Algoritmo di Gauss

L'algoritmo di Gauss *rispetto alle righe* accetta come **input** una qualsiasi matrice

$A \in M(m, n, \mathbf{K})$,

esegue un numero finito di istruzioni (la cui implementazione dipende dalla matrice A) che producono una successione di modifiche

$A_0 = A \to A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_k := \hat{A}_R$

$A_j \in M(m, n, \mathbf{K})$

e termina quando A_k assume una certa forma speciale. $\hat{A}_R := A_k$ che sarà l' **output**. Se il fatto che stiamo lavorando con le righe è sottinteso, a volte scriveremo $\hat{A}$ invece che $\hat{A}_R$.

In altre parole l'algoritmo definisce in modo ricorsivo una funzione

$$G = G_R : M(m, n, \mathbf{K}) \to M(m, n, \mathbf{K})$$

$$G_R(A) = \widehat{A}_R.$$

Sarà una proprietà della costruzione che

$$G_R(\widehat{A}_R) = \widehat{A}_R.$$

Le modifiche successive si ottengono applicando di volta in volta, una dopo l'altra, un certo pacchetto di **operazioni elementari sulle righe**.

Ci sono tre tipi di operazione elementare:

Primo tipo: Si scambiano due righe: $R_j \leftrightarrow R_i$.

Secondo tipo: Si moltiplica una riga per uno scalare $\lambda \neq 0$: $R_j \to \lambda R_j$.

Terzo tipo: Si somma ad una riga un multiplo di un'altra riga: $R_j \to R_j + cR_i$.

Descriviamo ora l'algoritmo.

Intanto definiamo come si effettua il primo passo

$A = A_0 \to A_1$

Se $A = 0$, poniamo $\hat{A} = A_0 = A$, STOP.

Se $A \neq 0$, sia j il minimo indice tale che la colonna $A^j \neq 0$. Sia i il minimo indice tale che $\lambda := a_{i,j} \neq 0$. Eseguendo su A_0 l' operazione del primo tipo

$R_1 \leftrightarrow R_i$

otteniamo una matrice che ha le prime $j-1$ colonne nulle e il primo coefficiente λ della j-esima colonna diverso da 0. Eseguendo su questa matrice l'operazione del secondo tipo

$R_1 \to \lambda^{-1} R_1$

otteniamo una matrice con le stesse proprietà, in più il primo coefficiente della j-esima colonna è uguale a 1.

Infine eseguiamo sulla matrice così ottenuta le operazioni del terzo tipo

$R_s \to R_s - a_{s,j} R_1, s = 2, \ldots, m.$

Otteniamo A_1 con le stesse proprietà di prima, in più i coefficienti della j-esima colonna dopo il primo sono tutti uguali a 0.

Vediamo ora come effettuare $A_1 \to A_2$.

Sia A_1' la matrice $(m-1) \times n$ ottenuta eliminando la prima riga di A_1.

Se $A_1' = 0$, allora $\hat{A} = A_1$, STOP.

Se $A_1' \neq 0$, eseguiamo a partire da questa matrice lo stesso "programma" che ci ha dato $A_0 \to A_1$.

Le operazioni così effettuate si estendono operando a partire da tutta la matrice A_1, senza modificare la prima riga e le prime $j-1$ colonne nulle. In questo modo otteniamo

$A_1 \to A_2$.

Iteriamo, considerando A'_2 ottenuta eliminando le prime due righe di A_2 ecc.

Dopo al più m iterazioni, se non ci siamo già fermati prima, esauriamo le righe e poniamo $\hat{A} = \hat{A}_R$ la matrice così ottenuta.

Proprietà di $\widehat{A}_R$

La matrice $\widehat{A}_R \in M(m, n, \mathbf{K})$ è una **matrice a gradini (rispetto alle righe)**.

Questo vuol dire che:

(1) O $\widehat{A}_R$ è nulla, oppure ha un certo numero, diciamo $1 \leq r \leq m$, di prime righe non nulle $R_1, \ldots R_r$. Le righe R_s, $s > r$, sono nulle.

(2) Su ogni riga non nulla c' è un primo coefficiente non nullo e questo è uguale a 1. Esso è detto il **pivot** della riga.

(3) Per ogni $j = 1, \ldots, r-1$, se $a_{j,k} = 1$ è il pivot di R_j e $a_{j+1,k'} = 1$ è il pivot di R_{j+1}, allora $k' > k$.

È chiaro che se A è a gradini, allora $\widehat{A}_R = A$.

L'algoritmo di Gauss completo

Una volta ottenuta $\widehat{A}_R$, per mezzo di ulteriori operazioni del terzo tipo possiamo ottenere

$\widehat{A}_R \to \widetilde{A}_R$

dove $\widetilde{A}_R$ è ancora a gradini, ha i pivot nella stessa posizione dei pivot di $\widehat{A}_R$, in più ha la proprietà che gli altri coefficienti di ogni colonna che contenga un pivot sono tutti nulli.

$\widetilde{A}_R$ è il risultato dell' *algoritmo di Gauss completo* (sulle righe).

L'algoritmo di Gauss rispetto alle colonne

Data A, si ottiene $\widehat{A}_C$ nel modo seguente:

Posto $B = A^t$, $\widehat{A}_C := (\widehat{B}_R)^t$.

Analogamente per $\tilde{A}_C$.

Proprietà e applicazioni dell'algoritmo di Gauss

Per ogni matrice $A \in M(m, n, \mathbf{K})$, indichiamo con

span$\{R(A)\}$

il sottospazio di $M(1, n, \mathbf{K})$ generato dalle righe di A.

Analogamente

span$\{C(A)\}$

è il sottospazio di $M(m, 1, \mathbf{K})$ generato dalle colonne di A.

Vale

$$\text{span } \{R(A)\} = \text{span}\{R(\hat{A}_R)\} = \text{span}\{R(\tilde{A}_R)\},$$

$$\text{span}\{C(A)\} = \text{span}\{C(\hat{A}_C)\} = \text{span}\{C(\tilde{A}_C)\}$$

Basta verificare che eseguendo una operazione elementare sulle righe (risp. colonne) non si modifica lo spazio generato dalle righe (colonne). La verifica, tipo per tipo, è lasciata per esercizio.

Le righe (risp. colonne) non nulle di $\widehat{A}_R$ ($\widehat{A}_C$) sono linearmente indipendenti. La stessa cosa vale per le $\widetilde{A}_*$.

Segue facilmente dal fatto che le matrici $\widehat{A}_*$ sono a gradini.

Ne segue che

$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(\widehat{A}_C)$$

ed è uguale al numero di pivot di $\widehat{A}_C$.

Usando il fatto noto che rank$(A) = $ rank(A^t)

abbiamo che rank$(A) = $ rank$(\widehat{A}_R)$

quindi

$\widehat{A}_R$ e $\widehat{A}_C$ hanno lo stesso numero di pivot.

Soluzione dei sistemi lineari

Sia

$AX = D,\ A \in M(m, n, \mathbf{K}),\ D \in \mathbf{K}^m$

un sistema lineare (omogeneo se il termine noto $D = 0$, non-omogeneo altrimenti) con m equazioni e n incognite.

Se $D = 0$, allora l'insieme delle soluzioni è ker A che è non vuoto perché almeno $X = 0$ è una soluzione.

Se $D \neq 0$, la prima cosa da decidere è se esistono o no soluzioni ($D \in \text{Im}(A)$?).

La matrice “decorata”

$M = (A|D)$

(la barretta sta a significare che la colonna D ha un ruolo diverso) codifica il sistema ed è detta la **matrice completa del sistema**. A è la **matrice dei coefficienti**, D è il **termine noto**.

Sappiamo che $X = (x_1, \dots, x_n)^t$ è una soluzione se e solo se

$D = x_1 A^1 + \cdots + x_n A^n$,

quindi esiste una soluzione se e solo se

$D \in \text{span}\{C(A)\}$.

Infine, abbiamo il seguente

Criterio di Rouché-Capelli: *Il sistema*

$AX = D$ *ha soluzioni se e solo se*

$\text{rank}(M) = \text{rank}(A)$

Sappiamo calcolare in modo effettivo i ranghi, quindi possiamo decidere concretamente circa l'esistenza di soluzioni.

Assumendo che esistano soluzioni, il problema è ora quello di esplicitarle.

Applichiamo l' algoritmo di Gauss completo alla matrice $M = (A|D)$ ottenendo la matrice "decorata"

$\tilde{M}_R = (\tilde{A}_R|\tilde{D}_R)$

che codifica il sistema lineare $\tilde{A}_R X = \tilde{D}_R$.

Fatto: *I due sistemi sono* **equivalenti** *cioè hanno lo stesso insieme di soluzioni. In particolare,* $\ker A = \ker \tilde{A}_R$.

Dim. Basta dimostrare che se $M \to M'$ via una operazione elementare sulle righe, allora i sistemi $AX = D$, $A'X = D'$ hanno lo stesso insieme di soluzioni. La verifica, tipo per tipo, è quasi immediata e lasciata per esercizio.

$\blacksquare$

Resta da dimostrare che le soluzioni del sistema

$$\tilde{A}_R X = \tilde{D}_R$$

sono facilmente esplicitabili. Risaliamo le righe non nulle dal basso verso l'alto. La prima equazione che incontriamo è della forma

$$R_r X = d_r,\ R_r = (0, \ldots, 0, 1, a_{r,k(r)+1}, + \ldots, a_{r,n})$$

quindi possiamo esplicitare

$$x_{k(r)} = d_r - \sum_{j=k(r)+1}^{n} a_{r,j} x_j$$

Passando ora all'equazione precedente

$$R_{r-1} X = d_{r-1},$$

il termine $x_{k(r-1)}$ si esplicita in funzione del termine noto e di alcuni degli x_j che lo seguono (quelli il cui rispettivo coefficiente è non nullo). Tra questi non c'è $x_{k(r)}$ perché stiamo usando $\tilde{A}_C$. Iterando la risalita una equazione alla volta, infine tutti i termini $x_{k(s)}$, $s = 1, \ldots, r$, corrispondenti alla posizione dei pivot, sono esplicitati per mezzo dei rimanenti $n - r$ termini che funzionano da *parametri liberi.*

Se usiamo invece $\hat{A}_R$, per esempio il termine $x_{k(r-1)}$ si esplicita in funzione del termine noto e di alcuni degli x_j che lo seguono (quelli il cui rispettivo coefficiente è non nullo). Tra questi può esserci $x_{k(r)}$, che è già stato esplicitato precedentemente, per cui può essere sostituito dalla sua espressione per mezzo di termini che lo seguono, ecc. La conclusione è la stessa.

$\blacksquare$

Applichiamo l'argomento precedente al caso omogeneo $AX = 0$.

Vediamo allora che

$\dim \ker(A) = n - r$

dove r è il numero di pivot in $\tilde{A}_R$. Per la formula sulle dimensioni,

$n = \text{rank}(A) + \dim \ker(A)$

$n = \text{rank}(A) + n - r$

$\text{rank}(A) = r$.

Abbiamo quindi **riottenuto** per altra via che

$\text{rank}(A) = \text{rank}(A^t)$

$\blacksquare$

Matrici elementari

Una matrice $E \in M(m, \mathbf{K})$ si dice R-*elementare* (di un certo tipo) se è ottenuta da I_m via una operazione elementare sulle righe di quel tipo $I_m \to E$.

Vale il seguente fatto:

Date due matrici $A, B \in M(m, n, \mathbf{K})$,

$A \to B$ *mediante una operazione elementare sulle righe*

se e solo se

$B = EA$ *dove* E *è la matrice elementare* $m \times m$ *tale che* $I_m \to E$ *mediante la stessa operazione elementare.*

Dim. La verifica, tipo per tipo, è elementare e lasciata per esercizio.

$\blacksquare$

Ogni matrice R-elementare è invertibile e la sua inversa è elementare dello stesso tipo.

Dim. Idem.

$\blacksquare$

Algoritmo per la determinazione della matrice inversa

Sia $A \in M(m, \mathbf{K})$. Applicando l'algoritmo di Gauss

$A \to \widehat{A}_R$

A è invertibile se e solo se $\widehat{A}_R$ è triangolare superiore con tutti 1 lungo la diagonale.

Ammettendo che A sia inveribile, completiamo l'algoritmo di Gauss

$A \to \widehat{A}_R \to \widetilde{A}_R$.

È immediato che $\widetilde{A}_R = I_m$

Applicando la discussione fatta sulle matrici elementari sappiamo che

$$E_k E_{k-1} \dots E_1 A = I_n$$

dove ogni E_j è una matrice R-elementare corrispondente ad una operazione elementare (sulle righe) che interviene nell' implementazione dell' algoritmo.

Quindi

$$A^{-1} = E_k E_{k-1} \dots E_1$$

Tra l'altro, abbiamo come corollario che

Ogni matrice invertibile è prodotto di matrici R-elementari.

La discussione può essere ripetuta in modo analogo, lavorando sulle colonne invece che sulle righe.

La DS-equivalenza rivisitata

Sappiamo che se $A \in M(m, n, \mathbf{K})$ ha

rank$(A) = r$

allora esiste $(P, Q) \in GL(n, \mathbf{K}) \times GL(m, \mathbf{K})$ tali che

$$QAP = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vediamo che P e Q possono essere effettivamente determinate.

Infatti, ponendo $B = \tilde{A}_R$, si verifica che

$$\tilde{B}_C = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Applicando le considerazioni fatte sulle matrici elementari, risulta

$$(E_k \dots E_1)A(F_1 \dots F_h) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dove le E_j esprimono Q come prodotto di matrici R-elementari $m \times m$, le F_s esprimono P come prodotto di matrici C-elementari $n \times n$.

■

Sistemi lineari rivisitati

Dato un sistema linare $AX = D$, con matrice completa associata $M = (A|D)$, passare da M a $M' = (A'|D')$ mediante una operazione elementare sulle righe significa che esiste E R-elementare (quindi in particolare inveritibile) tale che $M' = (EA|ED')$.

Il sistema lineare associato è

$EAX = ED$

ed è chiaro che l'insieme delle soluzioni non varia. La soluzione dei sistemi lineari per mezzo dell'algorimo di Gauss, significa trovare Q invertibile tale che

$(QA|QD) = (\tilde{A}_R|\tilde{D}_R)$

e il sistema $\tilde{A}_R X = \tilde{D}_R$

è facile da risolvere.