $x_0 \in X$). Si dice che x_0 *è un punto di accumulazione per* X se per ogni $\epsilon > 0$,

$$(I(x_0, \epsilon) \setminus \{x_0\}) \cap X \neq \emptyset \ .$$

Si osserva che:

- Se nella definizione non avessimo eliminato x_0 dagli intervalli $I(x_0, \epsilon)$, allora ogni $x_0 \in X$ sarebbe stato di accumulazione per X. Invece con la definizione che abbiamo adottato, per esempio $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ non ha alcun punto di accumulazione in $\mathbb{R}$.
- Se X è un aperto non vuoto di $\mathbb{R}$, allora ogni $x_0 \in X$ è di accumulazione per X. Infatti si consideri un arbitrario $I(x_0, \epsilon)$. Poiché X è aperto esiste $\epsilon' > 0$ tale che $I(x_0, \epsilon') \subseteq X$. Poniamo $\epsilon" = \min(\epsilon, \epsilon')$. Allora $I(x_0, \epsilon") \setminus \{x_0\}$ è non vuoto e tutto contenuto in X.
- Per esempio, se $I = (a, b)$ è un intervallo limitato aperto, allora a e b non appartengono ad I e sono entrambi punti di accumulazione per I.
- Nelle solite ipotesi x_0 è di accumulazione per X se e solo se per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

  $$(I(x_0, 1/n) \setminus \{x_0\}) \cap X \neq \emptyset \ .$$

  Un' implicazione è evidente perché gli $I(x_0, 1/n)$ sono particolari intorni di x_0 e la definizione di punto di accumulazione riguarda *tutti* gli ϵ-intorni di x_0. Viceversa, sia $I(x_0, \epsilon)$ un arbitrario ϵ-intorno di x_0. Sappiamo che esiste $n > 0$ tale che $I(x_0, 1/n) \subseteq I(x_0, \epsilon)$. Per ipotesi

  $$(I(x_0, 1/n) \setminus \{x_0\}) \cap X \neq \emptyset$$

  e dunque la stessa cosa vale anche per $I(x_0, \epsilon)$.
- *Caratterizzazione per mezzo delle successioni.* Usando il punto precedente e quanto sviluppato nella dispensa [SUCCESSIONI], si può facilmente ottenere la seguente caratterizzazione dei punti di accumulazione:

  Nelle solite ipotesi, $x_0 \in \mathbb{R}$ *è di accumulazione per* X *se e solo se esiste una successione* $a : \mathbb{N} \to X \setminus \{x_o\}$ *tale che*

  $$\lim_{n \to +\infty} a_n = x_0 \ .$$

Chiusura e frontiera di un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Dato $X \subseteq \mathbb{R}$, la sua *chiusura* $Ch(X)$ è data dall'unione di X con i suoi punti di accumulazione. Chiaramente $X \subseteq Ch(X)$. Diciamo che X è *chiuso* se $X = Ch(X)$. Si osserva che:

- Per ogni $X \subseteq \mathbb{R}$, il complementare della sua chiusura $C_{\mathbb{R}}(Ch(X))$ è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}$.
- Se $A \subseteq \mathbb{R}$ è aperto allora il suo complementare $C_{\mathbb{R}}(A)$ è chiuso.
- $X \subseteq \mathbb{R}$ è chiuso se e solo se $C_{\mathbb{R}}(X)$ è aperto. Si osserva che $\emptyset$ e $\mathbb{R}$ sono *contemporaneamente* aperti e chiusi (quindi "essere aperto" non è la negazione di "essere chiuso").

La *frontiera* di $X \subseteq \mathbb{R}$ è per definizione

$$\mathcal{F}(X) := Ch(X) \setminus \text{Int}(X) \ .$$

Per esempio:
- $\mathbb{N} = Ch(\mathbb{N}) = \mathcal{F}(\mathbb{N})$
- Se $I = (a, b)$, $a < b$, allora $Ch(I) = [a, b]$, $\mathcal{F}(I) = \{a, b\}$.
- Se $X = \{1/n | n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$, allora $Ch(X) = X \cup \{0\}$, $\mathcal{F}(X) = Ch(X)$.

La retta estesa $\overline{\mathbb{R}}$. Consideriamo l'insieme

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \ .$$

Cioè abbiamo formalmente aggiunto ad $\mathbb{R}$ due punti indicati con $\pm\infty$. Arricchiamo la costruzione specificando anche per i due punti aggiunti una conveniente nozione di "intorno". Dato $M \in \mathbb{R}$ lo *M-intorno aperto* di $+\infty$ è per definizione la semiretta aperta $(M, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} |\ x > M\}$. Lo *$M$-intorno aperto* di $-\infty$ è per definizione la semiretta aperta $(-\infty, M) = \{x \in \mathbb{R} |\ x < M\}$. Al variare di $M \in \mathbb{R}$ otteniamo i rispettivi *sistemi (fondamentali) di intorni* per $\pm\infty$. Possiamo estendere a $\overline{\mathbb{R}}$ l'ordinamento "$\leq$" definito su $\mathbb{R}$, imponendo che per ogni $a \in \mathbb{R}$,

$$-\infty < a < +\infty\ .$$

Possiamo estendere la nozione di punto di accumulazione di un sottoinsieme $X \subseteq \mathbb{R}$ ai punti $\pm\infty$: $\pm\infty$ è di accumulazione per X se per ogni M-intorno U di $\pm\infty$ si ha che $U \cap X \neq \emptyset$. In particolare i punti $\pm\infty$ sono di accumulazione per $X = \mathbb{R}$. Infine, per ogni sottoinsieme $X \subseteq \mathbb{R}$, possiamo anche considerare la sua *chiusura in* $\overline{\mathbb{R}}$, $Ch_{\overline{\mathbb{R}}}(X)$, per cui ad esempio $Ch_{\overline{\mathbb{R}}}(\mathbb{R}) = \overline{\mathbb{R}}$.