Ing.Biomedica- 2017-18

Analisi I

9 Giugno 2018

COMPITO A

COGNOME .... NOME ....

MATRICOLA .... VALUTAZIONE ..... + ... = ...

1. Istruzioni

Gli esercizi devono essere svolti negli appositi spazi del presente fascicolo; **solo questo sarà ritirato e valutato.** *I fogli a quadretti messi a disposizione possono essere usati liberamente ma in nessun caso saranno ritirati. Il compito è composto di due parti. La prima parte deve essere svolta preliminarmente. Essa verrà corretta per prima e valutata con un punteggio di* $0 \leq x \leq 10$ *punti. Condizione necessaria affinché venga preso in considerazione l'eventuale svolgimento della seconda parte è che* $x \geq 6$. *In tal caso la seconda parte viene valutata con un punteggio di* $0 \leq y \leq 24$ *punti. Il compito sarà sufficiente per l'ammissione alla prova orale se* $x + y \geq 18$. *In tal caso il voto di ammissione all'orale sarà* $v = \min(28, x + y)$.

2. Prima parte

Esercizio 0. (punti 0) Leggere e capire le istruzioni.

Esercizio 1. (punti 3) Dire se esiste il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{n}\right)^n + \left(\frac{1}{n+1}\right)^n}$$

ed in caso affermativo, se possibile, calcolarlo.

SOLUZIONE.

□ Il limite proposto non esiste □ Il limite proposto esiste e vale

Giustificazione

Esercizio 2. (punti 3)
Sia $f(x)$ la funzione $\dfrac{3-2x^2}{1+2x^2}$ ed L il suo limite, se esiste, per $x \to +\infty$. Determinare se esiste un M tale che per ogni $x > M$ la distanza di $f(x)$ da L è minore di $\dfrac{1}{4}$.
SOLUZIONE

Esercizio 3. (punti 4) Si determinino l'estremo superiore e inferiore dell'insieme

$$\left\{ x \in \mathbf{R} | \exists t \in \mathbf{R} \text{tale che } \; x = \frac{t}{t^2+1} \right\}$$

precisando se si tratta di massimo o minimo.
SOLUZIONE

3. Seconda parte

Esercizio 1. (punti 6)

(1) Determinare il pi'u grande sottoinsieme C di $\mathbf{R}$ in cui la formula

$$f(x) = \begin{cases} \inf(1, \frac{1}{x^2}) & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

definisce una funzione continua.

(2) Determinare il più grande sottoinsieme aperto D di C tale che f sia derivabile in D.

(3) Determinare, se esistono, punti di minimo e massimo locali di f.

(4) Calcolare l'area del sottografico nellintervallo $[0, 1]$

SOLUZIONE.

(1)

(2)

(3)

(4)

Esercizio 2. (punti 6)
Si consideri la funzione integrale $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da

$$F(x) = \int_0^x e^{\sin t} dt$$

(1) Giustificare che F è ben definita.
(2) Giustificare che F è derivabile.
(3) Dimostrare che F è iniettiva.
(4) Dimostrare che F è surgettiva.
(5) Dimostrare che la funzione inversa $F^{-1} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è derivabile e calcolare $(F^{-1})'(0)$
(6) Dire se F è periodica.

SOLUZIONE

(1)

(2)

(3)

(4)

(5)

(6)

Esercizio 3. (punti 6)
Sia $p(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$. Sapendo che $p(i) = 0$, determinare una primitiva della funzione $\frac{1}{p}$.

SOLUZIONE. Una primitiva della funzione è

Giustificazione.

Esercizio 4. (6 punti) Calcolare la soluzione dell'equazione differenziale

$$y'' - 8y' + 15y = e^{5x}$$

tale che $y(0) = y'(0) = 1$.

SOLUZIONE.