

Analisi I - IngBM - 2015-16
COMPITO B 18 Giugno 2016

COGNOME NOME

MATRICOLA VALUTAZIONE + =

1. ISTRUZIONI

Gli esercizi devono essere svolti negli appositi spazi del presente fascicolo; solo questo sarà ritirato e valutato. I fogli a quadretti messi a disposizione possono essere usati liberamente ma in nessun caso saranno ritirati. Il compito è composto di due parti. La prima parte deve essere svolta preliminarmente. Essa verrà corretta per prima e valutata con un punteggio di $0 \leq x \leq 10$ punti. Condizione necessaria affinché venga preso in considerazione l'eventuale svolgimento della seconda parte è che $x \geq 6$. In tal caso la seconda parte viene valutata con un punteggio di $0 \leq y \leq 24$ punti. Il compito sarà sufficiente per l'ammissione alla prova orale se $x + y \geq 18$. In tal caso il voto di ammissione all'orale sarà $v = \min(28, x + y)$.

Attenzione. Tutte le risposte devono essere giustificate.

Esercizio 0. (0 punti) Leggere e capire le istruzioni.

Esercizio 1.(3,5 punti) Dire se la formula seguente

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x \neq 0 \\ -0,9 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

definisce una funzione differenziabile da $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

SOLUZIONE.

SI la funzione $f(x)$ è una funzione differenziabile da \mathbf{R} a \mathbf{R}

NO la funzione $f(x)$ non è una funzione differenziabile da \mathbf{R} a \mathbf{R}

perché la funzione definita non è continua in 0. In effetti risulta $f(0) \neq \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Esercizio 2.(3 punti)

Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{3n^2}$$

SOLUZIONE.

NO il limite non esiste

SI il limite esiste e vale e^3

perché $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ e quindi (cfr. dispensa LIMSUCC)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = e.$$

Pertanto

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{3n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2 \cdot 3} = e^3$$

Esercizio 3.(3.5 punti) Negare le seguenti frasi

- (1) *Tutti gli asini sono carnivori e nessun pesce è erbivoro.*
- (2) *C'è un gatto vegano o un cane anoressico.*

SOLUZIONE.

- (1) La negazione della frase (1) è
C'è almeno un asino non carnivoro o un pesce non erbivoro
- (2) La negazione della frase (2) è
Tutti i gatti non sono vegani e tutti i cani non sono anoressici.

Seconda parte

Esercizio 1.(6 punti)

Si consideri la funzione definita dalla formula $f(x) = \begin{cases} e^{1-x} + 1 - e^2 & \text{se } x \leq -1 \\ 2 - x^2 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ e^{1-x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

- (1) Descrivere l'insieme C dei punti di \mathbf{R} dove la funzione è continua e l'insieme D dei punti dove la funzione è derivabile
- (2) Descrivere l'insieme dei punti di massimo e minimo relativi e assoluti della funzione $f(x)$
- (3) Descrivere gli eventuali asintoti

SOLUZIONE.

- (1) $C = \mathbf{R}$ e $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$
- (2) La funzione ha un minimo relativo in 1 e un massimo relativo in 0 e non ha massimi o minimi assoluti.
- (3) Il grafico della funzione ha la retta $y = 0$ come asintoto orizzontale e non ammette altri asintoti.

Esercizio 2.(6 punti) Sapendo che $1 - i$ è una soluzione dell'equazione

$$z^4 - 4z^3 + 11z^2 - 14z + 10 = 0$$

calcolarne tutte le altre.

SOLUZIONE.

Essendo il polinomio a coefficienti reali anche $1 + i$ è soluzione e quindi il polinomio risulta divisibile per $(z - 1 + i)(z - 1 - i) = z^2 - 2z + 2$. In effetti si ha $z^4 - 4z^3 + 11z^2 - 14z + 10 = (z^2 - 2z + 2)(z^2 - 2z + 5)$. Pertanto le soluzioni dell'equazione proposta sono $\{1 + i, 1 - i, 1 + 2i, 1 - 2i\}$.

Esercizio 3. (6 punti)

Sia f una funzione continua $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ tale che $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$. Provare che f non è surgettiva.

SOLUZIONE.

Poiché la funzione tende a $+\infty$ sia per $x \rightarrow \infty$ sia per $x \rightarrow -\infty$, fissato un $L > 0$ esiste un K per cui se $x < -K$ o $x > K$ si ha che $f(x) > L$. L'intervallo $I = [-K, K]$ è un intervallo chiuso e limitato, pertanto essendo la funzione f continua su tutto \mathbf{R} ammetterà su I un massimo e un minimo assoluti risp M e N , quindi in definitiva la funzione $f(x)$ non assume mai valori minori di $\inf\{L, N\}$ e quindi non può essere surgettiva.

Esercizio 4.(6 punti)

Calcolare la soluzione dell'equazione differenziale

$$(\cos^2 x + 1)y' + \sin x = 0$$

tale che $y(0) = 0$.

SOLUZIONE.

L'equazione è a variabili separabili e risulta

$$y' = \frac{-\sin x}{\cos^2 x + 1}$$

da cui

$$y = \int_0^t \frac{d(\cos x)}{1 + \cos^2 x} = \arctan \cos(t) + C.$$

Per $t = 0$ si ha $\arctan 1 + C = 0$ da cui $C = -\frac{\pi}{4}$.