February 18, 2019

SCRITTO 16-2-19: INDICAZIONI SULLE SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI

Essendo i due testi molto simili, ci riferiremo solo al compito A, per B le modifiche da fare sono minime.

PRIMA PARTE

(Ex1) Per un $\epsilon > 0$ abbastanza piccolo, $|\sin(x)| = -\sin(x)$ se $-\epsilon < x < 0$, $|\sin(x)| = \sin(x)$ se $0 < x < \epsilon$. Studiando rispettivamente il limite destro e sinistro per $x \to 0$, si verifica che $\lim_{x\to 0^-} |\sin(x)|/x = \lim_{x\to 0^-} (-\sin(x)/x)(1/x) = (-1)(-\infty) = +\infty$; $\lim_{x\to 0^+} |\sin(x)|/x = \lim_{x\to 0^+} (\sin(x)/x)(1/x) = (1)(+\infty) = +\infty$. Quindi $\lim_{x\to)} |\sin(x)|/x = +\infty$.

(Ex2) Applicando la definizione di limite alle due successioni a_n e b_n, abbiamo che per ogni $\epsilon > 0$ esistono $n_1 > 0$ e $n_2 > 0$ tali che per ogni $n > n_1$, $|a_n| < \epsilon$ e per ogni $n > n_2$, $|b_n| < \epsilon$. Poiché $c_{2n} = a_n$, $c_{2n+1} = b_n$, se prendiamo $n_3 = \max\{n_1, n_2\}$ abbiamo che per ogni $n > n_3$, $|c_n| < \epsilon$. Quindi abbiamo verificato, usando direttamente la definizione di limite, che $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$.

NB. Nei vari tentativi falliti di soluzione dell'esercizio ci sono stati errori diffusi. Ne segnaliamo un paio. Alcuni hanno affermato che $a_n \leq c_n \leq b_n$, applicando poi il 'confronto'; ma chiaramente quelle disuguaglianze sono abusive, cioè non seguono dalle ipotesi (trovare per esercizio un controesempio). Altri, riferendosi alla pag. 3 della dispensa sui limiti di successioni, hanno confuso condizione necessaria con condizione sufficiente. Se una successione c_n convege a zero, tutte le sottosuccessioni convergono a zero. Ma non basta che due (anche un milione di) sottosuccessioni convergano a zero per dedurre che anche c_n converge a zero (ancora, per esercizio tovare un controesempio).

(Ex3) La funzione $f(x) = |\cos(x)|$ è definita e continua su tutto $\mathbb{R}$. Quindi per il teorema fondamentale del calcolo integrale ammette primitive definite su tutto $\mathbb{R}$. Possiamo rispondere al punto (2) dell' esercizio senza bisogno di esplicitare una qualsiasi primitiva di f. Intanto due primitive differiscono per una funzione costante, per cui condividono il massimo n per cui sono di classe $\mathcal{C}^n$ ma non $\mathcal{C}^{n+1}$. Sia allora F una primitiva di f. Essa è derivabile e $F' = f$ che è continua; quindi F è almeno di classe $\mathcal{C}^1$. D'altra parte la sua derivata f non è derivabile su tutto $\mathbb{R}$ ($f(x) = |\cos(x)|$ non è derivabile nei punti $x_k := \pi/2 + k\pi$ dove $k \in \mathbb{Z}$). Quindi non esiste F", per cui il massimo n cercato è $n = 1$. Per esplicitare una primitiva di f, sempre applicando il teorema fondamentale, sappiamo che possiamo considerare la funzione integrale $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Si tratta quindi di esplicitare tale funzione. Si osserva che $f(x)$ è non negativa, periodica di periodo minimo $T = \pi$ ed inolte $f(x) = f(-x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Per cui $F(x) = -F(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e quindi basta analizzare la restrizione di F su $[0, +\infty)$. Per ogni tale x esiste un minimo $k \in \mathbb{N}$ tale che $x \in [\pi/2 + k\pi, \pi/2 + (k+1)\pi]$. Se $k = 0$, allora $F(x) = \sin(x)$; se $k > 0$,

$$F(x) = \int_0^{\pi/2} \cos(t)dt + \int_{\pi/2}^{\pi/2+\pi} -\cos(t)dt + \int_{\pi/2+\pi}^{\pi/2+2\pi} \cos(t)dt + \cdots \int_{\pi/2+k\pi}^{x} (-1)^k \cos(t)dt$$

che si può riscrivere

$$F(x) = 1 + (k-1)2 + (-1)^k(\sin(x) - \sin(\pi/2 + k\pi)) \ .$$

NB. Anche nei tentativi di soluzione di questo esercizio ci sono stati gravi errori diffusi. Alcuni hanno scritto che $F(x) = |\sin(x)|$ ma questa funzione non è derivabile su tutto $\mathbb{R}$ quindi non può essere una primitiva. Alcuni, dopo aver detto che una primitiva esiste perché $f(x)$ è continua, hanno affermato che $F(x) = |\sin(x)|$ lo è e, pur osservando che non è derivabile, non hanno rilevato la contraddizione ma hanno concluso che le primitive sono solo $\mathcal{C}^0$. Alcuni scrivono $F(x) = \int f(t)dt$. Il secondo simbolo, chiamato l'integrale indefinito di $f(x)$, è l'insieme di tutte le sue primitive. Dunque se mai si doveva scrivere $F(x) \in \int f(t)dt$. Non è solo una questione formale. Dalla cattiva forma si arriva a conclusioni sbagliate come quelle dette sopra. Osserviamo anche che su ogni intervallo aperto della forma $(\pi/2 + k\pi, \pi/2 + (k+1)\pi)$ la restrizione di f ha primitive della forma $(-1)^k \sin(x) + c_k$, $c_k \in \mathbb{R}$. Quindi per ottenere una primitiva definita su tutto $\mathbb{R}$ bisogna scegliere queste costanti c_k in modo che le varie restrizioni si raccordino in modo (almeno) continuo su tutto $\mathbb{R}$. Scegliere arbitrariamente queste costanti tutte uguali, per esempio uguali a zero, porta agli errori già detti.

SECONDA PARTE

(Ex1) Le due funzioni sin e cos sono invertibili sull'intervallo $[0, \pi/2]$ e hanno entrambe per immagine l'intervallo $[0, 1]$. Quindi le rispettive funzioni inverse così come la loro funzione somma $f(x)$ sono definite su $[0, 1]$ e sono funzioni continue. La funzione somma $f(x)$ è derivabile sull'intervallo aperto $(0, 1)$ e calcolando la derivata usando formule note si verifica che $f'(x) = 0$ per ogni $x \in (0, 1)$. Quindi f è una funzione costante su $(0, 1)$ e quindi per continuità lo è sull'intervallo chiuso $[0, 1]$. Per calcolarne il valore (costante) basta calcolarla in un punto scelto arbitrariamente. Preso $x = 0$, si verifica che $f(0) = \pi/2$.

(Ex2) Per il teorema fondamentale del calcolo integrale per le le funzioni continue, $F'(x) = e^{Arctan(x)}$. Questa derivata è sempre positiva, quindi $F(x)$ è strettamente crescente e quindi iniettiva. Mostriamo che $\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$. Infatti, posto $f(x) = e^{Arctan(x)}$, fissiamo $x_0 > 0$. Allora per ogni $x > x_0$, $f(x) > f(x_0)$, da cui

$$F(x) = \int_0^{x_0} f(t)dt + \int_{x_0}^{x} f(t)dt > \int_0^{x_0} f(t)dt + \int_{x_0}^{x} f(x_0)dt = \int_0^{x_0} f(t)dt + f(x_0)(x - x_0)$$

l'ultimo termine tende chiaramente a $+\infty$ quando $x \to +\infty$ e si conclude per confronto. In modo analogo si verifica che $\lim_{x \to -\infty} F(x) = -\infty$. Applicando opportunamente il teorema dei valori intermedi si conclude che F è surgettiva. L'inversa di F è definita su tutto $\mathbb{R}$ ed è continua perché F lo è ed è definita su un intervallo. D'altra parte F è derivabile con derivata mai nulla. Quindi l'inversa di F è anch'essa derivabile su tutto $\mathbb{R}$. $(F^{-1})'(y) = 1/f(x)$, $y = F(x)$.

(Ex3) Poniamo $y = -x$, allora $p_n(x) = 1 + y + y^2 + \dots y^n := \hat{p}(y)$. Per una formula ben nota, vista nel corso, $(y - 1)\hat{p}_n(y) = y^{n+1} - 1$. Quindi le radici di $\hat{p}_n(y)$ sono le radici $(n+1)$-esime di 1, private della radice $y = 1$. È noto che le soluzioni di $y^{n+1} - 1 = 0$ sono $y_k := e^{\frac{2i\pi k}{n+1}}$, $k = 0, \dots, n$. Se n è pari, $\hat{p}_n(y)$ non ha radici reali; se n è dispari, l'unica radice reale di $\hat{p}_n(y)$ è $y = -1$. Per concludere le radici di $p_n(x)$ si ottengono ponendo $x_k = -y_k$.

(Ex4) Applicando la discussione delle equazioni a variabili separate vista nel corso, sappiamo che ogni linea integrale massimale dell' equazione data è contenuta in una delle curve della famiglia $t^2 - 2y^2 = c$, $c \in \mathbb{R}$, contenute nel piano di coordinate (t, y) privato della retta di equazione $y = 0$. Per determinare una curva che passi per il punto $(-1, -1)$, imponiamo $1 - 2 = c$ da cui $c = -1$. Allora la soluzione massimale cercata è

$$y = -\sqrt{\frac{t^2 + 1}{2}}$$

definita su tutto $\mathbb{R}$.