Analisi I - IngBM - 2018-19
COMPITO A 2 Febbraio 2019

COGNOME .... NOME ....

MATRICOLA .... VALUTAZIONE ..... + ... = ...

1. Istruzioni

Gli esercizi devono essere svolti negli appositi spazi del presente fascicolo; **solo questo sarà ritirato e valutato.** *I fogli a quadretti messi a disposizione possono essere usati liberamente ma in nessun caso saranno ritirati. Il compito è composto di due parti. La prima parte deve essere svolta preliminarmente. Essa verrà corretta per prima e valutata con un punteggio di* $0 \leq x \leq 10$ *punti. Condizione necessaria affinché venga preso in considerazione l'eventuale svolgimento della seconda parte è che* $x \geq 6$. *In tal caso la seconda parte viene valutata con un punteggio di* $0 \leq y \leq 24$ *punti. Il compito sarà sufficiente per l'ammissione alla prova orale se* $x + y \geq 18$. *In tal caso il voto di ammissione all'orale sarà* $v = \min(28, x + y)$.

2. Prima parte

Esercizio 0. (0 punti) Leggere e capire le istruzioni.

Esercizio 1. (3 punti) Studiare il comportamento (convergente, divergente o irregolare) della successione:

$$\cos\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$$

Nel caso sia convergente calcolarne il limite

SOLUZIONE
La successione risulta

$\square$CONVERGENTE e il limite è $\square$DIVERGENTE $\square$IRREGOLARE

perché

Esercizio 2. (4 punti) Provare per induzione su n che

$$\sum_{k=0}^{n}(3k+1) = \frac{1}{2}(n+1)(3n+2)$$

SOLUZIONE.

Esercizio 3. (3 punti) Calcolare, precisando se si tratta di massimo o minimo, gli estremi superiore e inferiore dell'insieme

$$X = \{x \in \mathbf{R} | \exists t : x = \frac{1}{1+(\sin t)^2}\}.$$

SOLUZIONE.

3. Seconda parte

Esercizio 1. (8 punti)
Si consideri la funzione $F; \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita dalla formula

$$F(x) = \int_0^x e^{\cos t} dt$$

(1) Dimostrare che $x = 0$ è l'unico zero di F.
(2) Discutere la convessità di F nell'intervallo $(0, \frac{\pi}{2})$.
(3) Determinare i punti di flesso di f.
(4) Determinare gli eventuali asintoti di f.

SOLUZIONE.
Zeri di F

Convessità □si □no

Flessi

Asintoti

Esercizio 2. (5 punti)
Si consideri la funzione $f_{a,b} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da $f_{a,b} = a \sin x + b \cos x$ dove a e b sono numeri reali.
Determinare le coppie (a, b) per cui esiste $x_0 \in \mathbf{R}$ tale che $f_{a,b}(x_0) = 0$ e x_0 è un punto di minimo locale o un punto di massimo locale per $f_{a,b}$.
SOLUZIONE

Esercizio 3. (5 punti)
Per ogni numero naturale n, si consideri il polinomio $p_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$. Determinare, al variare di n, le radici complesse di $p_n(x)$ specificando quali di esse sono reali.

SOLUZIONE

Esercizio 4. (6 punti) Si determini, se esiste, la soluzione massimale dell'equazione differenziale

$$y' = \frac{1}{1+t+t^2}$$

tale che $y(0) = 1$.

SOLUZIONE