February 4, 2019

**SCRITTO 2-2-19: INDICAZIONI SULLE SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI**

Essendo i due testi molto simili, ci riferiremo solo al compito A, per B le modifiche da fare sono minime.

**PRIMA PARTE**

(Ex1) Per ogni $n \geq 1$, $-\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{(-1)^n}{n} \leq \dfrac{1}{n}$; per confronto $\lim_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$. Quindi $\lim_{n\to\infty} \sin(\dfrac{(-1)^n}{n}) = \sin(0) = 0$ perché la funzione seno è continua in 0.

(Ex2) Per $n = 0$ la formula vale: verifica diretta. Supponiamo che valga per $n$ e dimostriamo che vale allora per $n+1$. Usando l'ipotesi induttiva vediamo che $\sum_{k=0}^{n+1}(3k+2) = (\sum_{k=0}^{n}(3k+2))+3(n+1)+2 = (1/2)(n+1)(3n+4)+3(n+1)+2$. Si verifica infine per via algebrica che l'utimo termine della precedente uguaglianza è proprio uguale a $(1/2)(n + 2)(3(n + 1) + 4)$.

(Ex3) $X$ è l'immagine della funzione $f(t) = 1/(1 + \cos^2(t))$ definita su tutto $\mathbb{R}$. Per ogni $t$, $1/2 \leq f(t) \leq 1$ e i valori estremi sono presi per esempio da $t = 0$ e $t = \pi/2$. Poiché $f$ è continua la sua immagine è tutto l'intervallo chiuso e limitato $[1/2, 1]$, per cui $1/2$ è il minimo di $X$ e $1$ è il massimo di $X$.

**SECONDA PARTE** (Ex1) (1) $x = 0$ è l'unico zero di $F$; infatti per il teorema fondamentale del calcolo integrale per le funzioni continue, $F'(x) = e^{\sin(x)} := f(x)$ che è sempre maggiore di zero. Quindi $F$ è strettamente crescente.

(2) La derivata seconda di $F$, cioè la derivata di $f(x)$, è sempre positiva sull'intervallo $[0, \pi/2]$ e quindi la funzione $F$ è convessa su tale intervallo.

(3) I flessi coincidono con gli zeri della derivata seconda di $F$ su tutto $\mathbb{R}$.

(4) Essendo continua e definita su tutto $\mathbb{R}$, la funzione non ha asintoti verticali. Osserviamo che per ogni $x \in \mathbb{R}$, $1/e \leq f(X) \leq e$; quindi $F(x) \geq \int_0^x (1/e)dt = (1/e)x$. Per confronto $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$. Analogamente si motra che $\lim_{x\to-\infty} F(x) = -\infty$. Quindi $F$ non ha asintoti orizzontali e neanche obliqui perché non esiste il limite di $F(x)/x$ per $x \to \pm\infty$.

(Ex2) Per ogni coppia $(a, b)$, la funzione $f_{a,b}$ è definita e derivabile su tutto $\mathbb{R}$. Poiché i punti di massimo o minimo locale sono punti stazionari, se un tale $x_0$ esiste deve verificare il sistema di uguaglianze $a\cos(x_0) + b\sin(x_0) = 0, -a\sin(x_0) + b\cos(x_0) = 0$. Usando il fatto che $\cos^2(x_0) + \sin^2(x_0) = 1$, si verifica che per ogni $x_0$ l'unica soluzione di questo sistema lineare nelle incognite $a, b$ è $a = b = 0$. D'altra parte $f_{0,0}$ è la funzione costante nulla e tutti i punti $x_0 \in \mathbb{R}$ verificano le proprieta' volute.

(Ex3) Per una formula ben nota, vista nel corso, $(x-1)p_n(x) = x^{n+1} - 1$. Quindi le radici di $p_n(x)$ sono le radici $(n + 1)$-esime di 1, private della radice $x = 1$. È noto che le soluzioni di $x^{n+1} - 1 = 0$ sono $x = e^{\frac{2i\pi k}{n+1}}$, $k = 0, \dots, n$. Se $n$ è pari, $p_n(x)$ non ha radici reali; se $n$ è dispari, l'unica radice reale di $p_n(x)$ è $x = -1$.

(Ex4) Risolvere l'equazione differenziale significa in questo caso determinare l'integrale indefinito della funzione razionale $f(t) = 1/(1 + t + t^2)$ che è definita su tutto $\mathbb{R}$ perchè il denominatore non ha radici reali Ogni primitiva è allora definita su tutto $\mathbb{R}$ e per determinarle ewsplitamente si tratta di applicare parola per parola quanto fatto in proposito nelle dispense.