

November 18, 2015

SULLE FUNZIONI DERIVABILI DEFINITE SU UN INTERVALLO

In questa nota assumiamo una volta per tutte di essere nella seguente situazione: $[a, b]$, $a < b$, è un intervallo chiuso e limitato non degenere, mentre (a, b) è il sotto-intervallo aperto dei punti interni di $[a, b]$; $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua tale che la restrizione a (a, b) è derivabile. Utilizzeremo i risultati stabiliti nella dispensa [C-INTERVALLI].

Lemma 0.1. *Sia $x_0 \in (a, b)$ e supponiamo che $f'(x_0) > 0$. Allora esiste $\epsilon > 0$ tale per ogni $h \in \mathbb{R}$ tale che $|h| < \epsilon$, si ha che $x_0 + h \in (a, b)$ e*

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} > 0.$$

Si ha il risultato analogo invertendo le disuguaglianze.

Dim. Poiché $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) > 0$, la tesi segue per la “permanenza del segno”. \square

Questo vuol dire che se $h > 0$, allora $f(x_0 + h) > f(x_0)$, se $h < 0$, allora $f(x_0 + h) < f(x_0)$. Attenzione, non stiamo dicendo che f è crescente in un intorno di x_0 , infatti non è esclusa l'esistenza, per esempio, di $h_1 < h_2 < 0$ tali che $f(x_0 + h_1) > f(x_0 + h_2)$.

Definizione 0.2. Un punto $x_0 \in (a, b)$ si dice punto di *massimo* (risp. *minimo*) *locale* per f se esiste $\epsilon > 0$ tale che $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \subset (a, b)$ e per ogni x tale che $|x - x_0| < \epsilon$ si ha che $f(x) \leq f(x_0)$ (risp. $f(x) \geq f(x_0)$).

Teorema 0.1. *Se $x_0 \in (a, b)$ è un punto di massimo (minimo) locale per f , allora $f'(x_0) = 0$.*

Dim. Osserviamo che se x_0 è un punto di minimo locale per f , allora x_0 è di massimo locale per $-f$. Dunque basta argomentare il caso in cui sia un massimo locale. Supponiamo allora che x_0 sia un punto di massimo locale. Se fosse $f'(x_0) > 0$, e $h > 0$ come nel lemma precedente, allora $f(x_0 + h) > f(x_0)$ contro il fatto che x_0 è un massimo locale. Se fosse $f'(x_0) < 0$ si conclude in modo analogo \square

I punti di (a, b) dove si annulla la derivata si dicono *punti stazionari* di f . Dunque abbiamo visto che i massimi e minimi locali sono stazionari. Il viceversa è falso: 0 è stazionario per la funzione $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, ma non è un punto di massimo e neanche di minimo locale. Si nota anche che, per esempio, 0 è un punto di minimo (assoluto) di $x \rightarrow |x|$ definita su tutto \mathbb{R} , ma questa funzione *non* è derivabile in 0: la derivabilità non è una condizione necessaria affinché f abbia massimi o minimi locali.

Teorema 0.2. (Teorema di Rolle) *Supponiamo che $f(a) = f(b)$. Allora esiste $x \in (a, b)$ tale che $f'(x) = 0$.*

Dim. Sappiamo che $[a, b]$ contiene un punto di massimo assoluto x_0 e un punto di minimo assoluto y_0 . Se entrambi x_0, y_0 sono uno degli estremi a, b , allora f è costante su $[a, b]$ e dunque f' è identicamente nulla su (a, b) . Altrimenti almeno uno tra x_0 e y_0 , sia x , è un punto interno e per il teorema precedente, $f'(x) = 0$. \square

Teorema 0.3. (Teorema di Cauchy) *Siano f, g due funzioni definite su $[a, b]$ che verificano entrambe le ipotesi stabilite all'inizio. Supponiamo che per ogni $x \in (a, b)$, $g'(x) \neq 0$. Allora $g(a) \neq g(b)$ ed esiste $x \in (a, b)$ tale che*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dim. Se fosse $g(a) = g(b)$, per il teorema di Rolle g' non potrebbe essere sempre diversa da zero. Per ogni coppia di costanti non entrambe nulle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la funzione $h = \lambda f + \mu g$ è continua su $[a, b]$ e derivabile su (a, b) . Scegliamo

$$\lambda = (g(b) - g(a)), \quad \mu = -(f(b) - f(a))$$

Si verifica facilmente che con questa scelta, la funzione h verifica le ipotesi del Teorema di Rolle. Quindi esiste $x \in (a, b)$ tale che

$$h'(x) = \lambda f'(x) + \mu g'(x) = 0 .$$

Sostituendo a λ e μ le rispettive espressioni e dividendo membro a membro per $(g(b) - g(a))g'(x)$ (che è diverso da zero), si ottiene la tesi. \square

Come corollario, usando $g(x) = x$, otteniamo

Teorema 0.4. (Teorema del valor medio) *Esiste $x \in (a, b)$ tale che*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x) .$$

\square

Corollario 0.3. *f è costante su $[a, b]$ se e solo se $f'(x) = 0$ per ogni $x \in (a, b)$.*

Dim. Una implicazione è evidente. Per dimostrare l'altra, preso un arbitrario intervallo chiuso e limitato $[c, d] \subset (a, b)$, applichiamo il Teorema del valor medio alla restrizione di f a $[c, d]$. Allora

$$\frac{f(d) - f(c)}{d - c} = f'(x) = 0$$

da cui $f(c) = f(d)$. Per l'arbitrarietà di c, d si deduce che f è costante su (a, b) e quindi su tutto $[a, b]$ perchè è continua. \square

Corollario 0.4. *Supponiamo che la derivata f' sia continua e si estenda ad una funzione continua definita su tutto $[a, b]$. Allora esiste una costante $K \geq 0$ tale che per ogni $c < d \in [a, b]$, si ha che $|f(d) - f(c)| \leq K|d - c|$.*

Dim. Riscriviamo la formula del valor medio nella forma $f(d) - f(c) = f'(x)(d - c)$, da cui $|f(d) - f(c)| = |f'(x)||d - c|$. La funzione $x \rightarrow |f'(x)|$ è continua su $[a, b]$, dunque prende un valore massimo $K \geq 0$, tale che per ogni $x \in (a, b)$ $|f'(x)| \leq K$. Ne segue che la tesi vale su (a, b) e poi si estende per continuità su tutto $[a, b]$. \square

Teorema 0.5. *Se per ogni $x \in (a, b)$, $f'(x) > 0$ (risp. $f'(x) < 0$) allora f è crescente (risp. decrescente) su (a, b) .*

Dim. Considerando se necessario $-f$, non è restrittivo considerare solo il caso in cui f' è positiva. Siano $c < d$ in (a, b) . Allora per il Teorema del valor medio, esiste $x \in (c, d)$ tale che

$$\frac{f(d) - f(c)}{d - c} = f'(x) > 0$$

da cui si deduce subito che $f(d) > f(c)$.

Corollario 0.5. *Sia f una funzione derivabile definita su un intervallo I aperto (non necessariamente limitato). Allora se $f'(x) > 0$ per ogni $x \in I$, f è crescente su I .*

0.1. Convessità. Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione definita su di un intervallo aperto. Siano $x_0, x_1 \in I$, e consideriamo i punti corrispondenti del grafico $G(f)$ di f , cioè $P_0 = (x_0, f(x_0)), P_1 = (x_1, f(x_1))$. Il segmento di \mathbb{R}^2 di estremi P_0 e P_1 può essere descritto come l'immagine dell'applicazione

$$s : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad s(t) = (1 - t)P_0 + tP_1$$

mentre $t \rightarrow (1 - t)x_0 + tx_1$ descrive al variare di $t \in [0, 1]$ l'intervallo $[x_0, x_1]$. Allora f si dice *strettamente convessa* su I , se per ogni $x_0, x_1 \in I$, per ogni $t \in [0, 1]$, si ha che

$$f((1 - t)x_0 + tx_1) < (1 - t)f(x_0) + tf(x_1)$$

cioè, geometricamente, il segmento $[P_0, P_1]$ sta strettamente sopra il grafico di f ristretta all'intervallo $[x_0, x_1]$. Invertendo la disuguaglianza (così che $[P_0, P_1]$ sta al di sotto del grafico) si ottiene la definizione di funzione *strettamente concava* su I . Rilassando le disuguaglianze (considerando cioè " \leq " o " \geq ") abbiamo la nozione di funzione convessa o concava. La nozione di convessità (concavità)

può essere equivalentemente e utilmente riformulata in termini dei rapporti incrementali. Infatti, supponiamo di avere $x_1 < x < x_2$; allora ponendo $t = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$, si ottiene

$$f(x) < \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) + \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1)$$

riscrivendo $x_2 - x = (x_2 - x_1) + (x_1 - x)$, si verifica che la precedente disuguaglianza è equivalente a

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} < \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

In modo analogo si verifica che è equivalente a

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} < \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Analoghe considerazioni valgono rilassando le disuguaglianze. Abbiamo quindi verificato che

La funzione f è strettamente convessa (convessa) se e solo se per ogni $x_0 \in I$, la funzione rapporto incrementale di centro x_0 è crescente (non decrescente) su $I \setminus \{x_0\}$

Supponendo che la funzione sia derivabile otteniamo infine come corollario

Proposizione 0.6. *Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ definita sull'intervallo aperto I .*

(1) *Se f è derivabile su I allora f è strettamente convessa (risp. convessa) su I se e solo se f' è crescente (risp. non decrescente) su I .*

(2) *Se f è derivabile due volte f è convessa se e solo se $f'' \geq 0$. Se $f''(x) > 0$ allora f è strettamente convessa.*

Abbiamo visto prima che se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile, allora i punti di massimo e minimo locale sono stazionari, ma che in generale il viceversa non vale. Abbiamo però il seguente fatto

Proposizione 0.7. *Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ come sopra, derivabile due volte. Supponiamo che $x_0 \in I$ sia un punto stazionario per f (cioè $f'(x_0) = 0$) e che $f''(x_0) > 0$ (risp. $f''(x_0) < 0$). Allora x_0 è un punto di minimo (risp. massimo) locale.*

Se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile, $x_0 \in I$ si dice un punto di flesso *ascendente* (risp. *discendente*) per f se esiste un sottointervallo aperto $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \subset I$, $\epsilon > 0$, tale che f è concava (risp. convessa) su $(x_0 - \epsilon, x_0)$ e convessa (risp. concava) su $(x_0, x_0 + \epsilon)$.

Proposizione 0.8. *Sia $x_0 \in I$ un punto di flesso di $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ di tipo discendente (ascendente).*

(1) *Se f è derivabile allora x_0 è un punto di massimo (minimo) locale di f' .*

(2) *Se f è derivabile due volte, allora $f''(x_0) = 0$.*