Analisi I - IngBM - 2013-14
COMPITO B 14 Giugno 2014

COGNOME .... NOME ....

MATRICOLA .... VALUTAZIONE ..... + ... = ...

1. Istruzioni

Gli esercizi devono essere svolti negli appositi spazi del presente fascicolo; **solo questo sarà ritirato e valutato.** *I fogli a quadretti messi a disposizione possono essere usati liberamente ma in nessun caso saranno ritirati. Il compito è composto di due parti. La prima parte deve essere svolta preliminarmente. Essa verrà corretta per prima e valutata con un punteggio di* $0 \leq x \leq 10$ *punti. Condizione necessaria affinché venga preso in considerazione l'eventuale svolgimento della seconda parte è che* $x \geq 6$. *In tal caso la seconda parte viene valutata con un punteggio di* $0 \leq y \leq 24$ *punti. Il compito sarà sufficiente per l'ammissione alla prova orale se* $x + y \geq 19$. *In tal caso il voto di ammissione all'orale sarà* $v = \min(28, x + y)$.

2. Prima parte

Esercizio 0 (0 punti). Leggere e capire le istruzioni.

Esercizio 1. (2 punti). Calcolare, se esiste, il limite

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + n^2}$$

giustificando il risultato ottenuto.

SOLUZIONE.

□ Il limite L non esiste perché

$\boxed{\text{x}}$ L=3. Infatti $3^n + n^2 = 3^n(1 + (n^2/3^n))$, $\lim_{n\to+\infty}(1 + (n^2/3^n)) = 1$, $L = 3 \lim_n \sqrt[n]{1} = 3$.
Si poteva anche osservare che definitivamente si ha $3^n \leq 3^n + n^2 \leq 3^n + 3^n = 2 \cdot 3^n$ da cui prendendo le radici n-esime si ottiene $3 \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + n^2} \leq 3\sqrt[n]{2}$. Il risultato segue dal fatto che $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$.

Esercizio 2. (8 punti).

a) Determinare il più grande sottoinsieme D di $\mathbf{R}$ tale che la formula $f(x) = \dfrac{-x}{e^x+1}$ definisca una funzione $f : D \to \mathbf{R}$.
b) Dire se esiste un sottoinsieme $D' \subset \mathbf{R}$ contenente propriamente D e una funzione F continua su D' che estende f.
c) Calcolare gli eventuali asintoti del grafico della funzione $f(x)$
d) Dire se la funzione $f(x)$ ammette un minimo locale nell'intervallo $[0, 2]$
e) Riassumere le informazioni sulla funzione disegnandone un grafico.

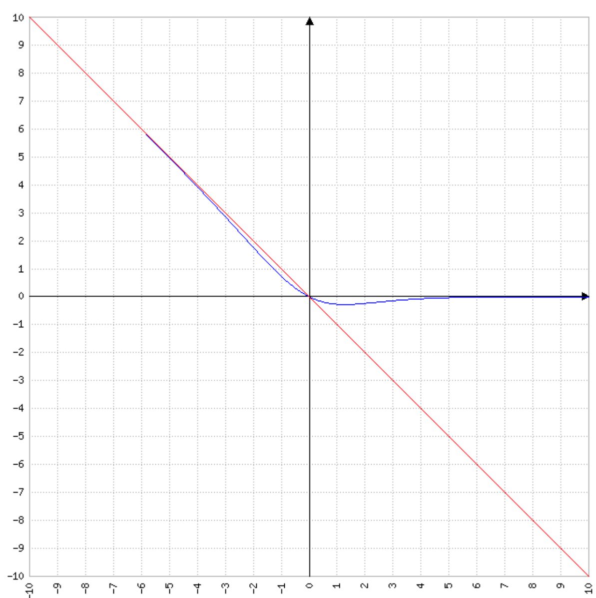
SOLUZIONE.

(a), (b) $D = \mathbf{R}$. f è una funzione elementare continua definita su tutto $\mathbf{R}$, quindi non esiste alcuna estensione propria di D e di f.
c) Il grafico di f
☐ non ammette asintoti
$\boxed{\text{X}}$ ha come asintoti le rette di equazione $y = 0$ asintoto orizzontale per $x \to +\infty$ e $y = -x$ asintoto obliquo per $x \to -\infty$.

d) Nell'intervallo $[0, 2]$ la funzione f

$\boxed{\text{X}}$ ammette un minimo locale ☐ non ammette un minimo locale

Poiché f è continua la sua restrizione all'intervallo chiuso e limitato $[0, 2]$ ammette un punto di minimo assoluto; se dimostriamo che appartiene all'intervallo aperto $(0, 2)$, allora questo è un punto di minimo locale per per $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Osserviamo che $f(0) = 0$, $f < 0$ su $(0, 2]$, $f'(2) > 0$, f' e' una funzione elementare continua definita su tutto $\mathbf{R}$. Per la permanenza del segno, $f' > 0$ in un intorno di 2, quindi nell'intervallo aperto $(0, 2)$ ci sono punti che prendono valori strettamente minori di $f(0)$ e $f(2)$ e i punti di minimo della restrizione di f a [0,2] sono interni come volevamo dimostrare.
e) Grafico di f:



3. Seconda parte

Esercizio 1.(2 punti). Una funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ si dice *additiva* se $\forall x, y \in \mathbf{R}$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Dare, negando questa definizione, una definizione di funzione *non additiva*

SOLUZIONE.
Una funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ si dice *non additiva* se esiste una coppia $x, y \in \mathbf{R}$ tale che $f(x+y) \neq f(x) + f(y)$.

Esercizio 2.(4 punti). Siano A e B due insiemi finiti, $|A| = 2$, $|B| = 4$. Sia $C = \{f : A \to B;\ f \text{ non iniettiva}\}$. Determinare $|C|$, giustificando il risultato ottenuto.

SOLUZIONE. $|C| = 4$. Infatti: l'insieme di tutte le applicazioni $f : A \to B$ ha $|B|^{|A|} = 4^2 = 16$ elementi; l'insieme delle applicazioni iniettive $f : A \to B$ ha $4 \times 3 = 12$ elementi. Quindi l'insieme C, che è il complementare dell'insieme delle funzioni iniettive, ha $16 - 12 = 4$ elementi.

Esercizio 3.(4 punti).
(1) Verificare che $3i \in \mathbf{C}$ è una radice del polinomio

$$p(z) = z^4 + z^3 + 10z^2 + 9z + 9 \ .$$

(2) Determinare tutte le radici complesse di $p(z)$.

SOLUZIONE.
(1) $p(3i) = 81 - 27i - 90 + 27i + 9 = 0$.

(2) Le radici complesse del polinomio sono $\pm 3i$, $\dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Infatti, poichè $p(z)$ è a coefficienti reali, anche -3i è una radice. Per la divisione con il resto sui polinomi, si ha che $p(z) = (z - 3i)(z + 3i)q(z) = (z^2 + 9)(z^2 + z + 1)$ e il secondo fattore ha come radici $z = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

Esercizio 4.(5 punti) Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione continua tale che $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$.
Dimostrare che l'equazione

$$1 + x + f^2(x) = 0$$

ammette almeno una soluzione nell'insieme $(-\infty, 0)$

SOLUZIONE. Poniamo $g(x) = 1 + x + f^2(x)$. $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è continua perché è somma di funzioni continue. $g(0) = 1 + f^2(0) \geq 1 > 0$. $\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$. Per la permanenza del segno esiste $a < 0$ tale che $g(a) < 0$. Dunque la restrizione di g all'intervallo $[a, 0]$ è continua e $g(0)g(a) < 0$. Per il teorema degli zeri esiste $b \in (a, 0)$ tale che $g(b) = 1 + b + f^2(b) = 0$.

Esercizio 5.(9 punti). Sia α un numero reale. Si consideri la soluzione f_α dell'equazione differenziale

$$\frac{dy}{dx} = y(y+1)$$

che verifica la condizione $y(0) = \alpha$.

(1) Dire per quali valori del parametro α la soluzione f_α non è definita su tutto $\mathbf{R}$.
(2) Dire se per qualche valore del parametro α la soluzione f_α è costante.
(3) Disegnare il grafico di f_α per $\alpha = 1$

SOLUZIONE Con i procedementi standard, essendo $\dfrac{1}{y(y+1)} = \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{y+1}$ si vede facilmente che l'integrale generale è esprimibile in forma implicita come $\log\left|\dfrac{y}{y+1}\right| = x + C$.
Da cui otteniamo per l'integrale generale una espressione del tipo $y = \dfrac{ke^x}{1-ke^x}$ ove abbiamo indicato con k la costante risultante ed abbiamo eliminato il modulo utilizzando appunto tale costante k.
Imponendo la condizione $y(0) = \alpha$ otteniamo per k il valore $k = \dfrac{\alpha}{1+\alpha}$ e quindi in definitiva $y = \dfrac{\alpha e^x}{(1+\alpha) - \alpha e^x}$
Essendo e^x una funzione surgettiva su $\mathbf{R}^+$ abbiamo che per ogni α tale che $\dfrac{\alpha+1}{\alpha} > 0$, cioè per ogni α con $\alpha < -1$ e $\alpha > 0$, la soluzione non è definita su tutto $\mathbf{R}$.
Le soluzioni costanti della equazione differenziale sono $y = 0$ e $y = -1$ che si ottengono appunto per i valori 0 e -1 di α.
Grafico di f_1