La D-equivalenza e la S-equivalenza

$A, B \in M(m, n, \mathbf{K})$

$B \sim_D A$ se esiste $P \in GL(n, \mathbf{K})$ tale che

$B = AP$

$B \sim_S A$ se esiste $Q \in GL(m, \mathbf{K})$ tale che

$B = QA$.

Sono relazioni di equivalenza.

Se $B \sim_* A$ allora $B \sim_{DS} A$, quindi il rango è un invariante per la $*$-equivalenza.

Possiamo quindi distribuire lo studio di queste relazioni, rango per rango, cioè restringendole all' insieme $M_r(m, n, \mathbf{K})$ delle matrici di rango r, per ogni $0 \leq r \leq \min\{m, n\}$

Altri invarianti:

$\ker A$ *è un invariante per la* S*-equivalenza,*

$\mathrm{Im}(A)$ *è un invariante per la* D*-equivalenza.*

Per semplicità limitiamoci a studiare i casi di **rango massimo**. Ci sono due possibilità

$n \leq m$, quindi consideriamo le $A : \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^m$ **iniettive**

$n \geq m$, quindi consideriamo le $A : \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^m$ **surgettive**

Quando $n = m$ i due regimi coincidono.

Concentriamoci sulla D-equivalenza. I risultati che otteremo avranno un corrispondente per la S-equivalenza (dove la corrispondenza è sostanzialmente ottenuta usando la trasposta e scambiando i ruoli di Im e ker).

Per ogni matrice A, $A \sim_D \tilde{A}_C$.

Nel regime *surgettivo*, per ogni A, $\tilde{A}_C$ è la matrice a blocchi $(I_m|0_{n-m})$.

Quindi c'è un'unica classe di D-equivalenza, nella quale abbiamo individuato un rappresentante privilegiato.

In particolare, se A è quadrata invertibile,

$A \sim_D I_m$

Da ora in poi consideriamo il regime *iniettivo*, $n \leq m$

Indichiamo con $G_{m,n}$ l' insieme dei sottospazi vettoriali di $\mathbf{K}^m$ di dimensione uguale a n. Abbiamo allora l' applicazione

$$\psi : M_n(m, n, \mathbf{K}) \to G_{m,n}, \psi(A) = \mathrm{Im}(A)$$

Abbiamo già osservato che se $B \sim_D A$ allora $\psi(B) = \psi(A)$

Vale

Per ogni $A, B \in M_n(m, n, \mathbf{K})$, $n \leq m$,

$$B \sim_D A \Longleftrightarrow B \sim_\psi A$$

Poiché ψ è surgettiva, ne segue che il quoziente

$$M_n(m, n, \mathbf{K})/\sim_D \leftrightarrow G_{m,n}$$

Consideriamo l'applicazione

$$\phi : M_n(m, n, \mathbf{K}) \to M_n(m, n, \mathbf{K}), \ \phi(A) = \tilde{A}_C.$$

Per dimostrare che $\sim_D$ è equivalente a $\sim_\psi$, basta dimostrare che se $\psi(B) = \psi(A)$, allora $\phi(B) = \phi(A)$, cioè che Im(A) determina completamente $\tilde{A}_C$. Infatti, in tal caso

se $\psi(B) = \psi(A)$

allora

$B \sim_D \tilde{B}_C = \tilde{A}_C \sim_D A$, cioè $B \sim_D A$.

Poniamo $L = \mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(\tilde{A}_C)$; mostriamo intanto che L determina la posizione dei pivot in $\tilde{A}_C$.

Per ogni $A \in M_n(m, n, \mathbf{K})$, ogni colonna di $\tilde{A}_C$ contiene un pivot. Indichiamo con s_j l' indice di riga del pivot che sta sulla j-esima colonna. Quindi

$$s(A) := (1 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_n \leq m)$$

è, per definizione, il **simbolo di Schubert** di A.

Per ogni $j = 0, \ldots, m$, sia

$$p_j : \mathbf{K}^m \to \mathbf{K}^{m-j}$$

$$p_j(x_1, \ldots, x_m)^t = (x_1, \ldots, x_{m-j})^t$$

$$d_j := \dim(p_j(L))$$

Si verifica direttamente, usando la forma a gradini di $\tilde{A}_C$, che d_j decresce da n a 0 diminuendo di 1 esattamente passando da d_{s_i} a d_{s_i+1}, per i che decresce passando da n a 1. Quindi il simbolo è determinato da L come voluto.

Poniamo $s(L) := s(A) = s(\tilde{A}_C)$.

■

Dimostriamo infine che L determina completamente $\tilde{A}_C$.

Sia $s = s(L)$

$p_s : \mathbf{K}^m \to \mathbf{K}^n,\ p_s(X) = (x_{s_1}, \ldots, , x_{s_n})t$.

La restrizione

$p_s|L : L \to \mathbf{K}^n$

è un isomorfismo e le colonne di $\tilde{A}_C$ formano l' unica base di L che viene inviata da $p_s|L$ nella base canonica di $\mathbf{K}^n$. Quindi $\tilde{A}_C$ è completamente determinata da L.

■

Come corollario, abbiamo anche:

$$B \sim_D A \Longleftrightarrow \tilde{B}_C = \tilde{A}_C$$

Infatti, per quanto visto prima,

$$B \sim_D A \Rightarrow \mathrm{Im}(B) = \mathrm{Im}(A) \Rightarrow \tilde{B}_C = \tilde{A}_C$$

Quindi il quoziente $M_n(m, n, \mathbf{K})$ si identifica anche con l' immagine di ϕ, cioè con l'insieme $\mathcal{A}_n(m, n, \mathbf{K}) \subset M_n(m, n, \mathbf{K})$ di tutte le $\tilde{A}_C$, al variare di A.

$$\mathcal{A}_n(m, n, \mathbf{K}) \;\leftrightarrow G_{m,n}$$

$\blacksquare$

Al variare di A, abbiamo $\binom{m}{n}$ simboli di Schubert.

Per ogni simbolo s, indichiamo con $\mathcal{A}_s$ il sottoinsieme di $\mathcal{A}_n(m,n,\mathbf{K})$ formato dalle matrici con simbolo s.

Questi $\mathcal{A}_s$ formano una partizione di $\mathcal{A}_n(m,n,\mathbf{K})$. Questa partizione può essere trasportata su $G_{m,n}$.

$\mathcal{A}_s$ contiene una matrice che si distingue, cioè J_s che ha i coefficienti diversi dai pivot tutti uguali a zero.

Indichiamo con

$$\mathcal{B}_s = \{\tilde{A} - J_s; \tilde{A} \in \mathcal{A}_s\}$$

Ogni matrice di $\mathcal{B}_s$ ha uno 0 al posto di ogni pivot.

$\mathcal{B}_s$ è un sottospazio vettoriale di $M(m, n, \mathbf{K})$, formato dalle matrici che hanno certe entrate nulle. Contando i parametri liberi delle matrici di $\mathcal{B}_s$ colonna per colonna, calcoliamo la sua dimensione

$$\dim \mathcal{B}_s = \sum_{j=1}^{n}(m - s_j - (n - j))$$

Ogni $\mathcal{A}_s$ si ottiene "traslando" $\mathcal{B}_s$ per mezzo di J_s. Possiamo definire $\dim \mathcal{A}_s = \dim \mathcal{B}_s$. $\mathcal{A}_s$ è detta una **cella di Schubert** di $\mathcal{A}_n(m, n, \mathbf{K})$ (che si trasporta in una cella di $G_{m,n}$).

Esiste un' unica cella di dimensione massima corrispondente al simbolo

$$s_{\mathsf{max}} = (1, 2, 3, \ldots, n).$$

$$\dim \mathcal{B}_{s_{\mathsf{max}}} = n(m-n)$$

Esiste un' unica cella di dimensione minima uguale a zero, corrispondente al simbolo

$$s_{\mathsf{min}} = (m-n+1, \ldots, m-2, m-1, m)$$

La discussione precedente è stata fatta usando le coordinate canoniche di $\mathbf{K}^m$. Possiamo ripeterla usando un arbitrario sistema di coordinate $X' = QX$, $Q \in GL(m, \mathbf{K})$.

Sappiamo che per ogni $A \in M(m, n, \mathbf{K})$, esiste Q tale che $J_{s_{\mathsf{max}}} = QA$. Questo ci dice in particolare che ogni $\tilde{A} \in \mathcal{A}_n(m, n, \mathbf{K})$ è contenuta in una cella di Schubert di dimensione massima, relativa a qualche sistema di coordinate. La stessa conclusione si trasporta su $G_{m,n}$.