

## EQUAZIONI DIFFERENZIALI I

### 1. INTRODUZIONE

Consideriamo una funzione

$$F : T \times I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(t, \bar{x}) = F(t, x, x_1, \dots, x_n)$$

dove  $T$  e  $I$  sono intervalli aperti e  $n \geq 1$ . L'intervallo  $T$  può essere pensato come un intervallo di *tempi*, mentre la variabile  $x$  può essere pensata come la *posizione* occupata da un punto che si muove sull'intervallo  $I$ . Associata ad  $F$  abbiamo l'equazione differenziale dell' $n$ -esimo ordine:

$$F(t, y, y^{(1)}, \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Una *soluzione* di questa equazione è una funzione

$$y : J \rightarrow I$$

tale che:

- (1)  $J \subset T$  è un sotto-intervallo aperto dell'intervallo dei tempi  $T$ .
- (2)  $y$  è  $n$ -volte derivabile e poniamo per ogni  $t \in J$ ,  $y'(t) = y^{(1)}(t)$ ,  $y^{(s)}(t) = (y^{(s-1)})'(t)$
- (3) Per ogni  $t \in J$ , si ha che

$$F(t, y(t), y^{(1)}(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0.$$

Si noti che l'intervallo di definizione  $J$  di  $y$  è parte delle incognite del problema. Il grafico  $G(y)$  di  $y$  in  $J \times I$  è detto una *curva integrale dell'equazione*. C'è una corrispondenza biunivoca naturale tra l'insieme delle soluzioni e l'insieme delle curve integrali. Una soluzione  $y : J \rightarrow I$  (equivalentemente una curva integrale) è detta *massimale* se non si può prolungare ad una soluzione  $\tilde{y} : \tilde{J} \rightarrow I$ , dove  $\tilde{J}$  contiene propriamente  $J$ . L'insieme  $I(F)$  di tutte le soluzioni o equivalentemente di tutte le curve integrali massimali, è detto l'*integrale totale dell'equazione differenziale*. Il problema generale è quello di determinare  $I(F)$  al variare di  $F$ . Come nel caso dell'integrale indefinito (che è un caso particolare di equazione differenziale)  $I(F)$  può essere vuoto. Un problema correlato è il

*Problema di Cauchy sull'esistenza e unicità di soluzioni massimali con dati "iniziali" assegnati.*

Precisamente, assegnato un punto  $(t_0, x_0, x_0^1, \dots, x_0^{n-1}) \in T \times I \times I_1 \times \mathbb{R}^{n-1}$ , il problema chiede se esista e sia unica una soluzione massimale  $y : J \rightarrow I$  dell'equazione tale che  $t_0 \in J$  e

$$(y(t_0), y^{(1)}(t_0), \dots, y^{(n-1)}(t_0)) = (x_0, x_0^1, \dots, x_0^{n-1}).$$

Ci possiamo aspettare che la difficoltà di questi problemi cresca con l'ordine dell'equazione e che soprattutto dipenda da quanto sia "complicata" la funzione  $F$ . Una prima semplificazione consiste nel richiedere che  $F$  sia in *forma normale* cioè della forma

$$F(t, \bar{x}) = x_n - f(t, x, x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Passando all'equazione differenziale associata, questo significa che per ogni soluzione, la derivata di ordine massimo può essere esplicitata in funzione di quelle di ordine più basso:  $y^{(n)} = f(t, y, y^{(1)}, \dots, y^{(n-1)})$ . Ricordando poi le considerazioni sulla "gerarchia" delle funzioni elementari (vedi [MODELLI]), il tipo più semplice per  $F$  è quello *lineare*, cioè della forma:

$$F(t, x, x) = x_n + a_0(t)x_0 + \dots + a_{n-1}(t)x_{n-1} - b(t)$$

dove  $f(t, x, x_1, \dots, x_{n-1}) = -\sum_j a_j(t)x_j + b(t)$  è definita su  $T \times \mathbb{R}^n$ .

Nel seguito ci occuperemo principalmente di equazioni del primo e del secondo ordine.

## 2. GENERALITÀ SULLE EQUAZIONI LINEARI

Una equazione lineare in forma normale può essere scritta nel modo seguente

$$y^{(n)} + a_0(t)y + \dots a_{n-1}(t)y^{(n-1)} = b(t)$$

dove assumiamo che le funzioni  $a_j(t), b(t)$  siano *continue* e richiediamo che le soluzioni siano di classe  $\mathcal{C}^1$ . L'equazione

$$y^{(n)} + a_0(t)y + \dots a_{n-1}(t)y^{(n-1)} = 0$$

è detta l' *equazione omogenea* associata, mentre la funzione  $b(t)$  è il *termine noto* di quella *non omogenea*. Il lettore avrà riconosciuto la terminologia che si usa per i sistemi di equazioni lineari e che avrà già incontrato nel corso di algebra lineare. Non è un caso. Per ogni intervallo aperto  $J \subset T$ , l'insieme  $\mathcal{C}^0(J)$  delle funzioni continue  $z : J \rightarrow \mathbb{R}$  è *chiuso rispetto alle combinazioni lineari*, cioè, se  $z_1(t), \dots, z_k(t) \in \mathcal{C}^0(J)$  e  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ , allora la combinazione lineare  $\sum_j \alpha_j z_j(t) \in \mathcal{C}^0(J)$ . Dunque

$\mathcal{C}^0(J)$  è un  $\mathbb{R}$ -spazio vettoriale. Il sottoinsieme  $\mathcal{C}^n(J)$  di  $\mathcal{C}^0(J)$  formato dalle applicazioni di classe  $\mathcal{C}^n$  è un sottospazio vettoriale (cioè è a sua volta chiuso rispetto alle combinazioni lineari). L'applicazione

$$L : \mathcal{C}^n(J) \rightarrow \mathcal{C}^0(J), \quad L(y) = y^{(n)} + a_0(t)y + \dots a_{n-1}(t)y^{(n-1)}$$

è un'applicazione lineare. Dunque trovare le soluzioni definite su  $J \subset T$  dell'equazione omogenea coincide con determinare il *nucleo*  $\text{Ker}(L)$  di  $L$ . Sappiamo dall'algebra lineare (e la verifica è facile) che  $\text{Ker}(L)$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathcal{C}^n(J)$ , in particolare, per ogni  $J \subset T$ , non è vuoto perché contiene almeno la soluzione costantemente nulla  $y = 0$ .

Venendo all'equazione non omogenea, fissato un sottointervallo  $J \subset T$ , si hanno due possibilità: (1) non esistono soluzioni definite su  $J$ ; (2) esiste almeno una soluzione  $y^0 : J \rightarrow \mathbb{R}$ . Nel secondo caso possiamo descrivere completamente l'insieme delle soluzioni dell'equazione non omogenea:

$y : J \rightarrow \mathbb{R}$  è una soluzione dell'equazione non omogenea se e solo se è della forma  $y = y^0 + z$ , dove  $z \in \text{Ker}(L)$ , cioè  $z$  è una soluzione dell'equazione omogenea associata.

Abbiamo dunque ritrovato la struttura delle soluzioni di un sistema lineare non omogeneo. L'unica differenza, rispetto ai sistemi lineari ordinari, è che lo spazio su cui è definita l'applicazione lineare  $L$  non è di dimensione finita, infatti le funzioni monomiali

$$y = t^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

che sono definite e  $\mathcal{C}^\infty$  su ogni intervallo  $J$ , sono infinite e tra loro linearmente indipendenti. Quindi, a priori, anche  $\text{Ker}(L)$  potrebbe non essere di dimensione finita. Le considerazioni precedenti suggeriscono di dividere lo studio di una data equazione lineare in due parti complementari:

- (1) Per ogni  $J \subset T$  (in particolare per  $J = T$ ) Determinare  $\text{Ker}(L)$ , cioè determinare lo spazio vettoriale delle soluzioni dell'equazione omogenea associata (in particolare decidere se è di dimensione finita, nel caso determinarla).
- (2) Determinare se possibile una soluzione particolare  $y^0$  dell'equazione non omogenea.

Concludiamo osservando che per le equazioni lineari vale anche la seguente *proprietà di sovrapposizione* (che è di facile verifica):

Siano

$$y^{(n)} + a_0(t)y + \dots a_{n-1}(t)y^{(n-1)} = b_1(t)$$

$$y^{(n)} + a_0(t)y + \dots a_{n-1}(t)y^{(n-1)} = b_2(t)$$

due equazioni lineari non omogenee che hanno la stessa equazione omogenea associata. Allora se  $y_1$  e  $y_2$  sono rispettivamente soluzioni di queste equazioni, definite su uno stesso intervallo  $J$ , allora  $y_1 + y_2$  è una soluzione dell'equazione

$$y^{(n)} + a_0(t)y + \dots a_{n-1}(t)y^{(n-1)} = b_1(t) + b_2(t) .$$

## 3. EQUAZIONI DEL PRIMO ORDINE

Consideriamo

$$f : T \times I \rightarrow \mathbb{R}$$

che determina una  $F : T \times I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  in forma normale, cioè

$$F(t, x, x_1) = x_1 - f(t, x) .$$

L'equazione differenziale associata si può scrivere nella forma

$$y' = f(t, y) .$$

Possiamo interpretare la situazione nel modo seguente. La coordinata  $x$  individua la posizione di un punto che si muove sull'intervallo  $I$ . Allora  $f(t, x)$  può essere interpretato come il vettore velocità del punto che all'istante  $t$  occupa la posizione  $x$ . Questo vettore è “tangente” a  $I$  come deve essere. Dunque la funzione  $f = f(t, x)$  può essere interpretata come:

*Un “campo di vettori tangenti” (di velocità istantanee nella nostra interpretazione cinematica) lungo  $I$  che varia con il tempo.*

Una soluzione  $y : J \rightarrow \mathbb{R}$  dell'equazione differenziale corrisponde ad una specifica *legge del moto* del punto (su  $I$ ) che ha in ogni istante la velocità pre-assegnata dal campo  $f$ . Integrare l'equazione significa quindi ricostruire tutte le leggi del moto che realizzano quella assegnata distribuzione di velocità (dipendente dal tempo).

La cosa diventa forse ancora più espressiva se la rileggiamo in termini delle curve integrali. In quanto segue svolgeremo un tipo di considerazioni già incontrato in [ARCHI]. Associamo alla funzione

$$f : T \times I \rightarrow \mathbb{R}$$

la funzione *a valori vettoriali*

$$S : T \times I \rightarrow \mathbb{R}^2, S(t, x) = (1, f(t, x))$$

che a volte è chiamata la *sospensione* di  $f$ .  $S$  può essere interpretata come:

*Un campo di vettori tangenti su  $T \times I$*

nel senso che il vettore  $S(t, x) = (1, f(t, x))$  deve essere pensato “applicato” al punto  $(t, x) \in T \times I$ . Se  $y : J \rightarrow \mathbb{R}$  è una soluzione dell'equazione differenziale, allora  $t \rightarrow (t, y(t))$  è la legge del moto di un punto che si muove nel piano lungo la curva integrale  $G(y)$ , tale che il vettore  $S(t, y(t))$  è tangente alla curva e rappresenta la velocità del punto all'istante  $t$ .

**3.1. Un esempio già familiare.** Supponiamo che

$$f(t, x) = f(t)$$

cioè dipende solo da  $t$  ma non dalla posizione. Supponiamo inoltre che  $f$  sia continua. Come al solito

$$F(t, x, x_1) = x_1 - f(t) .$$

Lungo ogni intervallo “verticale” della forma

$$\{t\} \times I \subset T \times I$$

si applica il vettore costante

$$S(t) = (1, f(t)) .$$

In questo caso l'equazione differenziale è

$$y' = f(t)$$

dunque il suo integrale generale coincide con l'integrale indefinito  $\int f(t)dt$  che abbiamo già studiato. Poiché  $f$  è continua una qualsiasi funzione integrale di punto base  $t_0 \in T$

$$y(t) = \int_{t_0}^t f(x)dx$$

è una soluzione massimale definita su tutto  $T$ , per cui l'integrale generale dell'equazione

$$I(F) = \int f(t)dt = y(t) + \mathbb{R} .$$

Le corrispondenti curve integrali si ottengono traslando verticalmente il grafico  $G(y)$  e sono due a due disgiunte. Imponendo  $(t_0, x_0) = (t_0, y(t_0) + c) = (t_0, c)$  si ricava  $c = x_0$  e si risolve affermativamente il corrispondente problema di Cauchy di esistenza e unicità della soluzione massimale passante per  $(t_0, x_0)$ . Variando il punto base della funzione integrale, si vede così che il problema di Cauchy è sempre risolubile.

Il teorema fondamentale del calcolo integrale ci permette anche di riformulare il caso generale di equazioni del primo ordine. Infatti vale:

**Proposizione 3.1.** *Nelle solite ipotesi,  $y : J \rightarrow \mathbb{R}$  è una soluzione dell'equazione differenziale  $y' = f(t, y)$  tale che  $y(t_0) = x_0$  se e solo se per ogni  $t \in J$  verifica*

$$y(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s))ds .$$

Si noti però che *non* ci siamo ridotti come prima alla semplice determinazione di un integrale indefinito perché la funzione incognita interviene ora sotto il segno di integrazione.

**3.2. Enunciato del teorema di Cauchy-Lipschitz.** Consideriamo di nuovo un'equazione differenziale del primo ordine in forma normale

$$y' = f(t, y)$$

e supponiamo che  $f(t, x)$  sia continua. Questo significa che per ogni  $(t, x) \in T \times I$ , per ogni  $\epsilon > 0$  esiste un rettangolo aperto  $Q = T_1 \times I_1 \subset T \times I$  tale che  $(t, x) \in Q$  e per ogni  $(t', x') \in Q$ ,  $|f(t', x') - f(t, x)| < \epsilon$ . Diciamo che  $f$  è *localmente Lipschitziana* se inoltre per ogni  $(t_0, x_0) \in T \times I$  esistono un rettangolo aperto  $Q \subset T \times I$  e una costante positiva  $K > 0$ , tali che

- $(t_0, x_0) \in Q$ .
- Per ogni  $(t, x), (t, z) \in Q$ , si ha che  $|f(t, x) - f(t, z)| < K|x - z|$ .

Ricordando il Corollario del teorema del valor medio visto in [D-INTERVALLI], si verifica per esempio che:

**Proposizione 3.2.** *Se  $f$  è continua e la restrizione di  $f$  ad ogni intervallo "verticale"  $\{t\} \times I \subset T \times I$  è di classe  $C^1$ , allora  $f$  è localmente Lipschitziana.*

Possiamo infine enunciare (omettendo la dimostrazione):

**Teorema 3.1. (Cauchy-Lipschitz)** *Supponiamo che  $f : T \times I \rightarrow \mathbb{R}$  sia continua e localmente Lipschitziana. Allora per ogni  $(t_0, x_0) \in T \times I$  esiste ed è unica una soluzione massimale  $y : J \rightarrow \mathbb{R}$  dell'equazione differenziale  $y' = f(t, y)$ , tale che  $t_0 \in J$  e  $y(t_0) = x_0$ .*

Questo teorema può essere visto come un'ampia estensione del teorema fondamentale del calcolo integrale per le funzioni continue; la sua dimostrazione è più riposta. Si noti che adesso, a differenza dell'integrale indefinito, lo stesso intervallo  $J$  può variare al variare del punto  $(t_0, x_0)$  (vedremo in seguito esempi di questo fenomeno).

Un risultato analogo vale più in generale per l'integrazione dei campi di vettori (di cui si parla alla fine della dispensa).

**3.3. Equazioni del primo ordine lineari.** Si tratta di studiare equazioni della forma

$$y' + a(t)y = b(t)$$

dove  $a(t)$  e  $b(t)$  sono continue. Quando  $a = 0$ , si riottiene il caso già familiare dell'integrale indefinito. In effetti queste equazioni lineari si integrano direttamente riconducendosi al caso degli integrali indefiniti. Secondo lo schema descritto sopra in generale per le equazioni di tipo lineare, determiniamo prima le soluzioni dell'equazione omogenea

$$y' + a(t)y = 0$$

e poi determineremo una soluzione particolare di quella non omogenea.

- (1) Fissiamo una primitiva  $A(t)$  di  $a(t)$  su tutto  $T$ . Poiché  $a$  è continua, basta fissare  $t_0 \in T$  è prendere la funzione integrale

$$A(t) = \int_{t_0}^t a(x) dx .$$

- (2) Osserviamo che  $y : T \rightarrow \mathbb{R}$  è soluzione di  $y' + a(t)y = 0$  se e solo se

$$e^{A(t)}(y'(t) + a(t)y(t)) = 0, \quad \forall t \in T$$

che può essere riscritta nella forma

$$(y(t)e^{A(t)})' = 0$$

da cui si ricava

$$y = ce^{-A(t)}, \quad c \in \mathbb{R} .$$

Possiamo quindi concludere che:

*Lo spazio vettoriale delle soluzioni massimali (definite su tutto  $T$ ) dell'equazione omogenea ha dimensione uguale a 1, e  $y(t) = e^{-A(t)}$  ne costituisce una base.*

- (3) Cerchiamo ora una soluzione particolare dell'equazione non omogenea. Lo facciamo applicando in questo caso particolare il metodo detto *della variazione della costante arbitraria*. Cioè cerchiamo una soluzione della forma:

$$y_0(t) = C(t)e^{-A(t)}$$

richiedendo che  $C$  sia derivabile, per cui

$$y_0'(t) = (C'(t) - a(t)C(t))e^{-A(t)} .$$

Sostituendo nell'equazione non omogenea si ottiene che basta imporre che

$$C'(t) = e^{A(t)}b(t)$$

infine possiamo scegliere

$$C(t) = \int_{t_0}^t e^{A(x)}b(x)dx .$$

Riassumendo:

*L'insieme delle soluzioni massimali (definite su tutto  $T$ ) dell'equazione non omogenea è formato dalle funzioni della forma*

$$y(t) = y_0(t) + ce^{-A(t)} = \left( \int_{t_0}^t e^{A(x)}b(x)dx \right) e^{-A(t)} + ce^{-A(t)}, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$A(t) = \int_{t_0}^t a(x)dx .$$

Riguardo al problema di Cauchy, considerando il punto  $(t_0, x_0)$ , ricaviamo univocamente la costante

$$c = x_0$$

che determina l'unica soluzione massimale passante per  $(t_0, x_0)$ . Variando il punto base  $t_0$ , vediamo direttamente che il problema di Cauchy è sempre risolubile (in accordo ma indipendentemente rispetto al teorema di Cauchy-Lipschitz).

Vediamo un esempio esplicito:

$$y' - \tan(t)y = \cos(t)$$

dove  $T = (-\pi/2, \pi/2)$ . Poiché

$$\frac{d}{dt} \log(\cos(t)) = -\tan(t)$$

l'integrale massimale generale dell'equazione omogenea è

$$y(t) = c \frac{1}{\cos(t)}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Una soluzione particolare dell'equazione non omogenea è

$$y_0(t) = \left( \int_0^t \cos^2(x) dx \right) \frac{1}{\cos(t)} = \\ \left( \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \sin(2t) \right) \frac{1}{\cos(t)}$$

**3.4. Equazioni del primo ordine a variabili separate.** Si tratta di studiare equazioni della forma

$$y' = a(t)b(y)$$

dove  $f(t, x) = a(t)b(x)$  è definita su  $T \times I$ . Assumiamo che  $a(t)$  sia continua e che  $b(x)$  sia  $\mathcal{C}^1$ . In questo modo le ipotesi del teorema di Cauchy-Lipschitz sono verificate. E' il tipo più semplice di equazioni *non* lineari. Anche in questo caso ci ricondurremo allo studio di certi integrali indefiniti. Nonostante ciò, vedremo che a causa della non-linearità le soluzioni possono avere comportamenti sostanzialmente più complessi rispetto alle equazioni lineari. Le equazioni di questo tipo possono essere studiate seguendo il seguente schema:

- Si cercano gli eventuali zeri della funzione  $b(x)$ . Se  $x_0 \in I$  è un tale zero, la funzione costante  $y = x_0$  è una soluzione dell'equazione, la cui curva integrale è l'intervallo "orizzontale"  $T \times \{x_0\}$ .
- Si considerano tutti i sotto-intervalli aperti non vuoti di  $I$  contenuti in  $I \setminus \{b = 0\}$ . Per ciascuno di questi intervalli, sia  $L$ , consideriamo la restrizione di  $f$  su  $T \times L$  e studiamo la corrispondente equazione ristretta.
- Fissiamo  $L$  come nel punto precedente. L'equazione può essere riscritta equivalentemente nella forma

$$\frac{y'}{b(y)} = a(t).$$

Se  $y : J \rightarrow \mathbb{R}$  è una soluzione (massimale), passando agli integrali indefiniti abbiamo

$$\int \frac{y'(t)}{b(y(t))} dt = \int a(t) dt$$

e usando le regole di integrazione per sostituzione otteniamo

$$\int \frac{1}{b(y)} dy = \int a(t) dt, \quad y = y(t).$$

La cosa può essere detta in altri termini: se

$$B : L \rightarrow \mathbb{R}, \quad B(x) = \int_{x_0}^x \frac{1}{b(y)} dy$$

è una primitiva di  $\frac{1}{b} : L \rightarrow \mathbb{R}$ , se

$$A : T \rightarrow \mathbb{R}, \quad A(t) = \int_{t_0}^t a(s) ds$$

è una primitiva di  $a : T \rightarrow \mathbb{R}$ , allora al variare di  $C \in \mathbb{R}$ , l'equazione cartesiana

$$B(x) - A(t) = C$$

determina una curva  $\Gamma_C$  in  $T \times L$ . Fissato un punto  $(t_0, x_0) \in T \times L$ ,

$$C_0 = B(x_0) - A(t_0)$$

è l'unica costante tale che la curva  $\Gamma_{C_0}$  passa per  $(t_0, x_0)$ . Dunque l'unica soluzione massimale che passa per  $(t_0, x_0)$  (questa esiste perché vale il teorema di C-L) parametrizza un arco di  $\Gamma_{C_0}$ . Possiamo così affermare che le soluzioni dell'equazione sono determinate *implicitamente* dalle relazioni

$$B(y(t)) - A(t) = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

In certi (rari) casi risulta che la primitiva  $B(x)$  è invertibile, per cui possiamo *esplicitare* le soluzioni:

$$y(t) = B^{-1}(A(t) + C).$$

In generale dobbiamo accontentarci della soluzione implicita che abbiamo ricavato.

- Un' importante differenza che complica l'analisi rispetto alle equazioni lineari, è che adesso, per ogni  $(t_0, x_0) \in T \times L$ , anche l'intervallo  $J \subset T$  su cui è definita l'unica soluzione massimale passante per  $(t_0, x_0)$  è una incognita effettiva del problema (ed in generale può variare al variare del punto). Nel caso lineare invece  $J$  è sempre uguale a tutto  $T$ .
- Abbiamo così determinato due tipi di soluzioni: quelle costanti con linea integrale orizzontale; quelle necessariamente non costanti per la restrizione dell'equazione su  $T \times L$ , dove  $L$  varia tra gli intervalli di  $I \setminus \{b = 0\}$ .

Mettiamo in pratica lo schema studiando alcuni esempi.

(1)

$$y' = a(t)b(y) = ty^2$$

dove  $f(t, x) = tx^2$  è definita su  $T \times I = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

$x = 0$  è uno zero "doppio" della funzione  $x^2$ . Consideriamo allora i due intervalli  $L^+ = \{x > 0\}$ ,  $L^- = \{x < 0\}$ . In entrambi i casi, separando le variabili su  $\mathbb{R} \times L^\pm$ ,

$$B(x) = -\frac{1}{x}$$

è una primitiva di  $\frac{1}{b(x)} = \frac{1}{x^2}$ ,

$$A(t) = \frac{1}{2}t^2$$

è una primitiva di  $a(t) = t$ . Dunque la famiglia di curve cartesiane  $\Gamma_C$  in  $\mathbb{R} \times L^\pm$  è definita dalle equazioni

$$-\frac{1}{x} - \frac{1}{2}t^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

e ponendo  $c = -2C$  possiamo esplicitare  $x$  ottenendo la famiglia di curve di equazione

$$x = \frac{2}{c - t^2}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Studiamo l'aspetto di queste curve su  $L_+$  e  $L_-$  rispettivamente. Su  $\mathbb{R} \times L^+$ , necessariamente  $c > 0$  e  $c - t^2 < 0$  per cui  $t \in (-\sqrt{c}, \sqrt{c})$ . Allora  $y : (-\sqrt{c}, \sqrt{c}) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y(t) = \frac{2}{c - t^2}$  è una soluzione massimale dell'equazione; la corrispondente curva integrale cioè il suo grafico in  $(-\sqrt{c}, \sqrt{c}) \times \mathbb{R}$  è simmetrico rispetto all'asse delle  $x$ , convesso con un punto di minimo assoluto per  $t = 0$ , di valore minimo  $2/c$  e due asintoti verticali  $t = \pm\sqrt{c}$ .

Su  $\mathbb{R} \times L^-$ , ci sono due possibilità:

- se  $c < 0$ , allora  $x = y(t) = \frac{2}{c - t^2}$  è una soluzione massimale definita su tutto  $\mathbb{R}$ . Il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse delle  $x$ , ha punto di minimo assoluto in  $t = 0$  di valore minimo  $c/2$ , due punti di flesso simmetrici e asintoto orizzontale  $x = 0$  per  $t \rightarrow \pm\infty$ .

- Se  $c \geq 0$ , poiché  $x < 0$  allora  $t \in J^- \cup J_+$ , dove  $J^- = (-\infty, -\sqrt{c})$  e  $J^+ = (\sqrt{c}, +\infty)$ . Allora ci sono due soluzioni massimali definite rispettivamente su queste semirette. I grafici sono concavi e hanno l'asintoto orizzontale  $x = 0$  per  $t \rightarrow \pm\infty$ , e ciascuno un asintoto verticale  $t = \pm\sqrt{c}$ .

L'insieme di tutte le soluzioni così ottenute (costanti e non costanti) hanno curve integrali due a due disgiunte e queste curve ricoprono tutto il piano in accordo con il teorema di C-L.

(2) Consideriamo ora un esempio per cui le ipotesi del teorema di C-L *non* sono verificate.

$$y' = a(t)b(x)$$

dove  $a(t) = t$ ,  $b(x) = \sqrt{x}$  se  $x \geq 0$ ,  $b(x) = 0$  se  $x < 0$ .  $a(t)$  è chiaramente continua, mentre  $b(x)$  è derivabile ma la derivata non è continua in  $x = 0$ . In effetti si può verificare che  $f(t, x) = a(t)b(x)$  è continua ma non è localmente Lipschitziana. Possiamo comunque studiare l'equazione applicando lo schema indicato. Allora per ogni  $x_0 \leq 0$ , si ha la soluzione costante  $y = x_0$ . Consideriamo  $L = \{x > 0\}$  e restringiamo l'equazione su  $\mathbb{R} \times L$ . Si verifica che la restrizione di  $b(x)$  su  $L$  è  $\mathcal{C}^1$  per cui il teorema di C-L vale su  $\mathbb{R} \times L$ . Possiamo prendere

$$B(x) = 2\sqrt{x}, \quad A(t) = \frac{1}{2}t^2$$

quindi le curve  $\Gamma_C$ ,  $C \in \mathbb{R}$ , sono definite dalle equazioni

$$\sqrt{x} = \frac{t^2 + C}{4}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Si ottengono allora le soluzioni massimali secondo la formula

$$x = y(t) = \left(\frac{t^2 + C}{4}\right)^2$$

definite per  $t^2 + c > 0$ . Quindi se  $C > 0$  sono definite su tutto  $\mathbb{R}$ , il grafico è simmetrico rispetto all'asse delle  $x$ , convesso con punto di minimo assoluto in  $t = 0$ . Se  $c \leq 0$ , allora ci sono due soluzioni definite rispettivamente su  $J^- = (-\infty, -\sqrt{-c})$  e  $J^+ = (\sqrt{-c}, +\infty)$ . I grafici sono convessi e

$$\lim_{t \rightarrow \pm\sqrt{-c}} y(t) = 0.$$

E' chiaro che per ogni  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  esiste una soluzione massimale che passa per  $(t_0, x_0)$ . Si verifica infine che ci sono delle soluzioni non costanti dell'equazione definite su tutto  $\mathbb{R}$ , ottenute incollando per esempio la soluzione costante  $y = 0$  definita su  $(-\sqrt{-c}, \sqrt{-c})$  con le due soluzioni su  $\mathbb{R} \times L$  corrispondenti alla costante  $c < 0$ . Dunque per esempio per il punto  $(0, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  passano *infinite* soluzioni massimali dell'equazione. Questa non unicità delle soluzioni per certi assegnati dati iniziali è coerente con il fatto che le ipotesi del teorema di C-L non sono verificate.

(3) **(Equazione del primo ordine associata ad una famiglia di curve dipendente da un parametro - traiettorie ortogonali)** Prima abbiamo visto come lo studio di un'equazione differenziale ha dato luogo ad una famiglia di curve piane dipendenti da un parametro che fanno da supporto alle curve integrali. A volte questa procedura può essere invertita. Mostriamo come in un paio di esempi.

(i) Consideriamo la famiglia di ellissi data dalle equazioni cartesiane:

$$t^2 + 2x^2 = c^2, \quad c \in \mathbb{R}.$$

sostituiamo formalmente  $x = y(t)$  e deriviamo rispetto al tempo:

$$t + 2y(t)y'(t) = 0$$

allora l'equazione

$$y' = -\frac{t}{2y}$$

è a variabili separate e le corrispondenti curve  $\Gamma_c$  sono contenute nella famiglia di ellissi di partenza.

(ii) Consideriamo la famiglia di parabole

$$x = c(t - 1)^2, \quad c \in \mathbb{R}$$



sostituiamo formalmente  $x = y(t)$  e deriviamo rispetto al tempo:

$$\begin{aligned}y(t) &= c(t-1)^2 \\ y' &= 2c(t-1)\end{aligned}$$

otteniamo l'equazione

$$y' = 2\frac{y}{t-1}$$

(iii) Ricordiamo che in generale due rette di equazione

$$x = -mt, \quad x = \frac{1}{m}t, \quad (m \neq 0)$$

sono tra loro ortogonali. Allora, data una equazione

$$y' = f(t, y)$$

l'equazione

$$y' = -\frac{1}{f(t, y)}$$

ha la proprietà che le sue linee integrali sono ortogonali alle linee integrali della prima equazione. Se applichiamo per esempio questa considerazione all'equazione associata alla famiglia di ellissi dell'esempio (i), otteniamo l'equazione

$$y' = \frac{2y}{t}$$

che ha come famiglia di curve integrali la famiglia di parabole

$$x = ct^2.$$

**3.5. Altri esempi di equazioni del primo ordine.** Mostriamo alcuni altri tipi di equazione del primo ordine che con opportune manipolazioni possono essere ricondotte al caso lineare o a variabili separate.

**Nota.** Negli esempi che seguono metteremo più che altro in evidenza il tipo di manipolazione e la forma delle soluzioni. Sarà cura del lettore specificare i dettagli, quali per esempio gli effettivi intervalli di definizione delle soluzioni.

(1) **(Equazione di Bernoulli)** E' un'equazione della forma

$$y' + a(t)y = b(t)y^\alpha$$

dove  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ . Facciamo formalmente la sostituzione

$$y(t) = u(t)v(t)$$

dove le due funzioni  $u$  e  $v$  sono da determinare. Sostituendo nell'equazione si ottiene

$$u'(t)v(t) + u(t)v'(t) + a(t)u(t)v(t) = b(t)(u(t)v(t))^\alpha$$

da cui

$$v(u' + au) + v'u = b(uv)^\alpha$$

Imponiamo allora che

$$u' + a(t)u = 0$$

che sappiamo risolvere perché è lineare. Sostituendo una soluzione  $u = u(t)$  nell'equazione otteniamo

$$v' = [b(t)u(t)^{\alpha-1}]v^\alpha$$

che è a variabili separate. Vediamo un esempio concreto:

$$y' - \frac{4}{t}y = t\sqrt{y}$$

l'equazione lineare ausiliaria è allora

$$u' - \frac{4}{t}u = 0$$

che ha come soluzione particolare

$$u = t^4$$

sostituendo troviamo

$$v' = \frac{\sqrt{v}}{t}$$

ed infine l'integrale generale è della forma

$$v = t^4((1/2) \log(t) + c)^2, \quad c \in \mathbb{R} .$$

- (2) **(Equazioni omogenee)** L'aggettivo "omogeneo" ha qui un significato diverso da quello usato per le equazioni lineari. Infatti consideriamo equazioni della forma

$$y' = g\left(\frac{y}{t}\right)$$

dove

$$f(t, x) = g\left(\frac{x}{t}\right)$$

è omogenea nel senso che per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \neq 0$ , per ogni  $(t, x)$ ,

$$f(\lambda t, \lambda x) = f(t, x) .$$

Poniamo formalmente

$$y = tu$$

$$y' = u + tu'$$

$$u + tu' = f(u)$$

$$u' = \frac{f(u) - u}{t}$$

che è a variabili separate. Vediamo un esempio concreto:

$$y' = e^{y/t} + y/t .$$

Poniamo

$$y = tu$$

e svolgendo i conti otteniamo

$$u' = \frac{e^u + u - u}{t} = \frac{e^u}{t}$$

integrando si trova

$$u = -\log(\log(c/t)), \quad c \in \mathbb{R}$$

ed infine

$$y = -t \log(\log(c/t)), \quad c \in \mathbb{R} .$$

- (3) Consideriamo un'equazione della forma

$$y' = f(at + my + c)$$

dove  $a, m, c \in \mathbb{R}$ ,  $m \neq 0$ . Poniamo formalmente

$$u = at + my + c, \quad y' = \frac{u' - a}{m}$$

da cui sostituendo otteniamo

$$\frac{u' - a}{m} = f(u)$$

$$u' = mf(u) - a = b(u)$$

che è a variabili separate con  $a(t) = 1$ .

(4) Consideriamo equazioni della forma

$$y' = f\left(\frac{a_1 t + b_1 y + c_1}{a_2 t + b_2 y + c_2}\right)$$

con la condizione che  $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$ . L'algebra lineare ci dice che il sistema lineare ordinario

$$a_1 \alpha + b_1 \beta = -c_1, \quad a_2 \alpha + b_2 \beta = -c_2$$

nelle incognite  $\alpha, \beta$  ha un'unica soluzione  $(\alpha_0, \beta_0)$ . Poniamo allora formalmente

$$t = u + \alpha_0, \quad y = v + \beta_0$$

sostituendo nell'equazione otteniamo

$$v' = f\left(\frac{a_1 u + b_1 v}{a_2 u + b_2 v}\right) = g\left(\frac{v}{u}\right)$$

dove

$$g(z) = z \frac{a_1 + b_1 z^{-1}}{a_2 z + b_2}$$

dunque ci siamo ricondotti ad una equazione omogenea già trattata sopra.

(5) **(Equazioni non in forma normale)** In certi casi un'equazione non in forma normale può essere ricondotta ad equazioni in forma normale. Vediamo alcuni esempi:

(i) Supponiamo che l'equazione sia della forma

$$y = \phi(t)\psi(y') + \alpha(t)$$

allora introduciamo formalmente il parametro  $p = y'$ , riscriviamo

$$y = \phi(t)\psi(p) + \alpha(t)$$

e deriviamo rispetto a  $t$ , ottenendo

$$p = \phi'(t)\psi(p) + \phi(t)\psi'(p)p' + \alpha'(t)$$

da cui

$$p' = \frac{p - [\phi'(t)\psi(p) + \alpha'(t)]}{\phi(t)\psi'(p)}$$

che è in forma normale. Se sappiamo risolvere questa equazione in  $p$ , sostituendo troviamo le soluzioni in  $y$ . Vediamo un caso concreto

$$y = y'^2 - ty' + \frac{t^2}{2}$$

$$y = p^2 - tp + \frac{t^2}{2}$$

$$p = 2pp' - p - tp' + t$$

da cui

$$p' = \frac{2p - t}{2p - t} = 1$$

per cui

$$p = t + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$y = (t + c)^2 - t(t + c) + \frac{t^2}{2} = \frac{t^2}{2} + ct + c^2 .$$

(ii) Consideriamo l'equazione

$$ty'^2 + 2ty' - y = 0$$

che può essere trattata come prima facendo la sostituzione  $p = y'$ . Si ottiene

$$y = tp^2 + 2tp$$

$$p = p^2 + 2tp' + 2p + 2tp'$$

da cui

$$p' = -\frac{p+p^2}{2t(1+p)} = -\frac{p}{2t}$$

che è a variabili separate e quindi sappiamo studiare. In questo caso potevamo anche esplicitare  $y'$  ottenendo due equazioni in forma normale e omogenee

$$y' = -1 + \sqrt{1+y/t}, \quad y' = -1 - \sqrt{1+y/t}$$

a condizione che  $t(t+x) > 0$ .

Risulta che le curve  $\Gamma_c$  sono rispettivamente della forma

$$(\sqrt{1+x/t}-1)^2 = c/t, \quad (\sqrt{1+x/t}+1)^2 = c/t, \quad c \in \mathbb{R}$$

che possono essere inglobate in un'unica famiglia di parabole data da

$$(2t+x-c)^2 - 4(t^2+tx) = 0$$

cioè

$$(x-c)^2 = 4ct.$$

Inoltre si verifica che  $y = -t$  è anch'essa una soluzione dell'equazione.

#### 4. INTEGRAZIONE DI CAMPI DI VETTORI - SISTEMI DI EQUAZIONI DEL PRIMO ORDINE

*(Rivolto soprattutto ad un lettore particolarmente interessato.)*

Riconsideriamo il campo di vettori

$$S : T \times I \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad S(t, x) = (1, f(t, x))$$

già introdotto quando abbiamo cominciato a studiare le equazioni del primo ordine in forma normale. Possiamo fare la seguente manipolazione formale:

- Cambiamo nome alle variabili ponendo  $(t, x) = (z_0, z_1) \in T \times I = I_0 \times I_1$ .
- Reintroduciamo un intervallo dei tempi  $T$ .
- Consideriamo

$$\tilde{f} : T \times (I_0 \times I_1) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \tilde{f}(t, \bar{z}) = S(z_0, z_1)$$

così  $\tilde{f}$  può essere interpretato come un campo di vettori tangenti su  $I_0 \times I_1$  che *non* dipende dal tempo. A questo campo possiamo associare l'*equazione differenziale vettoriale* (a volte detto anche il *sistema di equazioni differenziali del primo ordine*)

$$(z'_0, z'_1) = S(z_0, z_1)$$

Se  $y = y(t)$  è una soluzione dell'equazione differenziale originale, allora  $(t, y(t))$  è una soluzione dell'equazione vettoriale associata.

Queste considerazioni ci fanno concludere che la situazione più generale in cui intervengono equazioni differenziali del primo ordine (in forma normale) è la seguente. Si considera una funzione continua

$$f : T \times (I_1 \times \cdots \times I_n) \rightarrow I_1 \times \cdots \times I_n$$

che interpretiamo come un campo di vettori tangenti su  $I_1 \times \cdots \times I_n$  dipendente dal tempo. Abbiamo l'equazione differenziale vettoriale (equivalentemente, il sistema di equazioni) associata:

$$(y'_1, \dots, y'_n) = f(t, y_1, \dots, y_n).$$

Una soluzione  $\bar{y} = (y_1, \dots, y_n) : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  è definita su un sotto-intervallo aperto  $J$  di  $T$  e per ogni  $t \in J$  verifica

$$\bar{y}'(t) = (y'_1(t), \dots, y'_n(t)) = f(t, y_1(t), \dots, y_n(t)).$$

Il grafico  $G(\bar{y})$  in  $J \times (I_1 \times \cdots \times I_n)$  è una curva integrale dell'equazione. Inoltre facendo la "sospensione" di  $f$ , possiamo riformulare l'equazione in modo equivalente nei termini di un'altra equazione vettoriale associata ad un campo di vettori tangenti su  $T \times (I_1 \times \cdots \times I_n) = (I_0 \times I_1 \times \cdots \times I_n)$  che *non* dipende dal tempo.

**4.1. Sui sistemi di equazioni differenziali del primo ordine lineari.** Sia  $A(t) = (a_{i,j}(t))_{i=1,\dots,m;j=1,\dots,n}$  una matrice  $m \times n$  dove ogni entrata è una funzione continua definita sull'intervallo  $T$ . Sia  $B(t) = (b_1(t), \dots, b_m(t))^t$  un vettore colonna con  $m$  righe, dove ogni  $b_j(t)$  è continua definita su  $T$ . Allora un sistema di equazioni differenziali del primo ordine di tipo lineare è della forma

$$\bar{y}' + A(t)y = B(t)$$

dove  $\bar{y} = (y_1, \dots, y_n)^t : T \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Si può verificare che lo spazio vettoriale delle soluzioni del sistema omogeneo associato

$$\bar{y}' + A(t)y = 0$$

ha dimensione uguale a  $n$ . La cosa è particolarmente semplice da verificare se  $A(t)$  è *diagonale*; infatti in tal caso ci riconduciamo ad un sistema di equazioni indipendenti in una variabile

$$y_j' + a_{j,j}(t)y_j = 0$$

che sappiamo trattare completamente. Una base dello spazio delle soluzioni sarà formata dalle funzioni a valori vettoriali  $y_j = e^{-\int a_{j,j} dt} e_j$ , dove  $e_j$  è il  $j$ -esimo vettore della base canonica di  $\mathbb{R}^n$ . Per trovare una soluzione particolare del sistema non omogeneo, la cerchiamo della forma  $y^0 = \sum_j C_j(t)y_j(t)$  (metodo

della variazione delle costanti arbitrarie). Se  $A(t)$  è "*diagonalizzabile*" (se per esempio  $A(t) = A$  è costante ritroviamo la nozione abituale di matrice diagonalizzabile del corso di algebra lineare), allora possiamo ricondurci al caso diagonale per mezzo di un cambiamento globale di coordinate.