

**Lezioni sulla Teoria delle Connessioni
e sulla Geometria Riemanniana
(a.a. 2013/14)**

Mauro Nacinovich

Indice

Capitolo I. Gruppi e algebre di Lie	11
I.1. Nozioni fondamentali	11
I.2. Alcune osservazioni sull'applicazione esponenziale	15
I.3. Sottogruppi di Lie	16
I.4. La forma di Maurer-Cartan	17
I.5. Applicazioni a valori in un gruppo di Lie	20
I.6. Omomorfismi di gruppi ed algebre di Lie	21
I.7. Rappresentazioni lineari	22
I.8. Spazi omogenei	22
I.9. Gruppi di Lie di trasformazioni	25
Capitolo II. Strutture differenziali su alcuni gruppi e spazi omogenei	29
II.1. I quaternioni e la struttura differenziale di $SU(2)$, $SO(3)$, $SO(4)$	29
II.2. La trasformata di Cayley	32
II.3. I gruppi $SL_2(\mathbb{C})$, $Sp(1, \mathbb{C})$, $SO(3, \mathbb{C})$, $SL_2(\mathbb{R})$, $SO(1, 2)$	35
II.4. La quadrica di $\mathbb{C}P^5$ ed alcuni omomorfismi di gruppi	37
II.5. Varietà di Stiefel reali	42
II.6. Varietà di Grassmann	47
II.7. Varietà di Stiefel e di Grassmann complesse	49
II.8. Matrici di rango assegnato	51
II.9. Varietà dei sottospazi Lagrangiani reali	52
II.10. Varietà dei sottospazi Lagrangiani complessi	53
II.11. Varietà di sottospazi proiettivi di una quadrica proiettiva reale	54
II.12. Varietà di sottospazi proiettivi di una quadrica proiettiva complessa	55
II.13. Decomposizione di Cartan	56
Capitolo III. Fibrati principali	61
III.1. Prime definizioni	61
III.2. L'esempio degli spazi omogenei	63
III.3. Morfismi di fibrati principali	64
III.4. Classificazione dei fibrati principali	66
III.5. Il fibrato dei sistemi di riferimento	68
III.6. Jacobiano di un'applicazione differenziabile	69
III.7. Riduzione del gruppo strutturale e \mathbf{G} -strutture	70
III.8. \mathbf{G} -strutture su una varietà differenziabile	72
III.9. Fibrati vettoriali associati a rappresentazioni lineari	72

Capitolo IV. Connessioni principali	77
IV.1. La distribuzione verticale	77
IV.2. Il concetto di connessione principale	79
IV.3. Pullback di una connessione principale	81
IV.4. Il fibrato delle connessioni principali	82
IV.5. Automorfismi di una connessione principale	83
IV.6. Forme di Christoffel ed equazioni di gauge	84
IV.7. Sollevamento orizzontale di campi di vettori	87
IV.8. Sollevamento orizzontale di cammini e trasporto parallelo	87
IV.9. Il gruppo di olonomia	89
Capitolo V. Differenziazione covariante e curvatura	93
V.1. Differenziale di forme tensoriali e pseudotensoriali	93
V.2. Differenziazione covariante di sezioni di fibrati vettoriali	94
V.3. Espressione locale del differenziale covariante	95
V.4. Forma di curvatura ed equazioni di struttura	97
V.5. Connessioni piatte	98
V.6. La famiglia delle connessioni principali	99
V.7. Fibrato degli endomorfismi e rappresentazione aggiunta	99
V.8. Curvatura	100
V.9. Trasporto parallelo di vettori	101
V.10. Differenziazione covariante secondo Koszul	103
V.11. Il Teorema di Ambrose-Singer	104
V.12. L'olonomia infinitesima	105
V.13. Connessioni invarianti canoniche su spazi omogenei	106
V.14. Connessioni invarianti	108
Capitolo VI. Varietà differenziabili affini e Riemanniane	115
VI.1. Connessioni lineari	115
VI.2. Forme di torsione e di curvatura	117
VI.3. Derivazione covariante, torsione e curvatura	118
VI.4. Interpretazione geometrica della torsione e della curvatura	122
VI.5. Esistenza di connessioni simmetriche	123
VI.6. Derivata covariante lungo una curva e parallelismo	125
VI.7. Geodetiche	127
VI.8. Metriche (pseudo-)Riemanniane e connessione di Levi-Civita	129
VI.9. Esempi	131
VI.10. Estensione della metrica ai fibrati tensoriali	134
VI.11. Tensore di curvatura di una varietà pseudo-Riemanniana	135
VI.12. Connessioni principali su varietà dotate di una connessione lineare	136
Capitolo VII. Connessioni lineari invarianti	139
VII.1. Rappresentazione lineare d'isotropia	139
VII.2. Connessioni lineari canoniche su spazi omogenei riduttivi	141
VII.3. Connessioni lineari invarianti	144
VII.4. Connessioni lineari invarianti su spazi riduttivi	147

VII.5. Spazi affini simmetrici	152
Capitolo VIII. Applicazione esponenziale e campi di Jacobi	161
VIII.1. L'applicazione esponenziale	161
VIII.2. Intorni normali ed intorni convessi	162
VIII.3. Definizione dei campi di Jacobi	164
VIII.4. Campi di Jacobi su una varietà Riemanniana	167
VIII.5. Punti coniugati	170
Capitolo IX. Proprietà metriche delle varietà Riemanniane	173
IX.1. Geodetiche e distanza Riemanniana	173
IX.2. Il funzionale dell'energia	175
IX.3. Varietà di Riemann compatte	176
IX.4. Il teorema di Hopf-Rinow	176
IX.5. Varietà Riemanniane con curvatura sezionale negativa	180
IX.6. Un teorema di Bochner	186
Capitolo X. Gruppi di trasformazioni	189
X.1. Il gruppo delle isometrie di uno spazio metrico	189
X.2. Un teorema di Bochner-Montgomery	192
X.3. Alcuni risultati sui gruppi di trasformazioni	196
X.4. Parallelismo assoluto	199
Capitolo XI. Trasformazioni e decomposizione di de Rham	203
XI.1. Applicazioni affini	203
XI.2. Sottovarietà affini	204
XI.3. Varietà totalmente geodetiche	205
XI.4. Trasformazioni affini	206
XI.5. Affinità infinitesime	208
XI.6. Isometrie di una varietà Riemanniana	210
XI.7. Campi di Killing	213
XI.8. Riducibilità	214
XI.9. Decomponibilità e teorema di de Rham	216
Capitolo XII. Immersioni, isometrie, campi di Killing	219
XII.1. Immersioni pseudo-Riemanniane	219
XII.2. Proprietà algebriche del tensore di curvatura	225
XII.3. La curvatura sezionale	228
Capitolo XIII. Operatori differenziali sulle varietà Riemanniane	231
XIII.1. Elemento di volume ed operatore di Hodge	231
XIII.2. Codifferenziale, operatore di Laplace-Beltrami, divergenza	232
XIII.3. Co-differenziazione covariante di forme differenziali	236
XIII.4. Divergenza di tensori simmetrici	238
XIII.5. L'operatore di Laplace-Beltrami	241
XIII.6. Il Laplaciano naturale	244
XIII.7. Il Laplaciano di Lichnerowicz	245

XIII.8. Laplaciano sulle forme differenziali alternate	247
Capitolo XIV. Metriche invarianti	251
XIV.1. Metriche pseudo-Riemanniane su spazi omogenei	251
XIV.2. La connessione di Levi-Civita sugli spazi omogenei	252
Capitolo XV. Metriche di Einstein	255
XV.1. Proprietà del tensore di curvatura	255
XV.2. Curvatura sezionale	256
XV.3. Il tensore di Ricci	257
XV.4. Un Teorema di Myers	259
XV.5. Curvatura scalare	260
XV.6. Metriche di Einstein	261
Capitolo XVI. Spazi simmetrici	263
XVI.1. Spazi affini localmente simmetrici	263
XVI.2. Alcuni risultati sui gruppi di trasformazioni	266
XVI.3. Automorfismi affini e isometrie	270
XVI.4. Spazi Riemanniani globalmente simmetrici	276
XVI.5. Coppie simmetriche e simmetriche Riemanniane	279
Capitolo XVII. Algebre di Clifford e Spinori	285
XVII.1. Algebre di Clifford	285
XVII.2. Involuzioni dell'algebra di Clifford	287
XVII.3. I gruppi spinoriali	288
Appendice: Varietà, forme differenziali	295
Capitolo XVIII. Varietà topologiche e varietà differenziabili	297
XVIII.1. Paracompattezza e partizione dell'unità	297
XVIII.2. Varietà topologiche	298
XVIII.3. Alcuni esempi	299
XVIII.4. Varietà topologiche con bordo	301
XVIII.5. Definizione di varietà differenziabile	302
XVIII.6. Applicazioni differenziabili	303
XVIII.7. Funzioni reali differenziabili e partizione dell'unità	304
XVIII.8. Immersioni, sommersioni, diffeomorfismi	309
XVIII.9. Prodotto cartesiano di varietà differenziabili	310
XVIII.10. Sottovarietà differenziabili	311
XVIII.11. Diffeomorfismi	314
XVIII.12. Esistenza e unicità di strutture differenziali	315
Capitolo XIX. Campi di vettori e spazio tangente	317
XIX.1. Campi di vettori e curve integrali sulle varietà	317
XIX.2. Vettori tangenti e fibrato tangente	319
XIX.3. Differenziale di un'applicazione differenziabile	321
XIX.4. Alcune osservazioni sul teorema d'immersione di Whitney	321

XIX.5.	Gruppi a un parametro di diffeomorfismi	322
XIX.6.	Inclusioni isotope	324
XIX.7.	Campi completi	325
XIX.8.	Isotopie dello spazio ambiente	327
XIX.9.	k -celle differenziabili	329
Capitolo XX.	Fibrati vettoriali	331
XX.1.	Fibrati differenziabili	331
XX.2.	Fibrati vettoriali differenziabili	334
XX.3.	Morfismi e operazioni di fibrati vettoriali	335
XX.4.	Fibrati vettoriali e fibrato tangente	337
XX.5.	Norme differenziabili e strutture Euclidee	339
XX.6.	Classi di isomorfismo di fibrati vettoriali	339
XX.7.	Fibrati vettoriali sulle sfere	341
Capitolo XXI.	Forme differenziali negli spazi Euclidei	343
XXI.1.	Forme differenziali in \mathbb{R}^n	343
XXI.2.	Pull-back	344
XXI.3.	Differenziale di una forma	344
XXI.4.	Il complesso di de Rham	345
XXI.5.	Coomologia di de Rham a supporti compatti	348
XXI.6.	Il grado di un'applicazione propria di \mathbb{R}^n in sé	351
XXI.7.	Orientazione e sottovarietà di \mathbb{R}^n .	354
XXI.8.	Integrazione sulle sottovarietà e formule di Stokes	355
Capitolo XXII.	Calcolo differenziale sulle varietà	361
XXII.1.	Fibrato cotangente e tensori	361
XXII.2.	Forme differenziali su una varietà	362
XXII.3.	Il lemma di Poincaré-Volterra sugli intorni contrattili	364
XXII.4.	Derivata di Lie di un tensore	364
XXII.5.	Distribuzioni vettoriali e teorema di Frobenius	367
Capitolo XXIII.	La coomologia di de Rham sulle varietà	371
XXIII.1.	Definizioni principali	371
XXIII.2.	Invarianza omotopica	372
XXIII.3.	Complessi differenziali	373
XXIII.4.	Le successioni di Mayer-Vietoris	377
XXIII.5.	La dualità di Poincaré	382
XXIII.6.	Grado di un'applicazione	384
XXIII.7.	La formula di Künnet	385
XXIII.8.	Duale di Poincaré in una sottovarietà orientata	387
XXIII.9.	La proprietà semi-locale	389
Appendice: Complementi di topologia generale		395
Capitolo XXIV.	Fibrati di Steenrod topologici	397
XXIV.1.	Azione di gruppo	397

XXIV.2.	Azioni continue	400
XXIV.3.	Fibrati di Steenrod e fibrati principali	401
XXIV.4.	Un Lemma di trivializzazione	403
XXIV.5.	Richiami sui CW -complessi	404
XXIV.6.	Invarianza omotopica dei fibrati di Steenrod a base CW	405
XXIV.7.	Fibrati universali	406
XXIV.8.	Fibrati di Milnor	409
Appendice: Gruppi classici		415
Capitolo XXV. Gruppi lineari e loro algebre di Lie		417
XXV.1.	Algebre di Lie	417
XXV.2.	Jacobiano dell'applicazione esponenziale	421
XXV.3.	Algebra di Lie di un gruppo lineare	425
XXV.4.	Algebre di Lie dei gruppi lineari e dei gruppi lineari speciali	428
XXV.5.	Endomorfismi semisemplici e decomposizione di Wedderburn	428
XXV.6.	Matrici triangolari	430
XXV.7.	Sottogruppi di Lie del gruppo lineare	432
Capitolo XXVI. Gruppi lineari compatti		437
XXVI.1.	Proprietà topologiche di $\mathbf{U}(n)$	437
XXVI.2.	Il gruppo speciale unitario	439
XXVI.3.	I gruppi $\mathbf{O}(n)$ ed $\mathbf{SO}(n)$	440
XXVI.4.	L'omomorfismo canonico $\mathbf{SU}(2) \rightarrow \mathbf{SO}(3)$	442
XXVI.5.	Il gruppo unitario simplettico $\mathbf{Sp}(n)$	445
XXVI.6.	Sfere e gruppi compatti	447
XXVI.7.	Rivestimenti e gruppo degli spinori	449
Capitolo XXVII. La lista di Cartan dei gruppi classici		451
XXVII.1.	Decomposizione di Cartan dei gruppi classici	451
XXVII.2.	Alcuni gruppi di matrici e le loro algebre di Lie	452
XXVII.3.	I gruppi $\mathbf{U}(p, q)$ e $\mathbf{SU}(p, q)$	454
XXVII.4.	I gruppi $\mathbf{Sp}(n, \mathbb{C})$ e $\mathbf{SU}^*(2n)$	455
XXVII.5.	I gruppi $\mathbf{SO}(n, \mathbb{C})$ e $\mathbf{SO}^*(2n)$	457
XXVII.6.	I gruppi $\mathbf{Sp}(p, q; \mathbb{C})$	458
XXVII.7.	I gruppi $\mathbf{SO}(p, q)$	458
Capitolo XXVIII. Algebre di Lie		461
XXVIII.1.	Nozioni fondamentali	461
XXVIII.2.	Algebre di Lie lineari, derivazioni, rappresentazione aggiunta	462
XXVIII.3.	Rappresentazioni lineari	465
XXVIII.4.	Forme invarianti	467
XXVIII.5.	Automorfismi	469
XXVIII.6.	Algebre di Lie risolubili	470
XXVIII.7.	Algebre di Lie semisemplici	470
XXVIII.8.	Algebre di Lie nilpotenti	471

XXVIII.9. Il teorema di Engel	471
XXVIII.10. Il Teorema di Lie	473
XXVIII.11. Il più grande ideale di nilpotenza di una rappresentazione	476
XXVIII.12. Il radicale nilpotente e il nilradicale	477
XXVIII.13. Automorfismi speciali	479
Appendice: Complementi sulle connessioni	481
Capitolo XXIX. Espressioni in coordinate	483
XXIX.1. Espressione in coordinate delle equazioni di struttura	483
XXIX.2. Espressioni locali	485
XXIX.3. Forme e simboli di Christoffel	488

Gruppi e algebre di Lie

I.1. Nozioni fondamentali

DEFINIZIONE I.1.1. Un'algebra di Lie¹ \mathfrak{g} su un campo \mathbb{k} è uno spazio vettoriale su \mathbb{k} su cui è assegnato un prodotto bilineare $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \ni (X, Y) \rightarrow [X, Y] \in \mathfrak{g}$ tale che

- (1) $[X, X] = 0, \forall X \in \mathfrak{g},$ (antisimmetria),
 (2) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0, \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ (identità di Jacobi).

DEFINIZIONE I.1.2. Un *gruppo di Lie* è un gruppo \mathbf{G} su cui è fissata una struttura di varietà differenziabile per cui l'operazione di gruppo $\mathbf{G} \times \mathbf{G} \ni (a, b) \rightarrow ab^{-1} \in \mathbf{G}$ sia differenziabile.

Poiché \mathbf{G} è localmente connesso, la componente connessa dell'identità \mathbf{G}^0 di \mathbf{G} è connessa per archi ed è un sottogruppo normale aperto e chiuso in \mathbf{G} .

\mathbf{G}^0 è numerabile all'infinito e quindi condizione necessaria e sufficiente affinché lo sia anche \mathbf{G} è che il quoziente \mathbf{G}/\mathbf{G}^0 sia al più numerabile.

Per ogni elemento a di \mathbf{G} , le

$$\begin{aligned} \text{le traslazioni a sinistra :} & \quad L_a : \mathbf{G} \ni g \rightarrow ag \in \mathbf{G}, \\ \text{le traslazioni a destra :} & \quad R_a : \mathbf{G} \ni g \rightarrow ga \in \mathbf{G}, \\ \text{gli automorfismi interni :} & \quad \text{ad}(a) : \mathbf{G} \ni g \rightarrow aga^{-1} \in \mathbf{G}, \end{aligned}$$

sono diffeomorfismi di \mathbf{G} in sé.

A volte scriveremo per semplicità

$$aX \text{ per } L_{a*}(X) \text{ ed } Xa \text{ per } R_{a*}(X), \text{ se } a \in \mathbf{G}, X \in \mathfrak{X}(\mathbf{G}).$$

DEFINIZIONE I.1.3. Un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(\mathbf{G})$ si dice *invariante a sinistra* se $aX = L_{a*}(X) = X$, per ogni $a \in \mathbf{G}$.

PROPOSIZIONE I.1.4. *I campi di vettori invarianti a sinistra formano una sottoalgebra di Lie reale $\mathfrak{L}(\mathbf{G})$ di $\mathfrak{X}(\mathbf{G})$. L'applicazione*

$$(1.1.1) \quad T_e \mathbf{G} \ni X_e \rightarrow \{X_a = L_{a*}(X_e) \mid a \in \mathbf{G}\} \in \mathfrak{L}(\mathbf{G})$$

è un isomorfismo lineare. □

DEFINIZIONE I.1.5. Indichiamo con \mathfrak{g} , e chiamiamo *algebra di Lie* di \mathbf{G} , lo spazio vettoriale $T_e \mathbf{G}$, con la struttura di algebra di Lie reale che rende (1.1.1) un isomorfismo di algebre di Lie.

¹Vedi il Capitolo XXVIII.

NOTAZIONE I.1.6. Denoteremo con $X^* \in \mathfrak{L}(\mathbf{G})$ il campo di vettori invariante a sinistra corrispondente all'elemento X di \mathfrak{g} .

PROPOSIZIONE I.1.7. *Il campo $X^* \in \mathfrak{L}(\mathbf{G})$ genera un gruppo a un parametro $\phi_X(t)$ di diffeomorfismi di \mathbf{G} .*

DIMOSTRAZIONE. Sia $X \in \mathfrak{g}$. Se $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbf{G})$ è una curva integrale di X^* , abbiamo $\dot{\gamma} = \gamma \cdot X$. Il flusso $\phi_X(a, t)$ di X^* soddisfa quindi la

$$\phi_X(a, t) = ab^{-1}\phi_X(b, t) \quad \forall a, b \in \mathbf{G},$$

ed, a priori, per $|t|$ sufficientemente piccolo. Questa formula ci permette di estendere la definizione di $\phi_X(a, t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Se infatti $\phi_X(e, t)$ è definita per $|t| < \epsilon$, dalla

$$\phi_X(a, t + s) = \phi_X(\phi_X(a, t), s) = \phi_X(a, t)\phi_X(e, s)$$

ricaviamo che la $\phi_X(a, t)$ definita su un intervallo $(t_1, t_2) \subset \mathbb{R}$, si può estendere all'intervallo $(t_1 - \epsilon, t_2 + \epsilon)$ ponendo

$$\phi_X(a, t) = \phi_X(a, t')\phi_X(e, t''), \quad \text{se } t' \in (t_1, t_2), \quad |t''| < \epsilon, \quad t = t' + t''. \quad \square$$

DEFINIZIONE I.1.8. L'applicazione

$$(1.1.2) \quad \mathfrak{g} \ni X \longrightarrow \exp(X) = \phi_X(e, 1) \in \mathbf{G}$$

si dice l'*applicazione esponenziale* di \mathbf{G} .

Poiché

$$(1.1.3) \quad \exp((t_1 + t_2)X) = \exp(t_1X)\exp(t_2X) \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R},$$

l'insieme $\{\exp(tX) \mid t \in \mathbb{R}\}$ è un sottogruppo abeliano di \mathbf{G} .

DEFINIZIONE I.1.9. $\{\exp(tX) \mid t \in \mathbb{R}\}$ si dice il *sottogruppo a un parametro* di \mathbf{G} generato da $X \in \mathfrak{g}$.

PROPOSIZIONE I.1.10. *Il gruppo a un parametro di diffeomorfismi di \mathbf{G} generato dal campo di vettori invariante a sinistra $X^* \in \mathfrak{g}$ associato ad $X \in \mathfrak{g}$ è descritto dalla*

$$(1.1.4) \quad \mathbf{G} \times \mathbb{R} \ni (a, t) \longrightarrow \phi_X(a, t) = a \cdot \exp(tX) \in \mathbf{G}. \quad \square$$

PROPOSIZIONE I.1.11 (coordinate di prima specie). *L'applicazione esponenziale definisce un diffeomorfismo di un intorno aperto di 0 in \mathfrak{g} su un intorno aperto di e in \mathbf{G} .*

DIMOSTRAZIONE. Infatti, il differenziale in 0 dell'applicazione esponenziale è l'identità e quindi la tesi è conseguenza del teorema dell'applicazione inversa. \square

ESEMPIO I.1.12. Il gruppo delle matrici reali $n \times n$ invertibili $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ è un gruppo di Lie, di dimensione n^2 . La sua algebra di Lie $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ è l'algebra di Lie di tutte le matrici reali $n \times n$ e l'esponenziale coincide con quello definito per le matrici:

$$(1.1.5) \quad \exp(X) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} X^h.$$

Il suo sottogruppo $\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$ delle matrici con determinante 1 è anch'esso un gruppo di Lie. Ha dimensione $(n^2 - 1)$ e la sua algebra di Lie $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ è formata dalle matrici reali con traccia nulla.

ESEMPIO I.1.13. Il gruppo delle matrici complesse $n \times n$ invertibili $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ è un gruppo di Lie di dimensione $2n^2$. La sua algebra di Lie $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ consiste di tutte le matrici complesse $n \times n$. L'esponenziale anche in questo caso coincide con l'esponenziale di matrici.

Il suo sottogruppo normale

$$(1.1.6) \quad \mathbf{SL}_n(\mathbb{C}) = \{a \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}) \mid \det a = 1\}$$

è un gruppo di Lie di dimensione $2n^2 - 1$, con algebra di Lie

$$(1.1.7) \quad \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \mid \operatorname{tr}(A) = 0\}.$$

ESEMPIO I.1.14. Il gruppo ortogonale

$$(1.1.8) \quad \mathbf{O}(n) = \{a \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t a = a^{-1}\}$$

è un gruppo di Lie compatto di dimensione $\frac{n(n-1)}{2}$. La sua algebra di Lie

$$(1.1.9) \quad \mathfrak{o}(n) = \{A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \mid A + {}^t A = 0\}$$

consiste delle matrici reali antisimmetriche.

Il suo sottogruppo normale

$$(1.1.10) \quad \mathbf{SO}(n) = \{a \in \mathbf{O}(n) \mid \det a = 1\}$$

ha indice due in $\mathbf{O}(n)$ ed $\mathbf{O}(n)$ ed $\mathbf{SO}(n)$ hanno la stessa algebra di Lie $\mathfrak{o}(n)$.

Se $n \geq 3$, il gruppo fondamentale di $\mathbf{SO}(n)$ è isomorfo a \mathbb{Z}_2 . Il suo rivestimento fondamentale, a due fogli, è un gruppo di Lie compatto, che si indica con $\mathbf{Spin}(n)$ e si dice *gruppo di spin*.

ESEMPIO I.1.15. Il *gruppo unitario* è il gruppo

$$(1.1.11) \quad \mathbf{U}(n) = \{a \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}) \mid a^* = a^{-1}\}$$

è un gruppo di Lie compatto di dimensione n^2 , con algebra di Lie

$$(1.1.12) \quad \mathfrak{u}(n) = \{A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \mid A + A^* = 0\}.$$

Il *gruppo speciale unitario*

$$(1.1.13) \quad \mathbf{SU}(n) = \{a \in \mathbf{U}(n) \mid \det a = 1\}$$

è un suo sottogruppo di Lie normale, di dimensione $n^2 - 1$, con algebra di Lie

$$(1.1.14) \quad \mathfrak{su}(n) = \{A \in \mathfrak{u}(n) \mid \operatorname{tr} A = 0\}.$$

Abbiamo un isomorfismo di gruppi di Lie $\mathbf{SU}(2) \simeq \mathbf{Spin}(3)$.

ESEMPIO I.1.16. Indichiamo con J_n la matrice $(2n) \times (2n)$

$$(1.1.15) \quad J_n = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Il gruppo

$$(1.1.16) \quad \mathbf{Sp}(n) = \{a \in \mathbf{U}(2n) \mid J_n a = J_n \bar{a}\}$$

si dice il *gruppo simplettico compatto*, o *simplettico unitario*, o *simplettico ortogonale*. Ha dimensione $n(2n + 1)$ ed algebra di Lie

$$(1.1.17) \quad \mathfrak{sp}(n) = \{A \in \mathfrak{u}(2n) \mid AJ_n + J_n \bar{A} = 0\}.$$

I.1.1. La rappresentazione aggiunta.

PROPOSIZIONE I.1.17. *Per ogni $a \in \mathbf{G}$, il differenziale nell'identità $\text{Ad}(a)$ dell'automorfismo $\text{ad}(a)$ di \mathbf{G} definisce un automorfismo dell'algebra di Lie \mathfrak{g} .*

DIMOSTRAZIONE. Siano $X \in \mathfrak{g}$ ed $a \in \mathbf{G}$. Abbiamo, con le notazioni introdotte in precedenza per i differenziali delle traslazioni a destra ed a sinistra,

$$[\text{ad}_a]_*(X_x^*) = aX^*a^{-1} = axXa^{-1} = axa^{-1}(aXa^{-1}) = [\text{ad}(a)(X)]_{\text{ad}(a)(x)}^*.$$

Questo dimostra che i campi X^* ed $(\text{Ad}(a)(X))^*$ sono $\text{ad}(a)$ -correlati e perciò

$$[(\text{ad}(a))_*X^*, (\text{ad}(a))_*Y^*] = (\text{ad}(a))_*([X^*, Y^*]), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Qundi il diffeomorfismo $\text{ad}(a)$ definisce un automorfismo dell'algebra di Lie $\mathfrak{L}(\mathbf{G})$. La tesi segue perché, per definizione, $[X^*, Y^*] = [X, Y]^*$. \square

Indichiamo con $\text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ il gruppo

$$(1.1.18) \quad \text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}) = \{\lambda \in \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}) \mid [\lambda(X), \lambda(Y)] = \lambda([X, Y]), \forall X, Y \in \mathfrak{g}\}.$$

degli automorfismi dell'algebra di Lie reale \mathfrak{g} .

Si verifica immediatamente che

PROPOSIZIONE I.1.18. *L'applicazione $\mathbf{G} \ni a \rightarrow \text{Ad}(a) \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$ è un omomorfismo di gruppi.* \square

DEFINIZIONE I.1.19. L'omomorfismo $\mathbf{G} \ni a \rightarrow \text{Ad}(a) \in \text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ si dice la *rappresentazione aggiunta di \mathbf{G}* .

I.1.2. Campi di vettori invarianti a destra. Sia \mathbf{G} un gruppo di Lie.

DEFINIZIONE I.1.20. Un campo di vettori $X_* \in \mathfrak{X}(\mathbf{G})$ è *invariante a destra* se $dR_a(X_*) = X_*$ per ogni $a \in \mathbf{G}$.

Ad ogni elemento X dell'algebra di Lie \mathfrak{g} di \mathbf{G} associamo l'unico campo di vettori invariante a destra X_* che assume il valore X in e : $X_{*x} = dR_x(X) = Xx$. In questo modo abbiamo definito una corrispondenza lineare biunivoca

$$(1.1.19) \quad \mathfrak{g} \ni X \longrightarrow X_* = \{x \rightarrow dR_x(X)\} \in \mathfrak{R}(\mathbf{G})$$

di \mathfrak{g} con lo spazio $\mathfrak{R}(\mathbf{G})$ dei campi di vettori invarianti a destra su \mathbf{G} . Abbiamo

PROPOSIZIONE I.1.21. *$\mathfrak{R}(\mathbf{G})$ è una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{X}(\mathbf{G})$ e l'applicazione (1.1.19) è un antiisomorfismo di algebre di Lie.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché le traslazioni a destra sono diffeomorfismi di \mathbf{G} , è

$$[R_a(\underline{X}), R_a(\underline{Y})] = R_a([\underline{X}, \underline{Y}]), \text{ per ogni } a \in \mathbf{G} \text{ ed } \underline{X}, \underline{Y} \in \mathfrak{X}(\mathbf{G}).$$

Da questo segue immediatamente che $\mathfrak{R}(\mathbf{G})$ è una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{X}(\mathbf{G})$.

L'involuzione $J : \mathbf{G} \ni x \rightarrow x^{-1} \in \mathbf{G}$ di \mathbf{G} è un diffeomorfismo che trasforma campi di vettori invarianti a sinistra in campi di vettori invarianti a destra, con $dJ :$

$\mathfrak{L}(\mathbf{G}) \ni X^* \longrightarrow -X_* \in \mathfrak{R}(\mathbf{G})$, se X^* ed X_* sono i campi di vettori, rispettivamente invariante a sinistra e a destra, associati allo stesso elemento $X \in \mathfrak{g}$. In particolare, abbiamo

$$[X_*, Y_*] = -[X, Y]_*, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

□

I.2. Alcune osservazioni sull'applicazione esponenziale

Sia \mathbf{G} un gruppo di Lie con algebra di Lie \mathfrak{g} . L'immagine dell'applicazione esponenziale $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbf{G}$ non è in generale surgettiva sulla sua componente connessa dell'identità \mathbf{G}^0 .

ESEMPIO I.2.1. *L'immagine di $\exp : \mathfrak{gl}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$ non è surgettiva sulla sua componente connessa dell'identità $\mathbf{G}^0 = \{x \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{R}) \mid \det x > 0\}$.*

Sia $x \in \mathbf{G}^0$. Consideriamo dapprima il caso in cui x sia diagonalizzabile. A meno di coniugio possiamo supporre che $x = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ con $\lambda_1 \lambda_2 > 0$. Se $X \in \mathfrak{gl}_2(\mathbb{R})$ è

$$(1.2.1) \quad \exp(X) = k_1 X + k_2 I_2, \quad \text{con } k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

In particolare, se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, allora $k_1 \neq 0$ e la matrice X è quindi diagonale. Poiché gli autovalori dell'esponenziale di una matrice X diagonalizzabile sono gli esponenziali degli autovalori di X , ne segue che $x \in \exp(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{R}))$ se e soltanto se $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Analogamente, se x ha un autovalore reale con molteplicità algebrica due e molteplicità geometrica uno, possiamo supporre a meno di coniugio che x abbia la forma

$$x = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Allora per la (1.2.1) anche X deve essere una matrice triangolare superiore e quindi x appartiene all'immagine dell'esponenziale se e soltanto se $\lambda > 0$.

Resta da considerare il caso in cui x abbia due autovalori complessi coniugati $\lambda, \bar{\lambda}$, oppure sia diagonalizzabile con un autovalore λ reale e negativo con molteplicità due. Se scriviamo $\lambda = \rho e^{i\theta}$, con $\rho > 0$ e $\theta \in \mathbb{R}$, allora la x è coniugata ad una matrice della forma

$$x = \begin{pmatrix} \rho \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \rho \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix} = \exp \left[\log \rho \begin{pmatrix} & -\theta \\ \theta & \end{pmatrix} \right].$$

In conclusione: $\exp(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{R}))$ è l'insieme delle matrici reali 2×2 con determinante positivo che non hanno un autovalore reale negativo con molteplicità geometrica uno.

Osserviamo che da questo segue che, in generale, l'immagine dell'applicazione esponenziale può non essere né aperta né chiusa.

Ci sono due classi importanti di gruppi di Lie per cui l'esponenziale è surgettivo. Abbiamo:

TEOREMA I.2.2. *Se \mathbf{G} è un gruppo di Lie connesso e compatto, con algebra di Lie \mathfrak{g} , allora $\exp(\mathfrak{g}) = \mathbf{G}$.*

DEFINIZIONE I.2.3. Chiamiamo *unipotente* un sottogruppo di Lie \mathbf{G} del gruppo lineare $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ i cui elementi siano tutti unipotenti. Gli elementi x di \mathbf{C} hanno cioè tutti polinomio caratteristico $(\lambda - 1)^n$.

TEOREMA I.2.4. Se \mathbf{G} è unipotente, allora $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbf{G}$ è un diffeomorfismo.

OSSERVAZIONE I.2.5. I gruppi unipotenti sono particolari gruppi *nilpotenti*. Ricordiamo che un gruppo \mathbf{G} si dice nilpotente se, per ogni $a \in \mathbf{G}$ l'applicazione di commutazione l'applicazione $c_a : \mathbf{G} \ni x \rightarrow [a, x] = axa^{-1}x^{-1}$ ha un'iterata banale. Se esiste cioè un intero k tale che $c_a^k(x) = e$ per ogni $a, x \in \mathbf{G}$. Si verifica che questa condizione equivale al fatto che \mathbf{G} ammetta una serie di composizione

$$1 = \mathbf{G}_0 < \mathbf{G}_1 < \dots < \mathbf{G}_n = \mathbf{G}, \quad \text{con} \quad [\mathbf{G}, \mathbf{G}_k] \subset \mathbf{G}_{k-1}, \quad \forall 1 \leq k \leq n.$$

I.3. Sottogruppi di Lie

DEFINIZIONE I.3.1. Un sottogruppo \mathbf{H} di \mathbf{G} è un suo *sottogruppo di Lie* se è anche una sottovarietà differenziabile di \mathbf{G} , e con tale struttura differenziabile è un gruppo di Lie.

L'algebra di Lie \mathfrak{h} di un sottogruppo di Lie \mathbf{H} di \mathbf{G} è una sottoalgebra di Lie di \mathfrak{g} . Infatti i campi di vettori invarianti a sinistra su \mathbf{H} sono restrizioni ad \mathbf{H} di campi di vettori invarianti a sinistra di \mathbf{G} .

Viceversa, per ogni sottoalgebra di Lie \mathfrak{h} di \mathbf{G} il sottogruppo \mathbf{H} di \mathbf{G} generato da $\exp(\mathfrak{h})$ è un sottogruppo di Lie connesso di \mathbf{G} . Questo è conseguenza del fatto che i campi di vettori invarianti a sinistra corrispondenti agli elementi di \mathfrak{h} generano una distribuzione vettoriale di rango costante formalmente (e quindi totalmente) integrabile in \mathbf{G} .

Ogni omomorfismo differenziabile $\phi : \mathbf{G}_1 \rightarrow \mathbf{G}_2$ di gruppi di Lie determina un omomorfismo $d\phi(e) : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ delle loro algebre di Lie. Il viceversa non è sempre vero; lo è quando \mathbf{G}_1 è semplicemente connesso.

In particolare, la $\mathbf{G} \ni a \rightarrow \text{ad}(a) \in \text{Aut}(\mathbf{G})$ definisce un'applicazione $\mathbf{G} \ni a \rightarrow \text{Ad}(a) \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$, che si dice la *rappresentazione lineare aggiunta* di \mathbf{G} .

Vale il

TEOREMA I.3.2. Sia \mathbf{G} un gruppo di Lie, con algebra di Lie \mathfrak{g} .

(1) Se \mathbf{H} è un sottogruppo di Lie di \mathbf{G} , la sua algebra di Lie è

$$(1.3.1) \quad \mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \exp(tX) \in \mathbf{H}, \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

(2) Ogni sottogruppo chiuso \mathbf{H} di \mathbf{G} è un suo sottogruppo di Lie.

ESEMPPIO I.3.3 (Gruppi lineari). Un *gruppo lineare* è un sottogruppo chiuso di un gruppo $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$.

Per il *teorema di Ado*², ogni algebra di Lie su un campo \mathbb{k} è isomorfa ad una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{k})$.

²Matrix representations of Lie algebras, Usp. Mat. Nauk 2 (1947), pp. 159-173.

Per un teorema di Djokovic³, ogni algebra di Lie reale è l'algebra di Lie di un gruppo lineare.

Tutti i gruppi di Lie compatti sono isomorfi a gruppi lineari.

Si può definire sul rivestimento universale $\widetilde{\mathbf{G}}$ di un gruppo di Lie connesso una struttura di gruppo di Lie per cui la proiezione canonica $\widetilde{\mathbf{G}} \rightarrow \mathbf{G}$ sia un omomorfismo di gruppi di Lie.

I rivestimenti universali $\widetilde{\mathbf{SL}}(n, \mathbb{R})$ dei gruppi di Lie $\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$ sono gruppi di Lie che non sono isomorfi a gruppi lineari.

I.4. La forma di Maurer-Cartan

I.4.1. Forme differenziali a valori vettoriali. Siano V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita ed M una varietà differenziabile. Indichiamo con $\Omega^h(M, V)$ lo spazio delle forme differenziali alternate di grado h a valori in V . Esse sono le applicazioni $\mathcal{C}^\infty(M)$ -multilineari alternate :

$$\alpha: \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{h \text{ volte}} \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M, V).$$

Ad esse si estende in modo naturale la definizione del differenziale. Naturalmente, se V non ha una struttura di algebra reale, non ha senso considerare il prodotto esterno di due forme a valori in V . Nel caso in cui V sia un'algebra, possiamo estendere la definizione del prodotto esterno in modo che, sulle forme di grado zero, coincida puntualmente con il prodotto definito in V . In particolare, nel caso delle algebre di Lie, possiamo dare la seguente definizione.

DEFINIZIONE I.4.1. Se $V = \mathfrak{a}$ è un'algebra di Lie reale, il *prodotto esterno* di due forme differenziali $\alpha \in \Omega^p(M, \mathfrak{a})$, $\beta \in \Omega^q(M, \mathfrak{a})$, è la forma $[\alpha \wedge \beta] \in \Omega^{p+q}(M, \mathfrak{a})$ definita da:

$$[\alpha \wedge \beta](X_1, \dots, X_{p+q}) = \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q} \\ 1 \leq \sigma_1 < \cdots < \sigma_p \leq p+q \\ 1 \leq \sigma_{p+1} < \cdots < \sigma_{p+q} \leq p+q}} \varepsilon(\sigma) [\alpha(X_{\sigma_1}, \dots, X_{\sigma_p}), \beta(X_{\sigma_{p+1}}, \dots, X_{\sigma_{p+q}})].$$

Il prodotto si estende poi per bilinearità a tutto $\Omega^*(M, \mathfrak{a})$.

In particolare, se α e β sono 1-forme a valori in \mathfrak{a} , abbiamo:

$$\begin{aligned} [\alpha \wedge \beta](X, Y) &= [\alpha(X), \beta(Y)] - [\alpha(Y), \beta(X)], \\ [\alpha \wedge \alpha](X, Y) &= 2[\alpha(X), \alpha(Y)], \end{aligned} \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

I.4.2. Forme differenziali invarianti. Sia \mathbf{G} un gruppo di Lie con algebra di Lie \mathfrak{g} .

DEFINIZIONE I.4.2. Una forma differenziale $\omega \in \Omega^*(\mathbf{G})$ si dice *invariante a sinistra* se $L_a^* \omega = \omega$ per ogni $a \in \mathbf{G}$.

³A closure theorem for analytic subgroups of a real Lie group, Can.Math. Bull. **19** (1976), pp. 435-439.

Per una forma $\omega \in \Omega^1(\mathbf{G})$ di grado uno essere invariante a sinistra è equivalente al fatto che, per ogni campo di vettori $X \in \mathfrak{L}(\mathbf{G})$ invariante a sinistra su \mathbf{G} , la funzione $\omega(X)$ sia costante. Analogamente, una forma omogenea $\alpha \in \Omega^q(\mathbf{G})$ è invariante a sinistra se, e soltanto se, per ogni scelta di $X_1, \dots, X_q \in \mathfrak{L}(\mathbf{G})$, la funzione $\alpha(X_1, \dots, X_q)$ è costante.

I.4.3. La forma di Maurer-Cartan.

TEOREMA I.4.3. Sia \mathbf{G} un gruppo di Lie con algebra di Lie \mathfrak{g} . L'applicazione

$$(1.4.1) \quad \mathbf{G} \times \mathfrak{g} \ni (a, X) \longrightarrow aX \in T\mathbf{G}$$

è un diffeomorfismo. In particolare, i gruppi di Lie sono varietà differenziabili parallelizzabili ed $\mathfrak{X}(\mathbf{G})$ è il $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{G})$ -modulo generato da $\mathfrak{L}(\mathbf{G})$.

DIMOSTRAZIONE. L'applicazione inversa della (1.4.1) è la

$$T\mathbf{G} \ni v \rightarrow (\pi(v), \pi(v)^{-1} \cdot v) \in \mathbf{G} \times \mathfrak{g},$$

ove $\pi : T\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$ è la proiezione canonica del fibrato tangente sulla base. \square

PROPOSIZIONE I.4.4. L'applicazione

$$(1.4.2) \quad \omega_{\mathbf{G}} : T\mathbf{G} \ni v \longrightarrow \pi(v)^{-1} \cdot v \in \mathfrak{g}$$

è una forma differenziale invariante a sinistra a valori in \mathfrak{g} . \square

Essa è caratterizzata dall'equazione

$$(1.4.3) \quad \omega_{\mathbf{G}}(X_a^*) = X, \quad \forall X \in \mathfrak{g}, \quad \forall a \in \mathbf{G}.$$

DEFINIZIONE I.4.5. La $\omega_{\mathbf{G}}$ si dice la *forma di Maurer⁴-Cartan* del gruppo \mathbf{G} .

PROPOSIZIONE I.4.6. La forma di Maurer-Cartan $\omega_{\mathbf{G}} \in \Omega^1(\mathbf{G}, \mathfrak{g})$ di Lie \mathbf{G} è invariante a sinistra e soddisfa l'**equazione di Maurer-Cartan**

$$(1.4.4) \quad d\omega_{\mathbf{G}} + \frac{1}{2} [\omega_{\mathbf{G}} \wedge \omega_{\mathbf{G}}] = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Siano $X, Y \in \mathfrak{g}$. Allora :

$$\begin{aligned} d\omega_{\mathbf{G}}(X^*, Y^*) &= X^* \omega_{\mathbf{G}}(Y^*) - Y^* \omega_{\mathbf{G}}(X^*) - \omega_{\mathbf{G}}([X^*, Y^*]) \\ &= -[\omega_{\mathbf{G}}(X^*), \omega_{\mathbf{G}}(Y^*)] = -\frac{1}{2} [\omega_{\mathbf{G}} \wedge \omega_{\mathbf{G}}](X^*, Y^*). \end{aligned}$$

Poiché $\mathfrak{L}(\mathbf{G})$ genera $\mathfrak{X}(M)$ come $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{G})$ -modulo, otteniamo la tesi. \square

LEMMA I.4.7. (1) La forma di Maurer-Cartan $\omega_{\mathbf{G}}$ di \mathbf{G} soddisfa:

$$(1.4.5) \quad R_a^* \omega_{\mathbf{G}} = \text{Ad}(a^{-1}) \circ \omega_{\mathbf{G}}.$$

(2) Ogni forma differenziale $\eta \in \Omega^1(\mathbf{G}, V)$, invariante a sinistra su \mathbf{G} è della forma $\eta = T \circ \omega_{\mathbf{G}}$, per un'applicazione lineare $T : \mathfrak{g} \rightarrow V$.

⁴Ludwig Maurer (1859-1927) matematico tedesco, professore all'Università di Tübingen, ha contribuito allo studio dei gruppi di matrici.

DIMOSTRAZIONE. Poiché le traslazioni a destra e a sinistra commutano, il traslato a destra di un campo di vettori invariante a sinistra è ancora invariante a sinistra. Quindi, se $X \in \mathfrak{g}$ ed $a \in \mathbf{G}$, il campo $R_{a*}X^*$ è ancora invariante a sinistra. Esso è il campo Y^* corrispondente ad $L_{a^{-1}*}R_{a*}X^* = \text{ad}(a^{-1})_*(X^*) = [\text{Ad}(a^{-1})(X)]^* = \text{Ad}(a^{-1})(\omega_{\mathbf{G}}(X^*))$. Questo dimostra la (1.4.5).

Se $\eta \in \Omega^1(\mathbf{G}, V)$ è invariante a sinistra, abbiamo $\eta = T \circ \omega_{\mathbf{G}}$ con

$$T = \eta(e) : \mathfrak{g} = T_e\mathbf{G} \rightarrow V. \quad \square$$

ESEMPIO I.4.8. Consideriamo $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ come un aperto dello spazio Euclideo $\mathbb{R}^{n \times n}$ delle matrici reali $n \times n$, che possiamo ancora identificare con la sua algebra di Lie $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$. Utilizzando la (1.4.1), rappresentiamo il suo spazio tangente $T\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ come il prodotto cartesiano $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) \times \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$. In particolare, $\mathfrak{X}(\mathbf{GL}_n(\mathbb{R}))$ si identifica allo spazio $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{GL}_n(\mathbb{R}), \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}))$. Poiché la traslazione a sinistra R_a è la restrizione a $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ della moltiplicazione a sinistra per la matrice a , che è un'applicazione lineare, il suo differenziale coincide in ogni punto con la moltiplicazione a sinistra per a . In particolare, i campi di vettori invarianti a sinistra corrispondono alle applicazioni

$$\mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) \ni x \longrightarrow xA \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$$

al variare di A in $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$. In questo sistema di coordinate, la forma di Maurer-Cartan di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ è la

$$\omega_{\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})} = x^{-1}dx.$$

In modo analogo, i campi di vettori invarianti a destra su $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ si scrivono nella forma

$$\mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) \ni x \longrightarrow Ax \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$$

al variare di A in $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$.

La forma che associa ad ogni vettore v tangente in x il valore A in e del campo di vettori invariante a destra $*A$ con $*A_x = v$ è dato da

$$dx \circ x^{-1} = \text{ad}(x) \circ \omega_{\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})}.$$

La discussione nell'Esempio I.4.8 giustifica la

NOTAZIONE I.4.9. Se $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbf{G})$ è un arco differenziabile nel gruppo di Lie \mathbf{G} , poniamo

$$\alpha^{-1}(t)\dot{\alpha}(t) = \omega_{\mathbf{G}}(\dot{\alpha}(t)), \quad \dot{\alpha}(t)\alpha^{-1}(t) = \text{ad}(\alpha(t))\omega_{\mathbf{G}}(\dot{\alpha}(t)).$$

Concludiamo questo paragrafo con una costruzione che generalizza l'esponenziale.

PROPOSIZIONE I.4.10. Siano \mathbf{G} un gruppo di Lie, con algebra di Lie \mathfrak{g} .

Sia I un connesso di \mathbb{R} , $t_0 \in I$, $x_0 \in \mathbf{G}$ ed $X \in \mathcal{C}^k(I, \mathfrak{g})$, con $k \geq 0$. Allora sono univocamente determinati $a, b \in \mathcal{C}^{k+1}(I, \mathbf{G})$ tali che

$$(1.4.6) \quad \begin{cases} a(t_0) = x_0, \\ a^{-1}(t)\dot{a}(t) = X(t) \quad \forall t \in I, \end{cases}$$

$$(1.4.7) \quad \begin{cases} b(t_0) = x_0, \\ \dot{b}(t)b^{-1}(t) = X(t) \quad \forall t \in I. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. la soluzione delle (1.4.6), (1.4.7) sono rispettivamente

$$\alpha(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t X(\tau)d\tau\right)x_0 \quad \text{e} \quad \beta(t) = x_0 \exp\left(\int_{t_0}^t X(\tau)d\tau\right).$$

□

I.5. Applicazioni a valori in un gruppo di Lie

Siano \mathbf{G} un gruppo di Lie, con algebra di Lie \mathfrak{g} , ed M una varietà differenziabile di classe \mathcal{C}^∞ , di dimensione m .

DEFINIZIONE I.5.1. La *derivata di Darboux* di $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbf{G})$ è il pullback $\omega_f = f^*\omega_{\mathbf{G}} \in \Omega^1(M, \mathfrak{g})$ della forma di Maurer-Cartan di \mathbf{G} .

La f si dice un *integrale*, o una *primitiva* di ω_f , o *mappa dei periodi* associata ad ω_f .

PROPOSIZIONE I.5.2. Se $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbf{G})$ ed $\omega_{f_1} = \omega_{f_2}$, allora esiste un elemento $a \in \mathbf{G}$ tale che $f_1(p) = af_2(p)$ per ogni $p \in M$.

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo l'applicazione $\phi : M \ni p \rightarrow f_1(p)[f_2(p)]^{-1} \in \mathbf{G}$. Poiché $\phi f_2 = f_1$, abbiamo

$$d\phi = (df_1)[f_2]^{-1} - \phi(df_2)[f_2]^{-1} = (df_1)[f_2]^{-1} - f_1[f_2]^{-1}(df_2)[f_2]^{-1}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \omega_\phi &= \phi^{-1}d\phi = f_2[f_1]^{-1}((df_1)[f_2]^{-1} - f_1[f_2]^{-1}(df_2)[f_2]^{-1}) \\ &= f_2([f_1]^{-1}df_1 - [f_2]^{-1}df_2)[f_2]^{-1} = \text{ad}(f_2)(\omega_{f_1} - \omega_{f_2}) = 0. \end{aligned}$$

Questa relazione implica che $d\phi = 0$, e quindi $f_1[f_2]^{-1} = \text{costante} = a \in \mathbf{G}$. □

La derivata di Darboux $\omega = \omega_f$ di una $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbf{G})$ soddisfa l'*equazione di struttura*

$$(1.5.1) \quad d\omega + \frac{1}{2}[\omega \wedge \omega] = 0.$$

Viceversa, abbiamo

TEOREMA I.5.3. Supponiamo che M sia connessa e semplicemente connessa. Fissiamo un punto $p_0 \in M$ ed un elemento a_0 di \mathbf{G} . Se $\omega \in \Omega^1(M, \mathfrak{g})$ soddisfa (1.5.1), allora esiste una ed una sola $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbf{G})$ tale che

$$(1.5.2) \quad \omega_f = \omega \quad \text{ed} \quad f(p_0) = a_0.$$

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo la varietà prodotto $M \times \mathbf{G}$. Siano $\pi_M : M \times \mathbf{G} \rightarrow M$ $\pi_{\mathbf{G}} : M \times \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$ le proiezioni sui singoli fattori. Consideriamo su $M \times \mathbf{G}$ la forma $\alpha = \pi_M^*\omega - \pi_{\mathbf{G}}^*\omega_{\mathbf{G}}$. Dico che $\ker \alpha$ è una distribuzione di rango m totalmente integrabile. Infatti, se $p \in M$ ed $x \in \mathbf{G}$, l'applicazione che fa corrispondere a $v \in T_pM$ il vettore $(v, L_{x*}\omega(v)) \in T_{(p,x)}(M \times \mathbf{G}) = T_pM \oplus T_x\mathbf{G}$ è un'applicazione

lineare e bigettiva da $T_p M$ a $\ker \alpha_{(p,x)}$. Se poi X, Y sono campi di vettori su $M \times \mathbf{G}$ con coefficienti in $\ker \alpha$, allora

$$\begin{aligned} \alpha([X, Y]) &= -d\alpha(X, Y) = -d(\pi_M^* \omega - \pi_{\mathbf{G}}^* \omega_{\mathbf{G}})(X, Y) = \pi_{\mathbf{G}}^*(d\omega_{\mathbf{G}}) - \pi_M^*(d\omega)(X, Y) \\ &= [\omega_{\mathbf{G}}(d\pi_{\mathbf{G}}(X)), \omega_{\mathbf{G}}(d\pi_{\mathbf{G}}(Y))] - [\omega(d\pi_M(X)), \omega(d\pi_M(Y))] = 0 \end{aligned}$$

perché $\omega_{\mathbf{G}}(d\pi_{\mathbf{G}}(X)) = \omega(d\pi_M(X))$ ed $\omega_{\mathbf{G}}(d\pi_{\mathbf{G}}(Y)) = \omega(d\pi_M(Y))$, in quanto X ed Y hanno valori in $\ker \alpha$.

Per il teorema di Frobenius vi è una ed una sola varietà integrale N di $\ker \alpha$ che passa per il punto (p_0, a_0) . La restrizione ad N della π_M è un diffeomorfismo locale. Esso è surgettivo per la Proposizione I.4.10: infatti essa ci dice ogni cammino in M , di punto iniziale p_0 , si rialza ad un cammino in N di punto iniziale (p_0, a_0) . Poiché abbiamo supposto che M fosse connessa, la $N \ni (p, x) \rightarrow p \in M$ è surgettiva e quindi un rivestimento. Se M è anche semplicemente connessa, il rivestimento è ad un solo foglio e quindi il grafico di un'applicazione $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbf{G})$. Per costruzione abbiamo allora $\omega_f = \omega$. \square

I.6. Omomorfismi di gruppi ed algebre di Lie

Siano \mathfrak{g}_1 e \mathfrak{g}_2 due algebre di Lie sullo stesso campo \mathbb{k} .

DEFINIZIONE I.6.1. Un omomorfismo $\Phi : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ è un'applicazione \mathbb{k} -lineare tale che

$$\Phi([X_1, X_2]) = [\Phi(X_1), \Phi(X_2)], \quad \forall X_1, X_2 \in \mathfrak{g}_1.$$

Siano \mathbf{G}_1 e \mathbf{G}_2 due gruppi di Lie, con algebre di Lie \mathfrak{g}_1 e \mathfrak{g}_2 , rispettivamente.

DEFINIZIONE I.6.2. Un omomorfismo di gruppi di Lie $\phi : \mathbf{G}_1 \rightarrow \mathbf{G}_2$ è un'applicazione differenziabile di classe \mathcal{C}^ω tale che

$$\phi(x_1^{-1}x_2) = [\phi(x_1)]^{-1}\phi(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbf{G}_1.$$

PROPOSIZIONE I.6.3. (1) Se $\phi : \mathbf{G}_1 \rightarrow \mathbf{G}_2$ è un omomorfismo di gruppi di Lie, allora $\Phi = d\phi(e_{\mathbf{G}_1}) : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ è un omomorfismo di algebre di Lie reali.

(2) Se \mathbf{G}_1 è connesso, due omomorfismi di gruppi di Lie $\phi_1, \phi_2 : \mathbf{G}_1 \rightarrow \mathbf{G}_2$ con $d\phi_1(e_{\mathbf{G}_1}) = d\phi_2(e_{\mathbf{G}_1})$ sono uguali.

(3) Se \mathbf{G}_1 è connesso e semplicemente connesso, ad ogni omomorfismo di algebre di Lie $\Phi : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ corrisponde uno ed un solo omomorfismo di gruppi di Lie $\phi : \mathbf{G}_1 \rightarrow \mathbf{G}_2$ con $d\phi(e_{\mathbf{G}_1}) = \Phi$.

DIMOSTRAZIONE. (1). Per ogni $X \in \mathfrak{g}_1$, i campi di vettori invarianti a sinistra X^* su \mathbf{G}_1 e $[\Phi(X)]^*$ su \mathbf{G}_2 sono ϕ -correlati. Da questo segue che

$$[[\Phi(X_1)]^*, [\Phi(X_2)]^*] = [\Phi([X_1, X_2])]^*, \quad \forall X_1, X_2 \in \mathfrak{g}_1,$$

perché $[[\Phi(X_1)]^*, [\Phi(X_2)]^*]$ e $[\Phi([X_1, X_2])]^*$ sono ϕ -correlati ad $[X_1^*, X_2^*]$ ed $[X_1, X_2]^*$, rispettivamente. Ne segue che Φ è un omomorfismo di algebre di Lie.

(2). Per (1) è $\phi_1(\exp(X)) = \exp(\Phi(X)) = \phi_2(X)$ per ogni $X \in \mathfrak{g}_1$. In particolare, ϕ_1 e ϕ_2 coincidono su un intorno aperto di $e_{\mathbf{G}_1}$ in \mathbf{G}_1 . Quindi $\{x \in \mathbf{G}_1 \mid$

$\phi_1(x) = \phi_2(x)$ è un sottogruppo di \mathbf{G}_1 che contiene un intorno aperto di $e_{\mathbf{G}_1}$ e quindi coincide con \mathbf{G}_1 , perché avevamo supposto che \mathbf{G}_1 fosse connesso.

(3). Consideriamo il gruppo di Lie prodotto diretto $\mathbf{G} = \mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_2$, con algebra di Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$. Il sottospazio $\mathfrak{h} = \{(X, \Phi(X)) \mid X \in \mathfrak{g}_1\}$ è una sottoalgebra di Lie di \mathfrak{g} e quindi genera un sottogruppo di Lie analitico \mathbf{H} di \mathbf{G} . La restrizione ad \mathbf{H} della proiezione canonica $\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}_1$ è un omomorfismo di gruppi di Lie il cui nucleo ha algebra di Lie $\{0\}$. È quindi un rivestimento, e perciò un diffeomorfismo, in quanto avevamo supposto che \mathbf{G}_1 fosse semplicemente connesso. \square

I.7. Rappresentazioni lineari

Siano \mathbf{G} un gruppo di Lie, e V uno spazio vettoriale sul campo \mathbb{k} , con \mathbb{k} uguale ad \mathbb{R} o \mathbb{C} .

DEFINIZIONE I.7.1. Una *rappresentazione lineare* di \mathbf{G} è un omomorfismo di gruppi di Lie $\rho : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{GL}_{\mathbb{k}}(V)$.

Una rappresentazione lineare (ρ, V) è quindi un'applicazione $\rho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{G}, \mathbf{GL}_{\mathbb{k}}(V))$ tale che

$$\rho(x_1^{-1}x_2) = [\rho(x_1)]^{-1} \circ \rho(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbf{G}.$$

Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie su \mathbb{k} e V uno spazio vettoriale su \mathbb{k} .

DEFINIZIONE I.7.2. Una *rappresentazione lineare* di \mathfrak{g} su V è un omomorfismo di algebre di Lie $\rho_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$.

Ciò significa che ρ_* è \mathbb{k} -lineare e che

$$\rho_*([X, Y]) = [\rho_*(X), \rho_*(Y)] = \rho_*(X) \circ \rho_*(Y) - \rho_*(Y) \circ \rho_*(X), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Dalla Proposizione I.6.3 abbiamo:

PROPOSIZIONE I.7.3. Se (ρ, V) è una rappresentazione lineare di dimensione finita di \mathbf{G} , allora $\rho_* = d\rho(e_{\mathbf{G}}) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$ è una rappresentazione lineare di \mathfrak{g} .

I.8. Spazi omogenei

Se \mathbf{G} è un gruppo ed \mathbf{H} un suo sottogruppo, indichiamo con \mathbf{G}/\mathbf{H} l'insieme delle sue classi laterali sinistre, definito dalla relazione d'equivalenza

$$a \sim b \iff a\mathbf{H} = b\mathbf{H} \iff a^{-1}b \in \mathbf{H}.$$

Il gruppo \mathbf{G} agisce su \mathbf{G}/\mathbf{H} mediante le *traslazioni a sinistra*

$$\ell_a : \mathbf{G}/\mathbf{H} \longrightarrow \mathbf{G}/\mathbf{H}, \quad \text{con } \ell_a(\pi(b)) = \pi(ab), \quad \forall a, b \in \mathbf{G}.$$

Il nucleo d'infedeltà dell'azione di \mathbf{G} su \mathbf{G}/\mathbf{H} è il più grande sottogruppo normale di \mathbf{G} contenuto in \mathbf{H} , cioè $\mathbf{N} = \bigcap_{a \in \mathbf{G}} a\mathbf{H}a^{-1}$. L'azione è quindi fedele se \mathbf{H} non contiene sottogruppi normali di \mathbf{G} diversi da $\{e\}$. Osserviamo che il gruppo quoziente \mathbf{G}/\mathbf{N} agisce in modo fedele su $\mathbf{G}/\mathbf{H} \simeq (\mathbf{G}/\mathbf{N})/(\mathbf{H}/\mathbf{N})$.

Supponiamo che \mathbf{G} sia un gruppo topologico e consideriamo su \mathbf{G}/\mathbf{H} la topologia quoziente. Le traslazioni a sinistra definiscono allora omeomorfismi di \mathbf{G}/\mathbf{H} in sé.

PROPOSIZIONE I.8.1. *Sia \mathbf{H} è un sottogruppo di un gruppo topologico \mathbf{G} . La proiezione nel quoziente $\pi : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}/\mathbf{H}$ è un'applicazione aperta.*

DIMOSTRAZIONE. Infatti, se U è un aperto di \mathbf{G} , allora

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{g \in U} g\mathbf{H} = \bigcup_{h \in \mathbf{H}} Uh$$

è aperto perché unione di aperti. \square

TEOREMA I.8.2. *Sia \mathbf{G} un gruppo topologico ed \mathbf{H} un suo sottogruppo. Il quoziente \mathbf{G}/\mathbf{H} è uno spazio regolare se, e soltanto se, \mathbf{H} è un sottogruppo chiuso di \mathbf{G} .*

In particolare, \mathbf{G} è uno spazio regolare se e soltanto se è uno spazio⁵ T_1 e ciò equivale al fatto che $\{e\}$ sia un chiuso di \mathbf{G} .

DIMOSTRAZIONE. Se \mathbf{H} è un sottogruppo chiuso del gruppo topologico \mathbf{G} , allora tutte le sue classi laterali sinistre sono chiusi di \mathbf{G} e quindi \mathbf{G}/\mathbf{H} è uno spazio topologico T_1 . Viceversa, se \mathbf{G}/\mathbf{H} è T_1 , allora $\mathbf{H} = \pi^{-1}(\pi(e))$ è chiuso.

Supponiamo dunque che \mathbf{H} sia chiuso. Siano F un chiuso di \mathbf{G}/\mathbf{H} ed x_0 un elemento di \mathbf{G} con $\pi(x_0) \notin F$. Poiché \mathbf{G} è un gruppo topologico, l'applicazione

$$\lambda : \mathbf{G} \times \mathbf{G} \ni (x, y) \longrightarrow x^{-1}y \in \mathbf{G}$$

è continua. Il chiuso $\pi^{-1}(F)$ di \mathbf{G} non contiene $x_0 = \lambda(e, x_0)$. Possiamo perciò trovare intorno aperti U_e di e ed U_0 di x_0 in \mathbf{G} tali che

$$x_1^{-1}x_2 \notin \pi^{-1}(F) \quad \text{per ogni } x_1 \in U_e, x_2 \in U_0.$$

Consideriamo gli insiemi:

$$\tilde{U}_0 = \pi^{-1}(\pi(U_0)) = \bigcup_{x \in \mathbf{H}} U_0x, \quad \text{e} \quad \tilde{V} = \bigcup_{\pi(x) \in F} U_e x = \bigcup_{x \in U_e} \pi^{-1}(xF).$$

Sia \tilde{U} che \tilde{V} sono aperti saturi. Il primo è un intorno di x_0 , il secondo di $\pi^{-1}(F)$.

Dimostriamo che $\tilde{U}_0 \cap \tilde{V} = \emptyset$. Se così non fosse, potremmo trovare $x_1 \in U_0$, $x_2 \in \mathbf{H}$, $x_3 \in U_e$, $x_4 \in \pi^{-1}(F)$ tali che $x_1x_2 = x_3x_4$. Da questa relazione troviamo $x_3^{-1}x_1 = x_4x_2^{-1} \in \pi^{-1}(F)$, che contraddice la scelta di U_e ed U_0 .

Ciò dimostra che \mathbf{G}/\mathbf{H} soddisfa l'assioma T_3 e quindi è regolare. \square

Consideriamo ora la situazione in cui \mathbf{G} sia un gruppo di Lie.

TEOREMA I.8.3. *Sia \mathbf{G} un gruppo di Lie ed \mathbf{H} un suo sottogruppo chiuso. Vi è allora sul quoziente $M = \mathbf{G}/\mathbf{H}$ un'unica struttura di varietà differenziabile per cui $\xi = (\mathbf{G} \xrightarrow{\pi} M)$, ove π è la proiezione sul quoziente, sia un fibrato differenziabile localmente banale, con fibra tipica \mathbf{H} . Inoltre, \mathbf{G} opera su M mediante diffeomorfismi.*

⁵Uno spazio topologico X soddisfa l'assioma di separazione T_1 se tutti i suoi sottoinsiemi finiti sono chiusi; soddisfa l'assioma di separazione T_3 se dati un punto a di X ed un chiuso A di X che non contenga a , esistono aperti disgiunti U e V con $a \in U$ ed $A \subset V$; è regolare se soddisfa entrambi gli assiomi T_1 e T_3 .

DIMOSTRAZIONE. Per il Teorema I.8.2, M è uno spazio di Hausdorff e la proiezione $\pi : \mathbf{G} \rightarrow M$ aperta.

Per il Teorema I.3.2, \mathbf{H} è un sottogruppo di Lie di \mathbf{G} . Siano \mathfrak{g} l'algebra di Lie di \mathbf{G} ed $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ quella di \mathbf{H} .

Scegliamo un complemento lineare \mathfrak{m} di \mathfrak{h} in \mathfrak{g} , di modo che

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}.$$

L'applicazione

$$f : \mathfrak{m} \times \mathbf{H} \ni (X, x) \longrightarrow \exp(X) \cdot x \in \mathbf{G}$$

è differenziabile di classe \mathcal{C}^ω . Lo spazio tangente di $\mathfrak{m} \times \mathbf{H}$ in $(0, e_{\mathbf{H}})$ è $\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h} = \mathfrak{g}$ e $df(0, e_{\mathbf{H}})$ è l'identità su \mathfrak{g} .

Per il teorema delle funzioni implicite esistono allora intorno aperti N'_0 di 0 in \mathfrak{m} , V' di $e_{\mathbf{H}}$ in \mathbf{H} , ed U' di $e_{\mathbf{G}}$ in \mathbf{G} tali che la restrizione di f ad $N'_0 \times V'$ sia un diffeomorfismo su un intorno aperto U' di $e_{\mathbf{G}}$ in \mathbf{G} .

Poiché \mathbf{H} è chiuso, possiamo scegliere gli intorni U', V', N'_0 sufficientemente piccoli in modo che risulti

$$V' = U' \cap \mathbf{H}, \quad \exp(N'_0) \cap \mathbf{H} = f(N'_0 \times \{e_{\mathbf{H}}\}) \cap \mathbf{H} = \{e_{\mathbf{G}}\}.$$

A questo punto scegliamo intorni $N_0 \subset N'_0$ di 0 in \mathfrak{m} e $V \subset V'$ di e in \mathbf{H} in modo che, con $U = f(N_0 \times V)$, sia $U^2 \cup U^{-2} \subset U'$ e sia $W = \pi(U) \subset M$.

Dico che allora

$$f_0 : N_0 \times \mathbf{H} \ni (X, x) \longrightarrow f(X, x) = \exp(X)x \in \pi^{-1}(W) \quad \text{è un diffeomorfismo.}$$

Infatti, poiché le traslazioni a destra mediante elementi di \mathbf{H} sono diffeomorfismi, e la f_0 commuta con le traslazioni a destra mediante elementi di \mathbf{H} , essendo per costruzione un diffeomorfismo locale su $N_0 \times V$, lo è anche in tutti i punti di $N_0 \times \mathbf{H}$.

Basta quindi verificare che sia bigettiva. Poiché $\pi^{-1}(W) = \bigcup_{x \in \mathbf{H}} Ux$, la f è senz'altro surgettiva. Mostriamo che è anche iniettiva. Siano $X_1, X_2 \in N_0$ ed $x_1, x_2 \in \mathbf{H}$ tali che $\exp(X_1)x_1 = \exp(X_2)x_2$. Abbiamo allora $\exp(-X_2)\exp(X_1) = x_1x_2^{-1}$. Poiché abbiamo supposto che $U^2 \cup U^{-2} \subset U'$, abbiamo $x_2x_1^{-1} = \exp(-X_2)\exp(X_1) \in U' \cap \mathbf{H} = V'$, perché $\exp(X_1), \exp(X_2) \in U$ ed $x_1x_2^{-1} \in \mathbf{H}$. Quindi $\exp(X_1) = \exp(X_2)(x_2x_1^{-1})$ con $X_1, X_2 \in N_0$, $x_2x_1^{-1} \in V'$. Poiché $f : N'_0 \times V' \rightarrow U'$ è un diffeomorfismo, ricaviamo che $X_1 = X_2$ ed $x_2x_1^{-1} = e_{\mathbf{H}}$, cioè $x_1 = x_2$.

Per ogni $a \in \mathbf{G}$ l'applicazione

$$\gamma_a : N_0 \ni X \longrightarrow \pi(a \exp(X)) \in a(W) = W_a$$

è un omeomorfismo di N_0 su un aperto W_a di M . Le $\zeta_a = \gamma_a^{-1}$ sono le carte locali di un atlante di classe \mathcal{C}^ω su M . Infatti

$$\begin{aligned} \zeta_a \circ \zeta_b^{-1}(X) &= \zeta_a \circ \gamma_b(X) = \text{pr}_{\mathfrak{m}} \circ f_0^{-1}(a^{-1}b \exp(X)), \\ \forall X \in \zeta_a(W_a \cap W_b) &= \{X \mid a^{-1}b \exp(X) \in U\}. \end{aligned}$$

Osserviamo infine che le

$$W_a \times \mathbf{H} \ni (p, y) \rightarrow a \exp(\zeta_a(p))y \in \pi^{-1}(W_a), \quad a \in \mathbf{G},$$

definiscono un atlante di trivializzazioni locali per il fibrato differenziabile $\mathbf{G} \xrightarrow{\pi} M$. \square

DEFINIZIONE I.8.4. Con la struttura differenziale descritta dal Teorema I.8.3, chiamiamo \mathbf{G}/\mathbf{H} lo spazio omogeneo del gruppo di Lie \mathbf{G} con stabilizzatore \mathbf{H} .

I.9. Gruppi di Lie di trasformazioni

Per generalità sulle azioni di gruppo insiemistiche e topologiche rimandiamo al §XXIV.1. In questo paragrafo ci occuperemo soltanto di azioni differenziabili di gruppi di Lie.

Siano \mathbf{G} un gruppo di Lie ed M una varietà differenziabile.

DEFINIZIONE I.9.1. Un'azione differenziabile a sinistra di \mathbf{G} su M è un'applicazione differenziabile

$$(1.9.1) \quad \mathbf{G} \times M \ni (x, p) \longrightarrow xp \in M \quad \text{tale che} \quad \begin{cases} e_{\mathbf{G}}p = p, \\ x_1(x_2p) = (x_1x_2)p, \\ \forall x_1, x_2 \in \mathbf{G}, \forall p \in M. \end{cases}$$

Gli elementi a di \mathbf{G} definiscono diffeomorfismi di M in sé

$$\ell_a : M \ni p \longrightarrow ap \in M \quad (\text{TRASLAZIONI A SINISTRA}).$$

DEFINIZIONE I.9.2. L'azione (1.9.1) si dice

- *effettiva* se $\ell_a = \text{id}_M \iff a = e_{\mathbf{G}}$;
- *libera* se le ℓ_a con $a \neq e_{\mathbf{G}}$ non hanno punti fissi;
- *transitiva* se per ogni coppia di punti p_1, p_2 di M esiste un $a \in \mathbf{G}$ tale che $ap_1 = p_2$.

DEFINIZIONE I.9.3. Sia $p_0 \in M$.

Il sottogruppo $\mathbf{G}_{p_0} = \{x \in \mathbf{G} \mid xp_0 = p_0\}$ si dice lo *stabilizzatore* di p_0 in \mathbf{G} .

Il sottoinsieme $\mathbf{G}(p_0) = \{xp_0 \mid x \in \mathbf{G}\}$ si dice l'*orbita* di \mathbf{G} in M per p_0 .

Lo stabilizzatore \mathbf{G}_{p_0} è un sottogruppo chiuso e quindi un sottogruppo di Lie di \mathbf{G} . Indicheremo con \mathfrak{g}_{p_0} la sua algebra di Lie.

Ad ogni elemento X dell'algebra di Lie \mathfrak{g} di \mathbf{G} associamo il gruppo a un parametro

$$\mathbb{R} \times M \ni (t, p) \longrightarrow \exp(tX)p \in M$$

di diffeomorfismi di M . Indichiamo con X_{\star} il suo generatore infinitesimale. La curva $\gamma(t) = \exp(tX)p$ è la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\gamma}(t) = X_{\star\gamma(t)}, \\ \gamma(0) = p. \end{cases}$$

LEMMA I.9.4. È $X_{\star p} = 0$ se e soltanto se X appartiene all'algebra di Lie \mathfrak{g}_p dello stabilizzatore \mathbf{G}_p di p in \mathbf{G} .

DIMOSTRAZIONE. Infatti $X_{\star p} = 0$ se e soltanto se $\exp(tX) \in \mathbf{G}_p$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e l'affermazione è quindi conseguenza della caratterizzazione dell'algebra di Lie di un sottogruppo di Lie del Teorema I.3.2. \square

PROPOSIZIONE I.9.5. *I campi di vettori X_\star formano una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{X}(M)$. L'applicazione $\mathfrak{g} \ni X \rightarrow X_\star \in \mathfrak{X}(M)$ è un anti-omomorfismo di algebre di Lie. Abbiamo cioè*

$$[X, Y]_\star = -[X_\star, Y_\star], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Per ogni $p_0 \in M$, il differenziale nell'identità dell'applicazione

$$\lambda_{p_0} : \mathbf{G} \ni x \rightarrow xp_0 \in M$$

associa ad $X \in \mathfrak{g}$ il valore in p_0 del campo X_\star . Il campo X_\star è λ_{p_0} -correlato al campo di vettori invariante a destra X_* associato all'elemento X di \mathfrak{g} .

L'algebra di Lie \mathfrak{g}_{p_0} di \mathbf{G}_{p_0} è il nucleo del differenziale $d\lambda_{p_0}(e_{\mathbf{G}}) : \mathfrak{g} \rightarrow T_{p_0}M$.

DIMOSTRAZIONE. L'applicazione λ_{p_0} trasforma il semigruppato a un parametro $\mathbb{R} \times \mathbf{G} \ni (t, x) \rightarrow \exp(tX)x$ nel semigruppato a un parametro $\mathbb{R} \times \mathbf{M} \ni (t, p) \rightarrow \exp(tX)p$ e quindi il generatore infinitesimale X_* del primo, nel generatore infinitesimale X_\star del secondo. In particolare, i campi di vettori X_* ed X_\star sono λ_{p_0} correlati. Da questa osservazione seguono tutte le affermazioni della proposizione. \square

OSSERVAZIONE I.9.6. Se $M = \mathbf{G}$ ed (1.9.1) è la moltiplicazione del gruppo, allora $X_\star = X_*$ è il campo di vettori invariante a destra associato ad $X \in \mathfrak{g}$.

COROLLARIO I.9.7. Se (1.9.1) è effettiva, allora l'applicazione $\mathfrak{g} \ni X \rightarrow X_\star \in \mathfrak{X}(M)$ è iniettiva.

Se (1.9.1) è libera, allora l'applicazione $\mathfrak{g} \ni X \rightarrow X_{\star p} \in T_pM$ è iniettiva per ogni $p \in M$.

DEFINIZIONE I.9.8. I campi X_\star si dicono *trasformazioni \mathbf{G} -infinitesime* di M .

TEOREMA I.9.9. Sia (1.9.1) un'azione differenziabile a sinistra di \mathbf{G} su M . Fissiamo un punto p_0 di M e siano \mathbf{G}_{p_0} lo stabilizzatore di p_0 in \mathbf{G} e $\mathbf{G}(p_0)$ l'orbita di \mathbf{G} per il punto p_0 . Allora $\mathbf{G}(p_0)$ una sottovarietà analitica di M , e l'applicazione f , definita dal diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{G} & \xrightarrow{\lambda_{p_0}} & \mathbf{G}(p_0) \\ \pi \downarrow & \nearrow f & \\ \mathbf{G}/\mathbf{G}_{p_0} & & \end{array}$$

un diffeomorfismo \mathbf{G} -equivariante (commuta cioè con le traslazioni a sinistra per elementi di \mathbf{G}) di classe \mathcal{C}^ω dello spazio omogeneo $\mathbf{G}/\mathbf{G}_{p_0}$ su $\mathbf{G}(p_0)$.

DIMOSTRAZIONE. Dalla Proposizione I.9.5 e dalla descrizione della struttura differenziale di $\mathbf{G}/\mathbf{G}_{p_0}$ data dal Teorema I.8.3, segue che il quoziente iniettivo di λ_{p_0} è un'immersione differenziabile \mathbf{G} -equivariante di classe \mathcal{C}^ω . Da questo fatto, seguono le affermazioni del Teorema. \square

COROLLARIO I.9.10. Se l'azione (1.9.1) è transitiva, M è diffeomorfa, in modo \mathbf{G} -equivariante, a uno spazio omogeneo di \mathbf{G} . \square

ESEMPIO I.9.11. L'applicazione $\pi : \mathbf{SO}(n+1) \ni a \rightarrow ae_0 \in S^n$, ove e_0 è un vettore di lunghezza unitaria in \mathbb{R}^{n+1} , definisce un diffeomorfismo $\mathbf{SO}(n+1)$ -equivariante tra la sfera S^n e lo spazio omogeneo $\mathbf{SO}(n+1)/\mathbf{SO}(n)$.

ESEMPIO I.9.12. Sia n un intero positivo. Il gruppo $\mathbf{T}^+(n, \mathbb{R})$ delle matrici diagonali superiori con determinante diverso da zero è un sottogruppo chiuso di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$. Lo spazio omogeneo $F = \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})/\mathbf{T}^+(n, \mathbb{R})$ è una varietà differenziabile compatta di dimensione $n(n-1)/2$, che si dice *varietà bandiera reale completa* e che è diffeomorfo al sottospazio di $\mathbb{G}_{n,1}(\mathbb{R}) \times \cdots \times \mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R}) \times \cdots \times \mathbb{G}_{n,n-1}(\mathbb{R})$ che consiste delle $(n-1)$ -uple $(\ell_1, \dots, \ell_m, \dots, \ell_{n-1})$ di sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^n con $\{0\} \subsetneq \ell_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \ell_m \subsetneq \cdots \subsetneq \ell_{n-1} \subsetneq \mathbb{R}^n$.

OSSERVAZIONE I.9.13. In generale, se un gruppo di Lie \mathbf{G} opera transitivamente su un insieme M , possiamo definire su M un'unica struttura di varietà \mathcal{C}^ω per cui l'azione di \mathbf{G} su M sia differenziabile.

ESEMPIO I.9.14. Fissiamo una forma bilineare alternata non degenera ω su \mathbb{C}^{2n} e sia M il sottoinsieme della Grassmanniana $\mathbb{G}_{2n,n}(\mathbb{C})$ formato dai sottospazi Lagrangiani di \mathbb{C}^{2n} , cioè dai $p \in \mathbb{G}_{2n,n}(\mathbb{C})$ tali che $\omega(z, w) = 0$ per ogni $z, w \in p$. Dico che p è una varietà connessa e compatta.

Identifichiamo \mathbb{C}^{2n} con lo spazio \mathbb{H}^n delle n -uple di quaternioni, facendo corrispondere ad $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ l'elemento $x + jy$. Ricordiamo che $\overline{x + jy} = \bar{x} - jy$. Possiamo scegliere le coordinate in modo che il prodotto scalare standard su \mathbb{H}^n sia definito da

$$\begin{aligned} (q_1|q_2)_{\mathbb{H}} &= (x_2^* - jy_2^\dagger)(x_1 + jy_1) = x_2^*x_1 + y_2^*y_1 + j(x_2^\dagger y_1 - y_2^\dagger x_1) \\ &= (q_1|q_2)_{\mathbb{C}^n} + j\omega(q_1, q_2), \\ \text{ove } q_1 &= x_1 + jy_1, q_2 = x_2 + iy_2, x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{C}^n. \end{aligned}$$

Ragionando come nell'esempio precedente, possiamo identificare gli n -piani Lagrangiani agli n -piani complessi generati da una base ortonormale di \mathbb{H}^n . Quindi il gruppo $\mathbf{Sp}(n)$ opera transitivamente su M . Lo stabilizzatore di $p_0 = \langle e_1, \dots, e_n \rangle_{\mathbb{C}}$ in $\mathbf{Sp}(n)$ è il gruppo unitario $\mathbf{U}(n)$. Quindi $M \simeq \mathbf{Sp}(n)/\mathbf{U}(n)$ è una varietà connessa e compatta di dimensione $n(2n+1) - n^2 = n(n+1)$. Osserviamo che M ha dimensione pari ed in effetti è una varietà complessa compatta di dimensione $n(n+1)/2$.

In modo del tutto analogo possiamo definire e discutere il concetto di azione differenziabile a destra. Siano P è una varietà differenziabile e \mathbf{G} un gruppo di Lie.

DEFINIZIONE I.9.15. Un'azione differenziabile a destra di \mathbf{G} su P è un'applicazione differenziabile

$$(1.9.2) \quad P \times \mathbf{G} \ni (\sigma, x) \longrightarrow \sigma x \in P \quad \text{tale che} \quad \begin{cases} \sigma e_{\mathbf{G}} = \sigma, \\ (\sigma x_1)x_2 = \sigma(x_1 x_2), \\ \forall x_1, x_2 \in \mathbf{G}, \forall \sigma \in P. \end{cases}$$

OSSERVAZIONE I.9.16. Se (1.9.1) è un'azione differenziabile a sinistra, la $M \times \mathbf{G} \ni (p, x) \rightarrow x^{-1}p \in M$ è un'azione differenziabile a destra su M e, viceversa,

se (1.9.2) è un'azione differenziabile a destra, la $\mathbf{G} \times P \ni (x, \sigma) \rightarrow \sigma x^{-1} \in P$ è un'azione differenziabile a sinistra su P .

Sarà comunque conveniente nel seguito considerare i due tipi di azione in modo distinto. L'azione a sinistra sarà spesso transitiva ed effettiva e coinciderà con le traslazioni a sinistra su uno spazio omogeneo. L'azione a destra sarà di solito libera ed effettiva, ed agirà tipicamente in modo transitivo sulle fibre di un fibrato differenziabile. L'esempio tipico è quello degli spazi omogenei $M = \mathbf{G}/\mathbf{H}$ e dell'azione a sinistra di \mathbf{G} come gruppo di traslazioni sulla base M del fibrato $\xi = (\pi : \mathbf{G} \rightarrow M)$ e di \mathbf{H} a destra su \mathbf{G} , pensato come spazio totale di ξ .

Fissata un'azione a destra (1.9.2), ad ogni elemento X dell'algebra di Lie \mathfrak{g} di \mathbf{G} associamo il generatore infinitesimale X^* del gruppo a un parametro di trasformazioni

$$(1.9.3) \quad P \times \mathbb{R} \ni (\sigma, t) \longrightarrow \sigma \exp(tX) \in P.$$

La curva $\gamma(t) = \sigma \exp(tX)$ è la soluzione del problema di Cauchy

$$(1.9.4) \quad \begin{cases} \dot{\gamma}(t) = X_{\gamma(t)}^*, & t \in \mathbb{R}, \\ \gamma(0) = \sigma. \end{cases}$$

In particolare, X^* si annulla in un punto $\sigma \in P$ se e soltanto se X appartiene all'algebra di Lie dello stabilizzatore \mathbf{G}_σ di σ in \mathbf{G} .

OSSERVAZIONE I.9.17. Se $P = \mathbf{G}$ e (1.9.2) la moltiplicazione del gruppo, allora $X^* = X^*$ è il campo di vettori invariane a destra associato ad $X \in \mathfrak{g}$.

Fissata $\sigma \in P$, consideriamo l'applicazione differenziabile

$$(1.9.5) \quad \ell_\sigma : \mathbf{G} \ni x \longrightarrow \sigma x \in P.$$

Come nel caso delle azioni a sinistra, abbiamo

PROPOSIZIONE I.9.18. Sia (1.9.2) un'azione differenziabile a destra. Allora

- (1) $X_\sigma^* = d\ell_\sigma(e)(X)$, $\forall \sigma \in P$, $\forall X \in \mathfrak{g}$;
- (2) $\ker d\ell_\sigma(e)$ è l'algebra di Lie dello stabilizzatore di σ in \mathbf{G} . □

Gli elementi a di \mathbf{G} definiscono diffeomorfismi di M in sé

$$r_a : P \ni \sigma \longrightarrow \sigma a \in P \quad (\text{TRASLAZIONI A DESTRA}).$$

DEFINIZIONE I.9.19. L'azione (1.9.2) si dice

- *effettiva* se $r_a = \text{id}_P \iff a = e_{\mathbf{G}}$;
- *libera* se le r_a con $a \neq e_{\mathbf{G}}$ non hanno punti fissi;
- *transitiva* se per ogni coppia di punti σ_1, σ_2 di P esiste un $a \in \mathbf{G}$ tale che $\sigma_1 a = \sigma_2$.

Dalla Proposizione I.9.18 otteniamo immediatamente

COROLLARIO I.9.20. Se l'azione (1.9.2) è libera, allora, per ogni $\sigma \in P$, l'applicazione $\mathfrak{g} \ni X \rightarrow X_\sigma^* \in T_\sigma P$ è iniettiva. □

Strutture differenziali su alcuni gruppi e spazi omogenei

II.1. I quaternioni e la struttura differenziale di $SU(2)$, $SO(3)$, $SO(4)$

Indichiamo con \mathbb{H} il corpo¹ (non commutativo) dei quaternioni. Ricordiamo la rappresentazione matriciale

$$(2.1.1) \quad \mathbb{H} \simeq \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\},$$

in cui la base canonica dei quaternioni puramente immaginari è data da

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

con le regole di prodotto

$$\mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}.$$

La matrice

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è l'identità in \mathbb{H} . Gli elementi $\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ formano una base di \mathbb{H} come spazio vettoriale reale. I numeri complessi si possono identificare al sottocorpo

$$\mathbb{C} = \{a + \mathbf{i}b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

di \mathbb{H} , ed \mathbb{H} è uno spazio vettoriale complesso, per la moltiplicazione a sinistra per gli elementi di \mathbb{C} , con base $\mathbf{1}, \mathbf{j}$.

Utilizzando la (2.1.1), il piano complesso \mathbb{C} corrisponde al sottoinsieme delle matrici diagonali

$$\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{C},$$

di \mathbb{H} . In questo modo, l'isomorfismo di \mathbb{C}^2 su \mathbb{H} fa corrispondere a $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ il quaternionone di matrice $\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix}$.

Nella rappresentazione matriciale (2.1.1), il coniugato di un quaternionone corrisponde all'aggiunta (coniugata trasposta) della matrice associata.

¹I quaternioni si caratterizzano come l'unica algebra di divisione reale associativa e normata non commutativa.

Hamilton identificava lo spazio Euclideo \mathbb{R}^3 a quello dei quaternioni puramente immaginari. L'opposto della parte reale del prodotto di due quaternioni immaginari è il prodotto scalare e la parte immaginaria il prodotto vettore dei due vettori corrispondenti.

Il prodotto di quaternioni ci permette di definire una struttura di gruppo sulla sfera S^3 : essa si identifica al gruppo moltiplicativo dei quaternioni q con $q\bar{q} = 1$. Osserviamo ancora che $q\bar{q}$ è il determinante della matrice che rappresenta q nella (2.1.1).

Un'applicazione \mathbb{R} -lineare $A : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ è \mathbb{C} -lineare se commuta con la moltiplicazione a sinistra per numeri complessi. A questo scopo basta verificare che $A \circ (\mathbf{i}\cdot) = \mathbf{i}\cdot A$. Se A è \mathbb{C} -lineare, allora la corrispondenza tra \mathbb{C}^2 ed \mathbb{H} ci permette di definire un'applicazione \mathbb{C} -lineare $A_{\mathbb{C}}$ di \mathbb{C}^2 in sé, che rende commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \xrightarrow{A} & \mathbb{H} \\ \simeq \downarrow & & \downarrow \simeq \\ \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{A_{\mathbb{C}}} & \mathbb{C}^2. \end{array}$$

In questo caso, $\det(A) = |\det(A_{\mathbb{C}})|^2$.

Dati due quaternioni $a, b \in \mathbb{H}$, definiamo l'applicazione

$$(2.1.2) \quad \rho_{a,b} : \mathbb{H} \ni x \longrightarrow \rho_{a,b}(x) = axb \in \mathbb{H}.$$

LEMMA II.1.1. *Per ogni scelta di $a, b \in \mathbb{H}$ l'applicazione $\rho_{a,b}$ definita da (2.1.2) è \mathbb{R} -lineare. La $\rho_{a,b}$ è \mathbb{C} -lineare se e soltanto se $a \in \mathbb{C}$.*

DIMOSTRAZIONE. La prima affermazione segue dal fatto che \mathbb{H} è un'algebra reale e quindi la moltiplicazione per un quaternioni, sia a destra che a sinistra, è \mathbb{R} -lineare. La moltiplicazione a destra è sempre \mathbb{C} -lineare. La moltiplicazione a sinistra per il quaternioni a lo è se e solo se a commuta con \mathbf{i} , cioè se la matrice che lo rappresenta commuta con $\begin{pmatrix} i & \\ & -i \end{pmatrix}$, e quindi è diagonale. Poiché i numeri complessi sono i quaternioni rappresentati da matrici diagonali, questo conclude la dimostrazione. \square

Utilizziamo le $\rho_{a,b}$ per descrivere le relazioni tra i quaternioni ed i gruppi $\mathbf{SO}(3)$, $\mathbf{SO}(4)$, $\mathbf{SU}(2)$, $\mathbf{U}(2)$ e le loro estensioni conformi.

PROPOSIZIONE II.1.2. *Siano $\rho_{a,b}$ le trasformazioni definite da (2.1.2). Allora*

- (1) *Se $a \in \mathbb{H}$ l'applicazione $\rho_{a,\bar{a}}$ trasforma quaternioni puramente immaginari in quaternioni puramente immaginari e definisce quindi una trasformazione lineare $R_a : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Se $a \neq 0$, la R_a è un'applicazione conforme con determinante positivo, di ragione $|a|$. Le corrispondenze*

$$(2.1.3) \quad S^3 \ni a \rightarrow R_a \in \mathbf{SO}(3) \quad \text{ed} \quad \mathbb{H} \setminus \{0\} \ni a \rightarrow R_a \in \mathbf{CSO}(3)$$

sono omomorfismi di gruppi continui e surgettivi con nucleo ± 1 , ed in particolare rivestimenti a due fogli.

(2) Per ogni $a \in S^3$ la trasformazione

$$(2.1.4) \quad \sigma_a : \mathbb{H} \ni x \longrightarrow -\rho_{a,a}(\bar{x}) = -a\bar{x}a \in \mathbb{H}$$

è la simmetria ortogonale di $\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{H}$ di vettore a .

(3) Per ogni $a, b \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ l'applicazione $\rho_{a,b}$, come applicazione di \mathbb{R}^4 in sé, è conforme e a determinante positivo, di ragione $\sqrt{|ab|}$. Le applicazioni

$$(2.1.5) \quad S^3 \times S^3 \ni a, b \rightarrow \rho_{a,\bar{b}} \in \mathbf{SO}(4) \quad \text{ed} \quad S^3 \times \mathbb{H} \ni a, b \rightarrow \rho_{a,\bar{b}} \in \mathbf{CSO}(4)$$

sono omomorfismi di gruppi continui e surgettivi con nucleo $\pm(\mathbf{1}, \mathbf{1})$ ed in particolare rivestimenti a due fogli.

(4) Per ogni $\tau \in S^1 \subset \mathbb{C}$ ed $a \in S^3$ l'applicazione $\rho_{\tau,a}$ è \mathbb{C} -lineare e definisce una trasformazione unitaria di \mathbb{C}^2 . L'applicazione

$$(2.1.6) \quad S^1 \times S^3 \ni (\tau, a) \rightarrow \rho_{\tau,a^{-1}} \in \mathbf{U}(2)$$

è un omomorfismo continuo e surgettivo, con nucleo $\{\pm(\mathbf{1}, \mathbf{1})\}$ ed un rivestimento a due fogli.

(5) Per ogni $a \in S^3$ l'applicazione $\rho_{1,a}(x) = xa$ è un'isometria di \mathbb{C}^2 con determinante 1. L'applicazione

$$(2.1.7) \quad S^3 \ni a \longrightarrow \rho_{1,a} \in \mathbf{SU}(2)$$

è un isomorfismo di gruppi ed un omeomorfismo.

DIMOSTRAZIONE. Verifichiamo la (2). Se $a \in S^3$, è $|-a\bar{x}a| = |a|^2|x| = |x|$ per ogni $x \in \mathbb{H}$, e quindi la σ_a è un'isometria di \mathbb{R}^4 . Il prodotto scalare in \mathbb{R}^4 di due elementi $x, a \in \mathbb{H}$ è $(x|a) = \operatorname{Re}(\bar{x}a)$. Quindi $x \perp a$ se e soltanto se $\bar{x}a$ è un immaginario puro, cioè se $\bar{a}x = \bar{x}a = -\bar{x}a$. Abbiamo quindi

$$\sigma_a(a) = -a\bar{a}a = -a, \quad \text{e} \quad \sigma_a(x) = -a\bar{x}a = a\bar{x}x = x, \quad \text{se } x \perp a.$$

Quindi σ_a è la simmetria vettoriale di vettore a .

Poiché ogni elemento di $\mathbf{SO}(4)$ è prodotto di un numero pari di simmetrie vettoriali, dalla (2) segue che il primo degli omomorfismi (2.1.5) è surgettivo. Se $a, b \in S^3$ e $\rho_{a,b}$ è l'identità, da $\rho_{a,\bar{b}}(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ ricaviamo che $a\bar{b} = \mathbf{1}$, cioè $a = b$. Da $\rho_{a,\bar{b}}(x) = x$ per ogni $x \in \mathbb{H}$ ricaviamo allora che $ax = xa$ per ogni $x \in \mathbb{H}$, e quindi a è reale e perciò uguale a ± 1 . Se $b \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$, scriviamo $\rho_{a,\bar{b}} = |b|\rho_{a,\frac{\bar{b}}{|b|}}$ e quindi anche le affermazioni fatte per il gruppo conforme seguono immediatamente. Questo completa la dimostrazione di (3).

Le trasformazioni di $\mathbf{SO}(3)$ si identificano alle trasformazioni di $\mathbf{SO}(4)$ che lasciano fisso 1. Sono cioè del tipo $\rho_a = \rho_{a,\bar{a}}$ e, con le ovvie osservazioni per il caso delle trasformazioni conformi, ne segue quindi (1).

Le (4) e (5) seguono dal fatto che la $\rho_{a,b}$ è \mathbb{C} -lineare se e soltanto se $a \in \mathbb{C}$ e, in questo caso $\det([\rho_{a,b}]_{\mathbb{C}}) = a^2$. \square

COROLLARIO II.1.3. Abbiamo i seguenti diffeomorfismi di classe \mathcal{C}^ω :

$$\begin{aligned} \mathbf{SO}(3) &\simeq \mathbb{RP}^3, & \mathbf{SO}(4) &\simeq S^3 \times \mathbb{RP}^3, \\ \mathbf{SU}(2) &\simeq S^3, & \mathbf{U}(2) &\simeq S^1 \times S^3. \end{aligned}$$

II.2. La trasformata di Cayley

Sia $\mathbb{C}^{n \times n}$ lo spazio delle matrici complesse $n \times n$. Indichiamo con

$$(2.2.1) \quad \mathbb{U}_e = \{X \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid \det(I + X) \neq 0\}$$

l'aperto di $\mathbb{C}^{n \times n} \simeq \mathbb{C}^{n^2}$ delle matrici complesse che non hanno autovalore -1 .

DEFINIZIONE II.2.1. La *trasformata di Cayley* di una matrice $X \in \mathbb{U}_e$ è la matrice

$$(2.2.2) \quad \mathbf{c}(X) = (I + X)^{-1}(I - X).$$

Vale il

TEOREMA II.2.2. *La trasformata di Cayley (2.2.2) definisce un'involuzione differenziabile di classe \mathcal{C}^ω di \mathbb{U}_e in sé. La trasformata di Cayley di una matrice $X \in \mathbb{U}_e$ è reale se e soltanto se X è reale.*

DIMOSTRAZIONE. La \mathbf{c} è una funzione razionale, e quindi differenziabile di classe \mathcal{C}^ω , sul suo dominio di definizione. Verifichiamo che l'immagine di \mathbf{c} è ancora contenuta in \mathbb{U}_e . Abbiamo² infatti, se $v \in \mathbb{C}^n$,

$$v + \mathbf{c}(X)v = 0 \iff (I + X)v + (I - X)v = 2v = 0 \iff v = 0.$$

Possiamo quindi definire l'iterata \mathbf{c}^2 di \mathbf{c} , ed abbiamo

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^2(X) &= (I + (I + X)^{-1}(I - X))^{-1}(I - (I + X)^{-1}(I - X)) \\ &= ((I + X) + (I - X))^{-1}((I + X) - (I - X)) = X, \quad \forall X \in \mathbb{U}_e. \end{aligned}$$

Chiaramente \mathbf{c} si restringe ad un'involuzione di $\mathbb{U}_e \cap \mathbb{R}^{n \times n}$. □

Come vedremo nel seguito, la trasformata di Cayley è uno strumento molto utile nello studio della struttura dei gruppi di matrici, perché ci permette, in molti casi, di definire atlanti *razionali*.

Definiamo alcuni gruppi di matrici.

Sia H una matrice complessa $n \times n$ non singolare. Poniamo

$$\begin{aligned} \mathbf{O}_H(\mathbb{C}) &= \{a \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid a^\dagger H a = H\}, & \mathfrak{o}_H(\mathbb{C}) &= \{X \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid X^\dagger H + HX = 0\}, \\ \mathbf{O}_H(\mathbb{R}) &= \{a \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid a^\dagger H a = H\}, & \mathfrak{o}_H(\mathbb{R}) &= \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid X^\dagger H + HX = 0\}, \\ \mathbf{U}_H &= \{a \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid a^* H a = H\}, & \mathfrak{u}_H &= \{X \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid X^* H + HX = 0\}. \end{aligned}$$

Essendo sottogruppi chiusi del gruppo lineare $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$, i gruppi $\mathbf{O}_H(\mathbb{C})$, $\mathbf{O}_H(\mathbb{R})$ ed \mathbf{U}_H sono gruppi di Lie e si verifica facilmente che $\mathfrak{o}_H(\mathbb{C})$, $\mathfrak{o}_H(\mathbb{R})$ ed \mathfrak{u}_H sono le corrispondenti algebre di Lie.

Abbiamo

²Possiamo anche osservare che gli autovalori di $\mathbf{c}(X)$ sono i $\mu = (1 + \lambda)^{-1}(1 - \lambda)$, al variare di λ tra gli autovalori di X e $(1 + \lambda)^{-1}(1 - \lambda) \neq -1$ se λ è un numero complesso $\neq -1$. Osserviamo che $\lambda \mapsto \frac{1-\lambda}{1+\lambda}$ è l'involuzione di Moebius di \mathbb{CP}^1 che scambia -1 ed ∞ .

PROPOSIZIONE II.2.3. *La trasformata di Cayley definisce omeomorfismi*

$$\begin{aligned}\mathbb{U}_e \cap \mathbf{O}_H(\mathbb{C}) &\xleftrightarrow{\mathbf{c}} \mathbb{U}_e \cap \mathfrak{o}_H(\mathbb{C}), \\ \mathbb{U}_e \cap \mathbf{O}_H(\mathbb{R}) &\xleftrightarrow{\mathbf{c}} \mathbb{U}_e \cap \mathfrak{o}_H(\mathbb{R}), \\ \mathbb{U}_e \cap \mathbf{U}_H &\xleftrightarrow{\mathbf{c}} \mathbb{U}_e \cap \mathfrak{u}_H.\end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. Se $a \in \mathbb{U}_e$ ed $X = \mathbf{c}(a)$, abbiamo

$$\begin{aligned}X^\dagger H + HX = 0 &\iff (I - a^\dagger)H(I + a) + (I + a^\dagger)H(I - a) = 0 \\ &\iff (H - a^\dagger H + Ha - a^\dagger Ha) + (H + a^\dagger H - Ha - a^\dagger Ha) = 0 \\ &\iff H - a^\dagger Ha = 0\end{aligned}$$

Da queste equivalenze ricaviamo il primo isomorfismo. Il secondo segue dal fatto che la trasformata di Cayley trasforma matrici reali in matrici reali.

Analogamente se $a \in \mathbb{U}_e$ ed $X = \mathbf{c}(a)$, abbiamo

$$\begin{aligned}X^* H + HX = 0 &\iff (I - a^*)H(I + a) + (I + a^*)H(I - a) = 0 \\ &\iff (H - a^* H + Ha - a^* Ha) + (H + a^* H - Ha - a^* Ha) = 0 \\ &\iff H - a^* Ha = 0,\end{aligned}$$

e quindi $a \in \mathbf{U}_H$ se e soltanto se $X \in \mathfrak{u}_H$. \square

Gli insiemi $\mathfrak{o}_H(\mathbb{C})$, $\mathfrak{o}_H(\mathbb{R})$ ed \mathfrak{u}_H sono spazi vettoriali di dimensione finita. La trasformata di Cayley ci permette quindi di definire diffeomorfismi razionali tra intorno dell'identità nei gruppi $\mathbf{O}_H(\mathbb{C})$, $\mathbf{O}_H(\mathbb{R})$, \mathbf{U}_H ed aperti di spazi vettoriali reali.

Abbiamo

TEOREMA II.2.4. *Sia $H \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una matrice invertibile e sia \mathbf{G} uno dei gruppi $\mathbf{O}_H(\mathbb{C})$, $\mathbf{O}_H(\mathbb{R})$, \mathbf{U}_H . Indichiamo con \mathfrak{g} la corrispondente algebra di Lie $\mathfrak{o}_H(\mathbb{C})$, $\mathfrak{o}_H(\mathbb{R})$, \mathfrak{u}_H , rispettivamente. Con la topologia di sottospazio di $\mathbb{C}^{n \times n}$, il gruppo \mathbf{G} è una varietà topologica ed ammette un'unica struttura differenziale di classe \mathcal{C}^ω per cui:*

- (1) $\mathbf{c} : \mathbb{U}_e \cap \mathbf{G} \rightarrow \mathbb{U}_e \cap \mathfrak{g}$ è una carta locale con centro in I ;
- (2) per ogni $a \in \mathbf{G}$ la traslazione a sinistra $\mathbf{G} \ni x \rightarrow ax \in \mathbf{G}$ è un diffeomorfismo di classe \mathcal{C}^ω .

DIMOSTRAZIONE. Per la Proposizione II.2.3 l'insieme $\mathbb{U}_e \cap \mathbf{G}$, che è un intorno aperto di I in \mathbf{G} per la topologia di sottospazio, è omeomorfo ad un aperto dello spazio vettoriale reale \mathfrak{g} . Poiché le traslazioni a sinistra $L_a : \mathbb{C}^{n \times n} \ni x \rightarrow ax \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mediante gli elementi a di \mathbf{G} sono omeomorfismi, ogni punto a di \mathbf{G} ha un intorno $U_a = a \cdot (\mathbb{U}_e \cap \mathbf{G})$ omeomorfo ad un aperto di \mathfrak{g} . Consideriamo il corrispondente atlante $\mathcal{A} = \{(U_a, X_a) \mid a \in \mathbf{G}_H(\mathbb{k})\}$, con $X_a(x) = \mathbf{c}(a^{-1}x)$ per $x \in U_a$. Esso definisce su $\mathbf{G}_H(\mathbb{k})$ una struttura differenziale di classe \mathcal{C}^ω per cui valgono le condizioni (1) e (2). Infatti le funzioni di transizione

$$\psi_{a,b} : \mathbf{c}(U_a \cap U_b) \ni X \rightarrow \mathbf{c}(b^{-1}a \cdot \mathbf{c}(X)) \in \mathbf{c}(U_a \cap U_b)$$

sono analitiche reali. \square

OSSERVAZIONE II.2.5. Le $\psi_{a,b}$ sono funzioni *razionali*: si possono esprimere cioè come rapporti di polinomi nei coefficienti delle matrici X .

Ricordiamo le definizioni di alcuni gruppi classici e delle loro algebre di Lie. Indichiamo con I la matrice identità in $\mathbb{C}^{n \times n}$ e con J la matrice antisimmetrica non degenera

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}.$$

$\mathbf{O}(n) = \{a \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid a^\dagger a = I\}$	(gruppo ortogonale),
$\mathbf{SO}(n) = \{a \in \mathbf{O}(n) \mid \det(a) = 1\}$	(gruppo speciale ortogonale),
$\mathfrak{o}(n) = \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid X^\dagger + X = 0\}$	(algebra delle matrici antisimmetriche reali),
$\mathbf{O}(n, \mathbb{C}) = \{a \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid a^\dagger a = I\}$	(gruppo ortogonale complesso),
$\mathbf{SO}(n, \mathbb{C}) = \{a \in \mathbf{O}(n, \mathbb{C}) \mid \det(a) = 1\}$	(gruppo speciale ortogonale complesso),
$\mathfrak{o}(n, \mathbb{C}) = \{X \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid X^\dagger + X = 0\}$	(algebra delle matrici antisimmetriche complesse)
$\mathbf{U}(n) = \{a \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid a^* a = I\}$	(gruppo unitario),
$\mathfrak{u}(n) = \{X \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid X^* + X = 0\}$	(algebra delle matrici anti-hermitiane),
$\mathbf{SU}(n) = \{a \in \mathbf{U}(n) \mid \det(a) = 1\}$	(gruppo speciale unitario)
$\mathfrak{su}(n) = \{X \in \mathfrak{u}(n) \mid \text{traccia}(X) = 0\}$	(algebra delle matrici anti-hermitiane a traccia nulla)
$\mathbf{Sp}(n, \mathbb{C}) = \{a \in \mathbb{C}^{2n \times 2n} \mid a^\dagger J a = J\}$,	(gruppo simplettico complesso),
$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C}) = \{X \in \mathbb{C}^{2n \times 2n} \mid X^\dagger J + JX = 0\}$,	(algebra simplettica complessa)
$\mathbf{Sp}(n, \mathbb{R}) = \{a \in \mathbb{R}^{2n \times 2n} \mid a^\dagger J a = J\}$,	(gruppo simplettico reale),
$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R}) = \{X \in \mathbb{R}^{2n \times 2n} \mid X^\dagger J + JX = 0\}$,	(algebra simplettica reale)
$\mathbf{Sp}(n) = \mathbf{Sp}(n, \mathbb{C}) \cap \mathbf{U}(2n)$	(gruppo unitario quaternionico)
$\mathfrak{sp}(n) = \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C}) \cap \mathfrak{u}(2n)$	(algebra anti-hermitiana quaternionica).

Il gruppo unitario quaternionico si chiama anche *iper-unitario*.

Dal Teorema II.2.4 ricaviamo immediatamente

TEOREMA II.2.6.

$\mathbf{SO}(n)$ è una varietà di classe \mathcal{C}^ω e dimensione $n(n-1)/2$.

$\mathbf{SO}(n, \mathbb{C})$ è una varietà di classe \mathcal{C}^ω e dimensione $n(n-1)$.

$\mathbf{U}(n)$ è una varietà di classe \mathcal{C}^ω e dimensione n^2 .

$\mathbf{Sp}(n, \mathbb{C})$ è una varietà di classe \mathcal{C}^ω e dimensione $2n(2n+1)$.

$\mathbf{Sp}(n, \mathbb{R})$ è una varietà di classe \mathcal{C}^ω e dimensione $n(2n+1)$.

$\mathbf{Sp}(n)$ è una varietà di classe \mathcal{C}^ω e dimensione $n(2n+1)$.

OSSERVAZIONE II.2.7. Tutti i gruppi nel Teorema II.2.6 sono connessi. I gruppi $\mathbf{O}(n)$ ed $\mathbf{O}(n, \mathbb{C})$ sono formati ciascuno da due componenti connesse, omeomorfe ad $\mathbf{SO}(n)$ ed $\mathbf{SO}(n, \mathbb{C})$, rispettivamente. I gruppi $\mathbf{SO}(n)$, $\mathbf{O}(n)$, $\mathbf{U}(n)$, $\mathbf{Sp}(n)$ sono compatti. I gruppi $\mathbf{SO}(n, \mathbb{C})$, $\mathbf{O}(n, \mathbb{C})$, $\mathbf{Sp}(n, \mathbb{C})$, $\mathbf{Sp}(n, \mathbb{R})$ non sono compatti.

OSSERVAZIONE II.2.8. Le matrici antisimmetriche reali e le matrici anti-hermitiane hanno autovalori puramente immaginari. Quindi la trasformata di Cayley è definita su tutte le algebre di Lie $\mathfrak{o}(n)$, $\mathfrak{u}(n)$, $\mathfrak{sp}(n)$.

Oltre ai gruppi di Lie reali e complessi descritti sopra, ricordiamo le definizioni di alcuni gruppi reali non compatti. Sia

$$I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & \\ & -I_q \end{pmatrix},$$

ove abbiamo indicato con I_k la matrice identità $k \times k$. Poniamo allora

$$\mathbf{O}(p, q) = \{a \in \mathbb{R}^{(p+q) \times (p+q)} \mid a^\dagger I_{p,q} a = I_{p,q}\} \quad (\text{gruppo ortogonale di segnatura } (p, q)),$$

$$\mathbf{SO}(p, q) = \mathbf{O}(p, q) \cap \mathbf{SL}_{p+q}(\mathbb{R}) \quad (\text{gruppo speciale ortogonale di segnatura } (p, q)),$$

$$\mathbf{U}(p, q) = \{a \in \mathbf{GL}_{p+q}(\mathbb{C}) \mid a^* I_{p,q} a = I_{p,q}\} \quad (\text{gruppo unitario di segnatura } (p, q)),$$

$$\mathbf{SU}(p, q) = \mathbf{U}(p, q) \cap \mathbf{SL}_{p+q}(\mathbb{C}) \quad (\text{gruppo speciale unitario di segnatura } (p, q)).$$

II.3. I gruppi $\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$, $\mathbf{Sp}(1, \mathbb{C})$, $\mathbf{SO}(3, \mathbb{C})$, $\mathbf{SL}_2(\mathbb{R})$, $\mathbf{SO}(1, 2)$

Sia e_1, e_2 la base canonica di \mathbb{C}^2 . Definiamo una forma alternata non degenere su \mathbb{C}^2 ponendo

$$(2.3.1) \quad v \wedge w = \omega(v, w) \cdot e_1 \wedge e_2, \quad \forall v, w \in \mathbb{C}^2.$$

Il gruppo $\mathbf{Sp}(1, \mathbb{C})$ consiste delle trasformazioni lineari di \mathbb{C}^2 che lasciano invariata la forma (2.3.1) e dunque coincide con $\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$.

Consideriamo ora, sullo spazio $\mathbb{C}^{2 \times 2}$ delle matrici complesse 2×2 la forma bilineare simmetrica

$$(2.3.2) \quad \text{tr}(AB) = \sum_{i,j=1}^2 a_{ij} b_{ji}, \quad \forall A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}.$$

Il sottospazio $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ delle matrici di $\mathbb{C}^{2 \times 2}$ con traccia nulla ha dimensione tre. Una base di $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ consiste delle matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ed in tale base la matrice associata alla restrizione κ ad $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ della forma (2.3.2) è

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ed è quindi non degenere. Le trasformazioni lineari di $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ che lasciano invariante la forma κ formano quindi il gruppo ortogonale complesso $\mathbf{O}(3, \mathbb{C})$.

Per ogni $a \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{C})$, l'applicazione³

$$\text{Ad}(a) : \mathbb{C}^{2 \times 2} \ni X \rightarrow aXa^{-1} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$$

è un isomorfismo dell'anello degli endomorfismi lineari di \mathbb{C}^2 che preserva le tracce. Trasforma quindi $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ in sé e preserva la forma κ .

Abbiamo

PROPOSIZIONE II.3.1. *L'applicazione*

$$(2.3.3) \quad \mathbf{SL}_2(\mathbb{C}) \ni a \longrightarrow \text{Ad}(a) \in \mathbf{SO}(3, \mathbb{C})$$

è un epimorfismo di gruppi con nucleo $\pm I$.

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo, per ogni $a, b, c \in \mathbb{C}$,

$$\kappa \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \right) = \text{tr} \begin{pmatrix} a^2 + bc & 0 \\ 0 & a^2 + bc \end{pmatrix} = 2(a^2 + bc) = -2 \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}.$$

Quindi una trasformazione \mathbb{C} -lineare T di $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ che preservi la forma κ preserva sia la traccia che il determinante delle matrici di $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ e quindi i loro autovalori. A meno di comporre la T con una opportuna $\text{Ad}(a)$, con $a \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$, possiamo quindi supporre che T lasci fissa la matrice $\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e quindi il suo κ -ortogonale

$$H = \Omega^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C} \right\}.$$

Inoltre, poiché H è un piano iperbolico, la τ o lascia invarianti o scambia tra loro le sue due rette isotrope

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{C} \right\} \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{C} \right\}.$$

Se $T \in \mathbf{SO}(3, \mathbb{C})$ allora lascia invarianti ciascuna delle due rette isotrope ed è quindi della forma

$$T \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda a \\ \mu b & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{con } \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

Da

$$2ab = \kappa \left(\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \right) = \kappa \left(\begin{pmatrix} 0 & \lambda a \\ \mu b & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \lambda a \\ \lambda b & 0 \end{pmatrix} \right) = 2\lambda\mu ab, \quad \forall a, b \in \mathbb{C}$$

segue che $0 \neq \mu = \lambda^{-1}$. Se η è un numero complesso con $\eta^2 = \lambda$, abbiamo allora

$$T = \text{Ad} \begin{pmatrix} \eta & 0 \\ 0 & \eta^{-1} \end{pmatrix}.$$

Questo dimostra che la (2.3.3) è un omomorfismo surgettivo e, considerando il caso $\lambda = \mu = 1$, che il suo nucleo è $\pm I$. \square

³La corrispondenza che associa ad ogni $a \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ la trasformazione lineare $\text{Ad}(a) \in \mathbf{GL}_{n \times n}(\mathbb{C})$ definita da $\text{Ad}(a)(X) = aXa^{-1}$ per $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$ si dice la *rappresentazione aggiunta* di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$. Il nucleo della rappresentazione aggiunta è costituito dai multipli dell'identità in $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ e il luogo dei punti fissi di Ad dai multipli dell'identità in $\mathbb{C}^{n \times n}$.

Restringendoci alle matrici a coefficienti reali, otteniamo analogamente

PROPOSIZIONE II.3.2. *L'applicazione*

$$(2.3.4) \quad \mathbf{SL}_2(\mathbb{R}) \ni a \longrightarrow \text{Ad}(a) \in \mathbf{SO}(1, 2)$$

definisce un omomorfismo surgettivo sulla componente connessa dell'identità di $\mathbf{SO}(1, 2)$, con nucleo $\pm I$. \square

OSSERVAZIONE II.3.3. Sia $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ una matrice reale simmetrica di segnatura $(1, 2)$. Allora $\mathbf{SO}(1, 2) \simeq \mathbf{SO}_B(\mathbb{R})$. Gli elementi di $\mathbf{SO}_B(\mathbb{R})$ trasformano in sé il cono $C = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid xBx^\dagger > 0\}$. Esso è formato da due componenti connesse, che possiamo indicare con C_+ e C_- . La componente connessa dell'identità di $\mathbf{SO}_B(\mathbb{R})$ consiste delle trasformazioni x per cui $x(C_+) = C_+$ ed $x(C_-) = C_-$.

Le due componenti connesse si possono evidenziare anche utilizzando la decomposizione di Cartan (Teorema II.13.5). Infatti, posto $B = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -I_2 \end{pmatrix}$, il sottogruppo $\mathbf{SO}(1, 2) \cap \mathbf{U}(3)$ di $\mathbf{SO}(1, 2)$, è un suo sottogruppo compatto massimale, e quindi un suo retratto di deformazione, e consiste delle matrici

$$\begin{pmatrix} \epsilon & \\ & a \end{pmatrix} \quad \text{con } \epsilon = \pm 1, a \in \mathbf{O}(2) \quad \text{e } \det a = \epsilon.$$

II.4. La quadrica di $\mathbb{C}P^5$ ed alcuni omomorfismi di gruppi

Consideriamo lo spazio vettoriale complesso $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$, di dimensione 6, dei due-vettori complessi alternati. Sia e_1, e_2, e_3, e_4 la base canonica di \mathbb{C}^4 . Definiamo una forma bilineare e simmetrica su $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$ ponendo

$$(2.4.1) \quad \alpha \wedge \beta = \langle \alpha | \beta \rangle \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4, \quad \forall \alpha, \beta \in \Lambda^2(\mathbb{C}^4).$$

Nella base canonica

$$(2.4.2) \quad e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_1 \wedge e_4, e_2 \wedge e_3, e_4 \wedge e_2, e_3 \wedge e_4$$

di $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$ la matrice associata alla forma $\langle \cdot | \cdot \rangle$ è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi la forma è non degenera.

La forma $\langle \cdot | \cdot \rangle$ ci permette di rappresentare l'insieme dei piani per l'origine di \mathbb{C}^4 come punti di una quadrica proiettiva. Ricordiamo che ogni elemento di $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$ ha rango pari. L'elemento nullo è quello di rango 0, gli elementi di rango due sono tutti e soli quelli che si possono scrivere nella forma $v_1 \wedge v_2$ con v_1 e v_2 linearmente indipendenti, quelli di rango quattro si possono scrivere nella forma $v_1 \wedge v_2 + v_3 \wedge v_4$ per una base v_1, v_2, v_3, v_4 di \mathbb{C}^4 .

LEMMA II.4.1. *Sia $0 \neq \alpha \in \Lambda^2(\mathbb{C}^4)$. Allora*

- (1) α è isotropo, cioè $\langle \alpha | \alpha \rangle = 0$, se e soltanto se α ha rango due;
- (2) α è anisotropo, cioè $\langle \alpha | \alpha \rangle \neq 0$, se e soltanto se α ha rango quattro;
- (3) se $\alpha = v_1 \wedge v_2$ e $\beta = w_1 \wedge w_2$ sono due elementi di rango due linearmente indipendenti di $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$, allora $\langle \alpha | \beta \rangle = 0$ se e soltanto se i due piani $\langle v_1, v_2 \rangle$ e $\langle w_1, w_2 \rangle$ hanno una retta in comune. \square

Un due-piano di \mathbb{C}^4 si identifica, a meno di un fattore complesso, ad un elemento di rango due di $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$. Quindi, come conseguenza del Lemma II.4.1, possiamo enunciare il

COROLLARIO II.4.2. *La Grassmanniana $\mathbb{G}_{4,2}$ dei due-piani di \mathbb{C}^4 si può identificare alla quadrica proiettiva complessa non degenera di $\mathbb{C}\mathbb{P}^5$.* \square

OSSERVAZIONE II.4.3. $\mathbb{G}_{4,2}$ è quindi una sottovarietà analitica compatta di $\mathbb{C}\mathbb{P}^5$ di dimensione reale 8.

Il gruppo delle trasformazioni \mathbb{C} -lineari di $\Lambda^2(\mathbb{C}^4) \simeq \mathbb{C}^6$ che preservano la forma bilineare simmetrica $\langle \cdot | \cdot \rangle$ è il gruppo ortogonale complesso $\mathbf{O}(6, \mathbb{C})$. Le trasformazioni di $\mathbf{O}(6, \mathbb{C})$ hanno determinante ± 1 . Quelle di determinante 1 formano il sottogruppo normale di indice due $\mathbf{SO}(6, \mathbb{C})$. Più in generale, possiamo considerare il gruppo $\mathbf{CO}(6, \mathbb{C})$ delle trasformazioni *conformi* per la forma $\langle \cdot | \cdot \rangle$, quelle cioè che la trasformano in un suo multiplo per uno scalare diverso da zero.

Abbiamo

PROPOSIZIONE II.4.4. *Per ogni $a \in \mathbf{GL}_4(\mathbb{C})$, l'applicazione \mathbb{C} -lineare*

$$(2.4.3) \quad \lambda(a) : \Lambda^2(\mathbb{C}^4) \rightarrow \Lambda^2(\mathbb{C}^4), \text{ t.c. } \lambda(a)(v_1 \wedge v_2) = a(v_1) \wedge a(v_2), \quad \forall v_1, v_2 \in \mathbb{C}^4$$

soddisfa la condizione

$$(2.4.4) \quad \langle \lambda(a)(\alpha) | \lambda(a)(\beta) \rangle = \det(a) \langle \alpha | \beta \rangle, \quad \forall \alpha, \beta \in \Lambda^2(\mathbb{C}^4)$$

ed è quindi conforme per la forma $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

L'applicazione

$$(2.4.5) \quad \lambda : \mathbf{GL}_4(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbf{CO}(6, \mathbb{C})$$

è un epimorfismo di gruppi con nucleo $\pm I$. Per restrizione otteniamo epimorfismi di gruppi, con nucleo $\pm I$,

$$(2.4.6) \quad \{a \in \mathbf{GL}_4(\mathbb{C}) \mid \det a = \pm 1\} \xrightarrow{\lambda} \mathbf{O}(6, \mathbb{C}),$$

$$(2.4.7) \quad \mathbf{SL}_4(\mathbb{C}) \xrightarrow{\lambda} \mathbf{SO}(6, \mathbb{C}).$$

DIMOSTRAZIONE. La (2.4.4) ed il fatto che $\lambda : \mathbf{GL}_4(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbf{CO}(6, \mathbb{C})$ sia un omomorfismo di gruppi seguono dalle proprietà del determinante. Dimostriamo ora che tale omomorfismo è surgettivo. Sia $\tau \in \mathbf{CO}(6, \mathbb{C})$. Poiché la τ trasforma elementi isotropi di $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$ in elementi isotropi di $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$, possiamo pensarla come una trasformazione che manda piani di \mathbb{C}^4 in piani di \mathbb{C}^4 . Inoltre, poiché due piani che si intersecano in una retta sono elementi isotropi non nulli distinti di $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$ tra loro ortogonali rispetto alla forma $\langle \cdot | \cdot \rangle$, la τ definisce una trasformazione dello spazio proiettivo $\mathbb{C}\mathbb{P}^3$ delle rette per l'origine di \mathbb{C}^4 che preserva le collineazioni.

Per il teorema fondamentale della geometria proiettiva l'applicazione è una omografia, che si ottiene per passaggio al quoziente da un'applicazione $b \in \mathbf{GL}_4(\mathbb{C})$. Riscalando, otteniamo una $a = k \cdot b$, con $0 \neq k \in \mathbb{C}$, tale che $\lambda(a) = \tau$. \square

OSSERVAZIONE II.4.5. $\mathbf{GL}_4(\mathbb{C})$ e $\mathbf{CO}(6, \mathbb{C})$ sono varietà analitiche di dimensione reale 32 e la (2.4.5) è un rivestimento differenziabile a due fogli.

$\mathbf{SL}_4(\mathbb{C})$ ed $\mathbf{SO}(6, \mathbb{C})$ sono varietà analitiche di dimensione reale 30 e la (2.4.7) è un rivestimento differenziabile a due fogli. Poiché $\mathbf{SL}_4(\mathbb{C})$ è semplicemente connessa, essa è il rivestimento universale di $\mathbf{SO}(6, \mathbb{C})$, (quest'ultima varietà ha gruppo fondamentale \mathbb{Z}_2).

La restrizione della forma bilineare simmetrica $\langle \cdot | \cdot \rangle$ al sottospazio reale $\Lambda^2(\mathbb{R}^4) \simeq \mathbb{R}^6$ è non degenere di segnatura $(3, 3)$. Il gruppo delle trasformazioni \mathbb{R} -lineari che la lasciano invariante è quindi il gruppo ortogonale reale di segnatura $(3, 3)$ ed otteniamo perciò

PROPOSIZIONE II.4.6. *L'applicazione*

$$(2.4.8) \quad \mathbf{SL}_4(\mathbb{R}) \xrightarrow{\lambda} \mathbf{SO}(3, 3)$$

è un epimorfismo di $\mathbf{SL}_4(\mathbb{R})$ sulla componente connessa dell'identità di $\mathbf{SO}(3, 3)$, con nucleo $\pm I$. \square

OSSERVAZIONE II.4.7. Il gruppo $\mathbf{SL}_4(\mathbb{R})$ è connesso, ma non semplicemente connesso (ha gruppo fondamentale \mathbb{Z}_2). Il gruppo $\mathbf{SO}(3, 3)$ ha due componenti connesse. $\mathbf{SL}_4(\mathbb{R})$ ed $\mathbf{SO}(3, 3)$ sono varietà analitiche di dimensione reale 15 e la (2.4.8) è un rivestimento differenziabile a due fogli della componente connessa dell'identità di $\mathbf{SO}(3, 3)$.

Introduciamo su $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$ un'involuzione anti- \mathbb{C} -lineare \star , definendola, sugli elementi della base (2.4.2), mediante

$$\begin{aligned} \star e_1 \wedge e_2 &= e_3 \wedge e_4, & \star e_1 \wedge e_3 &= e_4 \wedge e_2, & \star e_1 \wedge e_4 &= e_2 \wedge e_3, \\ \star e_2 \wedge e_3 &= e_1 \wedge e_4, & \star e_4 \wedge e_2 &= e_1 \wedge e_3, & \star e_3 \wedge e_4 &= e_1 \wedge e_2. \end{aligned}$$

Sugli elementi della base canonica la matrice associata alla forma Hermitiana simmetrica

$$(2.4.9) \quad (\alpha | \beta) = \langle \alpha | \star \beta \rangle, \quad \forall \alpha, \beta \in \Lambda^2(\mathbb{C}^4)$$

è la matrice identità.

LEMMA II.4.8. *Il gruppo delle trasformazioni \mathbb{C} -lineari di $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$ che preservano sia la forma simmetrica $\langle \cdot | \cdot \rangle$ che la forma Hermitiana simmetrica $(\cdot | \cdot)$ è isomorfo al gruppo ortogonale $\mathbf{O}(6)$.*

DIMOSTRAZIONE. Infatti

$$V = \{\alpha \in \Lambda^2(\mathbb{C}^4) \mid \star \alpha = \alpha\}$$

è una forma reale⁴ di $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$. La restrizione a V di $\langle \cdot | \cdot \rangle$ e di $(\cdot | \cdot)$ coincidono e definiscono un prodotto scalare su V . Se τ è una trasformazione \mathbb{C} -lineare di $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$ che preserva sia $\langle \cdot | \cdot \rangle$ che $(\cdot | \cdot)$, abbiamo

$$\langle \tau(\alpha) | \tau(\star\beta) \rangle = \langle \alpha | \star\beta \rangle = (\alpha | \beta) = (\tau(\alpha) | \tau(\beta)) = \langle \tau(\alpha) | \star\tau(\beta) \rangle, \quad \forall \alpha, \beta \in \Lambda^2(\mathbb{C}^4).$$

Questo implica che $\star\tau = \tau\star$ e quindi che $\tau(V) = V$, e la restrizione di τ a V definisce un elemento di $\mathbf{O}(6)$. Viceversa, una trasformazione ortogonale su V si estende in modo unico ad una trasformazione \mathbb{C} -lineare su $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$, che preserva sia $\langle \cdot | \cdot \rangle$ che $(\cdot | \cdot)$. \square

PROPOSIZIONE II.4.9. *Per restrizione, la trasformazione λ in (2.4.5), definisce epimorfismi di gruppo*

$$(2.4.10) \quad \{a \in \mathbf{U}(4) \mid \det(a) = \pm 1\} \xrightarrow{\lambda} \mathbf{O}(6),$$

$$(2.4.11) \quad \mathbf{SU}(4) \xrightarrow{\lambda} \mathbf{SO}(6),$$

con nucleo $\pm I$.

DIMOSTRAZIONE. È sufficiente verificare che, se $a \in \mathbf{GL}_4(\mathbb{C})$ e $\lambda(a)$ preserva sia $\langle \cdot | \cdot \rangle$ che $(\cdot | \cdot)$ allora $a \in \mathbf{U}(4)$ e ha determinante ± 1 . Il fatto che $\det(a) = \pm 1$ segue dalla (2.4.4). Osserviamo poi che il fatto che $\lambda(a)$ commuti con l'operatore \star ci dice che la a trasforma due-piani ortogonali in due-piani ortogonali di \mathbb{C}^4 . Da questo ricaviamo che è una trasformazione \mathbb{C} -lineare di \mathbb{C}^4 che preserva l'ortogonalità ed è quindi conforme per il prodotto scalare Hermitiano di \mathbb{C}^4 . Avendo determinante ± 1 è allora unitaria. \square

OSSERVAZIONE II.4.10. $\mathbf{SU}(4)$ ed $\mathbf{SO}(6)$ sono varietà differenziabili analitiche reali connesse e compatte di dimensione 15. Il gruppo $\mathbf{SU}(4)$ è semplicemente connesso e la (2.4.11) il rivestimento universale, a due fogli, di $\mathbf{SO}(6)$.

Fissiamo ora una forma alternata non degenera $\omega \in \Lambda^2([\mathbb{C}^4]^*)$. Possiamo ad esempio scegliere la forma a coefficienti reali

$$(2.4.12) \quad \omega = dx^1 \wedge dx^3 + dx^2 \wedge dx^4,$$

dove abbiamo indicato con dx^1, dx^2, dx^3, dx^4 la base duale della base canonica e_1, e_2, e_3, e_4 di \mathbb{C}^4 .

Ricordiamo che il gruppo simplettico complesso $\mathbf{Sp}(2, \mathbb{C})$ si può identificare al gruppo delle trasformazioni \mathbb{C} -lineari di \mathbb{C}^4 che preservano la forma alternata ω :

$$\mathbf{Sp}(2, \mathbb{C}) = \{a \in \mathbf{GL}_4(\mathbb{C}) \mid \omega(a(v_1), a(v_2)) = \omega(v_1, v_2), \quad \forall v_1, v_2 \in \mathbb{C}^4\}.$$

Possiamo considerare ω come una forma lineare sullo spazio $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$. In particolare,

$$(2.4.13) \quad W = \{\alpha \in \Lambda^2(\mathbb{C}^4) \mid \omega(\alpha) = 0\}$$

è un sottospazio vettoriale complesso, di dimensione cinque, di $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$, e

$$(2.4.14) \quad e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_4, e_2 \wedge e_3, e_3 \wedge e_4, e_1 \wedge e_3 - e_2 \wedge e_4$$

⁴Una forma reale V di uno spazio complesso W è un suo sottospazio vettoriale reale tale che $V \cap iV = \{0\}$ e $W = V \oplus iV$.

è una base di W . La restrizione della forma $\langle \cdot | \cdot \rangle$ a W ha in questa base la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ed è quindi non degenere. Osserviamo ancora che W è l'ortogonale, rispetto alla forma $\langle \cdot | \cdot \rangle$, di $e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4$.

Il gruppo delle trasformazioni \mathbb{C} -lineari di W che preservano la forma $\langle \cdot | \cdot \rangle$ è quindi il gruppo ortogonale complesso $\mathbf{O}(5, \mathbb{C})$. Ogni trasformazione $\tau \in \mathbf{SO}(5, \mathbb{C})$ si estende in modo unico ad una trasformazione $\tilde{\tau} \in \mathbf{SO}(6, \mathbb{C})$, che coincide con τ su W e lascia fisso l'elemento $e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4$. D'altra parte è chiaro che una $a \in \mathbf{GL}_4(\mathbb{C})$ definisce una $\lambda(a)$ che lascia fisso $e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4$ se e soltanto se appartiene al sottogruppo $\mathbf{Sp}(2, \mathbb{C})$. Otteniamo perciò

LEMMA II.4.11. *L'applicazione*

$$(2.4.15) \quad \mathbf{Sp}(2, \mathbb{C}) \ni a \longrightarrow \lambda(a)|_W \in \mathbf{SO}(5, \mathbb{C})$$

è un epimorfismo con nucleo $\pm I$. □

OSSERVAZIONE II.4.12. $\mathbf{Sp}(2, \mathbb{C})$ e $\mathbf{SO}(5, \mathbb{C})$ sono varietà analitiche connesse di dimensione reale 20; $\mathbf{Sp}(2, \mathbb{C})$ è semplicemente connesso e la (II.4.11) è un rivestimento universale, differenziabile e a due fogli, di $\mathbf{SO}(5, \mathbb{C})$.

La restrizione della forma bilineare simmetrica $\langle \cdot | \cdot \rangle$ al sottospazio reale

$$W_{\mathbb{R}} = W \cap \Lambda^2(\mathbb{R}^4) = \{\alpha \in \Lambda^2(\mathbb{R}^4) \mid \omega(\alpha) = 0\}$$

è non degenere ed ha segnatura $(3, 2)$. Poiché il gruppo delle trasformazioni che preservano una forma bilineare simmetrica di segnatura $(3, 2)$ è il gruppo ortogonale $\mathbf{O}(2, 3)$ di segnatura $(2, 3)$, otteniamo

PROPOSIZIONE II.4.13. *La restrizione dell'applicazione λ in (2.4.5) definisce un omomorfismo di gruppi*

$$(2.4.16) \quad \mathbf{Sp}(2, \mathbb{R}) \ni a \longrightarrow \lambda(a)|_{W_{\mathbb{R}}} \in \mathbf{SO}(2, 3),$$

surgettivo sulla componente connessa dell'identità di $\mathbf{SO}(2, 3)$, con nucleo $\pm I$. □

OSSERVAZIONE II.4.14. $\mathbf{Sp}(2, \mathbb{R})$ e $\mathbf{SO}(2, 3)$ sono varietà analitiche di dimensione reale 10. $\mathbf{Sp}(2, \mathbb{R})$ è connesso e semplicemente connesso, $\mathbf{SO}(2, 3)$ consiste di due componenti connesse e la (2.4.16) il rivestimento universale, differenziabile e a due fogli, della sua componente connessa dell'identità.

L'involuzione anti- \mathbb{C} -lineare \star lascia invariante il sottospazio W e trasforma l'elemento $e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4$ nel suo opposto. In particolare, gli elementi di W che sono lasciati fissi da \star formano un sottospazio vettoriale reale $L_{\mathbb{R}}$ di dimensione cinque su cui la $\langle \cdot | \cdot \rangle$ definisce un prodotto scalare Euclideo. Otteniamo perciò:

PROPOSIZIONE II.4.15. *La restrizione dell'applicazione λ in (2.4.5) definisce un epimorfismo di gruppi*

$$(2.4.17) \quad \mathbf{Sp}(2) \ni a \longrightarrow \lambda(a)|_{L_{\mathbb{R}}} \in \mathbf{SO}(5),$$

con nucleo $\pm I$. □

OSSERVAZIONE II.4.16. $\mathbf{Sp}(2)$ e $\mathbf{SO}(5)$ sono varietà analitiche connesse e compatte di dimensione reale 10. $\mathbf{Sp}(2)$ è semplicemente connessa e la (2.4.17) è il rivestimento universale, differenziabile e a due fogli, di $\mathbf{SO}(5)$.

II.5. Varietà di Stiefel reali

DEFINIZIONE II.5.1. La *varietà di Stiefel reale* $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$ è l'insieme degli m -riferimenti ortogonali di \mathbb{R}^n . I suoi punti sono cioè le m -uple $\vec{v} = (v_1, \dots, v_m)$ di vettori ortonormali di \mathbb{R}^n .

Identificando $\vec{v} = (v_1, \dots, v_m)$ alla matrice $n \times m$ con colonne v_1, \dots, v_m otteniamo un'immersione naturale di $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$ nello spazio Euclideo \mathbb{R}^{nm} . Consideriamo su $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$ la topologia di sottospazio.

La varietà di Stiefel $\mathbb{V}_{n,1}(\mathbb{R})$ è la sfera $(n-1)$ -dimensionale $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$; è poi $\mathbb{V}_{n,n-1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbf{SO}(n)$, $\mathbb{V}_{n,n}(\mathbb{R}) \simeq \mathbf{O}(n)$. Le varietà di Stiefel reali generalizzano quindi, allo stesso tempo, le sfere, i gruppi ortogonali ed i gruppi speciali ortogonali.

TEOREMA II.5.2. *La varietà di Stiefel $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$ è una varietà analitica compatta di dimensione $\frac{m(2n-m-1)}{2}$.*

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo già considerato i casi $m = 1$, $m = n - 1$, $m = n$. Supporremo quindi nella discussione che segue che $1 < m \leq n - 2$.

Poiché

$$\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{M}(n \times m, \mathbb{R}) \mid A^\dagger A = I_m\},$$

ed abbiamo l'inclusione naturale

$$\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R}) \subset \underbrace{S^{n-1} \times \dots \times S^{n-1}}_{m \text{ volte}} \subset \mathbb{R}^{nm},$$

il sottospazio $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$ di \mathbb{R}^{nm} è compatto perché chiuso e limitato.

Descriviamo ora un atlante di carte locali di $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$.

Definiamo in primo luogo una carta locale con centro in $e = (e_1, \dots, e_m)$, dove abbiamo indicato con e_1, \dots, e_n la base canonica di \mathbb{R}^n . Sia U_e l'aperto formato dalle matrici $v = (v_1, \dots, v_m) \in \mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$ tali che

$$(2.5.1) \quad \det \begin{pmatrix} v_1^1 & \cdots & v_j^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1^j & \cdots & v_j^j \end{pmatrix} > 0, \quad \text{per } 1 \leq j \leq m.$$

Vogliamo dimostrare che l'applicazione $x_e : U_e \rightarrow B^{n-1} \times \dots \times B^{n-j} \times \dots \times B^{n-m}$ definita da

$$x_e(v) = (v_1^2, \dots, v_1^n; \dots; v_j^{j+1}, \dots, v_j^n; \dots; v_m^{m+1}, \dots, v_m^n).$$

è un omeomorfismo. La x_e è senz'altro ben definita, continua ed aperta. Sarà quindi sufficiente dimostrare che la x_e è bigettiva. A questo scopo dimostriamo per ricorrenza su $k = 1, \dots, m$ che

$$(P_k) \left\{ \begin{array}{l} \forall (w_1, \dots, w_k) \in B^{n-1} \times \dots \times B^{n-k}, \exists!(u_1, \dots, u_k) \in \bar{B}^1 \times \dots \times \bar{B}^k \text{ tali che} \\ \left(\begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & \dots & u_k \\ w_1 & w_2 & \dots & w_k \end{array} \right) \in \mathbb{V}_{n,k} \text{ e } \det \begin{pmatrix} v_1^1 & \dots & v_j^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_i^j & \dots & v_j^j \end{pmatrix} > 0 \text{ per } 1 \leq j \leq k. \end{array} \right.$$

Per $k = 1$ abbiamo

$$v_1^1 = \sqrt{1 - \sum_{i=2}^n |v_1^i|^2}.$$

Supponiamo ora $k \geq 1$ e che valga la (P_k) . Abbiamo quindi già ottenuto i vettori v_1, \dots, v_k e la condizione che la diseuguaglianza in (2.5.1) valga per $j = k$, ci dice che $v_1, \dots, v_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ è una base di \mathbb{R}^n . Utilizzando il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt possiamo ottenere in modo unico una base ortonormale $a = (a_1, \dots, a_m)$ ponendo

$$\begin{cases} a_i = v_i & \text{se } 1 \leq i \leq k, \\ a_i = \lambda_i \left(e_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_j^i a_j \right) & \text{con } \lambda_i > 0, \text{ se } k < i \leq n. \end{cases}$$

Qui $a_j^i = (e_i | a_j)$ sono le componenti i -esime del vettore a_j . I vettori a_i con $i > k$ sono definiti per ricorrenza, in quanto la definizione di ciascuno di essi utilizza i vettori precedenti, e i loro coefficienti dipendono analiticamente dai coefficienti v_h^j per $1 \leq h \leq k$ e $h < j \leq n$.

Osserviamo ora che

$$a^{-1}(v_1, \dots, v_{k+1}) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ \xi_1^{k+1} & \dots & \xi_k^{k+1} & \xi_{k+1}^{k+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \xi_1^n & \dots & \xi_k^n & \xi_{k+1}^n \end{pmatrix}$$

I coefficienti ξ_h^j di questa matrice, ad eccezione del coefficiente ξ_{k+1}^{k+1} , sono funzioni algebriche dei v_h^j per $1 \leq h \leq k+1$ ed $h < k \leq n$. Se vogliamo che la matrice v soddisfi la diseuguaglianza in (2.5.1) per $j = k+1$ occorre scegliere

$$\xi_{k+1}^{k+1} = \sqrt{1 - \sum_{j=k+2}^n |w_{k+1}^j|^2}.$$

Otteniamo allora i coefficienti di v_{k+1} moltiplicando $a^{-1}(v_1, \dots, v_k, v_{k+1})$ a sinistra per a . Questo dimostra (P_{k+1}) e quindi per ricorrenza la (P_k) vale per tutti gli interi k con $1 \leq k \leq m$.

Otteniamo un atlante analitico reale $\mathcal{A} = \{(U_a, x_a) \mid a \in \mathbf{O}(n)\}$ su $\mathbb{V}_{m,n}(\mathbb{R})$ ponendo $U_a = a \cdot U_e$ ed $x_a(v) = x_e(a^{-1}v)$ per $v = (v_1, \dots, v_m) \in U_a$.

In particolare

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R}) = \sum_{h=1}^m (n-h) = nm - \frac{m(m+1)}{2}.$$

□

Il gruppo speciale ortogonale $\mathbf{SO}(n)$ opera transitivamente sulle varietà di Stiefel $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$ per ogni $1 \leq m \leq n-1$. Lo stabilizzatore di un punto è isomorfo al gruppo $\mathbf{SO}(n-m)$. Quindi:

PROPOSIZIONE II.5.3. *Sia $1 \leq m < n$. La varietà di Stiefel $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$ è connessa per archi ed è omeomorfa allo spazio omogeneo $\mathbf{SO}(n)/\mathbf{SO}(n-m)$. Abbiamo la successione esatta di omotopia⁵*

$$(2.5.2) \quad \begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \pi_h(\mathbf{SO}(n-m)) & \longrightarrow & \pi_h(\mathbf{SO}(n)) & \longrightarrow & \pi_h(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})) \\ & & \longrightarrow & \pi_{h-1}(\mathbf{SO}(n-m)) & \longrightarrow & \cdots & \\ \cdots & \longrightarrow & \pi_1(\mathbf{SO}(n-m)) & \longrightarrow & \pi_1(\mathbf{SO}(n)) & \longrightarrow & \pi_1(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})) \\ & & \longrightarrow & 0. & & & \end{array}$$

Siano k, m, n interi con $1 \leq k < m < n$. L'applicazione

$$(2.5.3) \quad \mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R}) \ni (v_1, \dots, v_m) \rightarrow (v_1, \dots, v_k) \in \mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{R})$$

è una fibrazione localmente banale con fibra tipica $\mathbb{V}_{n-k,m-k}(\mathbb{R})$. Otteniamo quindi una successione esatta in omotopia

$$(2.5.4) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & & \cdots & \longrightarrow & \pi_{h+1}(\mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{R})) \\ \longrightarrow & \pi_h(\mathbb{V}_{n-k,m-k}(\mathbb{R})) & \longrightarrow & \pi_h(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})) & \longrightarrow & \pi_h(\mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{R})) \\ \longrightarrow & \pi_{h-1}(\mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{R})) & \longrightarrow & \cdots & & & \end{array}$$

Otteniamo perciò la

PROPOSIZIONE II.5.4. *Se $1 \leq m < n$, la varietà di Stiefel reale $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$, è $(n-m-1)$ -connessa e*

$$(2.5.5) \quad \pi_{n-m}(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } n-m \text{ è pari, o } m=1, \\ \mathbb{Z}_2 & \text{se } n-m \text{ è dispari ed } m \geq 2. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Ragioniamo per ricorrenza su $m \geq 1$. Poiché, come abbiamo osservato in precedenza, $\mathbb{V}_{n,1}(\mathbb{R}) = S^{n-1}$, la tesi è vera se $m=1$. Supponiamo allora che $m > 1$ e che la tesi sia vera per le varietà di Stiefel reali $\mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{R})$ con $1 \leq k < m$. Consideriamo la successione esatta (2.5.4) con $k=m-1$. Se $h < n-m$, allora $\pi_h(\mathbb{V}_{n-m+1,1}(\mathbb{R})) = \pi_h(S^{n-m}) = 0$, e $\pi_h(\mathbb{V}_{n,m-1}(\mathbb{R})) = 0$ per l'ipotesi induttiva. Quindi anche $\pi_h(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})) = 0$.

Dimostriamo ora la (2.5.5). Sappiamo che essa vale per $m=1$.

⁵Per semplicità in questa, e nelle altre successioni esatte in questo paragrafo ometteremo di indicare il punto base.

Esaminiamo a parte il caso $m = 2$. Per $m = 2$, $k = 1$ ed $h = n - 2$, la (2.5.4) dà:

$$(2.5.6) \quad \mathbb{Z} = \pi_{n-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{\Delta_*} \mathbb{Z} = \pi_{n-2}(S^{n-2}) \longrightarrow \pi_{n-2}(\mathbb{V}_{n,2}) \longrightarrow 0.$$

Per calcolare l'applicazione Δ_* in (2.5.6), consideriamo il diagramma commutativo di fibrazioni

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{SO}(n-1) & \longrightarrow & \mathbf{SO}(n) & \longrightarrow & S^{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ \mathbb{V}_{n-1,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{V}_{n,2}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & S^{n-1}. \end{array}$$

Otteniamo allora un diagramma commutativo

$$(2.5.7) \quad \begin{array}{ccccc} \pi_{n-1}(S^{n-1}) & \xrightarrow{\Delta_*} & \pi_{n-2}(\mathbf{SO}(n-1)) & \longrightarrow & \pi_{n-2}(\mathbf{SO}(n)) \\ \parallel & & \downarrow p_* & & \downarrow \\ \pi_{n-1}(S^{n-1}) & \xrightarrow{\Delta_*} & \pi_{n-2}(\mathbb{V}_{n-1,1}(\mathbb{R})) & \longrightarrow & \pi_{n-2}(\mathbb{V}_{n,2}(\mathbb{R})). \end{array}$$

Prima di procedere nella dimostrazione della proposizione, premettiamo alcuni risultati relativi al gruppo ortogonale.

LEMMA II.5.5. Consideriamo l'applicazione $\Psi : S^n \times S^n \rightarrow S^n$ definita da

$$(2.5.8) \quad S^n \times S^n \ni (x, y) \rightarrow \Psi(x, y) = y - 2(x|y)x \in S^n.$$

Per ogni $x \in S^n$, la $S^n \ni y \rightarrow F(x, y) \in S^n$ ha grado (-1) .

Per ogni $y \in S^n$, la $S^n \ni x \rightarrow F(x, y) \in S^n$ ha grado $1 - (-1)^n$, cioè 2 se n è dispari e 0 se n è pari.

DIMOSTRAZIONE. Sia e_0, e_1, \dots, e_n la base canonica di \mathbb{R}^{n+1} .

Fissato $x = e_1$, la $y \rightarrow F(e_1, y)$ è la sospensione della

$$S^1 \ni (x_0, x_1) \rightarrow (x_0, -x_1) \in S^1,$$

che possiamo anche scrivere, mediante l'inclusione $S^1 \subset \mathbb{C}$, come

$$S^1 \ni z \rightarrow \bar{z} = z^{-1} \in S^1.$$

Quindi la $y \rightarrow F(e_1, y)$ ha grado (-1) e perciò tutte le $y \rightarrow f_x(y) = F(x, y)$ hanno grado (-1) .

Per dimostrare che le $x \rightarrow \psi_y(x) = F(x, y)$ hanno grado $1 - (-1)^n$, poiché S^n è connesso per archi, possiamo limitarci a considerare il caso speciale in cui $y = -e_n$. Scriviamo per semplicità $\psi = \psi_{-e_n}$. Consideriamo quindi l'applicazione

$$S^n \ni x = (x_n, \dots, x_1) \rightarrow \psi(x) = (2x_n x_0, \dots, 2x_n x_{n-1}, 2x_n^2 - 1) = (2x_n) \cdot x - e_n \in S^n.$$

Abbiamo $\psi(x) = \psi(-x)$. Quindi, se $a : S^n \ni x \rightarrow -x \in S^n$ è l'applicazione antipodale, $\psi = \psi \circ a$. Quindi, poiché il grado della mappa antipodale è $(-1)^{n+1}$, da

$$\deg(\psi) = \deg(\psi \circ a) = \deg(\psi) \cdot (-1)^{n+1}$$

otteniamo che $\deg(\psi) = 0$ se n è pari.

Consideriamo ora il caso in cui n sia dispari. Osserviamo che $\psi(S^{n-1}) = \{-e_0\}$. Possiamo quindi definire due applicazioni

$$\psi_+(x) \begin{cases} \psi(x) & \text{se } x \in S_+^n, \\ -e_0 & \text{se } x \in S_-^n, \end{cases}, \quad \psi_-(x) \begin{cases} -e_0 & \text{se } x \in S_+^n, \\ \psi(x) & \text{se } x \in S_-^n. \end{cases}$$

L'elemento definito da ψ in $\pi_n(S^n, e_0)$ è la somma delle classi di omotopia di ψ_+ e ψ_- . Poiché $\psi_- = \psi_+ \circ a$, abbiamo $\deg(\psi_-) = \deg(\psi_+)$, perché la mappa antipodale ha grado 1. Quindi $\deg(\psi) = 2 \deg(\psi_+)$. Osserviamo ora che $\psi_+(x) \neq -x$ per ogni $x \in S^n$. Quindi

$$S^n \times I \ni (x, t) \rightarrow \Psi_+(x, t) = \frac{(1-t)\psi_+(x) + tx}{|(1-t)\psi_+(x) + tx|} \in S^n$$

è un'omotopia di ψ_+ con l'identità. Ciò dimostra che ψ_+ ha grado 1, e quindi ψ ha grado 2. \square

La matrice della simmetria σ_x rispetto al vettore $x = (x_0, \dots, x_n) \in S^n$ è la

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 1 - 2x_0^2 & -2x_0x_1 & \dots & -2x_0x_n \\ -2x_0x_1 & 1 - 2x_1^2 & \dots & -2x_1x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -2x_0x_n & -2x_1x_n & \dots & 1 - 2x_n^2 \end{pmatrix}.$$

Il determinante di σ_x è (-1) . Definiamo $\phi_n : S^n \rightarrow \mathbf{SO}(n+1)$ mediante

$$\phi_n : S^{n-1} \ni x \rightarrow \sigma_x \circ \sigma_{e_0}.$$

La restrizione di ϕ_n alla semisfera superiore $S_+^{n+1} = S^n \cap \{x_n \geq 0\}$ trasforma la coppia (S_+^n, S^{n-1}) nella coppia $(\mathbf{SO}(n+1), (\mathbf{SO}(n)))$. Consideriamo l'applicazione $p : \mathbf{SO}(n+1) \ni g \rightarrow g(e_n) \in S^n$. Abbiamo

$$\begin{aligned} p(\phi(x)) &= \phi(x)(e_n) = \sigma_x \circ \sigma_{e_0}(e_n) \\ &= \sigma_x(e_0) = -\psi_+(x) \quad \forall x \in S_+^n. \end{aligned}$$

Possiamo quindi considerare l'estensione di $p \circ \phi$ che si ottiene mandando tutta la semisfera S_-^n nel punto e_n . L'applicazione che si ottiene è la $a \circ \psi_+$, ed ha quindi, poiché ψ_+ ha grado 1, grado uguale a $(-1)^{n+1}$. Osserviamo infine che la restrizione di ϕ_n all'equatore è la ϕ_{n-1} .

Questa applicazione ci permette di descrivere, nella successione esatta

$$\mathbb{Z} = \pi_n(S^n) \xrightarrow{\Delta_*} \pi_{n-1}(\mathbf{SO}(n)) \xrightarrow{\iota_*} \pi_{n-1}(\mathbf{SO}(n+1)) \longrightarrow 0$$

il nucleo della ι_* . Abbiamo infatti

PROPOSIZIONE II.5.6. *Il nucleo di ι_* è il sottogruppo ciclico generato da $\alpha = \Delta_*(\text{id}_{S^n})$. L'applicazione $\phi_{n-1} : S^{n-1} \rightarrow \mathbf{SO}(n)$ rappresenta l'elemento $(-1)^{n+1}\alpha$.*

Utilizziamo ora il diagramma commutativo (2.5.7). Poiché l'immagine $p_* \circ \Delta_*$ della classe di $\text{id}_{S^{n-1}}$ è 0 o $2[\text{id}_{S^{n-2}}]$ a seconda che n sia dispari o pari, otteniamo la (2.5.5). \square

II.6. Varietà di Grassmann

Indichiamo con $\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})$ l'insieme dei sottospazi vettoriali di dimensione m di \mathbb{R}^n . Sia $\mathbb{M}(n \times m, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{nm}$ lo spazio vettoriale delle matrici reali $n \times m$, ed indichiamo con $\mathbb{M}(n \times m, m, \mathbb{R})$ l'aperto delle matrici di rango m di $\mathbb{M}(n \times m, \mathbb{R})$. Abbiamo una bigezione di $\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})$ sul quoziente

$$\mathbb{M}(n \times m, m, \mathbb{R}) / \sim, \quad \text{ove } X \sim Y \Leftrightarrow \exists a \in \mathbf{GL}(m, \mathbb{R}) \text{ tale che } X = Ya.$$

Questo ci permette di definire la topologia di $\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})$.

PROPOSIZIONE II.6.1. *Il quoziente $\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})$ è uno spazio topologico di Hausdorff, connesso e compatto.*

DIMOSTRAZIONE. Per verificare che $\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})$ è connesso e compatto, basta osservare che è uno spazio omogeneo per l'azione transitiva del gruppo speciale ortogonale $\mathbf{SO}(n)$. Lo stabilizzatore di un punto è isomorfo al sottogruppo chiuso $\mathbf{S}(\mathbf{O}(m) \times \mathbf{O}(n-m))$ e quindi $\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})$ è di Hausdorff. \square

LEMMA II.6.2. *Sia $\mathcal{B} \simeq \mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ l'insieme delle basi di \mathbb{R}^n .*

Se $\vec{\epsilon} = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in \mathcal{B}$, indichiamo con $\pi_{\vec{\epsilon}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ la proiezione che associa a $v = \sum_{i=1}^n v^i \epsilon_i$ l'elemento $(v^1, \dots, v^m) \in \mathbb{R}^m$.

L'insieme

$$U_{\vec{\epsilon}} = \{p \in \mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R}) \mid \pi_{\vec{\epsilon}}(p) = \mathbb{R}^m\}$$

è aperto in $\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})$ e l'applicazione

$$\phi_{\vec{\epsilon}} : \mathbb{M}(m \times (n-m), \mathbb{R}) \longrightarrow U_{\vec{\epsilon}}$$

che associa alla matrice $(x_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m, \\ m < j \leq n}}$ l' m -piano

$$\left\langle \epsilon_1 + \sum_{j=m+1}^n x_{1,j} \epsilon_j, \dots, \epsilon_m + \sum_{j=m+1}^n x_{m,j} \epsilon_j \right\rangle$$

è un omeomorfismo di $\mathbb{M}(m \times (n-m), \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{m(n-m)}$ su $U_{\vec{\epsilon}}$.

Abbiamo perciò

PROPOSIZIONE II.6.3. *Il quoziente $\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})$ è una varietà topologica connessa e compatta di dimensione $m(n-m)$.*

PROPOSIZIONE II.6.4. *Se $\vec{\epsilon} \in \mathcal{B}$, indichiamo con $x_{\vec{\epsilon}} : U_{\vec{\epsilon}} \rightarrow \mathbb{M}(m \times (n-m), \mathbb{R})$ l'inversa di $\phi_{\vec{\epsilon}}$. La famiglia $\mathcal{A} = \{U_{\vec{\epsilon}}, x_{\vec{\epsilon}}\}_{\vec{\epsilon} \in \mathcal{B}}$ è un atlante analitico di $\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})$, in cui le funzioni di transizione sono razionali.*

DEFINIZIONE II.6.5. $\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})$, con la struttura di varietà analitica reale definita dall'atlante $\{U_{\vec{\epsilon}}, x_{\vec{\epsilon}}\}$, si dice la *varietà di Grassmann degli m -piani di \mathbb{R}^n* .

Osserviamo che $\mathbb{G}_{n,1} \simeq \mathbb{RP}^{n-1}$ e quindi le varietà di Grassmann reali costituiscono una classe di varietà che comprende gli spazi proiettivi reali.

OSSERVAZIONE II.6.6. Otteniamo un atlante di $\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})$ facendo variare $\vec{\epsilon}$ tra gli elementi della forma $(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})$ con $1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n$, $1 \leq i_{m+1} < \dots < i_n \leq n$, ottenendo così un atlante di cardinalità finita $\binom{n}{m}$.

PROPOSIZIONE II.6.7. *Fissato un prodotto scalare su \mathbb{R}^n , l'applicazione*

$$(2.6.1) \quad \mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R}) \ni p \rightarrow p^\perp \in \mathbb{G}_{n,n-m}(\mathbb{R})$$

che associa ad ogni m -piano p l' $(n-m)$ -piano ad esso ortogonale è un diffeomorfismo.⁶

Nello studio dell'omotopia delle varietà di Grassmann potremo quindi supporre nel seguito che $n \geq 2m$.

Consideriamo l'applicazione naturale

$$(2.6.2) \quad \mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})$$

che associa ad un sistema $\vec{v} \in \mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$ di m vettori ortonormali il sottospazio $p \in \mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})$ da essi generato. La (2.6.2) è una fibrazione localmente banale con fibra omeomorfa al gruppo $\mathbf{O}(m)$. Abbiamo quindi la successione esatta:

$$(2.6.3) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & & \cdots & \longrightarrow & \pi_{h+1}(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})) \\ \longrightarrow & \pi_h(\mathbf{O}(m)) & \longrightarrow & \pi_h(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})) & \longrightarrow & \pi_h(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})) & \\ & \longrightarrow & \pi_{h-1}(\mathbf{O}(m)) & \longrightarrow & \cdots & & \end{array}$$

LEMMA II.6.8. *Per ogni intero non negativo h ed ogni coppia d'interi positivi m, k , con $m \leq k$, le applicazioni $\iota_* : \pi_h(\mathbf{O}(m)) \rightarrow \pi_h(\mathbb{V}_{k+m,m}(\mathbb{R}))$ hanno immagine nulla.*

DIMOSTRAZIONE. Rappresentiamo $\mathbb{V}_{k+m,m}(\mathbb{R})$ come lo spazio delle matrici reali M di tipo $(k+m) \times m$ tali che ${}^t M M = I_m$. Allora l'inclusione $\iota : \mathbf{O}(m) \hookrightarrow \mathbb{V}_{k+m,m}(\mathbb{R})$ identifica $\mathbf{O}(m)$ al sottospazio delle matrici

$$M_g = \begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{con } g \in \mathbf{O}(m).$$

L'omotopia $F : \mathbf{O}(m) \times I \rightarrow \mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$ definita da

$$F(g, t) = \begin{pmatrix} g \cos^2(t\pi/2) + I_m \sin^2(t\pi/2) \\ (g - I_m) \sin(t\pi/2) \cos(t\pi/2) \\ 0_{n-2m,m} \end{pmatrix}$$

definisce una retrazione di deformazione di $\mathbf{O}(m)$ sul punto base di $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$. Da questo segue la tesi. \square

In particolare, dalla successione esatta di Serre otteniamo le successioni esatte corte:

$$(2.6.4) \quad 0 \rightarrow \pi_h(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})) \longrightarrow \pi_h(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})) \longrightarrow \pi_{h-1}(\mathbf{O}(m)) \rightarrow 0.$$

Abbiamo perciò, tenuto conto dell'omeomorfismo (2.6.1),

TEOREMA II.6.9. *Siano $1 \leq m < n$ e $\nu = \min\{m, n-m\}$. Per ogni $h \geq 1$ abbiamo*

$$(2.6.5) \quad \pi_h(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})) = \pi_h(\mathbb{V}_{n,\nu}(\mathbb{R})) \oplus \pi_{h-1}(\mathbf{O}(\nu)).$$

⁶Per $m = 1$, l'applicazione è una polarità proiettiva rispetto ad una quadrica senza punti reali.

In particolare, poiché $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$ è semplicemente connesso per $n-m > 1$, otteniamo che

$$(2.6.6) \quad \pi_1(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}_2 \quad \forall n \geq 3 \quad \text{e} \quad 1 \leq m < n$$

ed inoltre

$$(2.6.7) \quad \pi_h(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})) = \begin{cases} \pi_{h-1}(\mathbf{SO}(v)) & \text{se } 2 \leq h < n-v, \\ \mathbb{Z} \oplus \pi_{n-v-1}(\mathbf{SO}(v)) & \text{se } h = n-v \text{ è pari o } v = 1, \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \pi_{n-v-1}(\mathbf{SO}(v)) & \text{se } h = n-v \text{ è dispari e } v \geq 3. \end{cases}$$

Se $n' > n$, abbiamo un'inclusione naturale

$$(2.6.8) \quad \mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathbb{G}_{n',m}(\mathbb{R}).$$

PROPOSIZIONE II.6.10. *L'applicazione $\pi_h(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})) \rightarrow \pi_h(\mathbb{G}_{n',m}(\mathbb{R}))$ indotta dalla (2.6.8) è un isomorfismo per ogni $h < \min\{m, n-m\}$ ed ogni $n' > n$.*

DIMOSTRAZIONE. Infatti, se $h < n-m$, e consideriamo la partizione cellulare di $\mathbb{G}_{n',m}(\mathbb{R})$ data dalle celle di Schubert, lo scheletro $h+1$ -dimensionale di $\mathbb{G}_{n',m}(\mathbb{R})$ è contenuto in $\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})$. \square

II.7. Varietà di Stiefel e di Grassmann complesse

In modo analogo definiamo le varietà di Stiefel e di Grassmann complesse.

DEFINIZIONE II.7.1. La *varietà di Stiefel complessa* $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})$ è costituita dalle m -uple di vettori ortonormali di \mathbb{C}^n .

Possiamo identificare $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})$ all'insieme delle matrici complesse Z , di tipo $n \times m$, che soddisfano $Z^*Z = I_m$. Osserviamo che $\mathbb{V}_{n,1}(\mathbb{C}) \simeq S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$, che $\mathbb{V}_{n,n}(\mathbb{C}) \simeq \mathbf{U}(n)$ e che $\mathbb{V}_{n-1}(\mathbb{C}) \simeq \mathbf{SU}(n)$. Le varietà di Stiefel complesse generalizzano quindi le sfere di dimensione dispari e i gruppi unitari.

Abbiamo:

PROPOSIZIONE II.7.2. *Per ogni $0 \leq m < n$, la varietà di Stiefel $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})$ è una varietà analitica di Hausdorff, di dimensione reale $m(2n-m)$, compatta e connessa per archi. Essa è omeomorfa allo spazio omogeneo $\mathbf{SU}(n)/\mathbf{SU}(n-m)$.*

DIMOSTRAZIONE. $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})$ è uno spazio topologico di Hausdorff compatto perché è un sottoinsieme chiuso e limitato di \mathbb{C}^{nm} . Possiamo definire la sua struttura differenziale descrivendo una carta locale con centro in un punto $\vec{v} = (v_1, \dots, v_m)$. Completiamo v_1, \dots, v_m ad una base ortonormale (v_1, \dots, v_n) di \mathbb{C}^n . Assegnamo numeri complessi $z_{h,j}$ per $1 \leq j < h \leq n$ e numeri reali y_j per $j = 1, \dots, m$, tali che $y_j^2 + \sum_{h=j+1}^n |z_{h,j}|^2 < 1$ per ogni $j = 1, \dots, m$. Risulteranno allora univocamente determinati numeri complessi $z_{h,j}$, per $1 \leq h \leq j \leq m$ tali che $\text{Im}(z_{j,j}) = y_j$, $\text{Re}(z_{j,j}) > 0$ e detta Z la matrice $Z = (z_{h,j})_{\substack{1 \leq h \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$, sia $Z^*Z = I_m$. I numeri reali y_j e le parti reali e immaginarie degli $z_{h,j}$ con $1 \leq j < h \leq n$ sono le coordinate di una carta locale con centro in \vec{v} . La dimensione della varietà è quindi

$$\sum_{j=1}^m [2(n-j) + 1] = m(2n+1) - m(m+1) = 2nm - m^2 = m(2n-m).$$

Chiaramente il gruppo speciale unitario $\mathbf{SU}(n)$ opera transitivamente su $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})$, con isotropia $\mathbf{SU}(n-m)$. Quindi $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})$ è omeomorfo al quoziente $\mathbf{SU}(n)/\mathbf{SU}(n-m)$ e perciò compatto e connesso per archi. \square

PROPOSIZIONE II.7.3. *La varietà di Stiefel complessa $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})$ è $(2n-2m)$ -connessa e $\pi_{2n-2m+1}(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})) = \mathbb{Z}$.*

DIMOSTRAZIONE. Fissato un intero k con $1 \leq k < m$, l'applicazione

$$(2.7.1) \quad \mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C}) \ni (v_1, \dots, v_m) \rightarrow (v_1, \dots, v_k) \in \mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{C}).$$

è una fibrazione localmente banale con fibra tipica $\mathbb{V}_{n-k,m-k}(\mathbb{C})$. Otteniamo quindi una successione esatta

$$(2.7.2) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & & \dots & \longrightarrow & \pi_{h+1}(\mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{C})) \\ & \longrightarrow & \pi_h(\mathbb{V}_{n-k,m-k}(\mathbb{C})) & \longrightarrow & \pi_h(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})) & \longrightarrow & \pi_h(\mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{C})) \\ & & \longrightarrow & \pi_{h-1}(\mathbb{V}_{n-k,m-k}(\mathbb{C})) & \longrightarrow & \dots & \end{array}$$

Ragioniamo per ricorrenza su $m \geq 1$. Per $m = 1$, $\mathbb{V}_{n,1}(\mathbb{C}) = S^{2n-1}$, e sappiamo che la sfera di dimensione $(2n-1)$ è $(2n-2)$ -connessa. Supponiamo ora che $m > 1$ e che, per ogni r con $1 \leq r < m$ la varietà di Stiefel complessa $\mathbb{V}_{n,r}(\mathbb{C})$ sia $(2n-2r)$ -connessa. Utilizziamo la successione esatta (2.7.2) con $k = 1$. Poiché per l'ipotesi induttiva $\mathbb{V}_{n-1,m-1}(\mathbb{C})$ è $(2n-2m)$ -connesso e $\mathbb{V}_{n,1}(\mathbb{C}) = S^{2n-1}$ è $(2n-2)$ -connesso, otteniamo che $\pi_h(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C}))$ è $(2n-2)$ -connesso.

Utilizziamo ancora la successione esatta (2.7.2) con $k = (m-1)$ ed $h = 2n-2m$. Poiché $\mathbb{V}_{n,m-1}(\mathbb{C})$ è $(2n-2m+2)$ -connessa, otteniamo l'isomorfismo

$$\pi_{2n-2m+1}(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})) \simeq \pi_{2n-2m+1}(\mathbb{V}_{n-m+1,1}(\mathbb{C})) = \pi_{2n-2m+1}(S^{2n-2m-1}) = \mathbb{Z}.$$

\square

L'applicazione

$$(2.7.3) \quad \mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C}) \ni (v_1, \dots, v_m) \rightarrow \langle v_1, \dots, v_m \rangle \in \mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{C})$$

è una fibrazione localmente banale con fibra tipica $\mathbf{U}(m)$. Otteniamo quindi una successione esatta d'omotopia

$$(2.7.4) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & & \dots & \longrightarrow & \pi_{h+1}(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{C})) \\ & \longrightarrow & \pi_h(\mathbf{U}(m)) & \longrightarrow & \pi_h(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})) & \longrightarrow & \pi_h(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{C})) \\ & & \longrightarrow & \pi_{h-1}(\mathbf{U}(m)) & \longrightarrow & \pi_{h-1}(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})) & \longrightarrow \dots \end{array}$$

Con una dimostrazione analoga a quella del Lemma II.6.8 otteniamo

LEMMA II.7.4. *Se $1 \leq m < 2m \leq n$, allora l'applicazione $\pi_h(\mathbf{U}(m)) \rightarrow \pi_h(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C}))$ in (2.7.4) ha immagine nulla.*

Questo dà, per ogni intero $h \geq 1$ e per $1 \leq m < 2m \leq n$, le successioni esatte corte

$$(2.7.5) \quad 0 \rightarrow \pi_h(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})) \longrightarrow \pi_h(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{C})) \longrightarrow \pi_{h-1}(\mathbf{U}(m)) \rightarrow 0.$$

Otteniamo perciò il

TEOREMA II.7.5. Sia $v = \min\{m, n - m\}$. Allora, per ogni $1 \leq m < n$ ed $h \geq 1$

$$(2.7.6) \quad \pi_h(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{C})) = \pi_h(\mathbb{V}_{n,v}(\mathbb{C})) \oplus \pi_{h-1}(\mathbf{U}(v)).$$

DIMOSTRAZIONE. Se $2m \leq n$, la tesi segue dalla (2.7.5). Per completare la dimostrazione, è sufficiente utilizzare l'omeomorfismo

$$(2.7.7) \quad \mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{C}) \ni p \rightarrow p^\perp \in \mathbb{G}_{n,n-m}(\mathbb{C}),$$

dove p^\perp è l' $(n-m)$ -piano ortogonale a p , rispetto ad un prodotto scalare Hermitiano in \mathbb{C}^n . \square

Otteniamo in particolare

$$(2.7.8) \quad \pi_h(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{C})) = \begin{cases} \pi_{h-1}(\mathbf{U}(v)) & \text{se } 1 \leq h \leq 2n - 2v, \\ \mathbb{Z} \oplus \pi_{2n-2v}(\mathbf{U}(v)) & \text{se } h = 2n - 2v, \end{cases}$$

e quindi $\pi_1(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{C})) = 0$ e $\pi_2(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{C})) = \mathbb{Z}$ per ogni $1 \leq m < n$.

II.8. Matrici di rango assegnato

Il gruppo prodotto $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R}) \times \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ opera sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^{m \times n}$ delle matrici reali $m \times n$ mediante diffeomorfismi di classe \mathcal{C}^ω :

$$(2.8.1) \quad \mathbf{GL}_m(\mathbb{R}) \times \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{m \times n} \ni (a, b, X) \rightarrow aXb^{-1} \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Le orbite di questa azione sono i sottospazi

$$\mathbb{M}(m \times n, k; \mathbb{R}) = \{X \in \mathbb{R}^{m \times n} \mid \text{rank}(X) = k\}, \quad 0 \leq k \leq \min\{m, n\}.$$

PROPOSIZIONE II.8.1. Per ogni $k = 0, \dots, \min\{m, n\}$ il sottospazio $\mathbb{M}(m \times n, k; \mathbb{R})$ di $\mathbb{R}^{m \times n}$ è una sottovarietà di classe \mathcal{C}^ω e dimensione $k(n + m - k)$.

DIMOSTRAZIONE. Scriviamo le matrici di $\mathbb{R}^{m \times n}$ come matrici a blocchi

$$X = \begin{pmatrix} X_1^1 & X_2^1 \\ X_1^2 & X_2^2 \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad \begin{cases} X_1^1 \in \mathbb{R}^{k \times k}, X_2^1 \in \mathbb{R}^{(m-k) \times k}, \\ X_2^1 \in \mathbb{R}^{k \times (n-k)}, X_1^2 \in \mathbb{R}^{(m-k) \times (n-k)}. \end{cases}$$

L'insieme

$$U_{I_m, I_n} = \{X \in \mathbb{M}(m \times n, k; \mathbb{R}) \mid \det X_1^1 > 0\}$$

è un intorno aperto di $X_0 = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{M}(m \times n, k; \mathbb{R})$. Definiamo una carta locale in U_{I_m, I_n} mediante

$$\phi_{I_m \times I_n} : U_{X_0} \ni X \rightarrow (X_1^1, X_2^1, X_1^2) \in \mathbf{GL}_k^+(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{k \times (n-k)} \times \mathbb{R}^{(m-k) \times k},$$

ove abbiamo indicato con $\mathbf{GL}_k^+(\mathbb{R})$ l'aperto delle matrici reali in $\mathbb{R}^{k \times k}$ che hanno determinante positivo.

Il fatto che questa sia una carta locale si può verificare osservando che l'applicazione

$$(X_1^1, x_2^1, X_1^2) \rightarrow \begin{pmatrix} X_1^1 & X_2^1 \\ X_1^2 & X_1^2 [X_1^1]^{-1} X_2^1 \end{pmatrix}$$

è l'inversa di $\phi_{I_m \times I_n}$.

Se $(a, b) \in \mathbf{GL}_m(\mathbb{R}) \times \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, la coppia che consiste dell'aperto $U_{a,b} = aU_{I_m, I_n}b$ e dell'omeomorfismo $\phi_{a,b}(X) = \phi_{I_m, I_n}(a^{-1}Xb^{-1})$ è una carta locale in $\mathbb{M}(m \times n, k; \mathbb{R})$, e $\mathcal{A} = \{(U_{a,b}, \phi_{a,b}) \mid (a, b) \in \mathbf{GL}_m(\mathbb{R}) \times \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})\}$ è un atlante di classe \mathcal{C}^ω di $\mathbb{M}(m \times n, k; \mathbb{R})$. Poiché $\mathbf{GL}_k^+(\mathbb{R})$ è un aperto di $\mathbb{R}^{k \times k}$, la dimensione di $\mathbb{M}(m \times n, k; \mathbb{R})$ è $k^2 + k(n - k) + (m - k)k = k(m + n - k)$. \square

II.9. Varietà dei sottospazi Lagrangiani reali

Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione pari $2n$ ed $\omega \in \Lambda^2 V^*$ una forma bilineare alternata non degenerata su V .

DEFINIZIONE II.9.1. Un sottospazio W di V è *totalmente isotropo* se $\omega(w_1, w_2) = 0$ per ogni $w_1, w_2 \in W$.

Un sottospazio totalmente isotropo massimale, cioè di dimensione n , si dice *Lagrangiano*.

Sia W_0 un sottospazio Lagrangiano di V . Una base e_1, \dots, e_n di W_0 si completa ad una base e_1, \dots, e_{2n} di V con

$$(2.9.1) \quad \omega(e_i, e_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } j - i = n, \\ -1 & \text{se } i - j = n, \\ 0 & \text{se } |i - j| \neq n. \end{cases}$$

Un sottospazio Lagrangiano W trasversale al sottospazio Lagrangiano $\langle e_{n+1}, \dots, e_{2n} \rangle$ ammette una base $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ con

$$\varepsilon_j = e_j + \sum_{i=n+1}^{2n} x_{ij} e_i, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Nella base e_1, \dots, e_{2n} la matrice associata ad ω è

$$(2.9.2) \quad \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}.$$

La condizione che W sia Lagrangiana si esprime, in termini della matrice $\begin{pmatrix} I \\ X \end{pmatrix}$ che esprime i vettori $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ nella base e_1, \dots, e_{2n} , mediante

$$(I, X^\dagger) \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ X \end{pmatrix} = X - X^\dagger = 0.$$

Quindi X è una matrice simmetrica $n \times n$.

Indichiamo con Simm_n lo spazio vettoriale reale di dimensione $\frac{n(n+1)}{2}$ delle matrici simmetriche reali $n \times n$. Le inverse delle applicazioni

$$\text{Simm}_n \ni X = (x_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$$

↓

$$\langle e_j + \sum_{i=n+1}^{2n} x_{ij} e_{n+i}, 1 \leq j \leq n \rangle \in \{W \in M \mid W \pitchfork \langle e_{n+1}, \dots, e_{2n} \rangle\},$$

al variare di e_1, \dots, e_{2n} nell'insieme delle basi di V in cui la matrice associata ad ω abbia la forma (2.9.2), definiscono un atlante analitico e quindi una struttura di varietà analitica di dimensione $\frac{n(n+1)}{2}$ su M .

Se g è un prodotto scalare su V , risulta definita un'applicazione lineare $J \in \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(V)$ tale che

$$(2.9.3) \quad \omega(v, w) = g(Jv, w), \quad \forall v, w \in V.$$

Un prodotto scalare g su V è *compatibile* con ω se J è un'anti-involuzione di V , se cioè $J^2 = -I$.

Ad esempio, se e_1, \dots, e_{2n} è una base di V per cui valga la (2.9.1), il prodotto scalare definito da

$$(2.9.4) \quad g(e_i, e_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j, \end{cases}$$

è compatibile con ω .

In questo caso la J definisce su V la struttura di uno spazio vettoriale complesso di dimensione n e la

$$(2.9.5) \quad (v|w) = g(v, w) + i\omega(v, w)$$

definisce un prodotto scalare Hermitiano. Abbiamo:

$$\mathbf{Sp}(n, \mathbb{R}) = \{a \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \omega(a(v), a(w)) = \omega(v, w), \quad \forall v, w \in V\},$$

$$\mathbf{Sp}(n, \mathbb{R}) \cap \mathbf{O}(2n) = \{a \in \mathbf{Sp}(n, \mathbb{R}) \mid g(a(v), a(w)) = g(v, w), \quad \forall v, w \in V\} \simeq \mathbf{U}(n).$$

Il gruppo $\mathbf{U}(n)$ opera transitivamente su M . In particolare M è connesso e compatto. Lo stabilizzatore di un sottospazio Lagrangiano è il gruppo ortogonale $\mathbf{O}(n)$ ed abbiamo quindi una fibrazione naturale

$$(2.9.6) \quad \pi : \mathbf{U}(n) \longrightarrow M \simeq \mathbf{U}(n)/\mathbf{O}(n) \quad \text{con fibra } \mathbf{O}(n).$$

Otteniamo la successione esatta di omotopia

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \pi_h(\mathbf{O}(n)) & \longrightarrow & \pi_h(\mathbf{U}(n)) & \longrightarrow & \pi_h(M) \longrightarrow \\ & & \longrightarrow & & \cdots & & \end{array}$$

da cui si possono calcolare i gruppi di omotopia di M a partire da quelli dei gruppi unitari e del gruppo ortogonale. In particolare, per quanto riguarda il gruppo fondamentale, dal momento che $\mathbf{U}(n)$ ed M sono connessi, ed $\mathbf{O}(n)$ ha due componenti connesse, abbiamo una successione esatta

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_1(\mathbf{O}(n)) & \longrightarrow & \pi_1(\mathbf{U}(n)) & \longrightarrow & \pi_1(M) & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0, \\ \simeq \mathbb{Z}_2 & & \simeq \mathbb{Z} & & & & \end{array}$$

da cui ricaviamo che $\pi_1(M) \simeq \mathbb{Z}$.

II.10. Varietà dei sottospazi Lagrangiani complessi

Fissiamo una forma bilineare alternata non degenera ω su \mathbb{C}^{2n} e sia M il sottoinsieme della Grassmanniana $\mathbb{G}_{2n,n}(\mathbb{C})$ formato dai sottospazi Lagrangiani di \mathbb{C}^{2n} , cioè dai $p \in \mathbb{G}_{2n,n}(\mathbb{C})$ tali che $\omega(z, w) = 0$ per ogni $z, w \in p$. Dico che p è una varietà connessa e compatta.

Identifichiamo \mathbb{C}^{2n} con lo spazio \mathbb{H}^n delle n -uple di quaternioni, facendo corrispondere ad $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ l'elemento $x + jy$. Ricordiamo che è $\overline{x + jy} = \bar{x} - jy$. Possiamo

scegliere le coordinate in modo che il prodotto scalare standard su \mathbb{H}^n sia definito da

$$\begin{aligned} (q_1|q_2)_{\mathbb{H}} &= (x_2^* - jy_2^\dagger)(x_1 + jy_1) = x_2^*x_1 + y_2^*y_1 + j(x_2^\dagger y_1 - y_2^\dagger x_1) \\ &= (q_1|q_2)_{\mathbb{C}^n} + j\omega(q_1, q_2), \\ &\text{ove } q_1 = x_1 + jy_1, q_2 = x_2 + iy_2, x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{C}^n. \end{aligned}$$

Ragionando come nell'esempio precedente, possiamo identificare gli n -piani Lagrangiani agli n -piani complessi generati da una base ortonormale di \mathbb{H}^n . Quindi il gruppo $\mathbf{Sp}(n)$ opera transitivamente su M . Lo stabilizzatore di $p_0 = \langle e_1, \dots, e_n \rangle_{\mathbb{C}}$ in $\mathbf{Sp}(n)$ è il gruppo unitario $\mathbf{U}(n)$. Quindi $M \simeq \mathbf{Sp}(n)/\mathbf{U}(n)$ è una varietà connessa e compatta di dimensione $n(2n+1) - n^2 = n(n+1)$. Osserviamo che M ha dimensione pari ed in effetti è una varietà complessa compatta di dimensione $n(n+1)/2$.

II.11. Varietà di sottospazi proiettivi di una quadrica proiettiva reale

Sia b una forma bilineare simmetrica in \mathbb{R}^n , di segnatura $(\nu, n - \nu)$, con $2\nu \leq n$. La quadrica proiettiva $Q \subset \mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}$, definita dall'equazione omogenea $b(x, x) = 0$, ha indice di Witt $(\nu-1)$, contiene cioè sottospazi proiettivi di dimensione $(\nu-1)$. Per ogni intero h con $1 \leq h \leq \nu$, indichiamo con M_h l'insieme dei sottospazi proiettivi di dimensione $(h-1)$ contenuti in Q , ovvero dei sottospazi lineari di dimensione h totalmente isotropi rispetto alla forma b . Per il teorema d'estensione di Witt, il gruppo $\mathbf{O}(\nu, n-\nu)$ opera transitivamente su M_h , che è quindi uno spazio omogeneo.

Per calcolare la dimensione di M_h , scegliamo una base di \mathbb{R}^n in cui la matrice associata a b sia

$$B = \begin{pmatrix} & & I_\nu \\ & I_{n-2\nu} & \\ I_\nu & & \end{pmatrix}.$$

L'algebra di Lie di $\mathfrak{o}(\nu, n-\nu)$ si rappresenta in queste coordinate come l'algebra delle matrici

$$X = \begin{pmatrix} x_{1,1} & -x_{2,3}^\dagger & x_{1,3} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \\ x_{3,1} & -x_{2,1}^\dagger & -x_{1,1}^\dagger \end{pmatrix}, \text{ con } \begin{cases} x_{1,1} \in \mathbb{R}^{\nu \times \nu}, x_{1,3}, x_{3,1} \in \mathfrak{o}(\nu), \\ x_{2,2} \in \mathfrak{o}(n-2\nu), x_{2,1}, x_{2,3} \in \mathbb{R}^{(n-2\nu) \times \nu}. \end{cases}$$

Il punto $p_0 = \langle e_1, \dots, e_h \rangle$ appartiene ad M_h . L'algebra di Lie dello stabilizzatore di p_0 è caratterizzata dal fatto che le prime h colonne delle matrici $x_{2,1}$ ed $x_{3,1}$ sono nulle e sono nulli gli elementi delle prime h righe ed ultime $\nu-h$ colonne delle $x_{1,1}$. Poiché $x_{3,1}$ è antisimmetrica, queste sono $h(\nu-h) + h(n-2\nu) + h\nu - \frac{h(h+1)}{2}$ condizioni indipendenti. Questo numero è lo stesso della dimensione di M_h . Abbiamo perciò

$$\dim M_h = h(n-h) - \frac{h(h+1)}{2} = \frac{h(2n-3h-1)}{2}.$$

Essendo un sottospazio chiuso della grassmanniana $\mathbb{G}_{n,h}$, la varietà M_h è compatta. Verifichiamo che essa è anche uno spazio omogeneo del gruppo compatto $\mathbf{O}(\nu) \times \mathbf{O}(n-\nu)$. A questo scopo è più conveniente scegliere le coordinate in \mathbb{R}^n in modo

che la matrice associata a b sia

$$B' = \begin{pmatrix} I_v & \\ & -I_{n-v} \end{pmatrix}.$$

Scriviamo i vettori u di \mathbb{R}^n come somme $u = v + w$, dove $v \in \mathbb{R}_v^v = \langle e_1, \dots, e_v \rangle$, $w \in \mathbb{R}_w^{n-v} = \langle e_{v+1}, \dots, e_n \rangle$. Sia $p \in M_h$ e sia $u_1 = v_1 + w_1, \dots, u_h = v_h + w_h$ una base di p . I vettori v_1, \dots, v_h sono linearmente indipendenti in \mathbb{R}_v^v ed i vettori w_1, \dots, w_h linearmente indipendenti in \mathbb{R}_w^{n-v} . Se scegliamo i v_1, \dots, v_h in modo che formino un sistema ortonormale in \mathbb{R}_v^v , da

$$0 = b(v_i + w_i, v_j + w_j) = (v_i | v_j) - (w_i | w_j) \quad (\text{prodotti scalari standard in } \mathbb{R}^n),$$

anche i w_1, \dots, w_h formano un sistema ortonormale in \mathbb{R}_w^{n-v} . Viceversa, se v_1, \dots, v_h e w_1, \dots, w_h sono due sistemi ortonormali in \mathbb{R}_v^v ed \mathbb{R}_w^{n-v} rispettivamente, allora $p = \langle v_1 + w_1, \dots, v_h + w_h \rangle$ è un punto di M_h . Quindi il gruppo $\mathbf{SO}(v) \times \mathbf{O}(n-v)$, ed anche il suo sottogruppo $\mathbf{SO}(v) \times \mathbf{SO}(n-v)$ se $2h < v$, opera transitivamente su M_h . Lo stabilizzatore di $p_0 = \langle e_1 + e_{v+1}, \dots, e_h + e_{v+h} \rangle$ è $\mathbf{SO}(h) \times \mathbf{SO}(v-h) \times \mathbf{O}(n-v-h)$ in $\mathbf{SO}(v) \times \mathbf{O}(n-v)$, e $\mathbf{SO}(h) \times \mathbf{SO}(v-h) \times \mathbf{SO}(n-v-h)$ in $\mathbf{SO}(v) \times \mathbf{SO}(n-v)$ se $2h < v$. In particolare, M_h è connessa se $2h < n$, ha due componenti connesse se $2h = n$.

II.12. Varietà di sottospazi proiettivi di una quadrica proiettiva complessa

Sia Q una quadrica non degenere di \mathbb{P}^n . Per ogni intero non negativo h con $2h + 1 \leq n$, la grassmanniana M_h degli h -piani proiettivi contenuti in Q ha una struttura naturale di varietà analitica compatta. Inoltre, M_h è connessa se $2h + 1 < n$, ha due componenti connesse se $2h + 1 = n$.

Possiamo supporre che la quadrica sia descritta in coordinate omogenee da $Q = \{z^\dagger z = 0\}$. Osserviamo che $M_0 = Q$. Per il teorema di cancellazione di Witt, il gruppo $\mathbf{O}(n+1, \mathbb{C}) = \{x \in \mathbf{GL}_{n+1}(\mathbb{C}) \mid x^\dagger x = I\}$ opera transitivamente su M_h , che quindi è una varietà analitica. Per dimostrare che M_h è compatta, verifichiamo che la forma compatta $\mathbf{O}(n+1)$ di $\mathbf{O}(n+1, \mathbb{C})$ opera transitivamente su M_h .

Un punto di M è rappresentato da un $(h+1)$ -piano p di \mathbb{C}^{n+1} totalmente isotropo rispetto alla forma $b(z, w) = z^\dagger w$. È $p \cap \mathbb{R}^{n+1} = 0$, perché tutti i vettori reali sono anisotropi. Dico che p ammette una base $u_0 + iv_0, u_1 + iv_1, \dots, u_h + iv_h$, ove $u_0, u_1, \dots, u_h, v_0, v_1, \dots, v_h$ è un sistema ortonormale di $(2h+2)$ vettori di \mathbb{R}^{n+1} , rispetto al prodotto scalare Euclideo standard.

Fissiamo infatti un elemento non nullo $z_0 = u_0 + iv_0$ di p , con $u_0, v_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$. Abbiamo $\|u_0\|^2 = \|v_0\|^2 > 0$ e $(u_0 | v_0) = 0$ (norme e prodotti scalari canonici in \mathbb{R}^{n+1}). Riscalando, possiamo supporre che $\|u_0\| = \|v_0\| = 1$. Supponiamo per ricorrenza che $0 \leq k < h$, ed abbiamo trovato un sistema ortonormale di $(2k+2)$ vettori $u_0, \dots, u_k, v_0, \dots, v_k$ di \mathbb{R}^{n+1} con $u_0 + iv_0, \dots, u_k + iv_k \in p$. La condizione che p sia totalmente isotropo ci dice che $\langle u_0, \dots, u_k \rangle^\perp \cap p = \langle u_0, \dots, u_k, v_0, \dots, v_k \rangle^\perp \cap p$, ove abbiamo indicato con \perp la perpendicolarità in \mathbb{C}^{n+1} rispetto alla forma bilineare simmetrica b . Poiché $\langle u_0, \dots, u_k \rangle$ è totalmente anisotropo, l'intersezione $\langle u_0, \dots, u_k \rangle^\perp \cap p$ ha dimensione $h - k > 0$ e contiene quindi un vettore $z_{k+1} = u_{k+1} + iv_{k+1} \neq 0$, con $u_{k+1}, v_{k+1} \in \mathbb{R}^{n+1}$. È $(u_{k+1} | v_{k+1}) = 0$ e riscalando possiamo

supporre che $\|u_{k+1}\| = \|v_{k+1}\| = 1$. Per costruzione $u_0, \dots, u_{k+1}, v_0, \dots, v_{k+1}$ è un sistema ortonormale di $(2k+4)$ vettori reali. Questo dimostra l'affermazione.

Quindi, ogni sottospazio p di M_h ha una base della forma $z_0 = u_0 + iv_0, u_1 + iv_1, \dots, u_h + iv_h$, con $u_i, v_i \in \mathbb{R}^{n+1}$, e tali che $u_0, u_1, \dots, u_h, v_0, v_1, \dots, v_h$ sia un sistema ortonormale di vettori di \mathbb{R}^{n+1} . Viceversa, se $u_0, u_1, \dots, u_h, v_0, v_1, \dots, v_h$ è un sistema ortonormale in \mathbb{R}^{n+1} , l' $(h+1)$ -piano $\langle u_0 + iv_0, u_1 + iv_1, \dots, u_h + iv_h \rangle$ definisce un punto p di M_h . Perciò il gruppo $\mathbf{O}(n+1)$ delle trasformazioni ortogonali di \mathbb{R}^{n+1} , e se $2h+1 < n$ anche il suo sottogruppo $\mathbf{SO}(n+1)$, opera transitivamente su M . Poiché $\mathbf{O}(n+1)$ è compatto, M_h è compatta e, poiché $\mathbf{SO}(n+1)$ è connesso, M_h è connessa se $2h+1 < n$. Ogni $(h+1)$ -piano $p \in M_h$ ha un'unica struttura complessa J espressa, rispetto alla base reale u_0, \dots, v_h da $Ju_j = -v_j$ per $j = 0, \dots, h$ e le trasformazioni di $\mathbf{O}(n+1)$ che lasciano fisso p sono quelle che si restringono ad una trasformazione J -lineare, e quindi a un elemento di $\mathbf{U}(h+1)$, su p . Poiché queste trasformazioni ortogonali trasformano in sé $[(p \oplus \bar{p}) \cap \mathbb{R}^{n+1}]^\perp$, otteniamo

$$\begin{aligned} M_{(n+1)/2} &\simeq \mathbf{O}(2m)/\mathbf{U}(m) && \text{se } n = 2m - 1, h = m - 1, \\ M_h &\simeq \mathbf{SO}(n+1)/(\mathbf{U}(h+1) \times \mathbf{SO}(n-2h-1)) && \text{se } 2h+1 < n. \end{aligned}$$

Possiamo utilizzare queste rappresentazioni per calcolare la dimensione reale m_h della varietà M_h . È

$$\begin{cases} \dim_{\mathbb{R}} M_{(n+1)/2} = (n^2 - 1)/2 & \text{se } n \text{ è dispari,} \\ \dim_{\mathbb{R}} M_h = (h+1)(2n - 3h - 2) & \text{se } 2h < n + 1. \end{cases}$$

Osserviamo che le dimensioni sono pari. In effetti, le varietà M_h sono varietà differenziabili *complesse*.

II.13. Decomposizione di Cartan

Indichiamo con $\mathfrak{p}(n)$ lo spazio vettoriale delle matrici Hermitiane simmetriche in $\mathbb{C}^{n \times n}$ e con $\mathbf{P}(n)$ il sottoinsieme di quelle definite positive.

LEMMA II.13.1. $\mathbf{P}(n)$ è una sottovarietà reale analitica di dimensione n^2 di $\mathbb{C}^{n \times n}$. L'esponenziale di matrici definisce un diffeomorfismo

$$(2.13.1) \quad \mathfrak{p}(n) \ni A \longrightarrow \exp(A) \in \mathbf{P}(n).$$

DIMOSTRAZIONE. Se $a \in \mathbf{P}(n)$, allora la matrice $(1-t)I_n + ta$ è anch'essa definita positiva, e quindi in particolare invertibile, per ogni $t \in [0, 1]$. Possiamo quindi definire

$$(2.13.2) \quad \log a = (a - I_n) \cdot \int_0^1 [(1-t)I_n + ta]^{-1} dt, \quad \forall a \in \mathbf{P}(n).$$

Poiché l'aggiunzione commuta con l'integrale e l'operazione d'inversione di una matrice, otteniamo che \log è un'applicazione a valori in $\mathfrak{p}(n)$. Se $A \in \mathfrak{p}(n)$, possiamo diagonalizzarla mediante una $a \in \mathbf{U}(n)$. Avremo cioè

$$aAa^* = aAa^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \text{con } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}.$$

Otteniamo allora

$$\log(\exp(A)) = a^{-1} \left(\int_0^1 \text{diag} \left(\frac{e^{\lambda_1} - 1}{(1-t) + t \exp \lambda_1}, \dots, \frac{e^{\lambda_n} - 1}{(1-t) + t \exp \lambda_n} \right) dt \right) a = A.$$

In modo analogo si verifica che $\exp(\log(a)) = a$ per ogni $a \in \mathbf{P}(n)$. La (2.13.1) è una carta globale su $\mathbf{P}(n)$ che definisce la sua struttura di varietà differenziabile e quindi è anche un diffeomorfismo di $\mathfrak{p}(n)$ su $\mathbf{P}(n)$. \square

TEOREMA II.13.2 (decomposizione di Cartan per il gruppo lineare). *Ogni elemento $x \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ si decompone in modo unico nel prodotto*

$$(2.13.3) \quad x = x_k x_p, \quad \text{con } x_k \in \mathbf{U}(n), x_p \in \mathbf{P}(n).$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $x_p = \sqrt{x^* x} = \exp(\frac{1}{2} \log(x^* x)) \in \mathbf{P}(n)$. È $x_p = x_p^*$ ed $x_p^2 = x^* x$. Posto $x_k = x x_p^{-1}$, abbiamo

$$x_k x_k^* = x x_p^{-1} x_p^{-1} x^* = x x_p^{-2} x^* = x (x^* x)^{-1} x^* = x x^{-1} x^{*-1} x^* = I_n$$

e quindi $x_k \in \mathbf{U}(n)$. L'unicità della decomposizione segue dall'unicità della radice quadrata in $\mathbf{P}(n)$. \square

COROLLARIO II.13.3. *L'applicazione*

$$(2.13.4) \quad \mathbf{U}(n) \times \mathfrak{p}(n) \ni (x, X) \longrightarrow x \exp(X) \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$$

è un diffeomorfismo. \square

DEFINIZIONE II.13.4. Un sottogruppo \mathbf{G} del gruppo lineare $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ si dice *pseudoalgebrico* se può essere definito mediante un sistema di equazioni:

$$(*) \quad \mathbf{G} = \{x \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}) \mid f_1(x, x^*) = 0, \dots, f_N(x, x^*) = 0\}$$

dove f_1, \dots, f_N sono polinomi a coefficienti reali delle parti reali e immaginarie dei coefficienti di x .

I sottogruppi pseudoalgebrici sono ovviamente chiusi.

TEOREMA II.13.5 (decomposizione di Cartan). *Sia \mathbf{G} un sottogruppo semialgebrico di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$. Se*

$$(2.13.5) \quad x^* \in \mathbf{G}, \quad \forall x \in \mathbf{G},$$

allora ogni elemento $x \in \mathbf{G}$ si decompone in modo unico come un prodotto

$$(2.13.6) \quad x = x_k x_p, \quad \text{con } x_k \in \mathbf{U}(n) \cap \mathbf{G}, x_p \in \mathbf{P}(n) \cap \mathbf{G}.$$

COROLLARIO II.13.6. *Sia \mathbf{G} un sottogruppo pseudoalgebrico di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$, con algebra di Lie $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$. Se vale (2.13.5), allora l'applicazione*

$$(2.13.7) \quad (\mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)) \times (\mathfrak{g} \cap \mathfrak{p}(n)) \ni (x, X) \longrightarrow x \exp(X) \in \mathbf{G},$$

è un diffeomorfismo.

DIMOSTRAZIONE. Per il Teorema II.13.5, ogni elemento $x \in \mathbf{G}$ si scrive in modo unico come

$$x = x_k x_p \quad \text{con} \quad x_k \in \mathbf{U}(n), \quad x_p \in \mathbf{P}(n),$$

e, per (2.13.5), $x_p^2 = x^* x \in \mathbf{G}$.

Per il Lemma II.13.1 vi è un unico elemento $A \in \mathfrak{p}(n)$ tale che $x_p = \exp(A)$. Diagonalizziamo A mediante una matrice $a \in \mathbf{U}(n)$. Sia cioè

$$a A a^* = a A a^{-1} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad \text{con} \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}.$$

Il gruppo $\text{ad}(a)(\mathbf{G})$ è ancora pseudoalgebrico in $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ e quindi le matrici diagonali reali di $\text{ad}(a)(\mathbf{G})$ formano un sottogruppo pseudoalgebrico \mathbf{Q} di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$. Possiamo perciò trovare un insieme finito di polinomi $f_1, \dots, f_N \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ tali che la matrice diagonale reale $\text{diag}(\xi_1, \dots, \xi_n)$, con $\xi_1 \cdots \xi_n \neq 0$, appartenga a \mathbf{Q} se e soltanto se

$$f_j(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = 0 \quad \text{per} \quad j = 1, \dots, N.$$

Abbiamo allora, poiché $x_p^{2k} = (x^* x)^k \in \mathbf{G}$ per ogni intero k , la

$$(2.13.8) \quad f_j(e^{2k\lambda_1}, e^{2k\lambda_2}, \dots, e^{2k\lambda_n}) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad \forall j = 1, \dots, N.$$

Per concludere la dimostrazione, utilizziamo il seguente

LEMMA II.13.7. *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione esponenziale-polinomiale della forma:*

$$(2.13.9) \quad f(t) = \sum_{j=1}^N c_j e^{b_j t} \quad t \in \mathbb{R}$$

con $c_j, b_j \in \mathbb{R}$ e $b_i \neq b_j$ se $i \neq j$. Se f si annulla per ogni $t \in \mathbb{Z}$, allora f si annulla per ogni $t \in \mathbb{R}$.

DIMOSTRAZIONE. Poniamo $\exp(b_j) = \xi_j$. Se $f(t) = 0$ per i valori interi $t = 0, 1, \dots, N-1$, otteniamo in particolare che

$$(2.13.10) \quad (c_1, \dots, c_N) V(\xi_1, \dots, \xi_N) = 0,$$

ove $V(\xi_1, \dots, \xi_N)$ è la matrice di Vandermonde

$$V(\xi_1, \dots, \xi_N) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_N \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \dots & \xi_N^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1^{N-1} & \xi_2^{N-1} & \dots & \xi_N^{N-1} \end{pmatrix}.$$

Il determinante⁷ della matrice di Vandermonde è

$$\det V(\xi_1, \dots, \xi_N) = \prod_{1 \leq i < j \leq N} (\xi_j - \xi_i),$$

⁷Per dimostrare questa formula, ragioniamo per ricorrenza su N . La formula del determinante di Vandermonde è facilmente verificata nel caso $N = 2$. Supponiamo quindi $N > 2$ e la formula vera per determinanti di Vandermonde di ordine $N-1$. Sottraendo alla $j+1$ -esima riga ξ_1 volte la

e quindi diverso da zero perché gli ξ_1, \dots, ξ_N sono tra loro distinti. La (2.13.10) implica dunque che $c_1 = \dots = c_N = 0$. \square

Concludiamo ora la dimostrazione del Teorema XXVII.1.2. Per il Lemma II.13.7 appena dimostrato, dalla (2.13.8) otteniamo che

$$f_j(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n}) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, N.$$

Quindi $\exp(2t(aAa^*)) \in \mathbf{Q}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e ciò mostra che $A \in \mathfrak{g} \cap \mathfrak{p}(n)$. Allora $x_p \in \mathbf{G}$ e perciò $x_k = xx_p^{-1} \in \mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)$.

L'applicazione (2.13.7) è continua e bigettiva, ed è un omeomorfismo perché anche la sua inversa

$$\mathbf{G} \ni x \longrightarrow (x(x^*x)^{-\frac{1}{2}}, \frac{1}{2} \log(x^*x)) \in (\mathbf{U}(n) \cap \mathbf{G}) \times (\mathfrak{p}(n) \cap \mathfrak{g})$$

è continua. Le due applicazioni sono analitiche reali perché restrizioni di diffeomorfismi analitici. \square

OSSERVAZIONE II.13.8. Un gruppo di Lie lineare $\mathbf{G} \subset \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ semialgebrico e chiuso rispetto all'aggiunzione ha quindi una retrazione di deformazione sul suo sottogruppo compatto $\mathbf{U}(n) \cap \mathbf{G}$. È in effetti un fibrato vettoriale differenziabile banale con base $\mathbf{U}(n) \cap \mathbf{G}$.

Nel Capitolo XXVII diamo la lista di Cartan dei gruppi classici e ricaviamo le loro decomposizioni di Cartan.

ESEMPIO II.13.9. Se \mathbf{G} è un sottogruppo semialgebrico e chiuso rispetto all'aggiunzione di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$, allora $\mathbf{K} \cap \mathbf{U}(n)$ è il suo sottogruppo compatto massimale e lo spazio omogeneo $M = \mathbf{G}/\mathbf{K}$ si dice uno spazio Riemanniano simmetrico *di tipo non compatto*. Per la decomposizione di Cartan, M è diffeomorfo ad uno spazio Euclideo. È possibile definire su M una metrica per cui il gruppo \mathbf{G} sia un gruppo di isometrie di M ed il gruppo delle isometrie di M abbia la stessa componente connessa dell'identità di \mathbf{G} .

Nei paragrafi precedenti abbiamo dato esempi di spazi omogenei su cui è possibile definire una struttura di spazio Riemanniano simmetrico compatto.

j -esima, per $j = 1, \dots, N - 1$, otteniamo:

$$\det V(\xi_1, \dots, \xi_N) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \xi_2 - \xi_1 & \xi_3 - \xi_1 & \dots & \xi_N - \xi_1 \\ 0 & \xi_2(\xi_2 - \xi_1) & \xi_3(\xi_3 - \xi_1) & \dots & \xi_N(\xi_N - \xi_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \xi_2^{N-2}(\xi_2 - \xi_1) & \xi_3^{N-2}(\xi_3 - \xi_1) & \dots & \xi_N^{N-2}(\xi_N - \xi_1) \end{pmatrix}.$$

Raccogliendo il fattore $(\xi_j - \xi_1)$ nella j -esima colonna, per $j = 2, \dots, N$, si ottiene

$$\det V(\xi_1, \dots, \xi_N) = (\xi_2 - \xi_1) \cdot \dots \cdot (\xi_N - \xi_1) \cdot \det V(\xi_2, \dots, \xi_N)$$

da cui la formula desiderata segue per l'ipotesi di ricorrenza.

CAPITOLO III

Fibrati principali

La nozione di fibrato principale generalizza il metodo del riferimento mobile introdotto per lo studio delle curve gobbe ed è fondamentale nell'impostazione di Cartan del problema dell'equivalenza di strutture geometrico-differenziali.

III.1. Prime definizioni

DEFINIZIONE III.1.1. Siano $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato differenziabile e \mathbf{G} un gruppo di Lie. Un'azione differenziabile a destra di \mathbf{G} su ξ è un'azione differenziabile a destra di \mathbf{G} su P che operi sulle fibre di ξ .

Richiediamo cioè che

$$(3.1.1) \quad P_p a = P_p, \quad \forall p \in M, \quad \forall a \in \mathbf{G}, \quad \text{ovvero che } \pi \circ R_a = \pi, \quad \forall a \in \mathbf{G}.$$

In particolare, per ogni $a \in \mathbf{G}$, la traslazione a destra R_a su P definisce un'equivalenza di ξ in sé.

DEFINIZIONE III.1.2. Un *fibrato \mathbf{G} -principale* è il dato di un fibrato differenziabile ξ , di un gruppo di Lie \mathbf{G} , che si dirà il suo *gruppo strutturale*, e di un'azione differenziabile a destra di \mathbf{G} su ξ che sia *libera e transitiva* sulle fibre di ξ .

Richiediamo cioè che valga la (3.1.1) e che inoltre

$$(3.1.2) \quad \forall p \in M, \quad \forall \sigma_1, \sigma_2 \in P_p, \quad \exists! a \in \mathbf{G} \text{ tale che } \sigma_2 = \sigma_1 \cdot a.$$

Indicheremo nel seguito con $\sigma_1^{-1}\sigma_2$ l'unico elemento $a \in \mathbf{G}$ per cui $\sigma_2 = \sigma_1 \cdot a$.

Sia $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato \mathbf{G} -principale.

LEMMA III.1.3. Per ogni $\sigma_0 \in P$ esiste un intorno aperto U di $p_0 = \pi(\sigma_0)$ in M ed una sezione $\sigma \in \Gamma_\xi(U, P)$ tale che $\sigma(x_0) = \sigma_0$.

DIMOSTRAZIONE. La fibra P_{p_0} è una sottovarietà propria di P . Per il teorema di trasversalità di Thom, possiamo trovare un intorno aperto U di p_0 in M ed un'applicazione $f \in \mathcal{C}^\infty(U, P)$ con $f(p_0) = \sigma_0$ ed $f \pitchfork P_{p_0}$ in (p_0, σ_0) . In particolare $\pi \circ f$ è un diffeomorfismo tra due intorni di p_0 e quindi, per un intorno aperto U_0 di p_0 in U , l'immagine $f(U_0)$ è il grafico di una sezione $\sigma \in \Gamma_\xi(U_0, P)$ di ξ con $\sigma(p_0) = \sigma_0$. \square

COROLLARIO III.1.4. Ogni fibrato principale differenziabile è localmente banale.

DIMOSTRAZIONE. Se U è un aperto di M e $\sigma \in \Gamma_\xi(U, P)$ una sezione di ξ su U , l'applicazione $U \times \mathbf{G} \ni (p, a) \rightarrow \sigma(p)a \in \pi^{-1}(U)$ è una trivializzazione di ξ su U . La tesi segue quindi dal Lemma III.1.3 \square

DEFINIZIONE III.1.5. Un suo atlante di trivializzazione $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \sigma_\alpha) \mid \alpha \in I\}$ è il dato di un ricoprimento aperto $\{U_\alpha \mid \alpha \in I\}$ di M e, per ogni indice $\alpha \in I$, di una sezione $\sigma_\alpha \in \Gamma_\xi(U_\alpha, P)$.

Alla coppia $(U_\alpha, \sigma_\alpha)$ corrisponde la *trivializzazione locale*

$$(3.1.3) \quad \tilde{\sigma}_\alpha : U_\alpha \times \mathbf{G} \ni (p, a) \longrightarrow \sigma_\alpha(p) \cdot a \in P|_{U_\alpha} = \pi^{-1}(U_\alpha).$$

Per ogni coppia di indici $\alpha, \beta \in I$, con $U_{\alpha, \beta} = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, otteniamo una funzione $\psi_{\alpha, \beta} \in \mathcal{C}^\infty(U_{\alpha, \beta}, \mathbf{G})$, definita da

$$(3.1.4) \quad \psi_{\alpha, \beta} : U_{\alpha, \beta} \ni p \longrightarrow [\sigma_\alpha(p)]^{-1} \sigma_\beta(p) \in \mathbf{G}.$$

Le $\{\psi_{\alpha, \beta} \mid U_{\alpha, \beta} \neq \emptyset\}$ si dicono le *funzioni di transizione* dell'atlante \mathcal{A} .

PROPOSIZIONE III.1.6. Siano ξ un fibrato principale ed $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \sigma_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ un suo atlante di trivializzazione. Le sue funzioni di transizione $\{\psi_{\alpha, \beta}\}$ soddisfano le condizioni

$$(3.1.5) \quad \psi_{\alpha, \alpha}(p) = e, \quad \forall p \in U_{\alpha, \alpha} = U_\alpha,$$

$$(3.1.6) \quad \psi_{\alpha, \beta} \psi_{\beta, \gamma} = \psi_{\alpha, \gamma} \quad \text{su } U_{\alpha, \beta, \gamma} = U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma. \quad \square$$

TEOREMA III.1.7. Siano M una varietà differenziabile, \mathbf{G} un gruppo di Lie, $\{U_\alpha\}$ un ricoprimento aperto di M e $\Psi = \{\psi_{\alpha, \beta} \in \mathcal{C}^\infty(U_{\alpha, \beta}, \mathbf{G}) \mid U_{\alpha, \beta} \neq \emptyset\}$ una famiglia di funzioni che soddisfino le (3.1.5), (3.1.6). Allora esiste un fibrato principale ξ su M , con gruppo strutturale \mathbf{G} , per cui le $\psi_{\alpha, \beta}$ siano le funzioni di transizione di un atlante di trivializzazione corrispondente al ricoprimento $\{U_\alpha\}$. Tale fibrato è unico, a meno di diffeomorfismi che commutino con l'azione di \mathbf{G} .

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo, a partire dalla famiglia Ψ , l'unione disgiunta

$$P^\sharp = \bigsqcup_{\alpha \in I} U_\alpha \times \mathbf{G}.$$

Per le (3.1.5) e (3.1.6), la

$$U_\alpha \times \mathbf{G} \ni (p, a) \sim (q, b) \in U_\beta \times \mathbf{G} \iff (p = q, a = \psi_{\alpha, \beta}(p)b)$$

è una relazione d'equivalenza su P^\sharp . Poniamo $P = P^\sharp / \sim$ ed indichiamo con $\iota_\alpha : U_\alpha \times \mathbf{G} \rightarrow P^\sharp$ le applicazioni naturali. Detta $\varpi : P^\sharp \rightarrow P$ la proiezione nel quoziente, otteniamo per ogni α applicazioni

$$\tilde{\sigma}_\alpha : U_\alpha \times \mathbf{G} \xrightarrow{\iota_\alpha} \iota_\alpha(U_\alpha \times \mathbf{G}) \subset P^\sharp \xrightarrow{\varpi} \varpi \circ \iota_\alpha(U_\alpha \times \mathbf{G}) = P|_{U_\alpha},$$

che sono omeomorfismi su aperti di P . Risulta allora definita su P un'unica struttura di varietà differenziabile che renda le $\tilde{\sigma}_\alpha$ diffeomorfismi.

Definiamo $\pi : P \rightarrow M$ in modo che, per ogni indice α , il diagramma (ove la seconda freccia orizzontale è l'inclusione)

$$\begin{array}{ccc} U_\alpha \times \mathbf{G} & \xrightarrow{\tilde{\sigma}_\alpha} & P \\ \text{pr}_{U_\alpha} \downarrow & & \downarrow \pi \\ U_\alpha & \longrightarrow & M \end{array}$$

sia commutativo. Otteniamo così un fibrato differenziabile $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$, su cui definiamo un'azione a destra di \mathbf{G} mediante il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} U_\alpha \times \mathbf{G} \times \mathbf{G} & \xrightarrow{\tilde{\sigma}_\alpha \times \text{id}_\mathbf{G}} & P \times \mathbf{G} \\ (p,a,b) \rightarrow (p,ab) \downarrow & & \downarrow (\sigma,a) \rightarrow \sigma \cdot a \\ U_\alpha \times \mathbf{G} & \xrightarrow{\tilde{\sigma}_\alpha} & P. \end{array}$$

$$\text{Abbiamo cioè } \begin{cases} \pi(\tilde{\sigma}_\alpha(p, a)) = p, \\ \tilde{\sigma}_\alpha(p, a) \cdot b = \tilde{\sigma}_\alpha(p, ab). \end{cases}$$

In questo modo $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$ acquista una struttura di fibrato principale con gruppo strutturale \mathbf{G} .

Per ogni α ,

$$\sigma_\alpha : U_\alpha \ni p \longrightarrow \tilde{\sigma}_\alpha(p, e) \in P$$

è una sezione differenziabile di ξ su U_α ed $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \sigma_\alpha)\}$ un suo atlante di trivializzazione, con funzioni di transizione $\{\psi_{\alpha,\beta}\}$.

Se $\xi' = (P' \xrightarrow{\pi'} M)$ è un altro fibrato principale con gruppo strutturale \mathbf{G} , che ammette un atlante di trivializzazione $\mathcal{A}' = \{(U_\alpha, \sigma'_\alpha) \mid \alpha \in I\}$, con $\sigma'^{-1}_\alpha \sigma'_\beta = \psi_{\alpha,\beta}$, definiamo un'equivalenza $f : P \rightarrow P'$ ponendo

$$f(\tilde{\sigma}_\alpha(p, a)) = \sigma'_\alpha(p) \cdot a, \quad \forall \alpha \in I, \quad p \in U_\alpha, \quad a \in \mathbf{G}.$$

La condizione che le $\{\psi_{\alpha,\beta}\}$ siano le funzioni di transizione di \mathcal{A}' ci dice che la f è ben definita. \square

III.2. L'esempio degli spazi omogenei

Gli spazi omogenei sono una classe fondamentale di fibrati principali. Dal Teorema I.8.3 segue infatti:

TEOREMA III.2.1. *Sia M una varietà differenziabile e \mathbf{G} un gruppo di Lie che opera transitivamente su M . Sia \mathbf{H} lo stabilizzatore di un punto $p_0 \in M$ e*

$$\pi : \mathbf{G} \ni x \longrightarrow xp_0 \in M.$$

Allora $\xi = (\mathbf{G} \xrightarrow{\pi} M)$ è un fibrato principale con gruppo strutturale \mathbf{H} . \square

III.3. Morfismi di fibrati principali

Siano $\xi_i = (P_i \xrightarrow{\pi_i} M_i)$, $i = 1, 2$, due fibrati principali, con gruppi strutturali \mathbf{G}_i . Saremo interessati essenzialmente ai casi in cui i due gruppi siano o uguali, oppure uno un sottogruppo dell'altro.

DEFINIZIONE III.3.1. Un *morfismo di fibrati principali* $\Phi : \xi_1 \rightarrow \xi_2$ è una tripletta (f, F, ϕ) in cui la coppia (f, F) definisca un morfismo di fibrati differenziabili

$$(3.3.1) \quad \begin{array}{ccc} P_1 & \xrightarrow{F} & P_2 \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ M_1 & \xrightarrow{f} & M_2, \end{array}$$

e $\phi : \mathbf{G}_1 \rightarrow \mathbf{G}_2$ sia un omomorfismo di gruppi di Lie che renda commutativo il diagramma

$$(3.3.2) \quad \begin{array}{ccc} P_1 \times \mathbf{G}_1 & \xrightarrow{F \times \phi} & P_2 \times \mathbf{G}_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ P_1 & \xrightarrow{F} & P_2, \end{array}$$

in cui le frecce verticali sono definite dalle azioni dei gruppi.

Diciamo che $\Phi = (f, F, \phi) : \xi_1 \rightarrow \xi_2$ induce f tra le basi, F tra gli spazi totali e ϕ tra i gruppi di Lie.

Diciamo che $\Phi = (f, F, \phi) : \xi_1 \rightarrow \xi_2$ è un'immersione se F è un'immersione. In questo caso ϕ è un monomorfismo di gruppi.

Se $\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_2 = \mathbf{G}$ e ϕ è l'identità, diciamo che $\Phi : \xi_1 \rightarrow \xi_2$ è un morfismo di \mathbf{G} -fibrati principali.

Se F è un'inclusione, diciamo che $\Phi = (f, F, \phi) : \xi_1 \rightarrow \xi_2$ è un'inclusione di fibrati principali. In questo caso, se $M_1 = M_2$ ed $f = \text{Id}_M$, diciamo che ξ_1 è un *sottofibrato principale* di ξ_2 , o che è stato ottenuto da ξ_2 mediante una *riduzione del gruppo strutturale*, ovvero che ξ_2 è stato ottenuto da ξ_1 mediante un' *estensione del gruppo strutturale*.

PROPOSIZIONE III.3.2. Sia $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato principale con gruppo strutturale \mathbf{G} , e \mathbf{G}' un sottogruppo di Lie di \mathbf{G} . Condizione necessaria e sufficiente affinché ξ ammetta una riduzione del gruppo strutturale a \mathbf{G}' è che ammetta un atlante di trivializzazione con funzioni di transizione a valori in \mathbf{G}' .

DIMOSTRAZIONE. La condizione è ovviamente necessaria. Dimostriamone la sufficienza.

Fissato un atlante di trivializzazione $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \sigma_\alpha) \mid \alpha \in I\}$ di ξ con funzioni di transizione $\psi_{\alpha\beta} = \sigma_\alpha^{-1} \sigma_\beta \in \mathcal{C}^\infty(U_\alpha \cap U_\beta, \mathbf{G}')$, sia

$$P' = \bigcup_{\alpha \in I} \{\sigma_\alpha(p) \cdot a \mid p \in U_\alpha, a \in \mathbf{G}'\}.$$

Con la struttura differenziabile per cui le

$$\Psi'_\alpha : U_\alpha \times \mathbf{G}' \ni (p, a) \longrightarrow \sigma(p) \cdot a \in P' \cap P_{U_\alpha}$$

siano diffeomorfismi, P' è una sottovarietà differenziabile di P . La restrizione $\pi' = \pi|_{P'}$ definisce un sottofibrato differenziabile $\xi' = (P' \xrightarrow{\pi'} M)$, che è principale con gruppo strutturale \mathbf{G}' , ed è una riduzione di ξ a \mathbf{G}' . \square

OSSERVAZIONE III.3.3. Se ξ è un fibrato principale con gruppo strutturale \mathbf{G} , e \mathbf{G} è un sottogruppo di Lie di un gruppo di Lie \mathbf{G}' , esiste unico, a meno di equivalenze, un fibrato principale ξ' che si ottiene da ξ per estensione a \mathbf{G}' del gruppo strutturale. Ciò è facile conseguenza del Teorema III.1.7.

LEMMA III.3.4. *Il pullback di un fibrato \mathbf{G} -principale ha un'unica struttura di fibrato \mathbf{G} -principale che rende l'applicazione naturale associata un morfismo di fibrati \mathbf{G} -principali.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\eta = (Q \xrightarrow{\pi_\eta} N)$ un fibrato \mathbf{G} -principale. Sia $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ e consideriamo il pullback $f^*(\eta)$ di η mediante f . Il suo spazio totale è

$$E_{f^*(\eta)} = \{(p, \tau) \mid p \in M, \tau \in Q, \pi_\eta(\tau) = f(p)\}$$

ed è un fibrato \mathbf{G} -principale per l'azione

$$(3.3.3) \quad (p, \tau) \cdot a = (p, \tau \cdot a), \quad \forall (p, \tau) \in E_{f^*(\eta)}, \quad \forall a \in \mathbf{G}.$$

Si verifica immediatamente che il morfismo associato, $(f, \hat{f}, \text{id}_{\mathbf{G}}) : f^*(\eta) \rightarrow \eta$, con $\hat{f}(p, \tau) = \tau$, è un morfismo di fibrati \mathbf{G} -principali. \square

DEFINIZIONE III.3.5. Il pullback $f^*(\eta)$, con la struttura di fibrato \mathbf{G} -principale definita dalla (3.3.3), si dice il *pullback* o *immagine inversa* del fibrato \mathbf{G} -principale η .

I morfismi di fibrati \mathbf{G} -principali sono completamente determinati dalle applicazioni indotte tra le basi. Vale infatti la

PROPOSIZIONE III.3.6. *Siano $\xi = (P \xrightarrow{\pi_\xi} M)$, $\eta = (Q \xrightarrow{\pi_\eta} N)$ due fibrati \mathbf{G} -principali ed $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$. Condizione necessaria e sufficiente affinché esista un'applicazione differenziabile $F \in \mathcal{C}^\infty(P, Q)$ per cui $(f, F, \text{id}_{\mathbf{G}}) : \xi \rightarrow \eta$ sia un morfismo di fibrati \mathbf{G} -principali, è che ξ sia equivalente ad $f^*(\eta)$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\xi = (P \xrightarrow{\pi_\xi} M)$ un fibrato \mathbf{G} -principale per cui esista un morfismo $(f, F, \text{id}_{\mathbf{G}}) : \xi \rightarrow \eta$ di fibrati \mathbf{G} -principali.

Allora $(\text{id}_M, \check{F}, \text{id}_{\mathbf{G}}) : \xi \rightarrow f^*(\eta)$, con $\check{F}(\sigma) = (\pi_\xi(\sigma), F(\sigma)) \in E_{f^*(\eta)}$ per $\sigma \in P$ è un'equivalenza di fibrati \mathbf{G} -principali. \square

PROPOSIZIONE III.3.7. *Siano M, N due varietà differenziabili, \mathbf{G} un gruppo di Lie e $\xi = (P \xrightarrow{\pi} N)$ un fibrato principale su N con gruppo strutturale \mathbf{G} . Abbiamo:*

- (1) *Se $f_0, f_1 \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ sono omotope, allora $f_0^*(\xi)$ e $f_1^*(\xi)$ sono equivalenti.*
- (2) *Se M è contrattile, ogni \mathbf{G} -fibrato principale di base M è banale.*

DIMOSTRAZIONE. (1) Sia $\tilde{f} = \{f_t\} \in \mathcal{C}^\infty(M \times \mathbb{R}, N)$ un'omotopia tra f_0 ed f_1 e consideriamo il fibrato \mathbf{G} -principale $\tilde{f}^*(\xi)$. L'equivalenza si ottiene utilizzando l'esistenza di una \mathbf{G} -connessione principale sul fibrato $\tilde{f}^*(\xi)$ ed il corrispondente trasporto parallelo¹ (vedi §IV.8) lungo le curve $t \rightarrow (p, t)$ in $M \times \mathbb{R}$.

(2) Sia $\xi = (E \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato \mathbf{G} -principale. Supponiamo che M sia contrattile e sia $\tilde{f} = \{f_t\} \in \mathcal{C}^\infty(M \times \mathbb{R}, M)$ un'omotopia con $f_1 = \text{id}_M$ ed f_0 costante. Per il punto (1), $\xi \simeq f_1^*(\xi)$ ed $f_0^*(\xi)$, che è un fibrato banale, sono equivalenti. \square

III.4. Classificazione dei fibrati principali

La Proposizione III.3.7 è fondamentale per la classificazione dei fibrati principali con base M . John Milnor² ha introdotto la nozione di fibrato universale.

DEFINIZIONE III.4.1. Un fibrato \mathbf{G} -principale $\zeta = (E_\zeta \xrightarrow{\pi_\zeta} B_\zeta)$ si dice *m-universale* se per ogni fibrato \mathbf{G} -principale $\xi = (E_\xi \xrightarrow{\pi_\xi} B_\xi)$ con una base B_ξ di dimensione minore o uguale ad m esiste un'applicazione $f \in \mathcal{C}^\infty(B_\xi, B_\zeta)$, unica a meno di omotopia, tale che $f^*(\zeta)$ sia equivalente a ξ .

Utilizzando i risultati di §XXIV.7 e quelli relativi all'approssimazione \mathcal{C}^∞ dell'omotopia, ricaviamo dal Teorema XXIV.7.6 l'enunciato

TEOREMA III.4.2. *Ogni fibrato $\zeta = (E_\zeta \xrightarrow{\pi_\zeta} B_\zeta)$ il cui spazio totale E_ζ sia m -connesso³ è m -universale.*

III.4.1. Alcuni esempi. Costruiamo in questo paragrafo alcuni fibrati principali m -universali rispetto ad alcuni gruppi classici.

Sottogruppi del gruppo ortogonale. Fissiamo due interi positivi m ed n e consideriamo $\mathbf{SO}(m)$ ed $\mathbf{SO}(n)$ come sottogruppi disgiunti di $\mathbf{SO}(m+n)$, ciascuno contenuto nel commutatore dell'altro. Il quoziente $E = \mathbf{SO}(m+n)/\mathbf{SO}(n)$ si può identificare alla varietà di Stiefel $\mathbb{V}_{n+m,m}(\mathbb{R})$ delle m -uple ortonormali di \mathbb{R}^{m+n} . Fissiamo un sottogruppo chiuso \mathbf{G} di $\mathbf{SO}(m)$ e poniamo $M = \mathbf{SO}(m+n)/(\mathbf{G} \times \mathbf{SO}(n))$. L'inclusione $\{e\} \times \mathbf{SO}(n) < \mathbf{G} \times \mathbf{SO}(n)$ definisce un'applicazione $\mathbf{SO}(m+n)$ -equivariante $\pi : E \rightarrow M$ che definisce un \mathbf{G} -fibrato principale. Ricordiamo che la varietà di Stiefel $\mathbb{V}_{m+n,m}(\mathbb{R})$ delle m -uple ortonormali di \mathbb{R}^{m+n} è $(n-1)$ -connessa e che

$$\pi_n(\mathbb{V}_{m+n,m}(\mathbb{R})) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } n \text{ è pari,} \\ \mathbb{Z}_2 & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

¹Per un argomento topologico, che non faccia uso della struttura differenziabile e dell'esistenza di connessioni principali, si veda il Teorema XXIV.6.2 nell'appendice.

²John Milnor *Construction of Universal Bundles, I* Annals of Mathematics Second Series, Vol. 63, No. 2 (Mar., 1956), pp. 272-284, e *Construction of Universal Bundles, II*, Annals of Mathematics Second Series, Vol. 63, No. 3 (May, 1956), pp. 430-436.

³Ricordiamo che uno spazio topologico E è m -connesso se è connesso per archi ed i suoi gruppi di omotopia $\pi_i(E)$ sono banali per $1 \leq i \leq n$.

DEFINIZIONE III.4.3. Chiamiamo

$$(3.4.1) \quad \mathbf{SO}(m+n)/\mathbf{SO}(n) \xrightarrow{\pi} \mathbf{SO}(m+n)/(\mathbf{G} \times \mathbf{SO}(n))$$

l' n -fibrato principale ortogonale standard con gruppo strutturale $\mathbf{G} \subset \mathbf{SO}(m)$.

Il fibrato (3.4.1) è \mathbf{G} -principale $(n-1)$ -universale.

Sottogruppi del gruppo speciale unitario. Siano m, n due interi positivi e consideriamo $\mathbf{SU}(m)$ ed $\mathbf{SU}(n)$ come sottogruppi disgiunti di $\mathbf{SU}(m+n)$ contenuti ciascuno nel commutatore dell'altro. Il quoziente $E = \mathbf{SU}(m+n)/\mathbf{SU}(n)$ è la varietà di Stiefel $\mathbb{V}_{m+n,n}(\mathbb{C})$. È

$$\pi_q(\mathbb{V}_{m+n,n}(\mathbb{C})) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq q < 2n, \\ \mathbb{Z} & \text{se } q = 2n. \end{cases}$$

Se \mathbf{G} è un sottogruppo chiuso di $\mathbf{SU}(m)$, la proiezione naturale $\pi : E \rightarrow M$ su $M = \mathbf{SU}(m+n)/(\mathbf{G} \times \mathbf{SU}(n))$ definita dall'inclusione $\{e\} \times \mathbf{SU}(n) < \mathbf{G} \times \mathbf{SU}(n)$ definisce un \mathbf{G} -fibrato principale.

DEFINIZIONE III.4.4. Chiamiamo

$$(3.4.2) \quad \mathbf{SU}(m+n)/\mathbf{SU}(n) \xrightarrow{\pi} \mathbf{SU}(m+n)/(\mathbf{G} \times \mathbf{SU}(n))$$

l' n -fibrato principale unitario standard con gruppo strutturale $\mathbf{G} \subset \mathbf{SU}(m)$.

Il fibrato (3.4.2) è \mathbf{G} -principale $(2n-1)$ -universale.

Sottogruppi del gruppo unitario simplettico. Ricordiamo che il gruppo unitario simplettico $\mathbf{Sp}(n)$ è il sottogruppo delle trasformazioni di $\mathbf{U}(2n)$ che lasciano invariante la forma alternata $\omega = dz^1 \wedge dz^{n+1} + \dots + dz^{2n-1} \wedge dz^{2n}$. Siano m, n interi positivi e consideriamo $\mathbf{Sp}(m)$ ed $\mathbf{Sp}(n)$ come sottogruppi di $\mathbf{Sp}(m+n)$, ciascuno contenuto nel commutatore dell'altro. Il quoziente $\mathbf{Sp}(m+n)/\mathbf{Sp}(n)$ è la varietà di Stiefel quaternionica $\mathbb{V}_{m+n,m}(\mathbb{H})$ delle m -uple ortonormali rispetto al prodotto scalare quaternionico standard di \mathbb{H}^n . Abbiamo

$$\pi_q(\mathbb{V}_{m+n,m}(\mathbb{H})) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq q < 4n, \\ \mathbb{Z} & \text{se } q = 4n. \end{cases}$$

Se \mathbf{G} è un sottogruppo chiuso di $\mathbf{Sp}(m)$, la proiezione naturale $\pi : E \rightarrow M$ su $M = \mathbf{Sp}(m+n)/(\mathbf{G} \times \mathbf{Sp}(n))$ definita dall'inclusione $\{e\} \times \mathbf{Sp}(n) < \mathbf{G} \times \mathbf{Sp}(n)$ definisce un \mathbf{G} -fibrato principale.

DEFINIZIONE III.4.5. Chiamiamo

$$(3.4.3) \quad \mathbf{Sp}(m+n)/\mathbf{Sp}(n) \xrightarrow{\pi} \mathbf{Sp}(m+n)/(\mathbf{G} \times \mathbf{Sp}(n))$$

l' n -fibrato principale quaternionico standard con gruppo strutturale $\mathbf{G} \subset \mathbf{Sp}(m)$.

Il fibrato (3.4.3) è \mathbf{G} -principale $(4n-1)$ -universale.

Sottogruppi del gruppo lineare. Siano m ed n interi positivi. Consideriamo $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$ ed $\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$ come due sottogruppi disgiunti di $\mathbf{SL}_{m+n}(\mathbb{R})$ che commutano tra loro. Le loro rappresentazioni in $\mathbf{SL}_{m+n}(\mathbb{R})$ sono date rispettivamente da

$$\begin{aligned} \mathbf{GL}_m(\mathbb{R}) \ni x &\rightarrow \begin{pmatrix} x & \\ & \text{sgn}(\det x)I_n \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}_{m+n}(\mathbb{R}) \quad \text{e} \\ \mathbf{SL}_n(\mathbb{R}) \ni x &\rightarrow \begin{pmatrix} I_m & \\ & x \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}_{m+n}(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Per la decomposizione di Cartan, $\mathbf{SL}_{m+n}(\mathbb{R})/\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$ è omotopicamente equivalente al quoziente $\mathbf{SO}(m+n)/\mathbf{SO}(n)$ ed è quindi $(n-1)$ -connesso. Ne segue che, se \mathbf{G} è un sottogruppo chiuso di $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$, allora

$$(3.4.4) \quad \mathbf{SL}_{m+n}(\mathbb{R})/\mathbf{SL}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{SL}_{m+n}(\mathbb{R})/(\mathbf{G} \times \mathbf{SL}_n(\mathbb{R}))$$

è un fibrato \mathbf{G} -principale $(n-1)$ -universale.

Costruzioni analoghe ci permettono di ottenere fibrati \mathbf{G} -principali k -universali per sottogruppi chiusi di $\mathbf{GL}_m(\mathbb{C})$ e $\mathbf{GL}_m(\mathbb{H})$.

III.5. Il fibrato dei sistemi di riferimento

Sia $\eta = (E \xrightarrow{\varpi} M)$ un fibrato vettoriale di rango n su una varietà differenziabile M di dimensione m . Per ogni punto p di M indichiamo con $F_p(\eta)$ l'insieme di tutti gli isomorfismi lineari $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow E_p$. Su $F_p(\eta)$ il gruppo lineare $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ agisce, per composizione a destra, in modo libero e transitivo. L'unione disgiunta $F(\eta) = \sqcup_{p \in M} F_p(\eta)$ è lo spazio totale di un fibrato principale $\mathbb{L}(\eta) = (F(\eta) \xrightarrow{\pi} M)$, con gruppo strutturale $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$. La proiezione $\pi : \mathbb{L}(\eta) \rightarrow M$ associa a $\sigma \in L_p(\eta)$ il punto p .

DEFINIZIONE III.5.1. Il fibrato principale $F(\eta)$, con gruppo strutturale $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, si dice il *fibrato dei sistemi di riferimento* di η .

Abbiamo un morfismo differenziabile di fibrati vettoriali, associato al diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{L}(\eta) \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{(\sigma, v) \rightarrow \sigma v} & E \\ \text{pr}_{\mathbb{L}(\eta)} \downarrow & & \downarrow \sigma \\ \mathbb{L}(\eta) & \xrightarrow{\pi} & M, \end{array}$$

che ci mostra come il pullback del fibrato vettoriale allo spazio totale dei suoi sistemi di riferimento sia un fibrato vettoriale banale.

Una trivializzazione locale di $\mathbb{L}(\eta)$ è descritta dal dato di n sezioni $s_1, \dots, s_n \in \Gamma_\eta(U, E)$, definite su un aperto U di M , per cui $s_1(p), \dots, s_n(p)$ siano linearmente indipendenti in E_p per ogni $p \in U$. Ad esse associamo la sezione $\sigma \in \Gamma_{\mathbb{L}(\eta)}(U, \mathbb{L}(\eta))$ definita da

$$\sigma(p) : \mathbb{R}^n \ni (k^1, \dots, k^n) \rightarrow \sum_{i=1}^n k^i s_i(p) \in E_p.$$

Il fibrato dei sistemi di riferimento di η è caratterizzato dal fatto che le sue sezioni locali definiscono trivializzazioni locali di η . Viceversa, vale la

PROPOSIZIONE III.5.2. *Ad ogni fibrato principale $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$, con gruppo strutturale $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, possiamo associare un fibrato vettoriale $\eta = (E \xrightarrow{\varpi} M)$ di rango n , unico a meno di equivalenza, di cui ξ sia il fibrato dei sistemi di riferimento.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \sigma_\alpha)\}$ un atlante di trivializzazione di ξ . Le sue funzioni di transizione $\psi_{\alpha,\beta} = \sigma_\alpha^{-1}\sigma_\beta \in \mathcal{C}^\infty(U_{\alpha,\beta}, \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}))$ ci permettono di definire un fibrato vettoriale con fibra tipica \mathbb{R}^n nel modo seguente.

Sull'unione disgiunta $\tilde{E} = \bigsqcup_\alpha U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ introduciamo la relazione di equivalenza $U_\alpha \times \mathbb{R}^n \ni (p_\alpha, v_\alpha) \sim (p_\beta, v_\beta) \in U_\beta \times \mathbb{R}^n$ se $p_\alpha = p_\beta$ e $v_\alpha = \psi_{\alpha,\beta}(p_\beta)v_\beta$. Il quoziente $E = \tilde{E}/\sim$ è lo spazio totale di un fibrato vettoriale di rango n di cui ξ è il fibrato dei sistemi di riferimento.

Se $\eta' = (E' \xrightarrow{\varpi'} M)$ è un altro fibrato vettoriale di cui ξ sia il fibrato dei sistemi di riferimento, definiamo un'applicazione $\tilde{E} \rightarrow E'$ associando a $(p, v) \in U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ l'elemento $\sigma_\alpha(p)v \in E'$. Per passaggio al quoziente otteniamo l'equivalenza tra η ed η' . \square

Abbiamo quindi:

TEOREMA III.5.3. *La $\eta \longleftrightarrow \mathbb{L}(\eta)$ è una corrispondenza biunivoca tra la categoria dei fibrati vettoriali di rango n su M , modulo equivalenza, e quella dei fibrati principali su M con gruppo strutturale $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, modulo equivalenza.*

DEFINIZIONE III.5.4. Il fibrato dei sistemi di riferimento del fibrato tangente di una varietà differenziabile M si indica con $F(M)$ e si dice il *fibrato dei sistemi di riferimento su M* . Indichiamo con $L(M)$ il suo spazio totale.

Abbiamo

PROPOSIZIONE III.5.5. *Ogni diffeomorfismo $f : M_1 \rightarrow M_2$ di varietà differenziabili si rialza in modo unico ad un isomorfismo di fibrati principali che renda commutativo il diagramma*

$$(3.5.1) \quad \begin{array}{ccc} L(M_1) & \xrightarrow{\tilde{f}} & L(M_2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_1 & \xrightarrow{f} & M_2. \end{array}$$

III.6. Jacobiano di un'applicazione differenziabile

Siano M, N due varietà differenziabili, di dimensioni m, n rispettivamente. Siano $\mathbb{L}(M) = (L(M) \xrightarrow{\pi_M} M)$ ed $\mathbb{L}(N) = (L(N) \xrightarrow{\pi_N} N)$ i loro fibrati dei sistemi di riferimento. Ad una $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ associamo il fibrato $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R}) \times \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ -principale \mathbb{L}_f su M , con spazio totale

$$L_f = \{(\sigma, \tau) \in L(M) \times L(N) \mid \pi_N(\tau) = f(\pi_M(\sigma))\}$$

e proiezione $\pi(\sigma, \tau) = \pi_M(\tau)$. Al differenziale della f è associato il suo *jacobiano* $Jf : L_f \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$

$$Jf(\sigma, \tau) = \tau^{-1} \circ df \circ \sigma : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

nei sistemi di riferimento σ e τ .

III.7. Riduzione del gruppo strutturale e G-strutture

Il Teorema III.5.3 stabilisce una corrispondenza biunivoca tra fibrati vettoriali e fibrati principali con gruppo strutturale $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$. Osserviamo che, se, nella dimostrazione della Proposizione III.5.2, avessimo ristretto la costruzione ad un sottofibrato principale ξ' di ξ , con gruppo strutturale $\mathbf{G} < \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, avremmo ottenuto un fibrato vettoriale canonicamente isomorfo a quello associato a ξ .

Siano $\eta = (E \xrightarrow{\varpi} M)$ un fibrato vettoriale reale di rango n e \mathbf{G} un sottogruppo di Lie di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$.

DEFINIZIONE III.7.1. Un \mathbf{G} -atlante di trivializzazione di η è un suo atlante di trivializzazione $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \sigma_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ con funzioni di transizione $\psi_{\alpha\beta} = \sigma_\alpha^{-1} \sigma_\beta \in \mathcal{C}^\infty(U_{\alpha\beta}, \mathbf{G})$.

Due \mathbf{G} -atlanti di trivializzazione \mathcal{A} ed \mathcal{A}' , sono *equivalenti* se $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ è ancora un \mathbf{G} -atlante di trivializzazione.

L'unione di tutti i \mathbf{G} -atlanti di trivializzazione equivalenti ad un \mathbf{G} -atlante di trivializzazione assegnato è un \mathbf{G} -atlante di trivializzazione massimale.

Una \mathbf{G} -struttura, o *riduzione a \mathbf{G} del gruppo strutturale* è il dato di una classe di equivalenza di \mathbf{G} -atlanti di trivializzazione di η , ovvero di un \mathbf{G} -atlante di trivializzazione massimale.

Una carta locale di trivializzazione (U, σ_U) di η è *compatibile* con la \mathbf{G} -struttura se appartiene al suo \mathbf{G} -atlante di trivializzazione massimale.

Osserviamo che un \mathbf{G} -atlante di trivializzazione $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \sigma_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ di η determina un fibrato \mathbf{G} -principale $F_{\mathbf{G}}(\eta)$, ottenuto da $F(\eta)$ per riduzione del gruppo strutturale, con spazio totale

$$(3.7.1) \quad \mathbb{L}_{\mathbf{G}}(\eta) = \bigcup_{\alpha \in I} \{\sigma_\alpha(p)a \mid p \in U_\alpha, a \in \mathbf{G}\} \subset \mathbb{L}(\eta).$$

DEFINIZIONE III.7.2. Chiamiamo $F_{\mathbf{G}}(\eta)$ un fibrato di \mathbf{G} -sistemi di riferimento di η .

Siano $\eta = (E \xrightarrow{\varpi} M)$ ed $\eta' = (E' \xrightarrow{\varpi'} M')$ due fibrati vettoriali di rango n . Un isomorfismo di fibrati vettoriali

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\tilde{f}} & E' \\ \varpi \downarrow & & \downarrow \varpi' \\ M & \xrightarrow{f} & M' \end{array}$$

si rialza ad un isomorfismo dei corrispondenti fibrati dei sistemi di riferimento

$$\begin{array}{ccc} L(\eta) & \xrightarrow{\tilde{f}_*} & L(\eta') \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ M & \xrightarrow{f} & M', \end{array} \quad \text{con } \tilde{f}_*(\sigma) = \tilde{f}_* \circ \sigma \in L_{\pi(\sigma)}(\mathbb{R}^n, E'_{\pi(\sigma)}).$$

DEFINIZIONE III.7.3. Siano η, η' due fibrati vettoriali dello stesso rango, dotati di una \mathbf{G} -struttura. Un isomorfismo (f, \tilde{f}) di η in η' è un \mathbf{G} -isomorfismo se

$$(3.7.2) \quad \tilde{f}_*(L_{\mathbf{G}}(\eta)) = L_{\mathbf{G}}(\eta').$$

Se i due fibrati hanno la stessa base ed f è l'identità, chiamiamo il corrispondente \mathbf{G} -isomorfismo una \mathbf{G} -equivalenza.

PROPOSIZIONE III.7.4. Sia $\eta = (E \xrightarrow{\varpi} M)$ un fibrato vettoriale di rango n . A meno di equivalenza, le \mathbf{G} -strutture su η sono in corrispondenza biunivoca con le \mathbf{G} -riduzioni del fibrato $F(\eta)$ dei suoi sistemi di riferimento. \square

Sia \mathbf{G} un sottogruppo chiuso di $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$. Se $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ è un ricoprimento aperto di M , indichiamo con $\mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \mathbf{G})$ l'insieme delle q -catene di applicazioni di classe \mathcal{C}^∞ del ricoprimento \mathcal{U} , a valori in \mathbf{G} :

$$(3.7.3) \quad \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \mathbf{G}) = \{(g_{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_q} \in \mathcal{C}^\infty(U_{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_q}, \mathbf{G}))\}.$$

Indichiamo poi con

$$(3.7.4) \quad \mathfrak{Z}^1(\mathcal{U}, \mathbf{G}) = \{(g_{\alpha, \beta} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbf{G})) \mid g_{\alpha, \beta} g_{\beta, \gamma} = g_{\alpha, \gamma} \text{ su } U_{\alpha, \beta, \gamma}, \forall \alpha, \beta, \gamma\},$$

e scriviamo

$$(3.7.5) \quad \delta(g_\alpha) = (g_\alpha \circ g_\beta^{-1}) \in \mathfrak{Z}^1(\mathcal{U}, \mathbf{G}), \quad \forall (g_\alpha) \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathbf{G}).$$

PROPOSIZIONE III.7.5. Siano $(g_{\alpha, \beta}), (g'_{\alpha, \beta}) \in \mathfrak{Z}^1(\mathcal{U}, \mathbf{G})$ funzioni di transizione delle trivializzazioni di due fibrati vettoriali di rango n

$$\xi = (E \xrightarrow{\varpi} M) \quad e \quad \xi' = (E' \xrightarrow{\varpi'} M)$$

sulla stessa base M , entrambi con gruppo strutturale \mathbf{G} . Condizione necessaria e sufficiente affinché i due fibrati siano \mathbf{G} -equivalenti è che esista una $(h_\alpha) \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathbf{G})$ tale che

$$(3.7.6) \quad g'_{\alpha, \beta} = h_\alpha g_{\alpha, \beta} h_\beta^{-1} \quad \text{su } U_{\alpha, \beta}, \quad \forall \alpha, \beta.$$

In particolare, il fibrato ξ è \mathbf{G} -equivalente al fibrato banale se, e soltanto se, $(g_{\alpha, \beta}) = \delta(h_\alpha)$ per qualche $(h_\alpha) \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathbf{G})$. \square

ESEMPPIO III.7.6. Ogni fibrato vettoriale di rango n ammette una $\mathbf{O}(n)$ -struttura. Sia infatti $\eta = (E \xrightarrow{\varpi} M)$ un fibrato vettoriale di rango n ed $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \sigma_\alpha) \mid \alpha \in I\}$ un suo atlante di trivializzazione, con $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ ricoprimento aperto localmente finito di M . Sia $\{\chi_\alpha\}$ una partizione differenziabile dell'unità subordinata ad \mathcal{U} . Possiamo allora definire un prodotto scalare sulle fibre di E ponendo

$$g(v_1, v_2) = \sum_{U_\alpha \ni p} \chi_\alpha(p) (\sigma_\alpha^{-1}(v_1) \mid \sigma_\alpha^{-1}(v_2)), \quad \forall p \in M, \quad \forall v_1, v_2 \in E_p.$$

La $\mathbf{O}(n)$ struttura su η associata alla metrica g si può ottenere dall'atlante \mathcal{A} applicando il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt alle basi $\sigma_\alpha(p)(e_1), \dots, \sigma_\alpha(p)(e_n)$ di E_p rispetto al prodotto scalare $g_p = g|_{E_p}$.

III.8. G-strutture su una varietà differenziabile

Siano M una varietà differenziabile di dimensione m e \mathbf{G} è un sottogruppo di Lie del gruppo lineare⁴ $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$.

DEFINIZIONE III.8.1. Una \mathbf{G} -struttura su M è una \mathbf{G} -struttura sul suo fibrato tangente.

OSSERVAZIONE III.8.2. Il concetto di \mathbf{G} -struttura ci permette di considerare in modo concettualmente unitario diverse geometrie su M . Ad esempio:

- un'orientazione su M è equivalente al dato di una $\mathbf{GL}_m^+(\mathbb{R})$ -struttura;
- una misura di Radon di classe \mathcal{C}^∞ di una $\mathbf{SL}(m, \mathbb{R})$ -struttura;
- una metrica Riemanniana di una $\mathbf{O}(m)$ -struttura;
- una struttura quasi-compessa di una $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ -struttura ($m = 2n$ pari);
- una struttura quasi-Hermitiana⁵ di una $\mathbf{U}(n)$ -struttura ($m = 2n$ pari);
- una struttura quasi-simplettica di una $\mathbf{Sp}(n, \mathbb{R})$ -struttura ($m = 2n$)⁶;
- una struttura iper-unitaria di una $\mathbf{Sp}(n)$ -struttura⁷ ($m = 4n$);
- una $\mathbf{1}$ -struttura si dice un *parallelismo completo*.

ESEMPIO III.8.3. La fibrazione canonica $\mathbf{SO}(n+1) \rightarrow S^n$ è una $\mathbf{SO}(n)$ -riduzione del fibrato dei sistemi di riferimento di S^n e quindi una $\mathbf{SO}(n)$ -struttura su S^n .

La fibrazione canonica $\mathbf{SO}(n+1) \rightarrow \mathbb{RP}^n$ è una $\mathbf{O}(n)$ -riduzione del fibrato dei sistemi di riferimento di \mathbb{RP}^n e quindi una struttura Riemanniana su \mathbb{RP}^n .

La fibrazione canonica $\mathbf{SU}(n+1) \rightarrow \mathbb{CP}^n$ è una $\mathbf{U}(n)$ -riduzione del fibrato dei sistemi di riferimento su \mathbb{CP}^n e quindi una struttura quasi-Hermitiana su \mathbb{CP}^n .

III.9. Fibrati vettoriali associati a rappresentazioni lineari

III.9.1. Fibrati vettoriali associati. La costruzione della Proposizione III.5.2 si generalizza al caso di fibrati principali generali e di rappresentazioni lineari del loro gruppo strutturale.

Sia $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato principale su M , con gruppo strutturale \mathbf{G} .

Fissata una rappresentazione lineare di dimensione finita $\rho : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(V)$, definiamo su $P \times V$ una relazione di equivalenza ponendo

$$(3.9.1) \quad (\sigma, v) \sim (\sigma \cdot a, \rho(a^{-1})(v)) \quad \forall \sigma \in P, \forall v \in V, \forall a \in \mathbf{G}.$$

⁴La nozione di \mathbf{G} -struttura per una varietà differenziabile è stata introdotta in S.S. Chern, *Pseudo-groups continus infinis*, Colloque de Géométrie différentielle, Strasbourg (1953), pp. 119-136.

⁵Affinché si possa parlare di struttura Hermitiana occorre che si possa definire sul fibrato tangente una struttura quasi-compessa che sia un'isometria per la struttura quasi-Hermitiana.

⁶Ricordiamo che $\mathbf{Sp}(n, \mathbb{R}) = \{a \in \mathbf{SL}(2n, \mathbb{R}) \mid a\Omega a = \Omega\}$ per una matrice antisimmetrica non degenera Ω di tipo $(2n) \times (2n)$.

⁷Ricordiamo che $\mathbf{Sp}(n) = \mathbf{U}(2n) \cap \mathbf{Sp}(n, \mathbb{C})$.

NOTAZIONE III.9.1. Indicheremo con E_V il quoziente $(P \times V)/\sim$ e scriveremo per semplicità $\sigma_\rho v$, o anche σv , quando si possa sottintendere la rappresentazione ρ senza creare confusione, per indicare la classe in E_V di $(\sigma, v) \in P \times V$. Se $\alpha = \sigma v$, il vettore $v \in V$ è univocamente determinato da α e σ . Possiamo quindi denotarlo con $v = \sigma^{-1}\alpha$.

PROPOSIZIONE III.9.2. *Il quoziente $E_V = (P \times V)/\sim$ è lo spazio totale di un fibrato vettoriale $\xi_V = (E_V \xrightarrow{\pi_V} M)$ con fibra tipica V . La proiezione nel quoziente $\varpi : P \times V \ni (\sigma, v) \rightarrow \sigma v \in E_V$ definisce un morfismo di fibrati vettoriali che rende commutativo il diagramma*

$$(3.9.2) \quad \begin{array}{ccc} P \times V & \xrightarrow{\varpi} & E_V \\ \text{pr}_P \downarrow & & \downarrow \pi_V \\ P & \xrightarrow{\pi} & M. \end{array}$$

DEFINIZIONE III.9.3. $\xi_V = (E_V \xrightarrow{\pi_V} M)$ è il fibrato vettoriale associato a ξ e alla rappresentazione lineare (ρ, V) del suo gruppo strutturale.

Riassumiamo questa costruzione nell'enunciato:

PROPOSIZIONE III.9.4. *Sia ξ un fibrato principale sulla varietà differenziabile M , con gruppo strutturale \mathbf{G} . Ad ogni rappresentazione lineare ρ di \mathbf{G} su uno spazio vettoriale V risulta associato un fibrato vettoriale ξ_V su M , con fibra tipica V , tale che (3.9.2) sia un diagramma commutativo di morfismi di fibrati vettoriali. \square*

DEFINIZIONE III.9.5. Chiamiamo le sezioni differenziabili del fibrato vettoriale ξ_V *quantità di tipo (ρ, V)* .

Scriveremo per semplicità $\Gamma_\xi(M, E_V)$ invece di $\Gamma_{\xi_V}(M, E_V)$.

Una sezione $s \in \Gamma_\xi(M, E_V)$ del fibrato ξ_V si rialza alla funzione $\tilde{s} \in \mathcal{C}^\infty(P, V)$, definita da

$$(3.9.3) \quad \tilde{s}(\sigma) = \sigma^{-1}s(\pi(\sigma)).$$

DEFINIZIONE III.9.6. Chiamiamo la \tilde{s} il *sollevamento* su P della sezione s .

PROPOSIZIONE III.9.7. *Condizione necessaria e sufficiente affinché una $f \in \mathcal{C}^\infty(P, V)$ sia il sollevamento di una sezione di ξ_V è che risulti*

$$(3.9.4) \quad f(\sigma a) = \rho(a^{-1})f(\sigma), \quad \forall \sigma \in P, \forall a \in \mathbf{G}.$$

DIMOSTRAZIONE. La tesi è conseguenza immediata della (3.9.1). Infatti

$$(\sigma a)f(\sigma a) = \varpi(\sigma, \rho(a)\rho(a^{-1})f(\sigma)) = \varpi(\sigma, f(\sigma)) = \sigma f(\sigma).$$

Quindi il valore di $\sigma f(\sigma)$ dipende solo da $\pi(\sigma)$ e possiamo perciò definire una sezione differenziabile s di ξ_V ponendo $s(\pi(\sigma)) = \sigma f(\sigma)$ per ogni $\sigma \in P$. \square

NOTAZIONE III.9.8. Indichiamo con $\mathcal{E}_\rho(P, V)$ lo spazio delle $f \in \mathcal{C}^\infty(P, V)$ che soddisfano la (3.9.4).

PROPOSIZIONE III.9.9. *La (21.1.1) stabilisce un isomorfismo lineare $s \leftrightarrow \tilde{s}$ tra $\Gamma_\xi(M, E_V)$ ed $\mathcal{E}_\rho(P, V)$. \square*

ESEMPIO III.9.10. Sia $F(M) = (L(M) \xrightarrow{\pi} M)$ il fibrato dei sistemi di riferimento di una varietà differenziabile M .

Il fibrato associato alla rappresentazione canonica di $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$ su \mathbb{R}^m è il *fibrato tangente* $TM \rightarrow M$.

Il fibrato associato alla rappresentazione duale

$$\mathbf{GL}_m(\mathbb{R}) \ni a \rightarrow (a^\dagger)^{-1} \in \mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$$

è il *fibrato cotangente* $T^*M \rightarrow M$.

I fibrati tensoriali $T^{p,q}M$ sono associati alle rappresentazioni tensoriali :

$$\begin{aligned} \rho(a)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_q) \\ = a(v_1) \otimes \cdots \otimes a(v_p) \otimes {}^t a^{-1}(w_1) \otimes \cdots \otimes {}^t a^{-1}(w_q) \\ \forall v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_q \in \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE III.9.11. La Proposizione III.9.9 ci permette di associare ad ogni sezione differenziabile del fibrato ξ_V una *funzione* a valori in V . Come abbiamo visto, alle funzioni definite su una varietà differenziabile e a valori in uno spazio vettoriale si possono applicare le diverse operazioni del calcolo differenziale. Ad esempio, possiamo calcolarne il differenziale e le derivate rispetto a campi di vettori.

III.9.2. Forme tensoriali e pseudotensoriali. Sia $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato principale con gruppo strutturale \mathbf{G} e $\rho : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(V)$ una sua rappresentazione lineare reale di dimensione finita.

DEFINIZIONE III.9.12. Una q -forma alternata $\phi \in \Omega^q(P, V)$ si dice *pseudotensoriale di tipo* (ρ, V) se soddisfa

$$(3.9.5) \quad R_a^* \phi = \rho(a^{-1}) \cdot \phi \quad \forall a \in \mathbf{G}.$$

La ϕ si dice *tensoriale* se è anche *orizzontale*, cioè se è pseudotensoriale ed inoltre

$$(3.9.6) \quad \phi(X_1, \dots, X_q) = 0 \quad \text{quando almeno uno degli } X_i \text{ sia verticale.}$$

Indichiamo con $\Omega_{\rho}^q(P, V)$ lo spazio delle q -forme pseudotensoriali di tipo (ρ, V) e con $\Omega_{\rho,0}^q(P, V)$ il sottospazio delle q -forme tensoriali di tipo (ρ, V) .

ESEMPIO III.9.13. Su $F(M)$ la *forma canonica*⁸

$$(3.9.7) \quad \theta = \sigma^{-1} d\pi \in \Omega^1(\mathfrak{F}(M), \mathbb{R}^m).$$

è una 1-forma tensoriale per la rappresentazione canonica di $\mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$.

Se ξ è un sottofibrato di $F(M)$, con gruppo strutturale $\mathbf{G} \subset \mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$, la restrizione di θ a P è ancora una 1-forma tensoriale per la rappresentazione naturale di \mathbf{G} su \mathbb{R}^m .

La definizione del prodotto esterno di forme si estende al caso di forme pseudotensoriali nel caso in cui una di esse sia di tipo $(\text{Ad}, \mathfrak{g})$.

⁸La θ si dice anche forma *tautologica* o di *saldatura* (in inglese: solder form).

DEFINIZIONE III.9.14. Se (ρ, V) è una rappresentazione lineare di \mathbf{G} , il prodotto esterno di $\phi \in \Omega_{\text{Ad}}^r(P, \mathfrak{g})$ e $\psi \in \Omega_{\rho}^s(P, V)$ è la forma $\phi \wedge_{\rho} \psi \in \Omega_{\rho}^{r+s}(P, V)$ definita da

$$(3.9.8) \quad \phi \wedge_{\rho} \psi(X_1, \dots, X_{r+s}) = \sum' \varepsilon(k) \rho_*(\phi(X_{k_1}, \dots, X_{k_r}))(\psi(X_{k_{r+1}}, \dots, X_{k_{r+s}})),$$

$$\forall X_1, \dots, X_{r+s} \in \mathfrak{X}(P),$$

dove il simbolo \sum' indica che la somma a secondo membro è fatta su tutte le permutazioni di k di $\{1, \dots, r+s\}$ con

$$1 \leq k_1 < \dots < k_r \leq r+s \quad \text{ed} \quad 1 \leq k_{r+1} < \dots < k_{r+s} \leq r+s.$$

Se ρ è la rappresentazione aggiunta, scriveremo $[\phi \wedge \psi]$ invece di $\phi \wedge_{\text{Ad}} \psi$ e, se $\mathbf{G} \subset \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ ed ι la rappresentazione canonica su \mathbb{R}^n , scriveremo $\phi \wedge \psi$ invece di $\phi \wedge_{\iota} \psi$.

Abbiamo facilmente

PROPOSIZIONE III.9.15. Se $\phi \in \Omega_{\text{Ad},0}^r(P, \mathfrak{g})$, $\psi \in \Omega_{\rho,0}^s(P, V)$, allora $\phi \wedge_{\rho} \psi \in \Omega_{\rho,0}^{r+s}(P, V)$. \square

III.9.3. Forme differenziali a valori in un fibrato vettoriale.

Sia $\eta = (E \xrightarrow{\pi_E} M)$ un fibrato vettoriale.

DEFINIZIONE III.9.16. Lo spazio $\Omega^q(M, E)$ delle q -forme differenziali a valori in E consiste delle q -forme $\mathcal{C}^\infty(M)$ -multilineari alternate di grado q

$$f : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M)}_{q \text{ volte}} \longrightarrow \Gamma_{\eta}(M, E).$$

In particolare, $\Omega^0(M, E) = \Gamma_{\eta}(M, E)$. Se η è il fibrato banale $M \times V \xrightarrow{\text{pr}_M} M$, gli $\Omega^q(M, E)$ coincidono con gli spazi $\Omega^q(M, V)$ delle forme differenziali a valori in V .

OSSERVAZIONE III.9.17. Se $f : N \rightarrow M$ è un'applicazione differenziabile, il pullback $f^* \phi$ di $\phi \in \Omega^q(M, E)$, è una q -forma a valori in $f^* E$.

III.9.4. Forme tensoriali e forme a valori in un fibrato vettoriale.

Una forma a valori in un fibrato vettoriale definisce una forma a valori vettoriali sullo spazio totale dei sistemi di riferimento.

Siano $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato principale, (ρ, V) una rappresentazione lineare del suo gruppo strutturale \mathbf{G} e $\xi_V = (E_V \xrightarrow{\pi_V} M)$ il corrispondente fibrato vettoriale.

Data una forma $\phi \in \Omega^q(M, E_V)$ definiamo

$$(3.9.9) \quad \tilde{\phi}_{\sigma}(X_1, \dots, X_q) = \sigma^{-1} \phi(\pi_* X_{1\sigma}, \dots, \pi_* X_{q\sigma}), \quad \forall X_1, \dots, X_q \in \mathfrak{X}(P), \quad \sigma \in P.$$

PROPOSIZIONE III.9.18. Se $\phi \in \Omega^q(M, E_V)$, la $\tilde{\phi}$ definita dalla (3.9.9) è una q -forma tensoriale di tipo (ρ, V) . L'applicazione

$$(3.9.10) \quad \Lambda_V : \Omega^q(M, E_V) \ni \phi \longrightarrow \tilde{\phi} \in \Omega_{\rho,0}^q(P, V)$$

è un isomorfismo lineare. \square

PROPOSIZIONE III.9.19. Se U è un aperto di M e $\sigma_U \in \Gamma_\xi(U, P)$, allora

$$(3.9.11) \quad \sigma_U \cdot (\sigma_U^* \tilde{\phi}) = \phi|_U, \quad \forall \phi \in \Omega^q(U, E_V).$$

□

DEFINIZIONE III.9.20. La forma $\phi_U = \sigma_U^* \tilde{\phi} \in \Omega^q(U, V)$ è il *coefficiente* di ϕ nella carta di trivializzazione (U, σ_U) .

Se $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \sigma_\alpha)\}$ è un atlante di trivializzazione di ξ , possiamo associare a $\phi \in \Omega^q(M, E_V)$ la famiglia

$$(3.9.12) \quad \{\phi_\alpha = \sigma_\alpha^{-1} \phi|_{U_\alpha} \in \Omega^q(U_\alpha, V)\}.$$

□

DEFINIZIONE III.9.21. Le $\{\phi_\alpha\}$ sono i *coefficienti* di ϕ nell'atlante \mathcal{A} .

PROPOSIZIONE III.9.22. Condizione necessaria e sufficiente affinché le $\{\phi_\alpha \in \Omega^q(U_\alpha, V)\}$ siano i coefficienti di una $\phi \in \Omega^q(M, E_V)$ è che

$$\phi_\alpha = \rho(\psi_{\alpha,\beta})\phi_\beta \quad \text{su } U_{\alpha,\beta}, \quad \forall \alpha, \beta$$

ove le $\psi_{\alpha,\beta} = \sigma_\alpha^{-1}\sigma_\beta \in \mathcal{C}^\infty(U_{\alpha,\beta}, \mathbf{G})$ sono le funzioni di transizione dell'atlante \mathcal{A} .

CAPITOLO IV

Conessioni principali

In questo capitolo indicheremo con ξ un fibrato principale differenziabile di classe \mathcal{C}^∞ , con spazio totale P , base M e gruppo strutturale \mathbf{G} .

IV.1. La distribuzione verticale

All'azione di \mathbf{G} su P associamo le applicazioni

$$(4.1.1) \quad \ell_\sigma : \mathbf{G} \ni a \longrightarrow \sigma a \in P, \quad \text{per ogni } \sigma \in P,$$

$$(4.1.2) \quad \mathbf{R}_a : P \ni \sigma \longrightarrow \sigma a \in P, \quad \text{per ogni } a \in \mathbf{G}.$$

Indicando con L_a ed R_a le traslazioni a sinistra e a destra in \mathbf{G} , abbiamo

$$\begin{aligned} \ell_\sigma \circ L_a &= \ell_{\sigma a}, \\ \mathbf{R}_a \circ \ell_\sigma &= \ell_{\sigma a} \circ \text{ad}(a^{-1}). \end{aligned}$$

Infatti

$$\begin{aligned} \ell_\sigma(L_a(x)) &= \ell_\sigma(ax) = \sigma(ax) = (\sigma a)x = \ell_{\sigma a}(x), \\ \mathbf{R}_a(\ell_\sigma(x)) &= \ell_\sigma(x)a = \sigma xa = (\sigma a)\text{ad}(a^{-1})(x) = \ell_{\sigma a} \circ \text{ad}(a^{-1})(x). \end{aligned}$$

DEFINIZIONE IV.1.1. Denotiamo con

$$(4.1.3) \quad \mathfrak{V}(P) = \{X \in \mathfrak{X}(P) \mid d\pi(\sigma)(X_\sigma) = 0, \forall \sigma \in P\}$$

la *distribuzione verticale* su P e con

$$(4.1.4) \quad VP = \bigcup_{\sigma \in P} \{X_\sigma \mid X \in \mathfrak{V}(P)\} = \ker d\pi \subset TP$$

il corrispondente *fibrato verticale*.

La $\mathfrak{V}(P)$ è totalmente integrabile, in quanto la $\pi : P \rightarrow M$ definisce una foliazione globale di $\mathfrak{V}(P)$. In particolare, è soddisfatta la condizione di integrabilità formale

$$(4.1.5) \quad [\mathfrak{V}(P), \mathfrak{V}(P)] \subset \mathfrak{V}(P).$$

Ogni $X \in \mathfrak{g}$ definisce¹ un gruppo a un parametro di diffeomorfismi di P :

$$(4.1.6) \quad \mathbb{R} \ni t \longrightarrow \mathbf{R}_{\exp(tX)} \in \mathcal{C}^\infty(P, P).$$

DEFINIZIONE IV.1.2. Il suo generatore infinitesimale, che denotiamo con X^* , si dice il *campo fondamentale* associato a X .

¹Vedi §1.9.

OSSERVAZIONE IV.1.3. Se ξ è il fibrato banale $\mathbf{G} \rightarrow \{p_0\}$, allora il campo fondamentale X^* coincide con il campo invariante a sinistra X^* su \mathbf{G} .

NOTAZIONE IV.1.4. Indichiamo con $\lambda_\sigma : \mathfrak{g} \rightarrow T_\sigma P$ il differenziale nell'identità dell'applicazione (4.1.1).

LEMMA IV.1.5. Per ogni $X \in \mathfrak{g}$, è $X^* \in \mathfrak{V}(P)$ ed

$$(4.1.7) \quad X_\sigma^* = \lambda_\sigma(X), \quad \forall \sigma \in P.$$

DIMOSTRAZIONE. Le curve integrali $t \rightarrow \sigma \exp(tX)$ di X^* sono verticali e quindi X^* è verticale. Risulta poi

$$X_\sigma^* = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \sigma \exp(tX) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \ell_\sigma(\exp(tX)) = d\ell_\sigma(e)(X). \quad \square$$

PROPOSIZIONE IV.1.6. Con le notazioni introdotte sopra, abbiamo:

- (1) $\forall \sigma \in P$, $\lambda_\sigma = d\ell_\sigma(e) : \mathfrak{g} \ni X \rightarrow X_\sigma^* \in V_\sigma P$ è un isomorfismo lineare.
- (2) La $P \times \mathfrak{g} \ni (\sigma, X) \rightarrow X_\sigma^* \in VP$ è un'equivalenza di fibrati vettoriali. In particolare VP è trivializzabile.
- (3) La $\Lambda : \mathfrak{g} \ni X \rightarrow X^* \in \mathfrak{V}(P)$ è un monomorfismo di algebre di Lie.
- (4) Vale la formula

$$(4.1.8) \quad dR_a(X^*) = [\text{Ad}(a^{-1})X]^*, \quad \forall a \in \mathbf{G}, \forall X \in \mathfrak{g}.$$

- (5) La distribuzione $\mathfrak{V}(P)$ è il sotto- $\mathcal{C}^\infty(P)$ -modulo generato dai campi di vettori X^* , al variare di X in \mathfrak{g} .

DIMOSTRAZIONE. (1). Poiché l'azione di \mathbf{G} su P è libera, per il Corollario I.9.20 l'applicazione λ_σ è iniettiva. È anche un isomorfismo, perché $V_\sigma P$ e \mathfrak{g} hanno la stessa dimensione. Le (2) e (5) sono conseguenza immediata della (1).

(3). Per (1), Λ è iniettiva. I campi X^* su \mathbf{G} ed X^* su P sono ℓ_σ -correlati per ogni $\sigma \in P$. Questo implica che Λ è anche un omomorfismo di algebre di Lie, completando la dimostrazione del punto (3).

La formula (4.1.8) si ottiene dalla

$$R_a(\sigma \exp(tX)) = \sigma(\exp(tX)a) = \sigma a(a^{-1} \exp(tX)a) = (\sigma a) \exp(t \text{Ad}(a^{-1})X),$$

che dimostra come la traslazione R_a trasformi il flusso generato da X^* nel flusso generato da $[\text{Ad}(a^{-1})X]^*$. \square

Sia $\sigma \in P$. Per il punto (1) della Proposizione IV.1.6, per ogni vettore verticale $w \in V_\sigma P$ vi è un unico elemento X dell'algebra di Lie \mathfrak{g} di \mathbf{G} tale che $X_\sigma^* = w$. Questa corrispondenza definisce un'applicazione

$$(4.1.9) \quad \omega_\nu : VP \rightarrow \mathfrak{g}$$

di classe \mathcal{C}^∞ ed \mathbb{R} -lineare sulle fibre di VP .

Diremo quindi che la ω_ν è una *forma differenziale sulla distribuzione verticale* VP , a valori nell'algebra di Lie \mathfrak{g} .

Per la (4.1.8), la ω_ν soddisfa

$$(4.1.10) \quad (R_a)^* \omega_\nu = \text{ad}(a^{-1}) \circ \omega_\nu \quad \forall a \in \mathbf{G}.$$

Per semplificare le notazioni, sarà a volte conveniente scrivere

$$\begin{aligned} X_\sigma a & \text{ invece che } dR_a(X_\sigma), & \text{ per } X_\sigma \in TP, a \in \mathbf{G}, \\ \sigma A & \text{ invece che } \lambda_\sigma(A), & \text{ per } \sigma \in P, A \in \mathfrak{g}, \\ aY_x & \text{ invece che } dL_a(Y_x), & \text{ per } a \in \mathbf{G}, Y_x \in TG. \end{aligned}$$

IV.2. Il concetto di connessione principale

DEFINIZIONE IV.2.1. Una *connessione \mathbf{G} -principale*² Γ su ξ è il dato di una forma differenziale $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ (la sua *forma di Cartan*) che soddisfi le:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \omega(A^\star) = A, \text{ per ogni } A \in \mathfrak{g}, \\ (2) \quad & R_a^* \omega = \text{Ad}(a^{-1})\omega, \quad \forall a \in \mathbf{G}, \quad \text{cioè} \\ (2') \quad & R_a^* \omega(X) = \omega((R_a)_*(X)) = \text{Ad}(a^{-1})(\omega(X)), \quad \forall X \in \mathfrak{X}(P). \end{aligned}$$

Per ogni $\sigma \in P$, la composizione

$$(4.2.1) \quad T_\sigma P \ni X_\sigma \xrightarrow{\omega} \omega(X_\sigma) \in \mathfrak{g} \xrightarrow{\lambda_\sigma} [\omega(X_\sigma)]_\sigma^\star \in V_\sigma P$$

definisce una proiezione di $T_\sigma P$ su $V_\sigma P$.

DEFINIZIONE IV.2.2. Il nucleo di questa proiezione è la *distribuzione orizzontale*

$$(4.2.2) \quad HP = \ker \omega = \{v \in TP \mid \omega(v) = 0\}.$$

Indichiamo con

$$(4.2.3) \quad \mathcal{H}(P) = \{X \in \mathfrak{X}(P) \mid X_\sigma \in HP, \forall \sigma \in P\}$$

lo spazio dei *campi orizzontali*, cioè delle sezioni \mathcal{C}^∞ di HM .

La *distribuzione orizzontale* di una \mathbf{G} -connessione affine Γ è caratterizzata dalle proprietà:

$$\begin{aligned} (1') \quad & T_\sigma P = V_\sigma P \oplus H_\sigma P, \quad \forall \sigma \in P \\ (2') \quad & (R_a)_*(H_\sigma P) = H_{\sigma a} P, \quad \forall \sigma \in P, \forall a \in \mathbf{G}. \end{aligned}$$

Sia HP un sottofibrato vettoriale differenziabile di TP che verifichi le (1') e (2'). Indichiamo con pr_h e pr_v le proiezioni sulla *componente orizzontale* e sulla *componente verticale*, corrispondenti alla decomposizione (1'):

$$(4.2.4) \quad \begin{array}{ccc} & TP & \\ \text{pr}_v \swarrow & & \searrow \text{pr}_h \\ VP & & HP. \end{array}$$

Si verifica immediatamente che la forma $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$, definita da

$$(4.2.5) \quad \omega(X) = \omega_v(\text{pr}_v(X)), \quad \forall X \in TP.$$

²Spesso, quando questo non porti confusione, ometteremo il riferimento esplicito al gruppo e diremo semplicemente *connessione principale* invece di *connessione \mathbf{G} -principale*.

è la forma di Cartan di una connessione principale Γ su ξ ed abbiamo quindi la³:

PROPOSIZIONE IV.2.3. *La $\omega \longleftarrow HP = \ker \omega$ definisce una corrispondenza biunivoca tra le connessioni principali Γ su ξ ed i sottofibrati HP di TP che soddisfano le condizioni (1') e (2').* \square

La caratterizzazione di una connessione principale mediante la sua distribuzione orizzontale ci dà facilmente:

PROPOSIZIONE IV.2.4 (estensione). *Sia $\xi' = (P' \xrightarrow{\pi'} M)$ un sottofibrato principale differenziabile di ξ , con la stessa base M e gruppo strutturale $\mathbf{G}' \subset \mathbf{G}$. Indichiamo con $\iota : P' \hookrightarrow P$ l'inclusione. Per ogni connessione principale Γ' su ξ' , con forma di Cartan ω' , vi è un'unica connessione principale Γ su ξ , la cui forma di Cartan ω soddisfi*

$$(4.2.6) \quad \omega' = \iota^* \omega.$$

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con $H'P'$ il fibrato orizzontale della connessione Γ' . Poiché $H'P'$ è invariante per le traslazioni a destra mediante elementi di \mathbf{G}' , abbiamo $R_{a_1} H'_{\sigma_1} P' = R_{a_2} H'_{\sigma_2} P'$ se $\sigma_1, \sigma_2 \in P'$, $a_1, a_2 \in \mathbf{G}$ e $\sigma_1 a_1 = \sigma_2 a_2$. L'applicazione

$$P' \times \mathbf{G} \ni (\sigma, a) \rightarrow \sigma a \in P_\xi$$

è surgettiva. Per l'osservazione precedente, possiamo allora definire il fibrato orizzontale HP della connessione Γ ponendo

$$H_{\sigma a} P = (R_a)_*(H'_\sigma P'), \quad \forall \sigma \in P', \forall a \in \mathbf{G}.$$

Chiaramente HP è univocamente determinato da $H'P'$, verifica le condizioni (1') e (2'), e definisce quindi un'unica connessione principale Γ su ξ , la cui forma di Cartan ω estende quella di Γ' . \square

OSSERVAZIONE IV.2.5. Viceversa, è possibile restringere la connessione principale Γ su ξ ad una connessione principale Γ' sul sottofibrato ξ' se, e soltanto se, la restrizione a $V'P'$ della sua forma di Cartan ω è a valori nell'algebra di Lie \mathfrak{g}' di \mathbf{G}' .

ESEMPIO IV.2.6. La *connessione piatta* canonica sul fibrato banale $M \times \mathbf{G} \xrightarrow{\pi} M$ è quella che ha come forma di Cartan il pullback $\text{pr}_G^* \omega_G$ della forma di Maurer-Cartan di \mathbf{G} rispetto alla proiezione $M \times \mathbf{G} \xrightarrow{\text{pr}} \mathbf{G}$ sul secondo fattore.

La distribuzione orizzontale è in questo caso completamente integrabile ed ha come varietà integrali le $M \times \{a\}$, al variare di a in \mathbf{G} .

TEOREMA IV.2.7 (esistenza). *Ogni fibrato principale differenziabile ammette una connessione principale.*

³La definizione della connessione a partire dalla distribuzione orizzontale è dovuta a CHARLES EHRESMANN: *Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable*, Colloque de Topologie, Bruxelles, (1950), pp. 29-55.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato principale differenziabile con gruppo strutturale \mathbf{G} . Denotiamo con $\omega_{\mathbf{G}} \in \Omega^1(\mathbf{G}, \mathfrak{g})$ la forma di Maurer-Cartan di \mathbf{G} . Fissiamo un atlante di trivializzazione $\{(U_\alpha, \sigma_\alpha)\}$ di ξ . Per ogni α , la \mathbf{G} equivalenza tra $P|_{U_\alpha}$ ed il fibrato banale $U_\alpha \times \mathbf{G} \rightarrow U_\alpha$ ci permette di definire una forma di Cartan $\omega'_\alpha \in \Omega^1(P|_{U_\alpha}, \mathfrak{g})$ su $P|_{U_\alpha}$. Fissata una partizione \mathcal{C}^∞ dell'unità $\{\kappa_\alpha\}$, subordinata ad $\{U_\alpha\}$, la $\omega = \sum_\alpha \kappa_\alpha \omega'_\alpha \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ è la forma di Cartan di una connessione principale su ξ . \square

IV.3. Pullback di una connessione principale

Sia \mathbf{H} un altro gruppo di Lie ed $\eta = (Q \xrightarrow{\pi_N} N)$ un fibrato principale differenziabile con gruppo strutturale \mathbf{H} . Ricordiamo che un morfismo Φ di η in ξ è una terna (f, F, ϕ) , ove $f \in \mathcal{C}^\infty(N, M)$ ed $F \in \mathcal{C}^\infty(Q, P)$ sono applicazioni differenziabili, $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{H}, \mathbf{G})$ un omomorfismo di gruppi di Lie, ed abbiamo un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccc} Q \times \mathbf{H} & \xrightarrow{(\mu, h) \rightarrow \mu h} & Q & \xrightarrow{\pi_\eta} & N \\ \downarrow F \times \phi & & \downarrow F & & \downarrow f \\ P \times \mathbf{G} & \xrightarrow{(\sigma, g) \rightarrow \sigma g} & P & \xrightarrow{\pi_\xi} & M. \end{array}$$

È in particolare

$$F(\mu h) = F(\mu)\phi(h), \quad \forall \mu \in Q, \forall h \in \mathbf{H}.$$

Si verifica facilmente la

PROPOSIZIONE IV.3.1. *Se ω è la forma di Cartan di una connessione \mathbf{G} -principale Γ su ξ , il suo pullback $F^*\omega$ è la forma di Cartan di una connessione \mathbf{H} -principale su η , che si dice il pullback di Γ .*

Dato un fibrato differenziabile \mathbf{G} -principale $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$, una varietà differenziabile N ed un'applicazione $f \in \mathcal{C}^\infty(N, M)$, il pullback $f^*\xi = (P_f \xrightarrow{\pi_f} N)$ di ξ mediante f è il fibrato differenziabile \mathbf{G} -principale con

$$\begin{aligned} P_f &= \{(q, \sigma) \in N \times P \mid \pi(\sigma) = f(q)\}, & \pi_f : P_f \ni (q, \sigma) &\longrightarrow q \in N, \\ & & P_f \times \mathbf{G} \ni ((q, \sigma), a) &\longrightarrow (q, \sigma)a = (q, \sigma a) \in P_f. \end{aligned}$$

La f si rialza ad un morfismo \tilde{f} di fibrati \mathbf{G} -principali

$$\tilde{f} : P_f \ni (q, \sigma) \longrightarrow \tilde{f}(q, \sigma) = \sigma \in P.$$

PROPOSIZIONE IV.3.2. *Se ω è la forma di Cartan di una connessione principale Γ su ξ , allora la $\tilde{f}^*\omega \in \Omega^1(P_f, \mathfrak{g})$ è la forma di Cartan di una connessione principale $f^*\Gamma$ su $f^*\xi$.* \square

IV.4. Il fibrato delle connessioni principali

Sia $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato differenziabile \mathbf{G} -principale. Il differenziale dell'azione di \mathbf{G} definisce un'azione differenziabile a destra su TP :

$$(4.4.1) \quad TP \times \mathbf{G} \ni (X_\sigma, a) \longrightarrow dR_a(X_\sigma) = X_\sigma a \in TP.$$

Sia $C_\xi = TP/\mathbf{G}$ il quoziente rispetto a questa azione e $\varpi : TP \rightarrow C_\xi$ la proiezione canonica.

PROPOSIZIONE IV.4.1. *Possiamo definire su C_ξ un'unica struttura differenziabile per cui $\varpi : TP \rightarrow C_\xi$, con l'azione (4.4.1), sia un fibrato differenziabile \mathbf{G} -principale.*

DIMOSTRAZIONE. Sia U un aperto di M e siano $\sigma_i \in \Gamma_\xi(U, P)$, per $i = 1, 2$, sezioni di ξ su U . Le $\sigma_i(U)$ sono sottovarietà localmente chiuse di P . Le restrizioni $TP|_{\sigma_i(U)}$ di TP alle $\sigma_i(P)$ sono sottovarietà di TP che hanno la stessa immagine W mediante ϖ . Le $\phi_i : TP|_{\sigma_i(U)} \xrightarrow{\varpi} W$ ($i = 1, 2$) sono omeomorfismi. Sia $\{p \rightarrow \psi(p) = [\sigma_1(p)]^{-1}\sigma_2(p)\} \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbf{G})$. Allora

$$\phi_1^{-1}\phi_2(X_{\sigma_2(p)}) = R_{\psi(p)}X_{\sigma_2(p)}$$

e quindi $\phi_1^{-1}\phi_2$ è un diffeomorfismo di $TP|_{\sigma_2(U)}$ su $TP|_{\sigma_1(U)}$.

Da questo ricaviamo che C_ξ ha un'unica struttura di varietà differenziabile per cui le ϕ_i definite sopra siano diffeomorfismi. Chiaramente l'azione (4.4.1) è libera e transitiva e quindi $\varpi : TP \rightarrow C_\xi$ è un fibrato differenziabile \mathbf{G} -principale. \square

LEMMA IV.4.2. *Il differenziale della proiezione sulla base del fibrato ξ definisce un fibrato differenziabile localmente banale*

$$(4.4.2) \quad d\pi : TP \rightarrow TM$$

con fibra tipica $\mathbf{G} \times \mathfrak{g}$.

DIMOSTRAZIONE. Se $\sigma \in \Gamma_\xi(U, P)$ è una sezione di ξ definita su un aperto U di M , la

$$TM|_U \times \mathbf{G} \times \mathfrak{g} \ni (Y_p, a, X) \longrightarrow [d\sigma(p)(Y_p)]a + X_{\sigma(p)a}^* \in TP|_{TM|_U}$$

è una trivializzazione locale. \square

PROPOSIZIONE IV.4.3. *L'applicazione $d\pi : TP \rightarrow TM$ definisce, per passaggio al quoziente, un fibrato vettoriale differenziabile $\mathfrak{C}_\xi = (C_\xi \xrightarrow{\varpi_\xi} TM)$, con fibra tipica \mathfrak{g} .*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\sigma \in \Gamma_\xi(U, P)$ una sezione differenziabile di ξ , definita su un aperto U di M . Ad esso possiamo associare la trivializzazione locale

$$\Phi_\sigma : TM|_U \times \mathfrak{g} \ni (Y_p, X) \rightarrow \varpi(d\sigma(p)(Y_p) + X_{\sigma(p)}^*) \in C_\xi|_U = \varpi^{-1}(TM|_U).$$

Osserviamo che un'altra sezione di ξ su U è della forma $\sigma_1(p) = \sigma(p)\psi(p)$ per una $\psi \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbf{G})$. La corrispondente trivializzazione locale è

$$\Phi_{\sigma_1}(Y_p, X) = \varpi(d\sigma_1(p)(Y_p) + X_{\sigma_1(p)}^*) = \varpi(d\sigma(p)(Y_p)\psi(p) + X_{\sigma(p)\psi(p)}^*)$$

$$= \Phi_{\sigma}(Y_p, \text{Ad}([\psi(p)]^{-1})(X))$$

Quindi, ad un atlante di trivializzazione $\mathcal{A} = \{(U_{\alpha}, \sigma_{\alpha})\}$ di ξ , con funzioni di transizione $\{\psi_{\alpha,\beta}\}$, corrisponde un atlante $\hat{\mathcal{A}} = \{(TM|_{U_{\alpha}}, \Phi_{\sigma_{\alpha}})\}$ di con funzioni di transizione $\{\text{Ad}([\psi_{\alpha,\beta}]^{-1})\}$. \square

Osserviamo che abbiamo un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} TP & \xrightarrow{\varpi} & C_{\xi} \\ & \searrow d\pi & \swarrow \varpi_{\xi} \\ & & TM \end{array}$$

Abbiamo⁴:

TEOREMA IV.4.4. *Le connessioni principali su ξ sono in corrispondenza biunivoca con le sezioni $\gamma \in \Gamma_{\mathbb{C}_{\xi}}(TM, C_{\xi})$ di \mathbb{C}_{ξ} tali che*

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{\gamma} & C_{\xi} \\ & \searrow \text{pr} & \swarrow \varpi_{\xi} \\ & & M \end{array}$$

sia un morfismo di fibrati vettoriali su M .

In questa corrispondenza, la distribuzione orizzontale è caratterizzata da

$$(4.4.3) \quad HP = \varpi^{-1}(\gamma(TM)).$$

IV.5. Automorfismi di una connessione principale

Sia ξ un fibrato principale differenziabile, su cui è assegnata una connessione Γ , con forma di Cartan ω .

DEFINIZIONE IV.5.1. Un *automorfismo* di Γ è un automorfismo $(f, \tilde{f}, \text{id})$ di ξ che preserva la connessione.

Abbiamo cioè un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\tilde{f}} & P \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

in cui $f \in \mathcal{C}^{\infty}(M, M)$ è un diffeomorfismo e la \tilde{f} gode delle proprietà:

- (i) $\tilde{f}(\sigma a) = \tilde{f}(\sigma)a, \quad \forall \sigma \in P, \forall a \in \mathbf{G},$
- (ii) $\tilde{f}^* \omega = \omega.$

Denotiamo con $\text{Aut}(\Gamma)$ il gruppo degli automorfismi di Γ .

⁴ Shoshichi Kobayashi: *Theory of Connections*, Ann. Mat. Pura Appl. **43** (1957), pp.119-194.

IV.6. Forme di Christoffel ed equazioni di gauge

Sia $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato differenziabile \mathbf{G} -principale, su cui sia fissata una connessione principale Γ , con forma di Cartan ω .

Prima di introdurre le forme di Christoffel e ricavare le equazioni a cui esse soddisfano, è conveniente richiamare una formula di differenziazione. Cominciamo precisando alcune notazioni.

Se $\psi \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbf{G})$ è una funzione definita su un aperto U di M a valori nel gruppo di Lie \mathbf{G} , indichiamo con $\psi^{-1}d\psi$ il suo *differenziale di Darboux*, cioè il pullback, mediante ψ , della forma di Maurer-Cartan di \mathbf{G} . La $\psi^{-1}d\psi = \psi^*\omega_{\mathbf{G}}$ è una forma in $\Omega^1(U, \mathfrak{g})$. Indicheremo inoltre con dR_ψ l'applicazione che associa ad ogni $p \in U$ il differenziale di $R_{\psi(p)}$.

Se $\sigma \in P$ ed $A \in \mathfrak{g}$, indichiamo con σA il valore A_σ^* del campo fondamentale A^* nel punto σ . Se $\eta \in \Omega^1(U, \mathfrak{g})$ e $\sigma \in \Gamma_\xi(U, P)$, la $\sigma\eta$ definisce, per ogni $p \in U$, l'applicazione $T_pM \ni v \rightarrow \sigma\eta(v) \in V_{\sigma(p)}P$ che fa corrispondere al vettore $v \in T_pU$ il vettore $[\eta(v)]_{\sigma(p)}^*$.

Con queste notazioni abbiamo:

LEMMA IV.6.1. *Sia U un aperto di M e siano $\sigma \in \Gamma_\xi(U, P)$, $\psi \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbf{G})$. Allora*

$$(4.6.1) \quad d(\sigma\psi) = dR_\psi \circ d\sigma + (\sigma\psi)(\psi^{-1}d\psi). \quad \square$$

Sia $\sigma_U \in \Gamma_\xi(U, P)$ una sezione \mathcal{C}^∞ di ξ , definita su un aperto U di M . Indichiamo con

$$(4.6.2) \quad \omega_U = \sigma_U^*\omega = \omega \circ d\sigma_U \in \Omega^1(U, \mathfrak{g}).$$

il pullback su U di ω mediante la sezione σ_U .

DEFINIZIONE IV.6.2. La $\omega_U \in \Omega^1(U, \mathfrak{g})$, definita dalla (4.6.2), si dice *la forma di Christoffel*⁵ della connessione Γ nel riferimento (U, σ_U) .

La σ_U definisce la trivializzazione locale

$$\Psi_U : U \times \mathbf{G} \ni (p, a) \longrightarrow \sigma_U(p)a \in P|_U.$$

Identifichiamo in modo canonico $T(U \times \mathbf{G})$ con il prodotto cartesiano $TU \times T\mathbf{G}$: un vettore tangente ad $U \times \mathbf{G}$ è descritto da una coppia (v, A_a^*) con $v \in TU$, $A \in \mathfrak{g}$, $a \in \mathbf{G}$.

LEMMA IV.6.3. È

$$(4.6.3) \quad \Psi_U^*\omega = \text{Ad}(a^{-1})\omega_U + a^{-1}da,$$

ove abbiamo indicato con $a^{-1}da$ la forma di Maurer-Cartan di \mathbf{G} .

⁵Elwin Bruno Christoffel (10/11/1829, Montjoie, ora Monschau (villaggio tedesco vicino ad Aquisgrana e alla frontiera belga) - 15/3/1900 Strasburgo) matematico e fisico tedesco. Ha lavorato su applicazioni conformi, teoria del potenziale, teoria degli invarianti, analisi tensoriale, fisica matematica, geodesia e onde d'urto. Oltre ai simboli di Christoffel, sono note le applicazioni di Schwarz-Christoffel, mappe conformi dei poligoni semplici sul semipiano superiore.

Notiamo che, nella (4.6.3) il primo addendo a secondo membro opera sui vettori di TU , il secondo su quelli di $T\mathbf{G}$; è cioè

$$\Psi_U^* \omega(v, A_a^*) = \text{Ad}(a^{-1})\omega_U(v) + A, \quad \forall v \in TU, \forall A \in \mathfrak{g}, \forall a \in \mathbf{G}.$$

DIMOSTRAZIONE. La $\Psi_U^* \omega$ è la forma di Cartan di una connessione \mathbf{G} -principale su $U \times \mathbf{G}$ e quindi si restringe alla forma di Maurer-Cartan sui vettori verticali. Basta quindi verificare la (4.6.3) sui vettori di TM . Con le notazioni introdotte alla fine di §IV.1, abbiamo, se $p \in U$, $v \in T_p M$, $a \in \mathbf{G}$,

$$\begin{aligned} (\Psi_U^* \omega)(v) &= \omega(d\Psi_U(p, a)(v)) = \omega([d\sigma_U(v)]a) \\ &= \text{Ad}(a^{-1})\omega(d\sigma_U(v)) = \text{Ad}(a^{-1})\omega_U(v). \end{aligned}$$

La dimostrazione è completa. \square

Sia ora $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \sigma_\alpha)\}$ un atlante di trivializzazione di ξ . Poniamo per semplicità

$$\omega_\alpha = \sigma_\alpha^* \omega, \quad \tilde{\omega}_\alpha = \Psi_\alpha^* \omega$$

per indicare le forme di Christoffel delle trivializzazioni locali dell'atlante e i pull-back $\tilde{\omega}_\alpha$ della forma di Cartan mediante le trivializzazioni locali

$$\Psi_\alpha : U_\alpha \times \mathbf{G} \ni (p, a) \longrightarrow \sigma_\alpha(p)a \in P|_{U_\alpha}.$$

NOTAZIONE IV.6.4. Siano⁶ $\psi_{\alpha,\beta} = \sigma_\alpha^{-1}\sigma_\beta \in \mathcal{C}^\infty(U_{\alpha,\beta}, \mathbf{G})$ le funzioni di transizione dell'atlante \mathcal{A} . Per ogni coppia di indici α, β per cui $U_{\alpha,\beta} \neq \emptyset$ indichiamo con

$$(4.6.4) \quad \psi_{\alpha,\beta}^{-1} d\psi_{\alpha,\beta} = \psi_{\alpha,\beta}^* \omega_{\mathbf{G}} \in \mathcal{C}^\infty(U_{\alpha,\beta}, \mathfrak{g})$$

le derivate di Darboux delle funzioni di transizione, cioè i loro pullback della forma di Maurer-Cartan $\omega_{\mathbf{G}} = a^{-1}da$ di \mathbf{G} .

Per il Lemma IV.6.1 abbiamo

PROPOSIZIONE IV.6.5. *Le forme di Christoffel $\{\omega_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha, \mathfrak{g})\}$ della connessione Γ nell'atlante di trivializzazione $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \sigma_\alpha)\}$ verificano le EQUAZIONI DI GAUGE*

$$(4.6.5) \quad \omega_\beta = \text{Ad}(\psi_{\alpha,\beta}^{-1})\omega_\alpha + \psi_{\alpha,\beta}^{-1} d\psi_{\alpha,\beta} \text{ su } U_{\alpha,\beta},$$

ove le $\{\psi_{\alpha,\beta} = \sigma_\alpha^{-1}\sigma_\beta \in \mathcal{C}^\infty(U_{\alpha,\beta}, \mathbf{G})\}$ sono le funzioni di transizione di \mathcal{A} .

DIMOSTRAZIONE. È infatti $\sigma_\beta = \sigma_\alpha \psi_{\alpha,\beta}$. Otteniamo allora

$$\begin{aligned} \omega_\beta &= \sigma_\beta^* \omega = (\sigma_\alpha \psi_{\alpha,\beta})^* \omega = \omega \circ d(\sigma_\alpha \psi_{\alpha,\beta}) \\ &= \omega \circ \left(d\mathbf{R}_{\psi_{\alpha,\beta}} \circ d\sigma_\alpha + (\sigma_\alpha \psi_{\alpha,\beta})(\psi_{\alpha,\beta}^{-1} d\psi_{\alpha,\beta}) \right) \\ &= (\mathbf{R}_{\psi_{\alpha,\beta}}^* \omega) \circ d\sigma_\alpha + \psi_{\alpha,\beta}^{-1} d\psi_{\alpha,\beta} = \text{Ad}(\psi_{\alpha,\beta}^{-1})\omega_\alpha + \psi_{\alpha,\beta}^{-1} d\psi_{\alpha,\beta} \end{aligned}$$

su $U_{\alpha,\beta}$. \square

⁶Indichiamo con $U_{\alpha_1, \dots, \alpha_h}$ l'intersezione $U_{\alpha_1} \cap \dots \cap U_{\alpha_h}$.

Viceversa, una famiglia di forme a valori in \mathfrak{g} , definite sugli aperti di un atlante di trivializzazione, e che soddisfino le equazioni di gauge, definiscono univocamente una connessione \mathbf{G} -principale.

TEOREMA IV.6.6. *Siano $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \sigma_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ un atlante di trivializzazione di ξ , con funzioni di transizione $\{\psi_{\alpha,\beta} = \sigma_\alpha^{-1}\sigma_\beta \in \mathcal{C}^\infty(U_{\alpha,\beta}, \mathbf{G})\}$, ed $\{\omega_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha, \mathfrak{g})\}_{\alpha \in I}$ una famiglia di forme differenziali, definite sugli aperti U_α dell'atlante \mathcal{A} , ed a valori in \mathfrak{g} . Allora:*

- (1) *Vi è al più una connessione \mathbf{G} -principale su ξ di cui le $\{\omega_\alpha\}$ siano le forme di Christoffel di Γ rispetto alle trivializzazioni locali dell'atlante \mathcal{A} .*
- (2) *Condizione necessaria e sufficiente affinché le $\{\omega_\alpha\}$ siano le forme di Christoffel di una connessione \mathbf{G} -principale su ξ è che siano verificate le (4.6.5).*

DIMOSTRAZIONE. L'unicità segue dal Lemma IV.6.3, in quanto, per (4.6.3), le $\tilde{\omega}_\alpha$ sono determinate dalle ω_α e a loro volta determinano univocamente le restrizioni di ω agli aperti $P|_{U_\alpha}$.

Per dimostrare la seconda affermazione, basterà verificare che le equazioni di gauge esprimono una condizione necessaria e sufficiente affinché risulti

$$(4.6.6) \quad \Psi_{\alpha_*} \tilde{\omega}_\alpha = \Psi_{\beta_*} \tilde{\omega}_\beta \quad \text{su } P|_{U_{\alpha,\beta}}$$

e quindi le $\{\Psi_{\alpha_*} \tilde{\omega}_\alpha\}$ si ricolino e definiscano una forma di connessione ω su P .

Le (4.6.6) sono equivalenti a

$$(4.6.7) \quad (\Psi_\alpha^{-1} \circ \Psi_\beta)^* \tilde{\omega}_\alpha = \tilde{\omega}_\beta \quad \text{su } U_{\alpha,\beta} \times \mathbf{G}.$$

È $\Psi_\alpha^{-1} \Psi_\beta(p, a) = (p, \psi_{\alpha,\beta} a)$ su $U_{\alpha,\beta} \times \mathbf{G}$.

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} (\Psi_\alpha^{-1} \Psi_\beta)^* \tilde{\omega}_\alpha &= \tilde{\omega}_\alpha \circ d(\Psi_\alpha^{-1} \Psi_\beta) \\ &= \text{Ad}(a^{-1} \psi_{\alpha,\beta}^{-1}) \omega_\alpha + a^{-1} (\psi_{\alpha,\beta}^{-1} d\psi_{\alpha,\beta}) a + a^{-1} da \\ &= \text{Ad}(a^{-1}) \left(\text{Ad}(\psi_{\alpha,\beta}^{-1}) \omega_\alpha + \psi_{\alpha,\beta}^{-1} d\psi_{\alpha,\beta} \right) + a^{-1} da \\ &= \text{Ad}(a^{-1}) \omega_\beta + a^{-1} da = \tilde{\omega}_\beta. \end{aligned}$$

La dimostrazione è completa. \square

OSSERVAZIONE IV.6.7. Identificando $T(U_\alpha \times \mathbf{G})$ al prodotto cartesiano $TU_\alpha \times T\mathbf{G}$, possiamo descrivere il pullback su $U_\alpha \times \mathbf{G}$ della distribuzione orizzontale su P mediante

$$(4.6.8) \quad \Psi_\alpha^* H_{\sigma_\alpha(p)a} = \{X_p - [\omega_\alpha(X_p)]_a^* \mid X_p \in T_p M\}, \quad \forall p \in U_\alpha, \forall a \in \mathbf{G}.$$

La forma di Christoffel misura quindi di quanto la distribuzione orizzontale definita dalla connessione differisca da quella banale della trivializzazione locale.

IV.7. Sollevamento orizzontale di campi di vettori

Sia assegnata una connessione principale Γ su ξ , con forma di Cartan ω . Per ogni $\sigma \in P$ l'applicazione

$$(4.7.1) \quad H_\sigma P \ni X_\sigma \longrightarrow d\pi(\sigma)(X_\sigma) \in T_{\pi(\sigma)}M$$

è un isomorfismo lineare. La sua inversa

$$(4.7.2) \quad h_\sigma : T_{\pi(\sigma)}M \longrightarrow H_\sigma P$$

ci permette di definire l'applicazione

$$(4.7.3) \quad h : \mathfrak{X}(M) \ni X \longrightarrow \tilde{X} \in \mathcal{H}(P), \quad \text{con} \quad \tilde{X}_\sigma = h_\sigma(X_{\pi(\sigma)}), \quad \forall \sigma \in P.$$

DEFINIZIONE IV.7.1. Il campo $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(P)$ è il *sollevamento orizzontale* di $X \in \mathfrak{X}(M)$.

PROPOSIZIONE IV.7.2. *Condizione necessaria e sufficiente affinché un campo di vettori $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(P)$ sia il sollevamento orizzontale di un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$ è che siano soddisfatte le due condizioni:*

$$(4.7.4) \quad (i) \quad \omega(\tilde{X}) = 0, \quad (ii) \quad R_{a*}(\tilde{X}) = \tilde{X}, \quad \forall a \in \mathbf{G}.$$

Il sollevamento orizzontale (4.7.3) è un'applicazione \mathbb{R} -lineare che soddisfa:

$$\begin{aligned} (a) \quad & h(fX) = \pi^*(f)\tilde{X}, & \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M), \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M), \\ (b) \quad & d\pi([\tilde{X}, \tilde{Y}]) = [X, Y], & \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M), \\ (c) \quad & [A^*, \tilde{X}] = 0, & \forall A \in \mathfrak{g}, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M). \quad \square \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE IV.7.3. Il commutatore del sollevamento orizzontale a P di due campi di vettori su M è invariante rispetto alle traslazioni a destra, soddisfa cioè la proprietà (ii) ma può non essere orizzontale, non soddisfare cioè la (i). Il sollevamento orizzontale del commutatore è la *componente orizzontale* del commutatore dei sollevamenti orizzontali.

IV.8. Sollevamento orizzontale di cammini e trasporto parallelo

Indichiamo con $\mathcal{C}_\Gamma^1([0, 1], M)$ (rispettivamente $\mathcal{C}_\Gamma^1([0, 1], P)$) l'insieme delle curve di classe \mathcal{C}^1 a tratti in M (rispettivamente in P).

DEFINIZIONE IV.8.1. Una curva $\eta \in \mathcal{C}_\Gamma^1([0, 1], P)$ si dice *orizzontale* se $\dot{\eta}_\pm(t) \in HP$ per ogni $t \in [0, 1]$. Indicheremo con $\mathcal{C}_{\Gamma, h}^1([0, 1], P)$ l'insieme dei cammini orizzontali in P .

PROPOSIZIONE IV.8.2 (Sollevamento orizzontale dei cammini).

Siano $\gamma \in \mathcal{C}_\Gamma^1([0, 1], M)$ e $\sigma_0 \in P$, con $\pi(\sigma_0) = \gamma(0)$. Allora esiste un unico cammino orizzontale $\tilde{\gamma}_{\sigma_0} \in \mathcal{C}_{\Gamma, h}^1([0, 1], P)$, tale che

$$(4.8.1) \quad \begin{cases} \tilde{\gamma}_{\sigma_0}(0) = \sigma_0, \\ \pi \circ \tilde{\gamma}_{\sigma_0}(t) = \gamma(t), \quad \forall t \in [0, 1]. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Possiamo limitarci al caso in cui $\gamma \in \mathcal{C}^1([0, 1], M)$. Poiché il fibrato differenziabile ξ è localmente banale, esiste senz'altro una curva $\gamma^P \in \mathcal{C}^1([0, 1], P)$ tale che

$$\begin{cases} \gamma^P(0) = \sigma_0, \\ \pi \circ \gamma^P(t) = \gamma(t), \quad \forall t \in [0, 1]. \end{cases}$$

Cerchiamo allora la $\tilde{\gamma}_{\sigma_0}$ nella forma

$$\tilde{\gamma}_{\sigma_0}(t) = \gamma^P(t)a(t), \quad \text{con } a \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbf{G}).$$

Poiché

$$\frac{d\tilde{\gamma}_{\sigma_0}(t)}{dt} = \dot{\gamma}^P(t)a(t) + \gamma^P(t)\dot{a}(t),$$

la condizione che $\tilde{\gamma}_{\sigma_0}$ sia orizzontale si può riscrivere mediante

$$\begin{aligned} 0 = \omega\left(\frac{d\tilde{\gamma}_{\sigma_0}(t)}{dt}\right) &= \omega(\dot{\gamma}^P(t)a(t)) + \omega(\gamma^P(t)\dot{a}(t)) = \omega(dR_{a(t)}(\dot{\gamma}^P)) + \omega_{\mathbf{G}}(\dot{a}(t)) \\ &= \text{Ad}(a(t)^{-1}) \circ \omega(\dot{\gamma}^P) + a(t)^{-1}\dot{a}(t). \end{aligned}$$

La $a(t)$ deve essere quindi soluzione dell'equazione

$$\dot{a}a^{-1} = -\omega(\dot{\gamma}^P).$$

Per la Proposizione I.4.10, quest'equazione ammette una ed una sola soluzione, e quindi anche la (4.8.1) ha una ed una sola soluzione. \square

DEFINIZIONE IV.8.3. L'unica soluzione $\tilde{\gamma}_{\sigma_0} \in \mathcal{C}_{\text{tr},h}^1([0, 1], P)$ di (4.8.1) si dice il *sollevamento orizzontale* di γ a partire dal punto σ_0 .

DEFINIZIONE IV.8.4. Sia $\gamma \in \mathcal{C}_{\text{tr}}^1([0, 1], M)$. Il *trasporto parallelo* lungo γ , è l'applicazione

$$(4.8.2) \quad \tau_\gamma : P_{\gamma(0)} \ni \sigma \longrightarrow \tilde{\gamma}_\sigma(1) \in P_{\gamma(1)}.$$

PROPOSIZIONE IV.8.5. *Il trasporto parallelo gode delle seguenti proprietà:*

(1) Per ogni $\gamma \in \mathcal{C}_{\text{tr}}^1([0, 1], M)$ la $\tau_\gamma : P_{\gamma(0)} \rightarrow P_{\gamma(1)}$ è invertibile e⁷

$$(4.8.3) \quad \tau_\gamma^{-1} = \tau_{\gamma^{-1}}.$$

Inoltre

$$(4.8.4) \quad \tau_\gamma(\sigma a) = (\tau_\gamma(\sigma))a, \quad \forall \sigma \in P_{\gamma(0)}, \quad \forall a \in \mathbf{G}.$$

(2) Se $\gamma, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{C}_{\text{tr}}^1([0, 1], M)$ e⁸ $\gamma = \gamma_1\gamma_2$, allora

$$(4.8.5) \quad \tau_\gamma = \tau_{\gamma_2} \circ \tau_{\gamma_1}.$$

⁷Indichiamo con γ^{-1} la curva $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t)$.

⁸Ricordiamo che $\gamma_1\gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \gamma_2(2t-1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$

IV.9. Il gruppo di ologonia

NOTAZIONE IV.9.1. Per ogni punto $p \in M$ indichiamo con $\mathcal{L}(p)$ lo spazio dei laccetti in p , di classe⁹ \mathcal{C}^1 a tratti. Ogni elemento γ di $\mathcal{L}(p)$ definisce un elemento $[\gamma]$ del gruppo fondamentale $\pi_1(M, p)$ di M con punto base p . Denotiamo con $\mathcal{L}_0(p)$ l'insieme dei laccetti γ con $[\gamma] = 0$.

Fissata una connessione principale Γ su $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$, il trasporto parallelo associa ad ogni laccetto $\gamma \in \mathcal{L}(p)$ un'applicazione τ_γ della fibra P_p in sé

$$(4.9.1) \quad \tau_\gamma : P_p \ni \sigma \longrightarrow \tilde{\gamma}_\sigma(1) \in P_p.$$

LEMMA IV.9.2. Per ogni $p \in M$, l'insieme

$$(4.9.2) \quad \Phi(p) = \{\tau_\gamma \mid \gamma \in \mathcal{L}(p)\}$$

dei trasporti paralleli corrispondenti a laccetti di classe \mathcal{C}^1 a tratti in p è un gruppo di permutazioni di P_p .

L'insieme

$$(4.9.3) \quad \Phi_0(p) = \{\tau_\gamma \mid \gamma \in \mathcal{L}_0(p)\}$$

dei trasporti paralleli corrispondenti a laccetti di $\mathcal{L}(p)$ omotopi al laccetto costante è un sottogruppo normale di $\Phi(p)$. \square

DEFINIZIONE IV.9.3. Chiamiamo $\Phi(p)$ gruppo di ologonia ed il suo sottogruppo normale $\Phi_0(p)$ gruppo di ologonia ristretto della connessione Γ in $p \in M$.

Ad ogni $\sigma \in P_p$ associamo un monomorfismo del gruppo di ologonia nel gruppo strutturale mediante:

$$(4.9.4) \quad \rho_\sigma : \Phi(p) \ni \tau_\gamma \longrightarrow a = \sigma^{-1} \circ \tau_\gamma(\sigma) \in \mathbf{G}.$$

DEFINIZIONE IV.9.4. I sottogruppi $\Phi(\sigma) = \rho_\sigma(\Phi(p))$ di \mathbf{G} e $\Phi_0(\sigma) = \rho_\sigma(\Phi_0(p))$ si dicono rispettivamente gruppo di ologonia e di ologonia ristretta di Γ in $\sigma \in P$.

PROPOSIZIONE IV.9.5. Il gruppo di ologonia ristretta $\Phi_0(\sigma)$ è un sottogruppo normale del gruppo di ologonia $\Phi(\sigma)$. \square

OSSERVAZIONE IV.9.6. Consideriamo in P la relazione di equivalenza “ \sim ” che identifica due elementi $\sigma_1, \sigma_2 \in P$ se è possibile trovare una curva orizzontale, di classe \mathcal{C}^1 a tratti, con punto iniziale σ_1 e punto finale σ_2 . Allora

$$(4.9.5) \quad \Phi(\sigma) = \{a \in \mathbf{G} \mid \sigma a \sim \sigma\}.$$

PROPOSIZIONE IV.9.7. (1) Se $p \in M$, $\sigma \in P_p$, $a \in \mathbf{G}$, allora

$$(4.9.6) \quad \Phi(\sigma a) = \text{ad}(a^{-1})(\Phi(\sigma)), \quad \Phi_0(\sigma a) = \text{ad}(a^{-1})(\Phi_0(\sigma)).$$

⁹Possiamo definire i gruppi di ologonia utilizzando laccetti di classe \mathcal{C}^k a tratti, per $k \geq 1$. Un teorema di Nomizu e Ozeki [On the degree of differentiability of curves used in the definition of the holonomy group, Bull. Amer. Math. Soc. 68 (1962), 74-75] ci dice che diversi gradi di regolarità ($1 \leq k \leq \infty$) danno gli stessi gruppi di ologonia.

(2) Se $\sigma_0, \sigma_1 \in P$ possono essere congiunti con una curva orizzontale di classe \mathcal{C}^1 a tratti, allora

$$(4.9.7) \quad \Phi(\sigma_1) = \Phi(\sigma_0), \quad \Phi_0(\sigma_1) = \Phi_0(\sigma_0).$$

(3) In particolare, se P è connesso, allora tutti i gruppi di ologonia $\Phi(\sigma)$, al variare di σ in P , sono coniugati tra loro come sottogruppi di \mathbf{G} .

DIMOSTRAZIONE. (1) È $\tilde{\gamma}_{\sigma a} = \tilde{\gamma}_{\sigma} a$ e quindi

$$(\sigma a)^{-1} \tilde{\gamma}_{\sigma a}(1) = a^{-1} \sigma^{-1} \tilde{\gamma}(1) a = \text{ad}(a^{-1})(\sigma^{-1} \tilde{\gamma}_{\sigma}(1)),$$

da cui segue la (4.9.6).

(2) Sia \tilde{s} una curva orizzontale di classe \mathcal{C}^1 a tratti che congiunga σ_0 a σ_1 ed $s = \pi \circ \tilde{s}$ la sua proiezione su M . Per ogni $a \in \Phi(\sigma_0)$, possiamo trovare un laccetto $\gamma \in \mathcal{L}(\pi(\sigma_0))$ tale che $\tilde{\gamma}_{\sigma_0}(1) = \sigma_0 a$. La curva $\tilde{s} a$ è una curva orizzontale di estremi $\sigma_0 a$ e $\sigma_1 a$. Quindi la curva $(\tilde{s} a) \tilde{\gamma}_{\sigma_0} \tilde{s}^{-1}$ è una curva orizzontale che rialza il laccetto $s \gamma s^{-1} \in \mathcal{L}(\pi(\sigma_1))$ e che congiunge σ_1 a $\sigma_1 a$. Questo dimostra che $a \in \Phi(\sigma_1)$. Quindi $\Phi(\sigma_0) \subset \Phi(\sigma_1)$. Ripetendo lo stesso ragionamento possiamo dimostrare anche l'inclusione opposta. Per completare la dimostrazione del punto (2), basta osservare che $s \gamma s^{-1} \in \mathcal{L}_0(\pi(\sigma_1))$ se $\gamma \in \mathcal{L}_0(\pi(\sigma_0))$.

La (3) è conseguenza immediata delle (1) e (2). \square

Vale¹⁰ il :

TEOREMA IV.9.8. Sia $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato principale differenziabile con gruppo strutturale \mathbf{G} , con base connessa, su cui abbiamo fissato una connessione principale Γ . Sia σ_0 un punto di P . Allora:

- (a) $\Phi_0(\sigma_0)$ è un sottogruppo di Lie connesso di \mathbf{G} .
- (b) $\Phi_0(\sigma_0)$ è un sottogruppo normale di $\Phi(\sigma_0)$ ed il quoziente $\Phi(\sigma_0)/\Phi_0(\sigma_0)$ è al più numerabile.
- (c) In particolare, $\Phi(\sigma_0)$ è un sottogruppo di Lie di \mathbf{G} , e $\Phi_0(\sigma_0)$ è la sua componente connessa dell'identità.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\gamma \in \mathcal{L}_0(p)$ un laccetto omotopo all'identità. Se $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M$ è un'omotopia di laccetti di classe \mathcal{C}^1 a tratti di γ con il laccetto costante, allora $[0, 1] \ni t \rightarrow \sigma_0^{-1} \tau_{F_t}(\sigma_0)$ è un cammino continuo in $\Phi_0(\sigma_0)$ che congiunge $\sigma_0^{-1} \tau_{\gamma}(\sigma_0)$ con l'identità. Per il teorema di Freudenthal citato nella nota, ne segue che $\Phi_0(\sigma_0)$ è un sottogruppo di Lie di \mathbf{G} .

La seconda affermazione segue dal fatto che $\Phi_0(\sigma_0)$ è un sottogruppo normale ed abbiamo un omomorfismo surgettivo

$$\pi_1(M) \longrightarrow \Phi(\sigma_0)/\Phi_0(\sigma_0).$$

Poiché M è connesso e paracompatto, il suo gruppo fondamentale è al più numerabile e da questa osservazione ricaviamo la tesi. \square

¹⁰ Per la dimostrazione di questo risultato, è utile utilizzare il seguente teorema di Freudenthal [Die Topologie der Lieschen Gruppen als algebraisches Phänomen I Ann. of Math. 42 (1941) 1051-1074]: Un sottogruppo \mathbf{H} connesso per archi di un gruppo di Lie \mathbf{G} , in cui ogni coppia di punti si possa congiungere con un arco di classe \mathcal{C}^1 a tratti, è un sottogruppo di Lie di \mathbf{G} .

Dal Teorema IV.9.8 segue subito il

TEOREMA IV.9.9 (di riduzione). *Sia $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato principale differenziabile con gruppo strutturale \mathbf{G} , e supponiamo M connesso e paracompatto. Sia Γ una connessione principale su ξ . Fissiamo $\sigma_0 \in P$ e sia $P(\sigma_0)$ l'insieme dei punti di P che possono essere congiunti a σ_0 da un cammino orizzontale. Allora:*

- (i) $\xi_{\sigma_0} = (P(\sigma_0) \xrightarrow{\pi} M)$ è un sottofibrato principale differenziabile di ξ , con gruppo strutturale $\Phi(\sigma_0)$.
- (ii) La connessione Γ su ξ si riduce ad una connessione Γ' su ξ_{σ_0} .

DEFINIZIONE IV.9.10. Chiamiamo ξ_{σ_0} il fibrato d'olonomia per σ_0 .

Differenziazione covariante e curvatura

V.1. Differenziale di forme tensoriali e pseudotensoriali

Sia $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato principale differenziabile, con gruppo strutturale \mathbf{G} . Nel seguito di questo paragrafo penseremo fissata una connessione principale Γ su ξ ed una rappresentazione lineare (ρ, V) del suo gruppo strutturale. Nel §III.9.2 abbiamo definito le forme tensoriali e pseudotensoriali associate a (ρ, V) .

OSSERVAZIONE V.1.1. La forma di Cartan ω di Γ è un esempio di forma pseudotensoriale di tipo $(\text{Ad}, \mathfrak{g})$, che non è tensoriale se $\mathfrak{g} \neq 0$.

DEFINIZIONE V.1.2. Il differenziale esterno covariante $D\phi \in \Omega_{\rho,0}^{q+1}(P, V)$ di una q -forma pseudotensoriale $\phi \in \Omega_{\rho}^q(P, V)$, è definito da:

$$(5.1.1) \quad D\phi(X_0, X_1, \dots, X_q) = d\phi(\text{pr}_h(X_0), \text{pr}_h(X_1), \dots, \text{pr}_h(X_q)) \\ \forall X_0, X_1, \dots, X_q \in \mathfrak{X}(P).$$

TEOREMA V.1.3. Sia $\phi \in \Omega_{\rho}^q(P, V)$ una q -forma pseudotensoriale di tipo (ρ, V) . Allora:

- (a) $\phi \circ \text{pr}_h$ è una q -forma tensoriale di tipo (ρ, V) ;
- (b) $d\phi$ è una $(q+1)$ -forma pseudotensoriale di tipo (ρ, V) ;
- (c) $D\phi = (d\phi) \circ \text{pr}_h$ è una $(q+1)$ -forma tensoriale di tipo (ρ, V) . \square

Alla rappresentazione lineare (ρ, V) di \mathbf{G} corrisponde la rappresentazione (ρ_*, V) della sua algebra di Lie \mathfrak{g} , definita da

$$(5.1.2) \quad \rho_*(A)v = d\rho_e(A)(v) = \left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0} \rho(e^{tA}) \cdot v, \quad \forall A \in \mathfrak{g}, \forall v \in V.$$

Ricordiamo che dire che (ρ_*, V) è una rappresentazione lineare di \mathfrak{g} significa che $\rho_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(V)$ è \mathbb{R} -lineare e soddisfa

$$(5.1.3) \quad \rho_*([A, B]) = [\rho_*(A), \rho_*(B)] = \rho_*(A) \circ \rho_*(B) - \rho_*(B) \circ \rho_*(A), \quad \forall A, B \in \mathfrak{g}.$$

NOTAZIONE V.1.4. Ricordiamo la notazione introdotta nella Definizione III.9.14.

Data una forma pseudotensoriale $\phi \in \Omega_{\rho}^q(P, V)$, di tipo (ρ, V) , indichiamo con $\omega \wedge_{\rho} \phi \in \Omega^{q+1}(P, V)$ la forma

$$(5.1.4) \quad (\omega \wedge_{\rho} \phi)(X_0, \dots, X_q) = \sum_{h=0}^q (-1)^h [\rho_*(\omega(X_h))] (\phi(X_0, \dots, \widehat{X}_h, \dots, X_q)).$$

Vale il seguente :

LEMMA V.1.5. Se $\phi \in \Omega_{\rho,0}^q(P, V)$ è una r -forma tensoriale di tipo (ρ, V) , allora

$$(5.1.5) \quad D\phi = d\phi + \omega \wedge_{\rho} \phi.$$

DIMOSTRAZIONE. Basta verificare che

$$(*) \quad D\phi(X_0, \dots, X_q) = d\phi(X_0, \dots, X_q) + (\omega \wedge_{\rho} \phi)(X_0, \dots, X_q)$$

quando X_0, \dots, X_q siano o campi verticali fondamentali associati ad elementi dell'algebra di Lie \mathfrak{g} , oppure sollevamenti orizzontali di campi di vettori su M . La formula è banalmente vera quando gli X_i siano tutti orizzontali oppure almeno due di essi siano verticali.

Basterà dunque dimostrare la (*) nel caso in cui $X_0 = A^*$ con $A \in \mathfrak{g}$ e gli X_i siano sollevamenti orizzontali, sia cioè $X_i = \tilde{Z}_i$ con $Z_i \in \mathfrak{X}(M)$, per $1 \leq i \leq q$.

Poiché abbiamo supposto che ϕ sia tensoriale, otteniamo

$$\begin{aligned} d\phi(A^*, X_1, \dots, X_q) &= A^* \phi(X_1, \dots, X_q) + \sum_{i=1}^q (-1)^i X_i \underbrace{\phi(A^*, \dots, \widehat{X}_i, \dots)}_{=0} \\ &\quad + \sum_{i=1}^q (-1)^i \underbrace{\phi([A^*, X_i], \dots, \widehat{X}_i, \dots)}_{=0} \\ &\quad + \sum_{1 \leq i < j \leq q} (-1)^{i+j} \underbrace{\phi([X_i, X_j], A^*, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots)}_{=0} \\ &= A^* \phi(X_1, \dots, X_q) = (L_{A^*} \phi)(X_1, \dots, X_q), \end{aligned}$$

perché la derivata di Lie $[A, X_i] = [A^*, \tilde{Z}_i]$ dei sollevamenti orizzontali rispetto ai campi fondamentali è nulla.

Il campo A^* è il generatore infinitesimale di $t \rightarrow R_{\exp(tA)}$. Abbiamo perciò

$$L_{A^*} \phi = \frac{d}{dt} [R_{\exp(tA)}^* \phi]_{t=0} = \frac{d}{dt} [\rho(\exp(-tA)) \phi]_{t=0} = -\rho_*(A) \phi.$$

Poiché ϕ è tensoriale, otteniamo

$$(\omega \wedge_{\rho} \phi)(A^*, X_1, \dots, X_q) = \rho_*(A)(\phi(X_1, \dots, X_q)),$$

che, insieme alle precedenti, dà la (*). \square

V.2. Differenziazione covariante di sezioni di fibrati vettoriali

Sia (ρ, V) una rappresentazione lineare di dimensione finita del gruppo strutturale \mathbf{G} del fibrato principale ξ e ξ_V il fibrato vettoriale associato. Utilizzando l'isomorfismo Λ_V descritto nella Proposizione III.9.18, possiamo utilizzare il differenziale esterno covariante per definire una differenziazione nello spazio delle forme differenziali a coefficienti in E_V .

DEFINIZIONE V.2.1. La *differenziazione covariante* d^{∇} (o *connessione lineare*) su ξ_V , associata alla connessione principale Γ su ξ , è l'applicazione lineare

$$(5.2.1) \quad d^{\nabla} : \Omega^q(M, E_V) \xrightarrow{\Lambda_V^{-1} \circ D \circ \Lambda_V} \Omega^{q+1}(M, E_V), \quad q \geq 0.$$

Abbiamo quindi un diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Q}^r(M, E_V) & \xrightarrow{d^\nabla} & \mathcal{Q}^{r+1}(M, E_V) \\ \Lambda_V \downarrow & & \downarrow \Lambda_V \\ \mathcal{Q}_{\rho,0}^r(P, V) & \xrightarrow{D} & \mathcal{Q}_{\rho,0}^{r+1}(P, V). \end{array}$$

PROPOSIZIONE V.2.2. Valgono le formule:

$$\begin{cases} d^\nabla(f s) = s \otimes df + f d^\nabla s & \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M), \forall s \in \Gamma_{\xi_V}(M, E_V), \\ d^\nabla(s \otimes \beta) = s \otimes d\beta + d^\nabla s \otimes \beta & \forall s \in \Gamma_{\xi_V}(M, E_V), \forall \beta \in \mathcal{Q}^r(M), \\ d^\nabla(\alpha \wedge \beta) = (d^\nabla \alpha) \wedge \beta + (-1)^r \alpha \wedge d\beta & \forall \alpha \in \mathcal{Q}^r(M, E_V), \forall \beta \in \mathcal{Q}^s(M). \quad \square \end{cases}$$

DEFINIZIONE V.2.3. Se $X \in \mathfrak{X}(M)$ ed $s \in \Gamma_{\xi_V}(M, E_V)$, la sezione $d^\nabla s(X) \in \Gamma_{\xi_V}(M, E_V)$ si indica con $\nabla_X s$ e si dice *derivata covariante di s rispetto ad X* .

Siano $s \in \Gamma_{\xi_V}(M, E_V)$, ed $\tilde{s} \in \mathcal{C}^\infty(P, V)$ il suo sollevamento ($\tilde{s}(\sigma) = \sigma^{-1} s(\pi(\sigma))$). Abbiamo allora

$$(5.2.2) \quad \widetilde{\nabla_X s} = \tilde{X} \tilde{s}, \quad \forall s \in \Gamma_{\xi_V}(M, E_V), \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

OSSERVAZIONE V.2.4. Gli elementi di $\mathcal{Q}^q(M, E_V)$ sono sezioni di un fibrato vettoriale differenziabile su M , ma questo non è, in generale, associato ad una rappresentazione lineare di \mathbf{G} . Di una forma di grado positivo possiamo quindi definire il differenziale, ma non la derivata covariante rispetto ad un campo di vettori.

LEMMA V.2.5. Sia p un punto di M . Abbiamo:

$$(5.2.3) \quad \text{supp } d^\nabla \phi \subset \text{supp } \phi, \quad \forall \phi \in \mathcal{Q}^*(M, E_V),$$

$$(5.2.4) \quad d^\nabla \phi_1(p) = d^\nabla \phi_2(p) \quad \text{se } \phi_1 = \phi_2 \text{ in un intorno di } p,$$

$$(5.2.5) \quad \text{supp } \nabla_X s \subset \text{supp } X \cap \text{supp } s, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M), \forall s \in \Gamma_{\xi_V}(M, E_V),$$

$$(5.2.6) \quad \begin{cases} \nabla_{f_1 X_1 + f_2 X_2} s = f_1 \nabla_{X_1} s + f_2 \nabla_{X_2} s, \\ \forall f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\infty(M), \forall X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M), \forall s \in \Gamma_{\xi_V}(M, E_V), \end{cases}$$

$$(5.2.7) \quad \nabla_X(f s) = (Xf)s + f \nabla_X s, \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M), \forall s \in \Gamma_{\xi_V}(M, E_V),$$

$$(5.2.8) \quad \nabla_X(s_1 + s_2) = \nabla_X s_1 + \nabla_X s_2, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M), \forall s_1, s_2 \in \Gamma_{\xi_V}(M, E_V),$$

$$(5.2.9) \quad \nabla_X s(p) = \nabla_Y s(p) \quad \text{se } X_p = Y_p, \quad \forall s \in \Gamma_{\xi_V}(M, E_V).$$

□

In particolare, se U è un aperto di M , $\phi \in \mathcal{Q}^q(U, E_V)$, $X \in \mathfrak{X}(U)$, $s \in \Gamma_{\xi_V}(U, E_V)$, $p \in U$, $v \in T_p M$, possiamo definire senza ambiguità $d^\nabla \phi \in \mathcal{Q}^{q+1}(U, E_V)$, $\nabla_X s \in \Gamma_{\xi_V}(U, E_V)$, $\nabla_v s \in E_{V_p}$.

V.3. Espressione locale del differenziale covariante

Possiamo utilizzare le forme di Christoffel relative ad un atlante di trivializzazione di ξ per ricavare espressioni esplicite del differenziale covariante.

Sia $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \sigma_\alpha) \mid \alpha \in I\}$ un atlante di trivializzazione di ξ . Data la forma di Cartan ω di una connessione principale su ξ , abbiamo posto

$$\omega_\alpha = \sigma_\alpha^* \omega \in \Omega^1(U_\alpha, \mathfrak{g}), \quad (\text{FORME DI CHRISTOFFEL}),$$

$$\theta_{\alpha,\beta} = \psi_{\alpha,\beta}^* \omega_{\mathbf{G}} = \psi_{\alpha,\beta}^{-1} d\psi_{\alpha,\beta} \in \Omega^1(U_\alpha \cap U_\beta, \mathfrak{g}).$$

Il pullback su $U_\alpha \times \mathbf{G}$ della connessione su ξ per mezzo della trivializzazione ha forma di Cartan $\tilde{\omega}_\alpha = \text{Ad}(a^{-1}) \circ \omega_\alpha + a^{-1} da$. Quindi il sollevamento orizzontale \tilde{X}^α ad $U_\alpha \times \mathbf{G}$ di un campo $X \in \mathfrak{X}(U_\alpha)$ è definito da¹

$$(5.3.1) \quad \tilde{X}^\alpha = X - (\text{Ad}(a^{-1})\omega_\alpha(X))^*.$$

Fissiamo una rappresentazione lineare (ρ, V) di \mathbf{G} e scriviamo per semplicità E invece di E_V per indicare lo spazio totale di ξ_V . Ad una $s \in \Gamma_{\xi_V}(M, E)$ associamo le funzioni $s_\alpha = \sigma_\alpha^{-1} s \in \mathcal{C}^\infty(U_\alpha, V)$. Esse si rialzano a funzioni $\tilde{s}_\alpha \in \mathcal{C}^\infty(U_\alpha \times \mathbf{G}, V)$, definite da

$$\tilde{s}_\alpha(p, a) = \rho(a^{-1})s_\alpha(p), \quad \forall p \in U_\alpha, \forall a \in \mathbf{G}.$$

Se $A \in \mathfrak{g}$, abbiamo

$$A^* \tilde{s}_\alpha(p, a) = \left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} \rho(e^{-tA} a^{-1})s_\alpha(p) = -\rho(a^{-1})\rho_*(\text{Ad}(a)(A))s_\alpha(p).$$

Otteniamo perciò

$$(5.3.2) \quad \tilde{X} \tilde{s}_\alpha = \rho(a)^{-1}(X - [\text{Ad}(a^{-1})\omega_\alpha(X)]^*)\tilde{s}_\alpha = \rho(a)^{-1}(Xs + \rho_*(\omega_\alpha(X))s).$$

DEFINIZIONE V.3.1. Le forme

$$(5.3.3) \quad \gamma_\alpha = \rho_* \circ \omega_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha, \mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(V))$$

si dicono le *forme di Christoffel* della differenziazione covariante ∇ di ξ_V , nell'atlante di trivializzazione $\{(U_\alpha, \sigma_\alpha) \mid \alpha \in I\}$.

Abbiamo dimostrato la seguente :

PROPOSIZIONE V.3.2. *La differenziazione covariante si esprime, per mezzo delle forme di Christoffel (5.3.3), mediante*

$$(5.3.4) \quad d^\nabla(\sigma_\alpha f) = \sigma_\alpha \cdot (df + \gamma_\alpha(f)), \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(U_\alpha, V).$$

Più in generale, ogni $\phi \in \Omega^q(M, E)$ può essere descritta da una famiglia di forme differenziali $\{\phi_\alpha \in \Omega^q(U_\alpha, V)\}$, caratterizzate da

$$\phi = \sigma_\alpha \phi_\alpha \quad \text{su } U_\alpha.$$

Definiamo $\gamma_\alpha \wedge \phi_\alpha \in \Omega^{q+1}(U_\alpha, V)$ ponendo, per ogni $X_0, \dots, X_q \in \mathfrak{X}(U_\alpha)$,

$$(5.3.5) \quad \gamma_\alpha \wedge \phi_\alpha(X_0, \dots, X_q) = \sum_{j=0}^q (-1)^j \gamma_\alpha(X_j)(\phi_\alpha(X_0, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_q)).$$

Possiamo associare ad una $\psi \in \Omega^q(U_\alpha, V)$ la $\sigma_\alpha \psi \in \Omega^q(U_\alpha, E_V)$ definita da

$$(5.3.6) \quad (\sigma_\alpha \psi)(X_1, \dots, X_q) = \sigma_\alpha(p) \cdot \psi(X_1, \dots, X_q) \in E_{V_p}, \quad \forall X_1, \dots, X_q \in \mathfrak{X}(U_\alpha).$$

¹Come in precedenza, abbiamo identificato $T(U_\alpha \times \mathbf{G})$ con il prodotto Cartesiano $(TU_\alpha) \times (T\mathbf{G})$, ed indicato con A^* il campo di vettori invariante a sinistra corrispondente a $A \in \mathfrak{g}$.

Per la Proposizione V.2.2, otteniamo la formula:

$$(5.3.7) \quad d^\nabla \phi = \sigma_\alpha \cdot (d\phi_\alpha + \gamma_\alpha \wedge \phi_\alpha) \quad \text{su } U_\alpha.$$

V.4. Forma di curvatura ed equazioni di struttura

Sia $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato principale differenziabile, con gruppo strutturale \mathbf{G} , su cui sia stata fissata una connessione principale con forma di Cartan ω . Indichiamo con \mathfrak{g} l'algebra di Lie di \mathbf{G} . Ricordiamo che ω è una forma pseudotensoriale di tipo $(\text{Ad}, \mathfrak{g})$.

DEFINIZIONE V.4.1. La *forma di curvatura* di Γ è la 2-forma tensoriale di tipo $(\text{Ad}, \mathfrak{g})$:

$$(5.4.1) \quad \Omega = D\omega \in \Omega_{\text{Ad},0}^2(P, \mathfrak{g}).$$

Ricordiamo che il fatto che Ω sia una 2-forma tensoriale di tipo $(\text{Ad}, \mathfrak{g})$ significa che valgono le:

- (a) $R_a^* \Omega = \text{Ad}(a^{-1}) \circ \Omega \quad \forall a \in \mathbf{G}$
- (b) $\Omega(X, Y) = 0$ se X oppure Y è verticale.

TEOREMA V.4.2. *La forma di curvatura soddisfa l'equazione di struttura²*

$$(5.4.2) \quad \Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega \wedge \omega].$$

DIMOSTRAZIONE. Basta dimostrare che

$$(*) \quad \Omega(X, Y) = \left(d\omega + \frac{1}{2}[\omega \wedge \omega] \right) (X, Y)$$

quando $X, Y \in \mathfrak{X}(P)$ siano o fondamentali, o sollevamenti orizzontali di campi su M .

Distinguiamo i diversi casi.

Se $X = A^*$, $Y = B^*$, con $A, B \in \mathfrak{g}$, sono entrambi fondamentali, allora $\Omega(X, Y) = 0$ e la (*) si riduce a

$$d\omega(A^*, B^*) = A^*(B) - B^*(A) - \omega([A^*, B^*]) = -[A, B] = -\frac{1}{2}[\omega \wedge \omega](A^*, B^*).$$

Siano ora $X = A^*$, con $A \in \mathfrak{g}$, ed $Y = \tilde{Z}$, con $Z \in \mathfrak{X}(M)$. Ancora, $\Omega(X, Y) = \Omega(A^*, \tilde{Z}) = 0$. Poiché ora anche

$$[\omega \wedge \omega](A^*, \tilde{Z}) = 0,$$

in quanto $\omega(\tilde{Z}) = 0$, la (*) si riduce a

$$d\omega(A^*, \tilde{Z}) = A^*(0) - \tilde{Z}(A) - \omega([A^*, \tilde{Z}]) = -\omega([A^*, \tilde{Z}]) = 0.$$

Infatti, $[A^*, \tilde{Z}] = L_{A^*}(\tilde{Z}) = 0$ perché \tilde{Z} è invariante rispetto all'azione di \mathbf{G} su P .

Infine, nel caso in cui $X = \tilde{Z}_1$, $Y = \tilde{Z}_2$, con $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{X}(M)$, la (*) si riduce ad $[\omega \wedge \omega](\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2) = 0$, e $D\omega(\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2) = d\omega(\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2)$. \square

²Non possiamo utilizzare la (5.1.5) per il calcolo del differenziale esterno covariante di ω , perché ω è pseudotensoriale, ma non tensoriale.

OSSERVAZIONE V.4.3. In particolare, abbiamo

$$(5.4.3) \quad \Omega(\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2) = -\omega([\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2]), \quad \forall Z_1, Z_2 \in \mathfrak{X}(M).$$

La forma di curvatura misura quindi la non integrabilità formale della distribuzione orizzontale.

TEOREMA V.4.4 (identità di Bianchi). *La forma di curvatura Ω soddisfa l'identità differenziale di Bianchi*

$$(5.4.4) \quad D\Omega = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Poiché $\Omega \in \Omega_{\text{Ad},0}^2(P, \mathfrak{g})$ è una 2-forma tensoriale di tipo $(\mathfrak{g}, \text{Ad})$, abbiamo per il Lemma V.1.5 e per l'equazione di struttura :

$$\begin{aligned} D\Omega &= d\Omega + [\omega \wedge \Omega] \\ &= d(d\omega + \frac{1}{2}[\omega \wedge \omega]) + [\omega \wedge \Omega] \\ &= \frac{1}{2}([d\omega \wedge \omega] - [\omega \wedge d\omega]) + [\omega \wedge d\omega] + \frac{1}{2}[\omega \wedge [\omega \wedge \omega]] \\ &= \frac{1}{2}[\omega \wedge [\omega \wedge \omega]] = 0, \end{aligned}$$

perché una 3-forma tensoriale che si annulli sui vettori orizzontali è nulla. \square

V.5. Connessioni piatte

In questo paragrafo consideriamo il caso di connessioni principali con forma di curvatura nulla.

DEFINIZIONE V.5.1. Sia $\xi = (M \times \mathbf{G} \xrightarrow{\pi} M)$ il fibrato banale e sia $\pi_{\mathbf{G}} : M \times \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$ la proiezione sulla seconda coordinata. Il pullback $\omega = \pi_{\mathbf{G}}^* \omega_{\mathbf{G}}$ della forma di Maurer-Cartan su \mathbf{G} è la forma di Cartan di una connessione principale su ξ , che si dice la *connessione canonica*.

DEFINIZIONE V.5.2. Chiamiamo *piatta* una connessione principale localmente isomorfa alla connessione canonica.

TEOREMA V.5.3. *Condizione necessaria e sufficiente affinché una connessione principale sia piatta è che la sua forma di curvatura sia identicamente nulla.*

DIMOSTRAZIONE. Infatti, la forma di curvatura è nulla se e soltanto se la distribuzione orizzontale è formalmente e quindi completamente integrabile. \square

TEOREMA V.5.4. *Se la sua base M è semplicemente connessa, il fibrato principale ξ ammette una connessione principale piatta se e soltanto se è isomorfo al fibrato banale, ed una connessione piatta su ξ è isomorfa alla connessione canonica.* \square

OSSERVAZIONE V.5.5. In generale, se ξ ammette una connessione principale, le foglie complete della sua distribuzione orizzontale sono tra loro diffeomorfe e sono dei rivestimenti della base M .

V.6. La famiglia delle connessioni principali

Se ω ed ω' sono le forme di Cartan di due connessioni principali su ξ , la differenza $\eta = \omega' - \omega$ è una uno-forma tensoriale di tipo $(\text{Ad}, \mathfrak{g})$ e quindi definisce una forma $\varphi \in \Omega^1(M, E_{\mathfrak{g}})$. Abbiamo quindi

PROPOSIZIONE V.6.1. *Lo spazio delle connessioni principali su ξ è uno spazio affine con spazio vettoriale associato $\Omega_{\text{Ad},0}(P, \mathfrak{g}) \simeq \Omega^1(M, E_{\mathfrak{g}})$.*

OSSERVAZIONE V.6.2. Utilizziamo le notazioni introdotte nei paragrafi precedenti. La forma di Christoffel $\omega_{\alpha} = \sigma_{\alpha}^* \omega$ si può interpretare come l'elemento di $\Omega^1(M, E_{\mathfrak{g}})$ che corrisponde alla differenza tra $\Psi_{\alpha}^* \omega$ e la connessione piatta canonica su $U_{\alpha} \times \mathbf{G}$.

V.7. Fibrato degli endomorfismi e rappresentazione aggiunta

Fibrato degli endomorfismi di un fibrato vettoriale. Ad un fibrato vettoriale $\eta = (E \xrightarrow{\pi_{\eta}} M)$ possiamo associare il *fibrato degli endomorfismi di η* , che indicheremo con $\mathcal{E}nd(\eta)$. La sua fibra sopra il punto p di M è lo spazio vettoriale di tutti le applicazioni lineari di E_p in sé. Il fibrato $\mathcal{E}nd(\eta) = (\mathcal{E}nd(E) \xrightarrow{\pi_{\mathcal{E}nd(\eta)}} M)$ è il prodotto di Whitney $\eta \otimes_M \eta^*$ su M del fibrato η e del suo fibrato duale η^* .

Sia n il rango di η ed $\mathbb{L}(\eta)$ il fibrato $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ -principale dei sistemi di riferimento di η . Allora $\mathcal{E}nd(\eta)$ è il fibrato vettoriale associato alla rappresentazione aggiunta di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ su $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$.

Fibrato associato alla rappresentazione aggiunta. Sia $\xi_{\mathfrak{g}} = (E_{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\pi_{\mathfrak{g}}} M)$ il fibrato vettoriale corrispondente alla rappresentazione aggiunta di \mathbf{G} .

PROPOSIZIONE V.7.1. *Sia (ρ, V) una rappresentazione lineare di \mathbf{G} . Risulta allora definita un unico morfismo di fibrati vettoriali $(\text{id}_M, \tilde{\rho}_*) : \xi_{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathcal{E}nd(\xi_V)$, che renda commutativo il diagramma*

$$\begin{array}{ccc} P \times \mathfrak{g} & \xrightarrow{\text{id}_P \times \rho_*} & P \times \mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(V) \\ \downarrow & & \downarrow \\ E_{\mathfrak{g}} & \xrightarrow{\tilde{\rho}_*} & \mathcal{E}nd(E_V) \end{array}$$

in cui le frecce verticali sono le proiezioni canoniche nel quoziente.

DIMOSTRAZIONE. Basta osservare che $\rho_*(\text{Ad}(a)(A)) = \text{Ad}(\rho(a))\rho_*(A)$ e quindi l'applicazione $\text{id}_P \times \rho_*$ passa al quoziente, definendo un omomorfismo di fibrati vettoriali. \square

Alcune osservazioni sulle forme a valori vettoriali. Sia $\eta = (E \xrightarrow{\pi_{\eta}} M)$ un fibrato vettoriale differenziabile. Se $\phi \in \Omega^p(M, \mathcal{E}nd(E))$ e $\psi \in \Omega^q(M, E)$, è naturale

definire il prodotto esterno $\phi \wedge \psi \in \Omega^{p+q}(M, E)$ ponendo

$$(\phi \wedge \psi)(X_1, \dots, X_{p+q}) = \sum_{\substack{k \in \mathbf{S}_{p+q} \\ 1 \leq k_1 < \dots < k_p \leq p+q \\ 1 \leq k_{p+1} < \dots < k_{p+q} \leq p+q}} \epsilon(k) \phi(X_{k_1}, \dots, X_{k_p}) (\psi(X_{k_{p+1}}, \dots, X_{k_{p+q}})), \quad \forall X_1, \dots, X_{p+q} \in \mathfrak{X}(M).$$

Siano ora \mathbf{G} un gruppo di Lie, $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato differenziabile \mathbf{G} -principale, $\xi_{\mathfrak{g}}$ il fibrato vettoriale associato alla rappresentazione aggiunta, ξ_V il fibrato vettoriale associato ad una rappresentazione lineare (ρ, V) di \mathbf{G} .

Se $\phi \in \Omega^p(M, E_{\mathfrak{g}})$, allora $\tilde{\rho}_* \phi \in \Omega^p(M, E_{\text{End}(E_V)})$. Se $\psi \in \Omega^q(M, E_V)$, definiamo

$$\phi \wedge_{\rho} \psi = (\tilde{\rho}_* \phi) \wedge \psi \in \Omega^{p+q}(M, E_V).$$

Utilizzando l'isomorfismo $\Lambda_{\mathfrak{g}} : \Omega^*(M, E_{\mathfrak{g}}) \rightarrow \Omega_{\text{Ad},0}^*(P, \mathfrak{g})$ della Proposizione III.9.18 e la Proposizione III.9.15 abbiamo il seguente³

LEMMA V.7.2. *Se $\phi \in \Omega^r(M, E_{\mathfrak{g}})$ e $\psi \in \Omega^s(M, E_V)$, la forma $\phi \wedge_{\rho} \psi \in \Omega^{r+s}(M, E_V)$ verifica*

$$(5.7.1) \quad \Lambda_V(\phi \wedge_{\rho} \psi) = \Lambda_{\mathfrak{g}}(\phi) \wedge_{\rho} \Lambda_V(\psi).$$

□

Nel caso in cui $\phi, \psi \in \Omega^*(M, E_{\mathfrak{g}})$, scriveremo

$$[\phi \wedge \psi] \quad \text{per indicare} \quad \phi \wedge_{\text{Ad}} \psi.$$

NOTAZIONE V.7.3. Se $\psi \in \Omega^p(M, E_V)$ ed $\alpha \in \Omega^q(M)$, indichiamo con $\psi \wedge \alpha$ l'elemento di $\Omega^{p+q}(M, E_V)$ definito da

$$(5.7.2) \quad (\psi \wedge \alpha)(X_1, \dots, X_{p+q}) = \sum' (-1)^p \epsilon(k) \alpha(X_{k_{p+1}}, \dots, X_{k_{p+q}}) \psi(X_{k_1}, \dots, X_{k_p}),$$

per ogni $X_1, \dots, X_{p+q} \in \mathfrak{X}(M)$, ove la somma è estesa a tutte le permutazioni k di $\{1, \dots, p+q\}$ con $k_1 < \dots < k_p$ e $k_{p+1} < \dots < k_{p+q}$.

OSSERVAZIONE V.7.4. Se $\phi \in \Omega^p(M, E_{\mathfrak{g}})$, $\psi \in \Omega^{q_1}(M, E_V)$ ed $\alpha \in \Omega^{q_2}(M)$, allora

$$(5.7.3) \quad \phi \wedge_{\rho} (\psi \wedge \alpha) = (\phi \wedge_{\rho} \psi) \wedge \alpha.$$

LEMMA V.7.5. *Ogni elemento di $\Omega^p(M, E_V)$ si può scrivere come una somma localmente finita di forme $s \cdot \alpha$ con $s \in \Gamma_{\xi_V}(M, E_V)$, $\alpha \in \Omega^p(M)$.* □

Le formule (5.7.2), (5.7.3) ed il Lemma V.7.5 ci saranno utili per semplificare, più avanti, il calcolo di alcune espressioni.

V.8. Curvatura

La forma di curvatura Ω di una connessione principale Γ su ξ è di tipo tensoriale per la rappresentazione aggiunta di \mathbf{G} . Essa determina quindi un elemento $R \in \Omega^2(M, E_{\mathfrak{g}})$ tale che

$$(5.8.1) \quad R(X_p, Y_p) = \sigma \Omega(\tilde{X}_{\sigma}, \tilde{Y}_{\sigma}), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M), \quad \forall p \in M, \quad \forall \sigma \in P_p.$$

³cf. la Definizione III.9.14

DEFINIZIONE V.8.1. Il tensore alternato $R \in \mathcal{Q}^2(M, E_{\mathfrak{g}})$ definito dalla (5.8.1) si dice *tensore di curvatura* della connessione principale Γ su ξ .

TEOREMA V.8.2. Siano $\{\omega_\alpha\}$ le forme di Christoffel di Γ in un atlante di trivialisazione $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \sigma_\alpha) \mid \alpha \in I\}$ di ξ . Allora

$$(5.8.2) \quad R|_{U_\alpha} = \sigma_\alpha \cdot (d\omega_\alpha + \frac{1}{2}[\omega_\alpha \wedge \omega_\alpha]), \quad \forall \alpha \in I.$$

DIMOSTRAZIONE. Per la Proposizione III.9.19, abbiamo

$$R|_{U_\alpha} = \sigma_\alpha \cdot \sigma_\alpha^* \Omega = \sigma_\alpha \cdot \sigma_\alpha^* (d\omega + \frac{1}{2}[\omega \wedge \omega]) = \sigma_\alpha \cdot (d\omega_\alpha + \frac{1}{2}[\omega_\alpha \wedge \omega_\alpha]).$$

□

TEOREMA V.8.3. Sia (ρ, V) una rappresentazione lineare di \mathbf{G} . Allora, per ogni $\phi \in \mathcal{Q}^q(M, E_V)$ abbiamo

$$(5.8.3) \quad (d^\nabla)^2 \phi = d^\nabla d^\nabla \phi = R \wedge_\rho \phi.$$

DIMOSTRAZIONE. Se $s \in \Gamma_{\xi_V}(M, E_V)$ ed $\alpha \in \mathcal{Q}^q(M)$, abbiamo:

$$d^\nabla d^\nabla (s\alpha) = d^\nabla ((d^\nabla s) \wedge \alpha) + s d\alpha = (d^\nabla d^\nabla s) \wedge \alpha - d^\nabla s \wedge d\alpha + d^\nabla s \wedge d\alpha = (d^\nabla d^\nabla s) \wedge \alpha.$$

Utilizzando il Lemma V.7.5 possiamo limitarci quindi a dimostrare la formula nel caso in cui $\phi = s \in \mathcal{Q}^0(M, E_V) = \Gamma_{\xi_V}(M, E_V)$. Abbiamo

$$\begin{aligned} D^2 \tilde{s} &= D(d\tilde{s} + \omega \wedge_\rho \tilde{s}) = d\omega \wedge_\rho \tilde{s} - \omega \wedge_\rho d\tilde{s} + \omega \wedge_\rho (d\tilde{s} + \omega \wedge_\rho \tilde{s}) \\ &= d\omega \wedge_\rho \tilde{s} + \omega \wedge_\rho (\omega \wedge_\rho \tilde{s}). \end{aligned}$$

Per completare la dimostrazione della (5.8.3) è sufficiente osservare che $D^2 \tilde{s}$ è una due-forma tensoriale di tipo (ρ, V) e che l'uguaglianza $D^2 \tilde{s} = \Omega \wedge_\rho \tilde{s}$ è verificata su ogni coppia di campi di vettori orizzontali. □

COROLLARIO V.8.4. Se $s \in \Gamma_{\xi_V}(M, E_V)$, abbiamo

$$(5.8.4) \quad R(X, Y) \wedge_\rho s = \nabla_X \nabla_Y s - \nabla_Y \nabla_X s - \nabla_{[X, Y]} s, \\ \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M), \forall s \in \Gamma_{\xi_V}(M, E_V).$$

DIMOSTRAZIONE. Siano $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $s \in \Gamma_{\xi_V}(M, E_V)$. Posto $\phi = d^\nabla s$, abbiamo $\tilde{\phi}(\tilde{Z}) = \tilde{Z}\tilde{s} = \widetilde{\nabla_Z s}$ per ogni $Z \in \mathfrak{X}(M)$ e quindi:

$$\begin{aligned} d\tilde{\phi}(\tilde{X}, \tilde{Y}) &= \tilde{X}\tilde{\phi}(\tilde{Y}) - \tilde{Y}\tilde{\phi}(\tilde{X}) - \tilde{\phi}([\tilde{X}, \tilde{Y}]) = (\tilde{X}\tilde{Y} - \tilde{Y}\tilde{X} - [\tilde{X}, \tilde{Y}])\tilde{s}, \\ &= \sigma^{-1}(\nabla_X \nabla_Y s - \nabla_Y \nabla_X s - \nabla_{[X, Y]} s) \circ \pi. \end{aligned}$$

Per il Teorema V.8.3 otteniamo la (5.8.4). □

V.9. Trasporto parallelo di vettori

Il sollevamento orizzontale di cammini descritto nel §IV.8 del Capitolo IV ci permette di definire il trasporto parallelo lungo i cammini in M di vettori dei fibrati vettoriali associati alle rappresentazioni lineari del suo gruppo strutturale.

Sia $\gamma \in \mathcal{C}_{\text{tr}}^1([0, 1], M)$ e $\tilde{\gamma}_{\sigma_0} \in \mathcal{C}_{\text{tr}, h}^1([0, 1], P)$ il suo sollevamento orizzontale a partire dal punto $\sigma_0 \in P_{\gamma(0)}$. Se (ρ, V) è una rappresentazione lineare di \mathbf{G} e

$v_0 \in E_{V,s(0)}$, allora $v_0 = \sigma_0^{-1}v_0 \in V$ e $\tilde{\gamma}_{\sigma_0}(t)v_0$ è un sollevamento differenziabile di γ ad un cammino in $\mathcal{C}_{\text{tr}}^1([0, 1], E_V)$, con punto iniziale v_0 .

Se σ'_0 è un altro punto di $P_{\gamma(0)}$, è $\sigma'_0 = \sigma_0 a$ per un elemento $a \in \mathbf{G}$ ed il sollevamento orizzontale di γ con punto iniziale σ'_0 è $\tilde{\gamma}_{\sigma'_0}(t) = \tilde{\gamma}_{\sigma_0}(t) \cdot a$. Poiché

$$v'_0 = \sigma'^{-1}_0 v_0 = (\sigma_0 a)^{-1} v_0 = \rho(a^{-1}) \sigma_0^{-1} v_0 = \rho(a^{-1}) v_0,$$

otteniamo $\tilde{\gamma}_{\sigma'_0}(t) v'_0 = \tilde{\gamma}_{\sigma_0}(t) \cdot a v'_0 = \tilde{\gamma}_{\sigma_0}(t) v_0$.

La curva $\tilde{\gamma}_{v_0}(t) = \tilde{\gamma}_{\sigma_0}(t)v_0$ in E_V è quindi indipendente dalla scelta del punto iniziale σ_0 in $P_{\gamma(0)}$.

DEFINIZIONE V.9.1. La curva $\tilde{\gamma}_{v_0} = \tilde{\gamma}_{\sigma_0}(t)\sigma_0^{-1}v_0 \in \mathcal{C}_{\text{tr}}^1([0, 1], E_V)$ si dice il *trasporto parallelo di v_0 lungo la curva γ* .

Possiamo considerare una curva $v \in \mathcal{C}^1([0, 1], E_V)$ come un *campo di vettori lungo il cammino* $\gamma \in \mathcal{C}^1([0, 1], M)$ definito dalla sua proiezione $\gamma(t) = \pi_V(v(t))$. Se $\tilde{\gamma}_{\sigma_0} \in \mathcal{C}^1([0, 1], P)$ è il sollevamento orizzontale di γ di punto iniziale $\sigma_0 \in P_{\gamma(0)}$, la composizione $v_{\sigma_0}(t) = (\tilde{\gamma}_{\sigma_0}(t))^{-1}v(t)$ è un cammino $v_{\sigma_0} \in \mathcal{C}^1([0, 1], V)$ e possiamo quindi calcolarne la derivata $\dot{v}_{\sigma_0} = \frac{d}{dt}v_{\sigma_0}$. Se $a \in \mathbf{G}$ e $\sigma'_0 = \sigma_0 a$, allora $\tilde{\gamma}_{\sigma'_0}(t) = \tilde{\gamma}_{\sigma_0}(t) \cdot a$ è il sollevamento di γ con punto iniziale σ'_0 . Quindi $v_{\sigma'_0}$ è $a^{-1}v_{\sigma_0}$ ed abbiamo perciò

$$\tilde{\gamma}_{\sigma_0}(t)\dot{v}_{\sigma_0} = \tilde{\gamma}_{\sigma'_0}(t)\dot{v}_{\sigma'_0}.$$

Quindi $\tilde{\gamma}_{\sigma_0}\dot{v}_{\sigma_0}$ è un campo di vettori lungo γ , indipendente dalla scelta del punto iniziale σ_0 del sollevamento. Possiamo introdurre quindi la

DEFINIZIONE V.9.2. Sia $v \in \mathcal{C}^1([0, 1], E_V)$ un campo di vettori lungo una curva $\gamma \in \mathcal{C}^1([0, 1], M)$ e sia $\tilde{\gamma}_{\sigma_0}$ il sollevamento orizzontale di γ , a partire da un punto $\sigma_0 \in P_{s(0)}$. La

$$(5.9.1) \quad \frac{Dv}{dt} = \tilde{\gamma}_{\sigma_0}(t) \left(\frac{d[(\tilde{\gamma}_{\sigma_0})^{-1}v(t)]}{dt} \right)$$

si dice *derivata covariante di v lungo la curva s* . Se

$$(5.9.2) \quad \frac{Dv}{dt} = 0$$

diciamo che il campo di vettori v è *parallelo* lungo la curva γ .

OSSERVAZIONE V.9.3. Il campo di vettori v è parallelo lungo la curva γ se e soltanto se v è il trasporto parallelo lungo γ del vettore $v(0)$.

Abbiamo

PROPOSIZIONE V.9.4. Siano $f \in \Gamma_{\xi_V}(M, E_V)$ e $\gamma \in \mathcal{C}^1([0, 1], M)$. Allora

$$(5.9.3) \quad \frac{D(f \circ \gamma)}{dt} = \nabla_{\dot{\gamma}(t)} f.$$

V.10. Differenziazione covariante secondo Koszul

In questo paragrafo introduciamo la definizione astratta di differenziazione covariante⁴ sulle sezioni di un fibrato vettoriale differenziabile e mostriamo che essa equivale al dato di una connessione principale sul fibrato dei suoi sistemi di riferimento.

Sia $\eta = (E \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato vettoriale reale differenziabile, di rango n , con fibra tipica V , su una varietà differenziabile M di dimensione m . Indichiamo con $\mathcal{E}(M)$ lo spazio $\Gamma_{\xi_V}(M, E)$ delle sue sezioni differenziabili.

DEFINIZIONE V.10.1 (Koszul). Una *derivazione covariante* su η è un'applicazione

$$(5.10.1) \quad \nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathcal{E}(M) \ni (X, s) \longrightarrow \nabla_X s \in \mathcal{E}(M)$$

che gode delle proprietà

$$(5.10.2) \quad \begin{cases} \nabla_{f_1 X_1 + f_2 X_2} s = f_1 \nabla_{X_1} s + f_2 \nabla_{X_2} s, \\ \nabla_X (s_1 + s_2) = \nabla_X s_1 + \nabla_X s_2, \\ \nabla_X (f s) = f \nabla_X s + X(f) \cdot s, \end{cases}$$

ove $f, f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $X, X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$, $s, s_1, s_2 \in \mathcal{E}(M)$.

Poiché l'applicazione $X \rightarrow \nabla_X s$ è $\mathcal{C}^\infty(M)$ -lineare su $\mathfrak{X}(M)$, possiamo considerare, per ogni $s \in \mathcal{E}(M)$, la

$$(5.10.3) \quad \mathfrak{X}(M) \ni X \rightarrow d^\nabla s(X) = \nabla_X s \in \mathcal{E}(M)$$

come una 1-forma a valori in E . Definiamo così un'applicazione

$$(5.10.4) \quad d^\nabla : \mathcal{E}(M) = \mathcal{Q}^0(M, E) \longrightarrow \mathcal{Q}^1(M, E).$$

DEFINIZIONE V.10.2. L'applicazione (5.10.4) si dice *differenziazione covariante*.

Abbiamo mostrato nel §V.2 come una connessione sul fibrato principale $\mathbb{L}(\eta)$, con gruppo strutturale $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$, dei sistemi di riferimento di η permetta di definire una differenziazione covariante su η . Viceversa, vale il

TEOREMA V.10.3. *Ogni differenziazione covariante su η è associata ad una ed una sola connessione principale sul fibrato $\mathbb{L}(\eta)$ dei suoi sistemi di riferimento.*

DIMOSTRAZIONE. Se $s \in \mathcal{E}(M)$, denotiamo con $\tilde{s} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{L}(\eta), V)$ il suo sollevamento, definito da $\tilde{s}(\sigma) = \sigma^{-1} s(\pi(\sigma))$. Abbiamo

$$(5.10.5) \quad X_\sigma \tilde{s} = -\omega_v(X_\sigma) \tilde{s}, \quad \forall X \in \mathfrak{V}(\mathbb{L}(\eta)), \quad \forall s \in \mathcal{E}(M).$$

Infatti, se $A = \omega_v(X_\sigma) \in \mathfrak{gl}_{\mathbf{R}}(V)$, da $\tilde{s}(\sigma \exp(tA)) = \exp(-tA) \tilde{s}(\sigma)$ ricaviamo

$$X_\sigma \tilde{s} = \left. \frac{d \exp(-tA) \sigma^{-1} s(\pi(\sigma))}{dt} \right|_{t=0} = -A \tilde{s}(\sigma).$$

⁴J.L.Koszul *Lectures on fibre bundles and differential geometry*. Notes by S. Ramanan. Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics, No. 20 Bombay 1965 ii+130+iii pp.

Perciò, assegnata una connessione principale su $\mathbb{L}(\eta)$, la sua forma di Cartan ω è legata alla derivazione covariante dall'identità

$$(5.10.6) \quad X_\sigma \tilde{s} = \sigma^{-1}(\nabla_{\pi_* X_\sigma} s) - \omega(X_\sigma) \tilde{s}(\sigma), \quad \forall X \in \mathfrak{X}(\mathbb{L}(\eta)), \forall \sigma \in P, \forall s \in \mathcal{E}(M).$$

Per concludere la dimostrazione, è quindi sufficiente verificare che, assegnata una derivazione covariante ∇ su η , la $\omega \in \mathcal{Q}^1(\mathbb{L}(\eta), \mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(V))$ definita dalla (5.10.6) è la forma di Cartan di una connessione principale su $\mathbb{L}(\eta)$. Per la (5.10.5) è $\omega(A^*) = A$ per ogni $A \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(V)$. Se $a \in \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(V)$, $\sigma \in \mathbb{L}(\eta)$ ed $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{L}(\eta))$, abbiamo

$$\begin{aligned} [R_a^* \omega(X_\sigma)] \tilde{s}(\sigma a) &= [R_a^* \omega(X_\sigma)] a^{-1} \tilde{s}(\sigma) \\ &= \omega(R_{a^*} X_\sigma) \tilde{s}(\sigma a) = (\sigma a)^{-1} (\nabla_{\pi_* (R_{a^*} X_\sigma)} s) - R_{a^*} X_\sigma \tilde{s} \\ &= a^{-1} \sigma^{-1} (\nabla_{\pi_* X} s) - X_\sigma R_a^* \tilde{s} = a^{-1} (\sigma^{-1} (\nabla_{\pi_* X} s) - X_\sigma \tilde{s}) \\ &= a^{-1} \omega(X_\sigma) \tilde{s}(\sigma) = [a^{-1} \omega(X_\sigma) a] \tilde{s}(\sigma a) = [\text{Ad}(a^{-1}) \omega(X_\sigma)] \tilde{s}(\sigma a), \end{aligned}$$

da cui ricaviamo che $R_a^* \omega = \text{Ad}(a^{-1}) \omega$. Ciò completa la dimostrazione. \square

V.11. Il Teorema di Ambrose-Singer

Dopo aver introdotto il concetto di curvatura, ritorniamo sull'olonomia, definita in §IV.9. Il legame tra curvatura ed olonomia è descritto dal seguente Teorema di Ambrose e Singer⁵.

TEOREMA V.11.1 (dell'olonomia). *Sia $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato principale differenziabile, con gruppo strutturale \mathbf{G} , ed M varietà connessa e paracompatta. Sia Γ una \mathbf{G} -connessione principale su ξ , con forma di connessione ω e forma di curvatura Ω . Fissiamo un punto $\sigma_0 \in P$. L'algebra di Lie di $\Phi_0(\sigma_0)$ è il sottospazio vettoriale di \mathfrak{g} generato dagli elementi della forma $\Omega(\sigma)(X, Y)$, al variare di σ in $P(\sigma_0)$ e di X, Y tra i vettori orizzontali in $H_\sigma(P)$.*

DIMOSTRAZIONE. Fissato $\sigma_0 \in P$, sia $p_0 = \pi(\sigma_0)$. Per il Teorema IV.9.9 possiamo supporre che il gruppo strutturale \mathbf{G} di ξ coincida col gruppo di olonomia $\Phi(\sigma_0)$. Sia \mathfrak{a} il sottospazio di \mathfrak{g} generato da tutti gli elementi $\Omega_\sigma(\tilde{X}, \tilde{Y})$, al variare di X, Y in $\mathfrak{X}(M)$ e di σ in P . Poiché Ω è una forma tensoriale di tipo $(\text{Ad}, \mathfrak{g})$, abbiamo, per ogni $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ ed $A \in \mathfrak{g}$,

$$\mathfrak{a} \ni \Omega(\mathbf{R}_{\exp(tA)_*} \tilde{X}, \mathbf{R}_{\exp(tA)_*} \tilde{Y}) = \mathbf{R}_{\exp(tA)}^* \Omega(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \text{Ad}(\exp(-tA)) \Omega(\tilde{X}, \tilde{Y}).$$

Derivando rispetto a t per $t = 0$ otteniamo che $[A, \Omega(\tilde{X}, \tilde{Y})] \in \mathfrak{a}$, e quindi \mathfrak{a} è un ideale di \mathfrak{g} .

Consideriamo la distribuzione vettoriale $\mathcal{A}(P)$ generata dai campi di vettori A^* , al variare di A in \mathfrak{a} , e la $\mathcal{B}(P) = \mathcal{A}(P) + \mathcal{H}(P)$, generata dalla distribuzione orizzontale $\mathcal{H}(P)$ e da $\mathcal{A}(P)$. Per costruzione la $\mathcal{B}(P)$ è una distribuzione di rango $m + \dim \mathfrak{a}$. Dimostriamo che è involutiva. Infatti $\mathcal{A}(P)$ è completamente

⁵W.Ambrose, I.M. Singer: *A theorem on holonomy*, Trans. Amer. Math. Soc. 75 (1953), 428-443

⁶Ricordiamo che $P(\sigma_0)$ è l'insieme dei punti σ di P che possono essere congiunti a σ_0 da un cammino orizzontale.

integrabile, $[A^*, \mathcal{H}(P)] \subset \mathcal{H}(P)$ per ogni $A \in \mathfrak{a}$, perché la distribuzione orizzontale è invariante per le traslazioni a destra rispetto agli elementi di \mathbf{G} ed, infine, se $X, Y \in \mathcal{H}(P)$, la

$$\text{pr}_v([X, Y]_\sigma) = [\omega([X, Y])]_\sigma^* = -[\Omega(X, Y)]_\sigma^*$$

prova che $[X, Y] \in \mathcal{B}(P)$. Poiché abbiamo supposto che \mathbf{G} coincida con il gruppo di ologonomia $\Phi(\sigma_0)$, ogni coppia di elementi di P possono essere collegati da un cammino orizzontale. Ne segue che P è la varietà integrale di $\mathcal{B}(P)$ passante per σ_0 e che quindi ha rango uguale alla dimensione di P . Questo implica che \mathfrak{a} , avendo la stessa dimensione di \mathfrak{g} , coincida con \mathfrak{g} . \square

OSSERVAZIONE V.11.2. Se ξ è un fibrato principale differenziabile, con spazio totale P connesso, su una base M di dimensione maggiore o uguale a due⁷, esiste una connessione principale su ξ per cui sia $P(\sigma_0) = P$. In particolare, se $\dim M \geq 2$, ogni gruppo di Lie connesso \mathbf{G} è il gruppo di ologonomia di una connessione principale sul fibrato banale $M \times \mathbf{G}$.

V.12. L'ologonomia infinitesima

Lo spazio $\mathcal{C}^\infty(P, \mathfrak{g})$ delle funzioni differenziabili su P a valori in \mathfrak{g} è un'algebra di Lie con l'operazione

$$[f_1, f_2](\sigma) = [f_1(\sigma), f_2(\sigma)], \quad \forall f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\infty(P, \mathfrak{g}), \quad \forall \sigma \in P.$$

Consideriamo la sua sottoalgebra

$$(5.12.1) \quad \mathcal{G} = \Omega_{\text{Ad},0}^0(P, \mathfrak{g}) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(P, \mathfrak{g}) \mid \mathbf{R}_a^* f = \text{Ad}(a^{-1})f, \quad \forall a \in \mathbf{G}\}.$$

LEMMA V.12.1. *Valgono le*

$$(5.12.2) \quad Zf = -[\omega(Z), f], \quad \forall Z \in \mathfrak{V}(P), \quad \forall f \in \mathcal{G},$$

$$(5.12.3) \quad \tilde{X}f \in \mathcal{G} \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M), \quad \forall f \in \mathcal{G}.$$

DIMOSTRAZIONE. Se $f \in \Omega_{\text{Ad},0}^0(P, \mathfrak{g})$, è $Df = df + [\omega \wedge f] = df + [\omega, f]$. Poiché Df è tensoriale, otteniamo la (5.12.2). La (5.12.3) segue dal fatto che, se $f \in \mathcal{G}$ ed $X \in \mathfrak{X}(M)$, allora $f = \tilde{s}$ per una $s \in \Gamma_{\xi_g}(M, E_g)$ ed $\tilde{X}f = \widetilde{\nabla_X s}$. \square

Definiamo per ricorrenza

$$(5.12.4) \quad \begin{cases} \mathcal{K}_0 = \langle \Omega(\tilde{X}, \tilde{Y}) \mid X, Y \in \mathfrak{X}(M) \rangle, \\ \mathcal{K}_{p+1} = \mathcal{K}_p + \langle \tilde{X} \mathcal{K}_p \mid X \in \mathfrak{X}(M) \rangle \quad \text{per } p \geq 0, \\ \mathcal{K} = \bigcup_{p \geq 0} \mathcal{K}_p. \end{cases}$$

PROPOSIZIONE V.12.2. \mathcal{K} è una sottoalgebra di Lie di \mathcal{G} .

⁷Vedi J.Hano e H.Ozeki: *On the holonomy group of linear connections*, Nagoya Math. J. **10** (1956), pp 71-81, per il caso dei gruppi lineari, e K.Nomizu: *Un théorème sur les groupes d'holonomie*, Nagoya Math. J. **10**, 1956, pp. 101-103 per il caso generale.

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con $R \in \mathcal{Q}^2(M, E_g)$ il tensore di curvatura. Per ogni $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, la $f = \Omega(\tilde{X}, \tilde{Y})$ è il rialzamento $R(\tilde{X}, \tilde{Y})$ di $R(X, Y) \in \Gamma_{\xi_0}(M, E_g)$ e quindi un elemento di \mathcal{G} . Per definizione $\tilde{X}\mathcal{H} \subset \mathcal{H}$ per ogni $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ per la (5.12.3).

Dimostriamo per ricorrenza su p che $[\mathcal{H}_p, \mathcal{H}] \subset \mathcal{H}$.

Siano $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$. Poiché $\Omega(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2) = -\omega([\tilde{X}_1, \tilde{X}_2])$, e $\text{pr}_h([\tilde{X}_1, \tilde{X}_2]) = \tilde{Y}$, con $Y = [X_1, X_2]$, otteniamo, per la (5.12.2),

$$\begin{aligned} [\Omega(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2), f] &= -\text{pr}_v([\tilde{X}_1, \tilde{X}_2])f = (\text{pr}_h([\tilde{X}_1, \tilde{X}_2]) - [\tilde{X}_1, \tilde{X}_2])f \\ &= \tilde{Y}f - \tilde{X}_1, \tilde{X}_2 f + \tilde{X}_2, \tilde{X}_1 f \in \mathcal{H}. \end{aligned}$$

Da questo segue che $[\mathcal{H}_0, \mathcal{H}] \subset \mathcal{H}$.

Supponiamo ora che $p > 0$ e $[\mathcal{H}_{p-1}, \mathcal{H}] \subset \mathcal{H}$. Basta verificare che, se $f_0 \in \mathcal{H}_{p-1}$, $f \in \mathcal{H}$ ed $X \in \mathfrak{X}(M)$, allora $[\tilde{X}f_0, f] \in \mathcal{H}$. Questo segue perché per l'ipotesi induttiva $[f_0, f] \in \mathcal{H}$ e quindi

$$[\tilde{X}f_0, f] = \tilde{X}[f_0, f] - [f_0, \tilde{X}f] \in \tilde{X}\mathcal{H} + [f_0, \mathcal{H}] \subset \mathcal{H}.$$

La dimostrazione è completa. \square

Fissato $\sigma_0 \in P$, poniamo

$$(5.12.5) \quad \begin{cases} \mathfrak{m}_p(\sigma_0) = \{f(\sigma_0) \mid f \in \mathcal{H}_p\}, \\ \mathfrak{m}(\sigma_0) = \{f(\sigma_0) \mid f \in \mathcal{H}\} = \bigcup_{p \geq 0} \mathfrak{m}_p(\sigma_0). \end{cases}$$

PROPOSIZIONE V.12.3. $\mathfrak{m}(\sigma_0)$ è una sottoalgebra dell'algebra di Lie $\phi(\sigma_0)$ del gruppo di ologonomia $\Phi(\sigma_0)$.

DIMOSTRAZIONE. Per la Proposizione V.12.2 $\mathfrak{m}(\sigma_0)$ è un'algebra di Lie e l'inclusione $\mathfrak{m}(\sigma_0) \subset \phi(\sigma_0)$ è conseguenza del Teorema V.11.1. \square

DEFINIZIONE V.12.4. L'algebra di Lie (5.12.5) si dice l'ologonomia infinitesima della connessione Γ in σ_0 ed il sottogruppo analitico di \mathbf{G} generato da $\mathfrak{m}(\sigma_0)$ il suo gruppo di ologonomia infinitesima in σ_0 .

Abbiamo

PROPOSIZIONE V.12.5. Se sia ξ che la connessione principale Γ su ξ sono analitici reali, allora i suoi gruppi di ologonomia speciale ed infinitesima coincidono. \square

V.13. Connessioni invarianti canoniche su spazi omogenei

In questo paragrafo e nel successivo discuteremo connessioni principali invarianti rispetto ad azioni differenziabili di gruppi di Lie. Considereremo in primo luogo il caso degli spazi omogenei, considerati come fibrati principali con gruppo strutturale uguale allo stabilizzatore di un punto.

Siano \mathbf{G} un gruppo di Lie ed \mathbf{H} un suo sottogruppo chiuso.

DEFINIZIONE V.13.1. Lo spazio omogeneo $M = \mathbf{G}/\mathbf{H}$ si dice *riduttivo* se l'algebra di Lie \mathfrak{h} di \mathbf{H} ammette, nell'algebra di Lie \mathfrak{g} di \mathbf{G} , un complemento lineare $\text{Ad}(\mathbf{H})$ -invariante.

Supponiamo cioè che esista un sottospazio vettoriale \mathfrak{m} di \mathfrak{g} tale che:

$$(5.13.1) \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m},$$

$$(5.13.2) \quad \mathfrak{m} = \text{Ad}(a)(\mathfrak{m}), \quad \forall a \in \mathbf{H}.$$

NOTAZIONE V.13.2. Indicheremo con $A_{\mathfrak{h}}, A_{\mathfrak{m}}$ le componenti di $A \in \mathfrak{g}$ nella decomposizione (5.13.1): $A = A_{\mathfrak{h}} + A_{\mathfrak{m}}$, con $A_{\mathfrak{h}} \in \mathfrak{h}$, $A_{\mathfrak{m}} \in \mathfrak{m}$.

OSSERVAZIONE V.13.3. \mathbf{G}/\mathbf{H} è sempre riduttivo quando \mathbf{H} sia compatto, perché le rappresentazioni lineari dei gruppi compatti sono completamente riducibili.

ESEMPIO V.13.4. Sia \mathbf{G} un sottogruppo di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ semialgebrico e chiuso rispetto all'aggiunzione. Allora $\mathbf{K} = \mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)$ è un sottogruppo compatto massimale di \mathbf{G} . Indichiamo con \mathfrak{k} la sua algebra di Lie e con \mathfrak{p} il sottospazio $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{p}(n)$ delle matrici Hermitiane-simmetriche dell'algebra di Lie \mathfrak{g} di \mathbf{G} . La decomposizione di Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ verifica le (5.13.1), (5.13.2) e quindi lo spazio omogeneo \mathbf{G}/\mathbf{K} è riduttivo.

TEOREMA V.13.5 (Connessioni invarianti su spazi riduttivi). *Sia $M = \mathbf{G}/\mathbf{H}$ uno spazio omogeneo ed indichiamo con ξ il corrispondente fibrato principale, con gruppo strutturale \mathbf{H} , spazio totale \mathbf{G} e base M .*

- (1) *Supponiamo che M sia riduttivo e valgano le (5.13.1), (5.13.2). Allora la componente ω in \mathfrak{h} della forma di Maurer-Cartan $\omega_{\mathbf{G}}$ di \mathbf{G} rispetto alla decomposizione (5.13.1) è la forma di Cartan di una connessione \mathbf{H} -principale su ξ .*
- (2) *Se esiste su ξ una connessione \mathbf{H} -principale Γ , invariante per le traslazioni a sinistra su \mathbf{G} , allora M è riduttivo, e Γ è ottenuta come in (1), a partire da una decomposizione (5.13.1), per cui valga la (5.13.2).*
- (3) *La forma di curvatura della connessione Γ definita in (1) è*

$$(5.13.3) \quad \Omega(A^*, B^*) = -[A_{\mathfrak{m}}, B_{\mathfrak{m}}]_{\mathfrak{h}}, \quad \forall A, B \in \mathfrak{g}.$$

DIMOSTRAZIONE. (1) Basta verificare che la

$$(5.13.4) \quad \omega(A^*) = A_{\mathfrak{h}} \in \mathfrak{h}, \quad \forall A \in \mathfrak{g}$$

(ove A^* è il campo di vettori invariante a sinistra su \mathbf{G} corrispondente ad $A \in \mathfrak{g}$), è una forma di Cartan su \mathbf{G} . La distribuzione verticale $\mathfrak{V}(\mathbf{G})$ è generata dai campi A^* , al variare di A in \mathfrak{h} . Abbiamo perciò

$$\omega(A^*) = A_{\mathfrak{h}} = A, \quad \forall A \in \mathfrak{h}.$$

Abbiamo poi $(R_a)_*(A^*) = (\text{Ad}(a^{-1})(A))^*$ per ogni $A \in \mathfrak{g}$ ed $a \in \mathbf{G}$, e dunque

$$\begin{aligned} R_a^* \omega(A^*) &= \omega((\text{Ad}(a^{-1})(A))^*) = (\text{Ad}(a^{-1})(A))_{\mathfrak{h}} \\ &= \text{Ad}(a^{-1})(A_{\mathfrak{h}}) = \text{Ad}(a^{-1})\omega(A^*), \quad \forall A \in \mathfrak{g}, \quad \forall a \in \mathbf{H}. \end{aligned}$$

Infatti, la proiezione $A \rightarrow A_{\mathfrak{h}}$ su \mathfrak{h} commuta con $\text{Ad}(a^{-1})$, perché abbiamo supposto che \mathfrak{m} fosse $\text{Ad}(\mathbf{H})$ -invariante.

(2) Se ω è la forma di Cartan di una connessione \mathbf{H} -principale \mathbf{G} -invariante a sinistra su ξ , si verifica facilmente che $\mathfrak{m} = \ker \omega_e \subset \mathfrak{g}$ soddisfa (5.13.1) e (5.13.2), e che $\omega(A^*) = A_{\mathfrak{h}}$ per ogni $A \in \mathfrak{g}$.

(3) Per dimostrare (5.13.3) basta utilizzare l'equazione di struttura, decomponendo A e B con la (5.13.1). Abbiamo:

$$\begin{aligned}\Omega(A^*, B^*) &= A^* A_{\mathfrak{h}} - B^* B_{\mathfrak{h}} - [A, B]_{\mathfrak{h}} + [A_{\mathfrak{h}}, B_{\mathfrak{h}}] \\ &= -[A_{\mathfrak{m}}, B_{\mathfrak{h}}]_{\mathfrak{h}} - [A_{\mathfrak{h}}, B_{\mathfrak{m}}]_{\mathfrak{h}} - [A_{\mathfrak{m}}, B_{\mathfrak{m}}]_{\mathfrak{h}}\end{aligned}$$

ed otteniamo la formula desiderata perché $[A_{\mathfrak{m}}, B_{\mathfrak{h}}], [A_{\mathfrak{h}}, B_{\mathfrak{m}}] \in \mathfrak{m}$. \square

Come conseguenza diretta del Teorema V.11.1 e della (3) del Teorema V.13.5 abbiamo:

TEOREMA V.13.6. *Sia $M = \mathbf{G}/\mathbf{H}$ uno spazio omogeneo che ammette una connessione \mathbf{G} -invariante e sia $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ la corrispondente decomposizione della sua algebra di Lie. Allora l'algebra di Lie ϕ in del suo gruppo di ologonia $\Phi(e)$ in e è generata dagli elementi di \mathfrak{h} della forma $[X, Y]_{\mathfrak{h}}$ al variare di X, Y in \mathfrak{m} .*

DIMOSTRAZIONE. Per il Teorema V.11.1 l'algebra di Lie ϕ dell'ologonia $\Phi(e)$ è il sottospazio vettoriale generato dagli $\Omega_a(X^*, Y^*)$, al variare di X, Y in \mathfrak{m} e di a in \mathbf{G} . Infatti i campi X^* , con $X \in \mathfrak{m}$, generano la distribuzione orizzontale su \mathbf{G} . Per l'invarianza della connessione rispetto alle traslazioni a sinistra su \mathbf{G} , abbiamo, per (5.13.3),

$$\Omega_a(X^*, Y^*) = \Omega_e(X, Y) = -[X, Y]_{\mathfrak{h}}, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{m},$$

da cui la tesi. \square

V.14. Connessioni invarianti

Sia $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato principale diffeenziabile con gruppo strutturale \mathbf{G} .

Ricordiamo che un automorfismo di ξ è il dato di una coppia di diffeomorfismi (f, F) , con $f \in \mathcal{C}^\infty(M, M)$, $F \in \mathcal{C}^\infty(P, P)$, tali che

$$(5.14.1) \quad \pi(F(\sigma)) = f(\pi(\sigma)), \quad F(\sigma a) = F(\sigma)a, \quad \forall \sigma \in P, \forall a \in \mathbf{G}.$$

Fissiamo una connessione principale Γ su ξ , con forma di Cartan ω . Ricordiamo che un automorfismo (f, F) di ξ lascia invariante Γ se $F^* \omega = \omega$.

PROPOSIZIONE V.14.1. *Sia $\{(f_t, F_t)\}$ un gruppo a un parametro di automorfismi di ξ che lasci invariante Γ . Sia X^P il generatore infinitesimale di $\{F_t\}$. Allora*

$$(5.14.2) \quad F_t(\sigma) = \tilde{f}_t(\sigma) \exp(t\omega(X_\sigma^P)), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall \sigma \in P,$$

ove, per ogni $\sigma \in P$, abbiamo indicato con $\tilde{f}_t(\sigma)$ il sollevamento orizzontale di $t \rightarrow f_t(\pi(\sigma))$, di punto iniziale σ .

DIMOSTRAZIONE. È $F_t(\sigma) = \tilde{f}_t(\sigma)a(t)$ per una $a \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbf{G})$, con $a(0) = e$. Derivando questa uguaglianza, troviamo che

$$X_{F_t(\sigma)}^P = R_{a(t)*} \tilde{f}_t(\sigma) + \tilde{f}_t(\sigma) \dot{a}(t).$$

Poiché $\tilde{f}_t(\sigma)$ è orizzontale, applicando la forma di Cartan ad ambo i membri di quest'uguaglianza, otteniamo

$$\omega(X_{F_t(\sigma)}^P) = [a(t)]^{-1} \dot{a}(t),$$

perché $\omega(\sigma\dot{a}(t)) = [a(t)]^{-1}\dot{a}(t)$ per ogni $\sigma \in P$. Poiché $F_{t*}X^P = X^P$, ed $F_t^*\omega = \omega$, otteniamo

$$\omega(X_{F_t(\sigma)}^P) = \omega(F_{t*}X_\sigma^P) = (F_t^*\omega)(X_\sigma^P) = \omega(X_\sigma^P),$$

e quindi $a(t) = \exp(t\omega(X_\sigma^P))$. \square

OSSERVAZIONE V.14.2. Il generatore infinitesimale $X^P \in \mathfrak{X}(P)$ di un gruppo a un parametro di diffeomorfismi di ξ è invariante per traslazioni a destra. Soddisfa cioè $R_{a*}X^P = X^P$, per ogni $a \in \mathbf{G}$.

Consideriamo ora un'azione differenziabile su ξ di un gruppo di Lie \mathbf{K} . Indichiamo per semplicità con la moltiplicazione a sinistra sia la sua azione sugli elementi di M che su quelli di P . Scriveremo quindi

$$\pi(k\sigma) = k\pi(\sigma), \quad k(\sigma a) = (k\sigma)a, \quad \forall k \in \mathbf{K}, \forall \sigma \in P, \forall a \in \mathbf{G}.$$

ESEMPIO V.14.3. Sia \mathbf{K} un gruppo di Lie, \mathbf{K}_0 un suo sottogruppo chiuso ed $M = \mathbf{K}/\mathbf{K}_0$ il corrispondente spazio omogeneo. Se $m = \dim M$, il fibrato $\mathbb{L}(M)$ è un fibrato $\mathbf{GL}_m(\mathbf{R})$ -principale. L'azione di \mathbf{K} su $\mathbb{L}(M)$ è la composizione $k \cdot \sigma = dL_k \circ \sigma$ di $\sigma \in \text{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathbb{R}^m, T_{\pi(\sigma)}M)$ con il differenziale dL_k del diffeomorfismo $L_k : M \ni p \rightarrow kp \in M$.

Supporremo nel seguito per semplicità che P , \mathbf{G} e \mathbf{K} siano tutti connessi.

Fissiamo un punto $p_0 \in M$ e denotiamo con

$$(5.14.3) \quad \mathbf{K}_0 = \{k \in \mathbf{K} \mid k \cdot p_0 = p_0\}$$

lo stabilizzatore di p_0 in \mathbf{K} . Esso è un sottogruppo chiuso, e quindi di Lie, di \mathbf{K} . Siano \mathfrak{k} l'algebra di Lie di \mathbf{K} e \mathfrak{k}_0 quella di \mathbf{K}_0 .

Per ogni punto σ di P_{p_0} ed ogni elemento k di \mathbf{K}_0 , il punto $k\sigma$ appartiene ancora alla fibra P_{p_0} , e vi sarà quindi un unico elemento $a \in \mathbf{G}$ per cui $k\sigma = \sigma a$. Associamo in questo modo ad ogni $\sigma_0 \in P_{p_0}$ un'applicazione

$$(5.14.4) \quad \lambda_{\sigma_0} : \mathbf{K}_0 \ni k \longrightarrow \sigma_0^{-1}k\sigma_0 \in \mathbf{G}.$$

LEMMA V.14.4. La λ_{σ_0} definita dalla (5.14.4) è un omomorfismo di gruppi di Lie.

DIMOSTRAZIONE. La (5.14.4) si può riscrivere nella forma $k\sigma_0 = \sigma_0\lambda_{\sigma_0}(k)$, per ogni $k \in \mathbf{K}$. Se $k_1, k_2 \in \mathbf{K}_0$, abbiamo

$$\sigma_0\lambda_{\sigma_0}(k_1k_2) = (k_1k_2)\sigma_0 = k_1(k_2 \cdot \sigma_0) = k_1\sigma_0\lambda_{\sigma_0}(k_2) = \sigma_0\lambda_{\sigma_0}(k_1)\lambda_{\sigma_0}(k_2).$$

Quindi $\lambda_{\sigma_0}(k_1k_2) = \lambda_{\sigma_0}(k_1) \cdot \lambda_{\sigma_0}(k_2)$ per ogni $k_1, k_2 \in \mathbf{K}_{\sigma_0}$. Per come è definita, $\lambda_{\sigma_0} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{K}_0, \mathbf{G})$ ed è perciò un omomorfismo di gruppi di Lie. \square

DEFINIZIONE V.14.5. Ogni elemento X dell'algebra di Lie \mathfrak{k} di \mathbf{K} definisce gruppi a un parametro di diffeomorfismi

$$(5.14.5) \quad P \times \mathbb{R} \ni (\sigma, t) \longrightarrow \exp(tX)\sigma \in P, \quad M \times \mathbb{R} \ni (p, t) \longrightarrow \exp(tX)p \in M.$$

I loro generatori infinitesimali $X^P \in \mathfrak{X}(P)$ ed $X^M \in \mathfrak{X}(M)$, si dicono i *campi associati* ad X in P ed in M , rispettivamente.

NOTAZIONE V.14.6. Analogamente, indichiamo con $X^{\mathbf{K}}$ il campo di vettori invariante a destra su \mathbf{K} , generatore infinitesimale del gruppo a un parametro di diffeomorfismi $\mathbf{K} \times \mathbb{R} \ni (k, t) \rightarrow \exp(tX)k \in \mathbf{K}$. Ricordiamo che

$$(5.14.6) \quad [X^{\mathbf{K}}, Y^{\mathbf{K}}] = -[X, Y]^{\mathbf{K}}, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{L}.$$

LEMMA V.14.7. *Le applicazioni*

$$(5.14.7) \quad \mathfrak{L} \ni X \longrightarrow X^P \in \mathfrak{X}(P), \quad e \quad \mathfrak{L} \ni X \longrightarrow X^M \in \mathfrak{X}(M)$$

sono anti-omomorfismi di gruppi di Lie. Abbiamo cioè

$$(5.14.8) \quad [X, Y]^P = -[X^P, Y^P] \quad ed \quad [X, Y]^M = -[X^M, Y^M], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{L}.$$

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $\sigma_0 \in P$ e $p_0 \in M$ possiamo considerare le applicazioni differenziabili $r_{\sigma_0} : \mathbf{K} \ni k \rightarrow k\sigma_0 \in P$ ed $r_{p_0} : \mathbf{K} \ni k \rightarrow kp_0 \in M$. Se $X \in \mathfrak{L}$, il campo $X^{\mathbf{K}}$ è r_{σ_0} -correlato ad X^P ed r_{p_0} -correlato ad X^M . La tesi segue allora dalla (5.14.6). \square

Indichiamo con λ_{σ_0*} il differenziale nell'identità dell'applicazione λ_{σ_0} definita dalla (5.14.4). Per il Lemma V.14.4, abbiamo

LEMMA V.14.8. $\lambda_{\sigma_0*} : \mathfrak{L}_0 \rightarrow \mathfrak{g}$ è un omomorfismo di algebre di Lie. \square

Fissiamo su ξ una connessione principale \mathbf{K} -invariante, con forma di Cartan ω e definiamo

$$(5.14.9) \quad \Lambda_{\sigma_0} : \mathfrak{L} \ni X \longrightarrow \omega(X_{\sigma_0}^P) \in \mathfrak{g}.$$

PROPOSIZIONE V.14.9. *L'applicazione (5.14.9) soddisfa*

- (1) $\Lambda_{\sigma_0}(X) = \lambda_{\sigma_0*}(X), \quad \forall X \in \mathfrak{L}_0,$
- (2) $\Lambda_{\sigma_0}(\text{Ad}(k_0)(X)) = \text{Ad}(\lambda_{\sigma_0}(k_0))(\Lambda_{\sigma_0}(X)), \quad \forall k_0 \in \mathbf{K}_0, \forall X \in \mathfrak{L}.$

DIMOSTRAZIONE. Se $X \in \mathfrak{L}_0$, allora

$$X_{\sigma_0}^P = \left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} [\exp(tX)\sigma_0] = \left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} \sigma_0 \lambda_{\sigma_0}(\exp(tX)) = \left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} \sigma_0 \exp(t\lambda_{\sigma_0*}(X)).$$

Quindi $X_{\sigma_0}^P = [\lambda_{\sigma_0*}(X)]_{\sigma_0}^*$, e da questa segue la (1).

Fissiamo $X \in \mathfrak{L}$, $k_0 \in \mathbf{K}_0$ e sia $Y = \text{Ad}(k_0)X$. Abbiamo allora

$$\exp(tY)\sigma_0 = k_0 \exp(tX)k_0^{-1}\sigma_0 = k_0 \exp(tX)\sigma_0 \lambda_{\sigma_0}(k_0^{-1}) = k_0 \mathbf{R}_{\lambda_{\sigma_0}(k_0^{-1})}(\exp(tX)\sigma_0),$$

da cui otteniamo che $Y_{\sigma_0}^P = k_0* d\mathbf{R}_{\lambda_{\sigma_0}(k_0^{-1})} X_{\sigma_0}^P$. Poiché ω è per ipotesi \mathbf{K} -invariante, applicando ω ad ambo i membri di questa uguaglianza, ricaviamo la (2). Infatti

$$\begin{aligned} \Lambda_{\sigma_0}(Y) &= \omega(Y_{\sigma_0}^P) = \omega(k_0* d\mathbf{R}_{\lambda_{\sigma_0}(k_0^{-1})} X_{\sigma_0}^P) = \omega(d\mathbf{R}_{\lambda_{\sigma_0}(k_0^{-1})} X_{\sigma_0}^P) = \text{Ad}(\lambda_{\sigma_0}(k_0))\omega(X_{\sigma_0}^P) \\ &= \text{Ad}(\lambda_{\sigma_0}(k_0))(\Lambda_{\sigma_0}(X)). \end{aligned}$$

\square

OSSERVAZIONE V.14.10. Per la Proposizione V.14.1, abbiamo la decomposizione

$$X_{\sigma}^P = \tilde{X}_{\sigma}^M + [\omega(X_{\sigma}^P)]_{\sigma}^*, \quad \forall X \in \mathfrak{L}.$$

In particolare, poiché i campi X^P ed \tilde{X}^M sono \mathbf{G} -invarianti, anche $[\omega(X_{\sigma}^P)]_{\sigma}^*$ lo è.

OSSERVAZIONE V.14.11. L'estensione Λ_{σ_0} di $\lambda_{\sigma_0^*}$ non è, in generale, un omomorfismo di algebre di Lie, come ci mostrano la Proposizione V.14.12 ed il successivo Corollario V.14.13.

PROPOSIZIONE V.14.12. *La forma di curvatura Ω di una connessione \mathbf{K} -invariante su ξ soddisfa*

$$(5.14.10) \quad \Omega_{\sigma_0}(X^P, Y^P) = [\Lambda_{\sigma_0}(X), \Lambda_{\sigma_0}(Y)] - \Lambda_{\sigma_0}([X, Y]), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{k},$$

e quindi abbiamo

$$(5.14.11) \quad R_{p_0}(X^M, Y^M) = \sigma_0([\Lambda_{\sigma_0}(X), \Lambda_{\sigma_0}(Y)] - \Lambda_{\sigma_0}([X, Y]))\sigma_0^{-1} \quad \forall X, Y \in \mathfrak{k}.$$

DIMOSTRAZIONE. Siano $X, Y \in \mathfrak{k}$. Per le equazioni di struttura abbiamo

$$\Omega_{\sigma_0}(X^P, Y^P) = X_{\sigma_0}^P \omega(Y^P) - Y_{\sigma_0}^P \omega(X^P) - \omega_{\sigma_0}([X^P, Y^P]) + [\omega(X^P), \omega(Y^P)]_{\sigma_0}.$$

Le derivate di Lie di ω rispetto ad X^P, Y^P sono nulle, perché ω è \mathbf{K} -invariante. Quindi

$$X_{\sigma_0}^P \omega(Y^P) = \omega_{\sigma_0}([X^P, Y^P]), \quad Y_{\sigma_0}^P \omega(X^P) = \omega_{\sigma_0}([Y^P, X^P]).$$

Inoltre, poiché $[X^P, Y^P] = -[X, Y]^P$,

$$\omega_{\sigma_0}([X^P, Y^P]) = -\omega_{\sigma_0}([X, Y]^P) = -\Lambda_{\sigma_0}([X, Y]).$$

Da queste osservazioni otteniamo la tesi. \square

COROLLARIO V.14.13. *La connessione \mathbf{K} -invariante definita da Λ_{σ_0} è piatta se e soltanto se $\Lambda_{\sigma_0} : \mathfrak{k} \rightarrow \mathfrak{g}$ è un omomorfismo di algebre di Lie.*

Il teorema seguente⁸ caratterizza le connessioni \mathbf{K} -invarianti:

TEOREMA V.14.14 (Wang). *Sia \mathbf{K} un gruppo di Lie connesso di trasformazioni \mathcal{C}^∞ del fibrato principale differenziabile ξ , che operi transitivamente sulla base M . Fissato un elemento $\sigma_0 \in P$, la (5.14.9) stabilisce una corrispondenza biunivoca tra l'insieme delle connessioni \mathbf{K} -invarianti su ξ e quello delle applicazioni lineari $\Lambda_{\sigma_0} : \mathfrak{k} \rightarrow \mathfrak{g}$ che soddisfino le condizioni (1) e (2) della Proposizione V.14.9.*

DIMOSTRAZIONE. Basta dimostrare che ad ogni applicazione lineare $\Lambda_{\sigma_0} : \mathfrak{k} \rightarrow \mathfrak{g}$ che soddisfi le (1) e (2) della Proposizione V.14.9 si può far corrispondere una connessione principale Γ su ξ per cui valga la (5.14.9). Definiamo

$$H_{\sigma_0} = \{X_{\sigma_0}^P - \Lambda_{\sigma_0}(X)_{\sigma_0}^* \mid X \in \mathfrak{k}\}.$$

L'azione $(\mathbf{K} \times \mathbf{G}) \times P \ni (k, a, \sigma) \rightarrow k\sigma a \in P$ di $\mathbf{K} \times \mathbf{G}$ su P è transitiva e lascia invariante la distribuzione orizzontale di una \mathbf{G} -connessione principale \mathbf{K} -invariante su ξ . Basterà quindi verificare che si può definire la distribuzione orizzontale ponendo $H_{k\sigma_0 a} = k_* \mathbf{R}_{a^*} H_{\sigma_0}$, che cioè, se $k_1, k_2 \in \mathbf{K}$ ed $a_1, a_2 \in \mathbf{G}$ sono tali che $k_1 \sigma_0 a_1 = k_2 \sigma_0 a_2$, allora $k_{1*} \mathbf{R}_{a_1^*} H_{\sigma_0} P = k_{2*} \mathbf{R}_{a_2^*} H_{\sigma_0} P$.

Posto $a = a_1 a_2^{-1}$ e $k = k_2^{-1} k_1$, ciò è equivalente a dimostrare che

$$k_* \mathbf{R}_{a^*} H_{\sigma_0} = H_{\sigma_0} \quad \text{se} \quad k\sigma_0 a = \sigma_0.$$

⁸H.C. Wang: *On invariant connections over a principal fiber bundle*. Nagoya Math.J. 13 (1958), 1-19.

Da $k\sigma_0 a = \sigma_0$ segue che $k \in \mathbf{K}_0$ ed $a = \lambda_{\sigma_0}(k^{-1})$. Mostriamo che

$$k_* \mathbf{R}_{a_*} (X_{\sigma_0}^P - \Lambda_{\sigma_0}(X)_{\sigma_0}^*) \in H_{\sigma_0}, \quad \text{se } X \in \mathfrak{k}, k \in \mathbf{K}_0, a = \lambda_{\sigma_0}(k^{-1}).$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} k_* \mathbf{R}_{a_*} (X_{\sigma_0}^P) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} k \exp(tX) \sigma_0 a = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(t \text{Ad}(k)X) (k\sigma_0 a) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(t \text{Ad}(k)X) \sigma_0 = [\text{Ad}(k)X]_{\sigma_0}^P. \end{aligned}$$

Per ogni $A \in \mathfrak{g}$, abbiamo

$$\begin{aligned} k_* \mathbf{R}_{a_*} A_{\sigma_0}^* &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} k \sigma_0 \exp(tA) a = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (k\sigma_0 a) a^{-1} \exp(tA) a \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \sigma_0 \exp(t \text{Ad}(a^{-1}A)) = [\text{Ad}(a^{-1}A)]_{\sigma_0}^*. \end{aligned}$$

Per la (2), se $A = \Lambda_{\sigma_0}(X)$, è

$$\text{Ad}(a^{-1})A = \text{Ad}(\lambda_{\sigma_0}(k))\Lambda_{\sigma_0}(X) = \Lambda_{\sigma_0}(\text{Ad}(k)X).$$

Otteniamo perciò

$$k_* \mathbf{R}_{a_*} (X_{\sigma_0}^P - \Lambda_{\sigma_0}(X)_{\sigma_0}^*) = [\text{Ad}(k)X]_{\sigma_0}^P - [\Lambda_{\sigma_0}(\text{Ad}(k)X)]_{\sigma_0}^* \in H_{\sigma_0}.$$

Quindi $k_* \mathbf{R}_{a_*} (H_{\sigma_0}) \subset H_{\sigma_0}$ e, poiché questi due spazi vettoriali hanno la stessa dimensione, si ha l'uguaglianza. La dimostrazione è completa. \square

Ricaviamo ancora

TEOREMA V.14.15. *Supponiamo inoltre che l'azione di \mathbf{K} su M sia riduttiva, e sia \mathfrak{m} un sottospazio vettoriale di \mathfrak{k} con*

$$(5.14.12) \quad \mathfrak{k} = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{m},$$

$$(5.14.13) \quad \text{Ad}(k)(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}, \quad \forall k \in \mathbf{K}_0.$$

Vi è allora una corrispondenza biunivoca tra l'insieme delle connessioni \mathbf{K} -invarianti su ξ e quello delle applicazioni lineari

$$(5.14.14) \quad \lambda_{\mathfrak{m}} : \mathfrak{m} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

tali che

$$(5.14.15) \quad \lambda_{\mathfrak{m}}(\text{Ad}(k)(X)) = \text{Ad}(\lambda(k))(\lambda_{\mathfrak{m}}(X)), \quad \forall X \in \mathfrak{m}, \forall k \in \mathbf{K}_0.$$

DIMOSTRAZIONE. Ci riduciamo infatti al teorema precedente associando a $\lambda_{\mathfrak{m}}$ l'applicazione lineare $\Lambda_{\sigma_0} : \mathfrak{k} \rightarrow \mathfrak{g}$ definita da:

$$\lambda_{\sigma_0}(X) = \begin{cases} X, & \text{se } X \in \mathfrak{k}_0, \\ \lambda_{\mathfrak{m}}(X), & \text{se } X \in \mathfrak{m}. \end{cases} \quad \square$$

OSSERVAZIONE V.14.16. La curvatura della connessione Γ associata a $\lambda_{\mathfrak{m}}$ è

$$(5.14.16) \quad \Omega_{\sigma_0}(X^P, Y^P) = [\lambda_{\mathfrak{m}}(X), \lambda_{\mathfrak{m}}(Y)] - \lambda_{\mathfrak{m}}([X, Y]_{\mathfrak{m}}) - \lambda_{\sigma_0}([X, Y]_{\mathfrak{k}_0}), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{m}.$$

DEFINIZIONE V.14.17. La connessione Γ corrispondente alla scelta $\lambda_{\mathfrak{m}} = 0$ si dice la *connessione canonica* su ξ associata allo spazio omogeneo riduttivo $M = \mathbf{K}/\mathbf{K}_0$. La forma di curvatura della connessione canonica è $\Omega(X^P, Y^P) = -\lambda_{\sigma_0*}([X, Y]_{\mathfrak{k}_0})$, per $X, Y \in \mathfrak{m}$.

Fissiamo una connessione \mathbf{K} -invariante su ξ , con forma di Cartan ω . Sia Λ_{σ_0} l'applicazione lineare (5.14.9). Definiamo per ricorrenza

$$(5.14.17) \quad \begin{cases} \mathfrak{n}_0 = \langle \{[\Lambda_{\sigma_0}(X), \Lambda_{\sigma_0}(Y)] - \Lambda_{\sigma_0}([X, Y]) \mid X, Y \in \mathfrak{k}\} \rangle, \\ \mathfrak{n}_{p+1} = \mathfrak{n}_p + [\Lambda_{\sigma_0}(\mathfrak{k}), \mathfrak{n}_p], \quad \text{per } p \geq 0, \\ \mathfrak{n} = \bigcup_{p \geq 0} \mathfrak{n}_p. \end{cases}$$

TEOREMA V.14.18. Se l'azione di \mathbf{K} su M è transitiva, allora \mathfrak{n} è l'algebra di Lie dell'olonomia $\Phi(\sigma_0)$. \square

DIMOSTRAZIONE. Se $f \in \mathcal{G} = \mathcal{Q}_{\text{Ad},0}^0(P, \mathfrak{g})$ ed $X \in \mathfrak{k}$, abbiamo

$$(5.14.18) \quad X^P f = \tilde{X}^M f - [\omega(X^P), f].$$

Vale poi

$$(5.14.19) \quad [X^P, \tilde{Y}] = \tilde{Z}, \quad \text{con } Z = [X^M, Y], \quad \forall X \in \mathfrak{k}, \forall Y \in \mathfrak{k}(M).$$

Infatti $[X^P, \tilde{Y}]$ è un campo di vettori orizzontale, perché $\mathcal{H}(P)$ è \mathbf{K} -invariante, ed i campi X^P ed \tilde{Y} sono π -correlati ad X^M, Y , rispettivamente. Quindi $[X^P, \tilde{Y}]$ è il campo di vettori orizzontale π -correlato a $Z = [X^M, Y]$.

Consideriamo gli spazi \mathcal{K}_p definiti dalla (5.12.4). Dico che

$$(5.14.20) \quad X^P \mathcal{K}_p \subset \mathcal{K}_p, \quad \forall X \in \mathfrak{k}, \forall p \geq 0.$$

Ragioniamo per ricorrenza su p . Poiché Ω è \mathbf{K} -invariante, la sua derivata di Lie rispetto ad X^P , per $X \in \mathfrak{k}$, è nulla e quindi, se $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{k}(M)$, la (5.14.19) ci dà

$$X^P \Omega(\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2) = \Omega(\tilde{Z}_1, \tilde{Y}_2) + \Omega(\tilde{Y}_1, \tilde{Z}_2), \quad \text{con } Z_1 = [X^M, Y_1], Z_2 = [X^M, Y_2].$$

Quindi $X^P \mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}_0$. Supponiamo ora che, per un $p \geq 0$, sia $X^P \mathcal{K}_p \subset \mathcal{K}_p$. Allora, per ogni $f \in \mathcal{K}_p$ ed $Y \in \mathfrak{k}(M)$, posto $Z = [X^M, Y]$, abbiamo

$$X^P \tilde{Y} f = \tilde{Z} f + \tilde{Y} X^P f \in \mathcal{K}_{p+1}.$$

Ciò dimostra che $X^P \mathcal{K}_{p+1} \subset \mathcal{K}_{p+1}$ e perciò la (5.14.20) vale per ogni intero $p \geq 0$. Poiché per ipotesi \mathbf{K} opera transitivamente su M , i campi \tilde{X}^M , al variare di X in \mathfrak{k} , generano $\mathfrak{k}(M)$ come $\mathcal{C}^\infty(M)$ -modulo. Utilizzando la (5.14.18), otteniamo allora

$$(5.14.21) \quad \tilde{X}^M \mathcal{K}_p \subset \mathcal{K}_p + [\omega(X^P), \mathcal{K}_p], \quad \mathcal{K}_{p+1} \subset \mathcal{K}_p + \langle [\omega(X^P), \mathcal{K}_p] \mid X \in \mathfrak{k} \rangle.$$

Con le $\mathfrak{m}_p(\sigma_0)$ definite da (5.12.5), poiché $\mathfrak{n}_0 = \mathfrak{m}_0(\sigma_0)$, da queste inclusioni ricaviamo

$$(5.14.22) \quad \mathfrak{m}_p(\sigma_0) = \mathfrak{n}_p, \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

La tesi è allora conseguenza della Proposizione V.12.5. \square

CAPITOLO VI

Varietà differenziabili affini e Riemanniane

VI.1. Connessioni lineari

Sia M una varietà differenziabile di dimensione m .

DEFINIZIONE VI.1.1. Una *connessione lineare*¹ su M è una connessione $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$ -principale sul fibrato $\mathbb{L}(M) = (\mathbf{L}(M) \xrightarrow{\pi} M)$ dei suoi sistemi di riferimento.

Chiamiamo *varietà differenziabile affine* una varietà differenziabile M su cui sia fissata una connessione lineare.

Sia \mathbf{G} un sottogruppo chiuso del gruppo lineare $\mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$.

DEFINIZIONE VI.1.2. Una connessione \mathbf{G} -lineare su M è una \mathbf{G} -riduzione ad un sottofibrato ξ di $\mathbb{L}(M)$ di una connessione lineare su M .

Una *varietà differenziabile \mathbf{G} -affine* è una varietà differenziabile M su cui sia fissata una connessione \mathbf{G} -lineare.

Ad esempio, possiamo prendere come ξ il sottofibrato di olonomia determinato da un riferimento σ_0 in $\mathbf{L}(M)$ (vedi §IV.9). Viceversa, per la Proposizione IV.2.4, ogni connessione principale definita su un sottofibrato ξ di $\mathbb{L}(M)$, si estende a una connessione lineare su M .

Fissiamo un sottofibrato principale $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$ di $\mathbb{L}(M)$, il cui gruppo strutturale \mathbf{G} sia un sottogruppo chiuso di $\mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$, con algebra di Lie \mathfrak{g} .

Denotiamo con $\theta \in \Omega_{1,0}^1(P, \mathbb{R}^m)$ la *forma canonica*, definita da

$$(6.1.1) \quad \theta(X_\sigma) = \sigma^{-1}(d\pi(X_\sigma)), \quad \forall \sigma \in P, \quad \forall X_\sigma \in T_\sigma P.$$

Fissiamo su ξ connessione \mathbf{G} -principale Γ , con forma di Cartan ω .

PROPOSIZIONE VI.1.3. *Per ogni $v \in \mathbb{R}^m$ vi è un unico campo di vettori $v^* \in \mathfrak{X}(P)$ tale che*

$$(6.1.2) \quad \theta(v^*) \equiv v, \quad \omega(v^*) \equiv 0 \quad \text{su } P.$$

¹In letteratura le connessioni qui definite sono a volte chiamate *affini*. Seguendo qui S.Kobayashi, K.Nomizu, *Foundations of Differential Geometry, I*, John Wiley & Sons, New York, 1963, riserveremo il nome di *affini* alle connessioni principali rispetto a sottogruppi del gruppo delle affinità di TM .

Le connessioni lineari furono introdotte in T. Levi-Civita, *Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura Riemanniana*, Rend. Cir. Mat. Palermo, 42 (1917) pp. 173-205 nel contesto della geometria Riemanniana e generalizzate in H.Weyl, *Reine Infinitesimalgeometrie*, Math.Z. 2 (1918), pp.384-411.

DIMOSTRAZIONE. La proposizione segue dal fatto che la restrizione di θ ai vettori orizzontali definisce, per ogni $\sigma \in P$, un isomorfismo lineare $\bar{\theta}_\sigma : H_\sigma P \ni X_\sigma \rightarrow \theta(X_\sigma) \in \mathbb{R}^m$. Se $v \in \mathbb{R}^m$, porremo $v_\sigma^* = \bar{\theta}_\sigma^{-1}v$. \square

DEFINIZIONE VI.1.4. Il campo di vettori orizzontali v^* definito nella Proposizione VI.1.3 si dice il *campo orizzontale standard* associato a $v \in \mathbb{R}^m$.

OSSERVAZIONE VI.1.5. I campi orizzontali standard non sono, in generale, sollevamenti orizzontali di campi di vettori su M .

PROPOSIZIONE VI.1.6. *I campi orizzontali standard godono delle proprietà:*

- (a) $H_\sigma P = \{v_\sigma^* \mid v \in \mathbb{R}^m\}$,
- (b) $dR_a(v^*) = (a^{-1}v)^*$, $\forall v \in \mathbb{R}^m, \forall a \in \mathbf{G}$.
- (c) $v_\sigma^* \neq 0, \forall \sigma \in P$ se $v \neq 0$. \square

DIMOSTRAZIONE. Le (a) e (c) sono conseguenze immediate della definizione. Verifichiamo la (b). Se $a \in \mathbf{G}$, abbiamo

$$\theta(dR_a(v^*)) = (R_a^*\theta)(v^*) = a^{-1}\theta(v^*) = a^{-1}v, \quad \omega(dR_a(v^*)) = 0,$$

perché θ è una 1-forma tensoriale di tipo (t, \mathbb{R}^m) ed dR_a trasforma vettori orizzontali in vettori orizzontali. Questo dimostra la (b). \square

COROLLARIO VI.1.7. *Se $A \in \mathfrak{g}$ e $v \in \mathbb{R}^m$, allora*

$$(6.1.3) \quad [A^*, v^*] = (Av)^*.$$

DIMOSTRAZIONE. Poiché gli elementi di \mathbf{G} trasformano vettori orizzontali in vettori orizzontali, la derivata di Lie $L_{A^*}v^* = [A^*, v^*]$ di un campo orizzontale standard v^* rispetto ad un campo fondamentale A^* (con $v \in \mathbb{R}^m, A \in \mathfrak{g}$) è ancora un vettore orizzontale. Abbiamo poi

$$\theta([A^*, v^*]) = A^*\theta(v^*) - (L_{A^*}\theta)(v^*) = -(L_{A^*}\theta) = A\theta(v^*) = Av.$$

Infatti $L_{A^*}\theta$ è la derivata, per $t = 0$, di $R_{\exp(tA)}^*\theta = \exp(-tA) \circ \theta$. Quindi $[A^*, v^*]$ è il campo orizzontale standard corrispondente al vettore $Av \in \mathbb{R}^m$. \square

ESEMPIO VI.1.8. Il fibrato $\mathbf{L}(\mathbb{R})$ dei sistemi di riferimento su \mathbb{R} ha spazio totale $\mathbf{L}(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$. La forma di Cartan di una connessione lineare su \mathbb{R} ha la forma $\omega(t, s) = s^{-1}ds + \phi(t)dt$, con $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, e la distribuzione orizzontale è generata dal campo di vettori $X = \frac{\partial}{\partial t} - s\phi(t)\frac{\partial}{\partial s}$. Se $\Phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ è una primitiva di ϕ , allora l'applicazione $f : \mathbf{L}(\mathbb{R}) \ni (t, s) \rightarrow (t, s \exp(\Phi(t))) \in \mathbf{L}(\mathbb{R})$ è un'equivalenza di fibrati principali con $\omega = f^*(s^{-1}ds)$. Quindi, a meno di *equivalenza*, l'unica connessione lineare su \mathbb{R} è la connessione banale.

Un diffeomorfismo $\phi : M \rightarrow M$ definisce il diffeomorfismo $\hat{\phi} : \mathbf{L}(M) \rightarrow \mathbf{L}(M)$ che associa a $\sigma : \mathbb{R}^m \rightarrow TM$ il riferimento $\hat{\phi}(\sigma) = d\phi \circ \sigma$.

Sia M affine, con forma di Cartan $\omega \in \mathcal{Q}^1(\mathbf{L}(M), \mathfrak{gl}_m(\mathbb{R}))$.

DEFINIZIONE VI.1.9. Un diffeomorfismo $\phi : M \rightarrow M$ si dice un *automorfismo affine* se $\hat{\phi}^*\omega = \omega$.

ESEMPIO VI.1.10. Identifichiamo $T\mathbb{R}^m$ al prodotto cartesiano $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$. Allora $L(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^m \times \mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$, $TL(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^m \times \mathfrak{gl}_m(\mathbb{R})$ e la connessione lineare canonica su \mathbb{R}^m è la forma di Maurer-Cartan $\omega = a^{-1}da$ sul secondo fattore. Se ϕ è un diffeomorfismo di \mathbb{R}^m , allora $\hat{\phi}(x, a) = (\phi(x), d\phi \circ a)$. Scriviamo $a = (a_j^i)_{1 \leq i, j \leq m}$ e $\phi = (\phi^1, \dots, \phi^m)$. Allora $d\phi \circ a = (\frac{\partial \phi^i}{\partial x^k} a_j^h)$ (indici uguali in alto e in basso si intendono sommati). È quindi $d(\hat{\phi})(x, a) = (\frac{\partial^2 \phi^i}{\partial x^k \partial x^h} a_j^h dx^k + \frac{\partial \phi^i}{\partial x^h} da_j^h)$. Otteniamo perciò

$$\hat{\phi}^* \omega = (d\phi \circ a)^{-1} \left(\frac{\partial^2 \phi^i}{\partial x^k \partial x^h} a_j^h dx^k \right) + a^{-1} da$$

e quindi la condizione necessaria e sufficiente affinché ϕ sia una trasformazione affine è che $\frac{\partial^2 \phi^i}{\partial x^k \partial x^h} = 0$ per ogni $1 \leq i, j \leq m$, cioè che ϕ sia della forma $\phi(x) = ax + x_0$, con $a \in \mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$ ed $x_0 \in \mathbb{R}^m$. Nel caso dello spazio affine le trasformazioni affini nel senso della geometria differenziale e delle connessioni lineari coincidono con le trasformazioni affini della geometria elementare.

VI.2. Forme di torsione e di curvatura

Fissiamo su M una connessione \mathbf{G} -lineare Γ , con forma di Cartan ω , definita sullo spazio totale P di un sottofibrato \mathbf{G} -principale ξ di $\mathbb{L}(M)$.

DEFINIZIONE VI.2.1. La *forma di torsione* Θ di Γ è il differenziale esterno covariante² della forma canonica θ :

$$(6.2.1) \quad \Theta = D\theta = d\theta \circ \mathfrak{h} \in \Omega_{i,0}^2(P, \mathbb{R}^m).$$

La *forma di curvatura* Ω di Γ è il differenziale esterno covariante della sua forma di Cartan ω :

$$(6.2.2) \quad \Omega = D\omega = d\omega \circ \mathfrak{h} \in \Omega_{\text{Ad},0}^2(P, \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})).$$

TEOREMA VI.2.2 (equazioni di struttura). *Le forme di curvatura e di torsione di una connessione \mathbf{G} -lineare Γ su M soddisfano le EQUAZIONI DI STRUTTURA*

$$(6.2.3) \quad \Theta = D\theta = d\theta + \omega \wedge \theta,$$

$$(6.2.4) \quad \Omega = D\omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega \wedge \omega].$$

DIMOSTRAZIONE. La (6.2.3) è conseguenza del Lemma V.1.5, perché θ è una forma tensoriale di tipo (t, \mathbb{R}^m) . La (6.2.4) è un caso particolare dell'equazione di struttura del Teorema V.4.2. \square

Dal Lemma V.1.5, dal Teorema V.4.4 e dalle equazioni di struttura (6.2.3), (6.2.4), otteniamo:

TEOREMA VI.2.3 (Identità differenziali di Bianchi). *Le forme di torsione e di curvatura soddisfano le identità:*

$$(I) \quad D\Theta = \Omega \wedge \theta$$

$$(II) \quad D\Omega = 0$$

²Indichiamo con (t, \mathbb{R}^m) la rappresentazione canonica di $\mathbf{G} < \mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$ su \mathbb{R}^m .

DIMOSTRAZIONE. La (II) è un caso particolare della formula (5.4.4) del Teorema V.4.4. Dimostriamo la (I). Poiché Θ è tensoriale di tipo $(1, \mathbb{R}^m)$, otteniamo:

$$\begin{aligned} D\Theta &= d\Theta + \omega \wedge \Theta = d(d\theta + \omega \wedge \theta) + \omega \wedge (d\theta + \omega \wedge \theta) \\ &= d\omega \wedge \theta - \omega \wedge d\theta + \omega \wedge d\theta + \omega \wedge \omega \wedge \theta = (d\omega + \omega \wedge \omega) \wedge \theta \\ &= \left(d\omega + \frac{1}{2}[\omega \wedge \omega]\right) \wedge \theta = \Omega \wedge \theta. \end{aligned}$$

□

La prima identità differenziale di Bianchi è un caso particolare della

PROPOSIZIONE VI.2.4. *Se $\alpha \in \Omega_{1,0}^q(P, \mathbb{R}^m)$, allora*

$$(6.2.5) \quad D^2\alpha = \Omega \wedge \alpha.$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo infatti

$$\begin{aligned} D^2\alpha &= d^\nabla(d\alpha + \omega \wedge \alpha) = d(d\alpha + \omega \wedge \alpha) + \omega \wedge (d\alpha + \omega \wedge \alpha) \\ &= (d\omega) \wedge \alpha - \omega \wedge d\alpha + \omega \wedge d\alpha + \omega \wedge \omega \wedge \alpha = (d\omega + \omega \wedge \omega) \wedge \alpha = \Omega \wedge \alpha \end{aligned}$$

per le equazioni di struttura, in quanto $\omega \wedge \omega = \frac{1}{2}[\omega \wedge \omega]$. □

Questa relazione dà un'altra interpretazione della curvatura, come l'ostensione al fatto che il differenziale esterno covariante sulle forme tensoriali definisca un complesso.

VI.3. Derivazione covariante, torsione e curvatura

I campi tensoriali su M sono sezioni dei fibrati vettoriali associati al fibrato $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$ -principale $\mathbb{L}(M)$ mediante le rappresentazioni tensoriali di $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$. In particolare, una connessione lineare ci permette di calcolare le derivate covarianti dei campi tensoriali su M . Per le proprietà generali della differenziazione covariante ed il Teorema V.10.3 abbiamo:

TEOREMA VI.3.1. *Ad una connessione lineare su M è associata una derivazione covariante*

$$(6.3.1) \quad \nabla : \mathfrak{X}(M) \ni X \rightarrow \nabla_X \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{X}(M), \mathfrak{X}(M)).$$

La ∇ è un'applicazione \mathbb{R} -lineare che gode delle proprietà:

- (i) $\nabla_{fX+gY} = f\nabla_X + g\nabla_Y, \quad \forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(M), \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$
- (ii) $\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y, \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M), \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$

Viceversa, ogni applicazione (6.3.1) che goda delle proprietà (i), (ii) è la derivazione covariante associata ad una connessione lineare su M . □

Per la (5.2.2) possiamo calcolare la derivata covariante di un campo di vettori utilizzando i sollevamenti orizzontali. È infatti

$$(6.3.2) \quad \theta(\widetilde{\nabla_X Y}) = \tilde{X}\theta(\tilde{Y}), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M),$$

cioè $\nabla_{X_p} Y = \sigma(\tilde{X}_\sigma \theta(\tilde{Y}))$, se $\pi(\sigma) = p$.

Le $\Theta \in \mathcal{Q}_{i,0}^2(P, \mathbb{R}^m)$ ed $\Omega \in \mathcal{Q}_{\text{Ad},0}^2(P, \mathfrak{gl}_m(\mathbb{R}))$ sono forme tensoriali. Ad esse corrispondono i tensori $T \in \mathcal{Q}^2(M, TM)$ ed³ $R \in \mathcal{Q}^2(M, T^{1,1}M)$ su M , mediante gli isomorfismi $\Lambda_i : \mathcal{Q}^2(M, TM) \rightarrow \mathcal{Q}_{i,0}^2(P, \mathbb{R}^m)$ e $\Lambda_{\text{Ad}} : \mathcal{Q}^2(M, TM \otimes_M T^*M) \rightarrow \mathcal{Q}_{i,0}^2(P, \mathfrak{gl}_m(\mathbb{R}))$.

DEFINIZIONE VI.3.2. La *torsione* di Γ è la forma $T \in \mathcal{Q}^2(M, TM)$ per cui

$$(6.3.3) \quad \Lambda_i(T) = \Theta.$$

La *curvatura* di Γ è la forma $R \in \mathcal{Q}^2(M, TM \otimes_M T^*M)$ per cui

$$(6.3.4) \quad \Lambda_{\text{Ad}}(R) = \Omega.$$

Abbiamo cioè

$$T(X_{\pi(\sigma)}, Y_{\pi(\sigma)}) = \sigma \circ \Theta(\tilde{X}_\sigma, \tilde{Y}_\sigma), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}, \forall \sigma \in P,$$

$$R(X_{\pi(\sigma)}, Y_{\pi(\sigma)}) = \sigma \circ \Omega(\tilde{X}_\sigma, \tilde{Y}_\sigma) \circ \sigma^{-1}, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}, \forall \sigma \in P$$

TEOREMA VI.3.3. La *torsione e la curvatura di una connessione lineare* Γ su M si esprimono, per mezzo della derivazione covariante, nella forma:

$$(6.3.5) \quad T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M),$$

$$(6.3.6) \quad R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

DIMOSTRAZIONE. La (6.3.6) segue dal Corollario V.8.4.

Dimostriamo la (6.3.5). Se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, otteniamo, per le equazioni di struttura,

$$\Theta(\tilde{X}, \tilde{Y}) = (d\theta + \omega \wedge \theta)(\tilde{X}, \tilde{Y}) = d\theta(\tilde{X}, \tilde{Y}),$$

perché $\omega \wedge \theta$ si annulla su una coppia di campi di vettori orizzontali,

$$= \tilde{X}\theta(\tilde{Y}) - \tilde{Y}\theta(\tilde{X}) - \theta([\tilde{X}, \tilde{Y}])$$

$$= \tilde{X}\theta(\tilde{Y}) - \tilde{Y}\theta(\tilde{X}) - \theta([\tilde{X}, \tilde{Y}])$$

perché $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ ed $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ differiscono per un campo di vettori verticale,

$$= \theta(\widetilde{\nabla_X Y} - \widetilde{\nabla_Y X} - [\widetilde{X}, \widetilde{Y}]),$$

e la tesi segue dalla (6.3.2). \square

I fibrati tensoriali $T^{r,s}M$ dei tensori r -covarianti ed s -controvarianti su M sono associati alle rappresentazioni tensoriali di $\mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$. La derivazione covariante è quindi definita sull'algebra dei *campi tensoriali*

$$(6.3.7) \quad \mathfrak{T}^*(M) = \bigoplus_{r,s=0}^{\infty} \mathfrak{T}^{r,s}(M), \quad \text{ove} \quad \mathfrak{T}^{r,s}(M) = \Gamma(M, T^{r,s}M).$$

³Ricordiamo che $T^{1,1}M = TM \otimes_M T^*M$ è il fibrato degli endomorfismi lineari di TM .

DEFINIZIONE VI.3.4. Siano i, j due interi positivi. La *contrazione* C_i^j è l'applicazione $\mathcal{C}^\infty(M)$ -multilineare $C_i^j : \mathfrak{T}^{r,s} \rightarrow \mathfrak{T}^{r-1,s-1}$ che è nulla se $i > r$ oppure $j > s$, e, altrimenti, è data da

$$C_i^j(X_1 \otimes \cdots \otimes X_r \otimes \eta^1 \otimes \cdots \otimes \eta^s) = \eta^j(X_i) X_1 \otimes \cdots \otimes \widehat{X_i} \otimes \cdots \otimes X_r \otimes \eta^1 \otimes \cdots \otimes \widehat{\eta^j} \otimes \cdots \otimes \eta^s$$

sui tensori di rango 1.

TEOREMA VI.3.5. *La derivazione covariante è una derivazione dell'algebra dei campi tensoriali che preserva i gradi di covarianza e controvarianza e commuta con le contrazioni.* \square

Recapitoliamo le proprietà della derivazione covariante dei campi tensoriali. Se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $\tau \in \mathfrak{T}^*(M)$, $f \in \mathcal{C}^\infty(M) = \mathfrak{T}^{0,0}(M)$, $i, j, r, s \in \mathbb{N}$:

$$(6.3.8) \quad \nabla_X : \mathfrak{T}^{r,s}(M) \longrightarrow \mathfrak{T}^{r,s}(M) \text{ è } \mathbb{R}\text{-lineare,}$$

$$(6.3.9) \quad C_j^i(\nabla_X \tau) = \nabla_X C_j^i \tau,$$

$$(6.3.10) \quad \nabla_X f = Xf,$$

$$(6.3.11) \quad \nabla_{X+Y} \tau = \nabla_X \tau + \nabla_Y \tau,$$

$$(6.3.12) \quad \nabla_{fX} \tau = f \nabla_X \tau.$$

Ad esempio, se $\eta \in \mathfrak{X}^*(M) = \mathfrak{T}^{0,1}(M)$, la derivata covariante $\nabla_X \eta$ è caratterizzata da

$$(\nabla_X \eta)(Y) = X(\eta(Y)) - \eta(\nabla_X Y), \quad \forall Y \in \mathfrak{X}(M).$$

DEFINIZIONE VI.3.6. Definiremo *differenziale covariante* di un tensore $t \in \mathfrak{T}^{r,s}(M)$, ed indicheremo con ∇t , il tensore $\{X \rightarrow \nabla_X t\} \in \mathfrak{T}^{r,s+1}(M)$.

Un tensore $\tau \in \mathfrak{T}^{r,s}(M)$ si dice *parallelo* se $\nabla \tau = 0$ su M .

Possiamo applicare la derivazione covariante alle forme differenziali associate ad una rappresentazione tensoriale di $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$. Se $\alpha \in \mathcal{Q}^q(M, T^{r,s}M)$, indichiamo con $\tilde{\alpha}$ la corrispondente forma $\sigma^{-1} \pi^* \alpha \in \mathcal{Q}_{p,0}(P, T^{r,s}\mathbb{R}^m)$. Se $X, X_1, \dots, X_q \in \mathfrak{X}(M)$, $\sigma \in P$, allora

$$\begin{aligned} \sigma^{-1}(\nabla_X \alpha)(X_1, \dots, X_q) &= \sigma^{-1}(\nabla_X[\alpha(X_1, \dots, X_q)] - \sum \alpha(X_1, \dots, \nabla_X X_i, \dots, X_q)) \\ &= \tilde{X}[\tilde{\alpha}(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_q)] - \sum \tilde{\alpha}(\tilde{X}_1, \dots, \widetilde{\nabla_X X_i}, \dots, \tilde{X}_q) \\ &= \tilde{X}[\tilde{\alpha}(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_q)] - \sum \tilde{\alpha}(\tilde{X}_1, \dots, \bar{\theta}^{-1}(\tilde{X}\theta(\tilde{X}_i)), \dots, \tilde{X}_q), \end{aligned}$$

perché $\widetilde{\nabla_X X_i} = \bar{\theta}^{-1}(\tilde{X}\theta(\tilde{X}_i))$. L'ultima espressione è tensoriale rispetto ai campi di vettori orizzontali. Possiamo quindi calcolarla in ogni punto utilizzando, invece dei rialzamenti orizzontali dei campi di vettori su M , i campi orizzontali standard. Su di essi θ è costante, ed otteniamo quindi una formula più semplice per il calcolo della derivata covariante.

LEMMA VI.3.7. *Siano $\alpha \in \mathcal{Q}^q(M, T^{r,s}M)$, $v, v_1, \dots, v_s \in \mathbb{R}^m$, $\sigma \in L(M)$, $p = \pi(\sigma)$, ed $X_p = \sigma v$, $X_{1p} = \sigma v_1, \dots, X_{sp} = \sigma v_s$. Allora*

$$(6.3.13) \quad (\nabla_X \alpha)(X_1, \dots, X_s)(p) = \sigma(v_\sigma^* \tilde{\alpha}(v_1^*, \dots, v_s^*)). \quad \square$$

Ad un tensore s -covariante ed r -controvariante $\tau \in T^{r,s}(M, V)$, a valori in uno spazio vettoriale V , possiamo associare un tensore alternato $\mathfrak{S}(\tau) \in \mathcal{Q}^s(M, T^{r,0}(V))$, ponendo⁴

$$(6.3.14) \quad \mathfrak{S}(\tau)(X_1, \dots, X_s) = \frac{1}{s!} \sum_{a \in \mathfrak{S}_s} \varepsilon(a) \tau(X_{a_1}, \dots, X_{a_s}), \quad \forall X_1, \dots, X_s \in \mathfrak{X}(M).$$

Con questa notazione, possiamo enunciare il :

TEOREMA VI.3.8 (Identità algebriche di Bianchi). *Siano T ed R i tensori di torsione e di curvatura di una connessione lineare Γ su M . Valgono allora, per ogni $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, le:*

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(R(X, Y)Z) &= \mathfrak{S}[(T(T(X, Y), Z)) + (\nabla_X T)(Y, Z)] && \textbf{(I identità di Bianchi)}, \\ \mathfrak{S}[(\nabla_X R)(Y, Z) + R(T(X, Y), Z)] &= 0 && \textbf{(II identità di Bianchi)}. \end{aligned}$$

DEFINIZIONE VI.3.9. Una connessione lineare Γ si dice *simmetrica* se ha torsione nulla.

In particolare:

COROLLARIO VI.3.10. *Se Γ è simmetrica, il suo tensore di curvatura soddisfa, per ogni $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, le due identità :*

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(R(X, Y)Z) &= 0 && \textbf{(I identità di Bianchi con } T = 0) \\ \mathfrak{S}((\nabla_X R)(Y, Z)) &= 0 && \textbf{(II identità di Bianchi con } T = 0) \end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA VI.3.8. Utilizziamo il Teorema VI.2.3 e il Lemma VI.3.7. Se $p \in M$, $\sigma \in L(M)$ ed $X_p = \sigma v_1$, $Y_p = \sigma v_2$, $Z_p = \sigma v_3$, abbiamo

$$\nabla_X T(Y, Z)(p) = \sigma v_1^* \Theta(v_2^*, v_3^*).$$

La (I) del Teorema VI.2.3 ci dà

$$\begin{aligned} (\Omega \wedge \theta)(v_1^*, v_2^*, v_3^*) &= \mathfrak{S}(\Omega(v_1^*, v_2^*)v_3) = d\Theta(v_1^*, v_2^*, v_3^*) \\ &= \mathfrak{S}(v_1^* \Theta(v_2^*, v_3^*)) - \mathfrak{S}(\Theta([v_1^*, v_2^*], v_3^*)) \end{aligned}$$

Osserviamo che (vedi anche nel seguito il Lemma VI.4.1)

$$\Theta(v_1^*, v_2^*) = d\theta(v_1^*, v_2^*) = -\theta([v_1^*, v_2^*]).$$

Quindi $[v_1^*, v_2^*]_\sigma = -[\Theta(v_1^*, v_2^*)]_\sigma^*$, ed otteniamo perciò

$$\mathfrak{S}(\Omega(v_1^*, v_2^*)v_3) = \mathfrak{S}(v_1^* \Theta(v_2^*, v_3^*)) + \mathfrak{S}(\Theta([\Theta(v_1^*, v_2^*)]^*, v_3^*)).$$

Applicando σ ad ambo i membri otteniamo allora la prima identità tensoriale di Bianchi.

Per la (II) del Teorema VI.2.3, abbiamo

$$\begin{aligned} 0 = D\Omega(v_1^*, v_2^*, v_3^*) &= d\Omega(v_1^*, v_2^*, v_3^*) = \mathfrak{S}(v_1^* \Omega(v_2^*, v_3^*)) - \mathfrak{S}(\Omega([v_1^*, v_2^*], v_3^*)) \\ &= \mathfrak{S}(v_1^* \Omega(v_2^*, v_3^*)) + \mathfrak{S}(\Omega([\Theta(v_1^*, v_2^*)]^*, v_3^*)). \end{aligned}$$

⁴Lo spazio $\mathcal{Q}^s(M, T^{r,0}(V))$ dei tensori alternati è un sottospazio vettoriale di $\mathfrak{T}^{r,s}(M)$. La \mathfrak{S} è una proiezione di $\mathfrak{T}^{r,s}(M)$ su $\mathcal{Q}^s(M, T^{r,0}(V))$.

Poiché, per il Lemma VI.3.7,

$$(\nabla_X R)(Y, Z)(p) = \sigma(v_1^* \Omega(v_2^*, v_3^*)) \sigma^{-1},$$

otteniamo la seconda identità tensoriale di Bianchi applicando l'aggiunzione rispetto a σ all'ultima riga della formula ottenuta sopra. \square

VI.4. Interpretazione geometrica della torsione e della curvatura

Per dare un'interpretazione geometrica della torsione e della curvatura di una connessione lineare, utilizziamo i campi orizzontali standard e verticali fondamentali nel fibrato dei sistemi di riferimento $\mathbb{L}(M)$.

Le forme di torsione e di curvatura misurano infatti le componenti orizzontale e verticale del commutatore di due campi orizzontali standard.

LEMMA VI.4.1. *Per ogni $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m$ abbiamo*

$$(6.4.1) \quad \Theta(v_1^*, v_2^*) = -\theta([v_1^*, v_2^*]),$$

$$(6.4.2) \quad \Omega(v_1^*, v_2^*) = -\omega([v_1^*, v_2^*]).$$

DIMOSTRAZIONE. Se $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m$, otteniamo:

$$\Theta(v_1^*, v_2^*) = d\theta(v_1^*, v_2^*) = v_1^* v_2 - v_2^* v_1 - \theta([v_1^*, v_2^*]) = -\theta([v_1^*, v_2^*]),$$

$$\Omega(v_1^*, v_2^*) = d\omega(v_1^*, v_2^*) = v_1^* \omega(v_2^*) - v_2^* \omega(v_1^*) - \omega([v_1^*, v_2^*]) = -\omega([v_1^*, v_2^*]).$$

\square

PROPOSIZIONE VI.4.2. *Sia Γ una connessione lineare su M . Allora:*

$$T = 0 \iff [v_1^*, v_2^*] \text{ è verticale } \quad \forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m,$$

$$R = 0 \iff [v_1^*, v_2^*] \text{ è orizzontale } \quad \forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m.$$

DIMOSTRAZIONE. La tesi segue dal Lemma VI.4.1, perché $T = 0$ se e soltanto se $\Theta = 0$ ed, analogamente $R = 0$ se e soltanto se $\Omega = 0$. \square

Analogamente, il fatto che la torsione (risp. la curvatura) sia parallela equivale al fatto che la componente orizzontale (risp. verticale) del commutatore di due campi orizzontali standard sia ancora un campo orizzontale standard (risp. un campo verticale fondamentale) sui fibrati d'olonomia.

PROPOSIZIONE VI.4.3. *Sia Γ una connessione lineare su M . Fissiamo un riferimento $\sigma_0 \in P$ ed indichiamo con $P(\sigma_0) \subset P$ il fibrato d'olonomia per il punto σ_0 , con gruppo strutturale \mathbf{G} e sia \mathfrak{g} l'algebra di Lie di \mathbf{G} . Siano $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m$. Allora:*

(1) *Se $\nabla T = 0$, allora $\theta([v_1^*, v_2^*]) = v$ su $P(\sigma_0)$ per qualche $v \in \mathbb{R}^m$.*

(2) *Se $\nabla R = 0$, allora $\omega([v_1^*, v_2^*]) = A$ su $P(\sigma_0)$ per qualche $A \in \mathfrak{g}$.*

DIMOSTRAZIONE. Per il Lemma VI.3.7, la condizione $\nabla T = 0$ è equivalente ad avere $\tilde{X}[\Theta(v_1^*, v_2^*)] = 0$ per ogni $X \in \mathfrak{X}(M)$ ed ogni coppia di vettori $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m$. Ciò equivale al fatto che $\Theta(v_1^*, v_2^*) = -\theta([v_1^*, v_2^*])$ sia costante su ciascun fibrato d'olonomia $P(\sigma)$.

Analogamente, la condizione $\nabla R = 0$ è equivalente, per il Lemma VI.3.7, ad $\tilde{X}[\Omega(v_1^*, v_2^*)] = 0$ per ogni $X \in \mathfrak{X}(M)$ ed ogni coppia di vettori $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m$, e quindi

al fatto che $\Omega(v_1^*, v_2^*) = -\omega([v_1^*, v_2^*])$ sia costante su ciascun fibrato d'omotopia $P(\sigma)$. \square

COROLLARIO VI.4.4. *Supponiamo che su M sia definita una connessione lineare con torsione e curvatura parallele. Fissiamo $\sigma_0 \in P$ e sia $P(\sigma_0)$ il corrispondente spazio di ologonia. Allora lo spazio vettoriale reale \mathfrak{F} formato dai campi di vettori $X \in \mathfrak{X}(P(\sigma_0))$ per cui $\theta(X)$ e $\omega(X)$ siano costanti su $P(\sigma_0)$ è una sottoalgebra di Lie reale di dimensione finita di $\mathfrak{X}(P(\sigma_0))$. \square*

Questo corollario ci dice che una connessione lineare con torsione e curvatura parallele è localmente equivalente ad una connessione invariante su uno spazio omogeneo.

COROLLARIO VI.4.5. *Supponiamo che su M sia definita una connessione lineare Γ simmetrica con curvatura parallela. Siano $\sigma \in L(M)$, \mathbf{G} il gruppo di ologonia di Γ in σ e \mathfrak{g} la sua algebra di Lie. Allora $\mathfrak{F} = \mathfrak{g} \oplus \mathbb{R}^m$ è un'algebra di Lie con*

$$\begin{cases} [A_1, A_2] = B, & [A, v] = Av, & [v_1, v_2] = -C \\ \text{se } A_1, A_2, A, B, C \in \mathfrak{g}, v, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m \text{ ed} \\ [A_1^*, A_2^*] = B^*, & [A^*, v^*] = (Av)^*, & [v_1^*, v_2^*] = -C^*. \end{cases}$$

L'applicazione

$$\vartheta : \mathfrak{F} \ni (A, v) \longrightarrow (A, -v) \in \mathfrak{F}$$

è un'involuzione ed un automorfismo dell'algebra di Lie \mathfrak{F} .

DEFINIZIONE VI.4.6. La coppia $(\mathfrak{F}, \vartheta)$ formata da un'algebra di Lie reale \mathfrak{F} e da un automorfismo involutivo ϑ di \mathfrak{F} si dice un'algebra di Lie simmetrica.

DEFINIZIONE VI.4.7. Una varietà M su cui sia assegnata una connessione lineare simmetrica con curvatura parallela si dice uno spazio localmente simmetrico.

VI.5. Esistenza di connessioni simmetriche

Ricordiamo che una connessione lineare si dice *simmetrica* se ha torsione nulla.

VI.5.1. Preliminari algebrici. Richiamiamo in primo luogo alcune nozioni di algebra lineare. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita m . Un tensore τ di $V \otimes V^* \otimes V^*$ si può considerare sia come una forma bilineare a valori in V che come una forma lineare a valori nello spazio $V \otimes V^*$ degli endomorfismi di V . Sia $\Lambda^2(V, V)$ il sottospazio di $V \otimes V^* \otimes V^*$ delle forme bilineari alternate $\eta : V \times V \rightarrow V$. Ad una $\eta \in \Lambda^2(V, V)$ facciamo corrispondere l'elemento $\mu(\eta) \in \text{Hom}(V, \mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(V))$ definito da

$$\mu(\eta)(u)(v) = \eta(u, v), \quad \forall u, v \in V.$$

L'applicazione $\lambda : \text{Hom}(V, \mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(V)) \rightarrow \Lambda^2(V, V)$ definita da

$$\lambda(\alpha)(u, v) = \frac{1}{2}(\alpha(u)v - \alpha(v)u), \quad \forall u, v \in V$$

è un'inversa sinistra di μ . Infatti

$$\lambda(\mu(\eta))(u, v) = \lambda(\mu(\eta)(u)(v) - \mu(\eta)(v)(u)) = \frac{1}{2}(\eta(u, v) - \eta(v, u)) = \eta(u, v), \quad \forall u, v \in V.$$

In particolare λ è surgettiva. Il suo nucleo è costituito dalle $\alpha \in \text{Hom}(V, \mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(V))$ tali che $\alpha(u)(v) = \alpha(v)(u)$ per ogni $u, v \in V$, cioè dagli elementi di $V \otimes \mathcal{S}^2(V)$, dove abbiamo indicato con $\mathcal{S}^2(V)$ di il sottospazio di $V^* \otimes V^*$ formato dalle forme bilineari simmetriche su V .

Data una forma bilineare simmetrica b non degenera su V indichiamo con $\mathbf{O}_b(V)$ il gruppo di Lie degli automorfismi lineari di V che preservano la forma b e con $\mathfrak{o}_b(V)$ la sua algebra di Lie

$$\mathfrak{o}_b(V) = \{X \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(V) \mid b(Xu, v) + b(u, Xv) = 0, \forall u, v \in V\}.$$

LEMMA VI.5.1. *L'applicazione $\text{Hom}(V, \mathfrak{o}_b(V)) \ni \alpha \rightarrow \lambda(\alpha) \in \Lambda^2(V, V)$ è un isomorfismo lineare.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché i due spazi lineari $\text{Hom}(V, \mathfrak{o}_b(V))$ e $\Lambda^2(V, V)$ hanno entrambi dimensione $m^2(m-1)/2$, è sufficiente dimostrare che la restrizione di λ a $\text{Hom}(V, \mathfrak{o}_b(V))$ è iniettiva. Se $\alpha \in \text{Hom}(V, \mathfrak{o}_b(V))$, e $\lambda(\alpha) = 0$, abbiamo

$$\begin{aligned} 0 &= b(\alpha(u)v, w) + b(v, \alpha(u)w) = b(\alpha(v)u, w) + b(v, \alpha(w)u) \\ &= -b(\alpha(v)w + \alpha(w)v, u), \quad \forall u, v, w \in V. \end{aligned}$$

Quindi

$$\alpha(v)w \pm \alpha(v, w) = 0 \quad \forall v, w \in V$$

implica che $\alpha(v)w = 0$ per ogni $v, w \in V$ e quindi $\alpha = 0$. \square

VI.5.2. Connessioni lineari simmetriche. Le connessioni affini su M formano uno spazio affine $\Gamma(M)$, con spazio vettoriale associato $\Omega_{\text{Ad},0}(\mathbf{L}(M), \mathfrak{gl}_m(\mathbb{R}))$. Ciò significa che, fissata la forma di Cartan ω di una qualsiasi connessione lineare su M , è

$$\Gamma(M) \simeq \{\omega + \alpha \mid \alpha \in \Omega_{\text{Ad},0}^1(\mathbf{L}(M), \mathfrak{gl}_m(\mathbb{R}))\}.$$

Possiamo ripetere la costruzione algebrica fatta sopra per dimostrare l'esistenza di connessioni simmetriche.

Un elemento τ di $\Omega_{i,0}^2(\mathbf{L}(M), \mathbb{R}^m)$ definisce in modo naturale un elemento α_τ di $\Omega_{\text{Ad},0}^1(\mathbf{L}(M), \mathfrak{gl}_m(\mathbb{R}))$, con

$$\alpha_\tau(X_\sigma)\sigma^{-1}(\pi_*(Y_\sigma)) = \tau(X_\sigma, Y_\sigma), \quad \forall \sigma \in \mathbf{L}(M), \forall X_\sigma, Y_\sigma \in T_\sigma \mathbf{L}(M),$$

e viceversa dalla forma α_τ possiamo ricavare la τ mediante

$$\tau = \frac{1}{2}\alpha_\tau \wedge \theta, \quad \forall \tau \in \Omega_{i,0}^2(\mathbf{L}(M), \mathbb{R}^m).$$

È infatti

$$\begin{aligned} (\alpha_\tau \wedge \theta)(X_\sigma, Y_\sigma) &= \alpha_\tau(X_\sigma)(\sigma^{-1}Y_\sigma) - \alpha_\tau(Y_\sigma)(\sigma^{-1}X_\sigma) \\ &= \tau(X_\sigma, Y_\sigma) - \tau(Y_\sigma, X_\sigma) = 2\tau(X_\sigma, Y_\sigma). \end{aligned}$$

In particolare, se $\Theta = (d\theta + \omega \wedge \theta) \in \Omega_{i,0}^2(\mathbf{L}(M), \mathbb{R}^m)$ è la forma di torsione di Γ_ω , la

$$(6.5.1) \quad \omega' = \omega - \frac{1}{2}\alpha_\Theta$$

è la forma di Cartan di una connessione $\Gamma_{\omega'}$ con torsione nulla. Infatti

$$\Theta' = D'\theta = d\theta + (\omega - \frac{1}{2}\alpha_\tau) \wedge \theta = \Theta - \frac{1}{2}\alpha_\Theta \wedge \theta = 0.$$

OSSERVAZIONE VI.5.2. Non c'è una relazione semplice tra la forma di curvatura di Γ_ω e di quella della $\Gamma_{\omega'}$ ad essa associata dalla (6.5.1). Quindi, il gruppo di ologonomia della nuova connessione potrebbe essere diverso da quello della connessione assegnata. In particolare, la costruzione descritta sopra può associare ad una connessione \mathbf{G} -lineare, per un sottogruppo \mathbf{G} di $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$, una connessione $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$ -lineare che potrebbe non essere più \mathbf{G} -lineare. Osserviamo che, comunque, le due connessioni Γ_ω e $\Gamma_{\omega'}$ hanno le stesse linee geodetiche (vedi §VI.7).

Abbiamo quindi, per la discussione appena svolta ed il Lemma VI.5.1,

TEOREMA VI.5.3. *Ogni varietà differenziabile M ammette una connessione simmetrica. Se $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$ è una $\mathbf{O}(p, q)$ -riduzione del fibrato $\mathbb{L}(M)$ dei sistemi di riferimento ed esiste una connessione $\mathbf{O}(p, q)$ -principale su ξ , allora esiste un'unica connessione $\mathbf{O}(p, q)$ -principale su ξ che sia priva di torsione. \square*

VI.6. Derivata covariante lungo una curva e parallelismo

Il dato di una connessione lineare sulla varietà differenziabile M ci permette di definire il trasporto parallelo di vettori tangenti (vedi il §IV.8 e il §V.9) e interpretare quindi la derivazione covariante come derivazione lungo una curva.

TEOREMA VI.6.1. *Sia $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\gamma \in \mathcal{C}^1((-\epsilon, \epsilon), M)$ una sua curva integrale con $\gamma(0) = p$. Se $\tau_\gamma : T_p M \rightarrow T_{\gamma(t)} M$ è il trasporto parallelo lungo la curva γ , allora*

$$(6.6.1) \quad \nabla_{X_p} Y = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{[\tau_\gamma(t)]^{-1} Y_{\gamma(t)} - Y_p}{t}, \quad \forall Y \in \mathfrak{X}(M).$$

DIMOSTRAZIONE. Siano $\sigma \in \mathbb{L}(M)$ con $\pi(\sigma) = p$ e $\tilde{\gamma}_\sigma$ il rialzamento orizzontale di punto iniziale σ . Allora il trasporto parallelo è definito da $\tau_\gamma(t)\sigma v = \tilde{\gamma}_\sigma(t)v$, per ogni $v \in \mathbb{R}^m$. Abbiamo allora $f(t) = [\tau_\gamma(t)]^{-1} Y_{\gamma(t)} = \sigma\theta(\tilde{Y}_{\tilde{\gamma}_\sigma(t)}) \in \mathcal{C}^\infty((-\epsilon, \epsilon), T_p M)$ ed il secondo membro di (6.6.1) è la derivata di f in 0. Da $\dot{f}(0) = \sigma(\tilde{X}_\sigma\theta(\tilde{Y})) = \nabla_{X_p} Y$ otteniamo la tesi. \square

Nella (6.6.1) intervengono soltanto i valori che il campo Y assume sul supporto della curva integrale di X . Questa osservazione ci suggerisce la seguente definizione. Indichiamo con I un intervallo di \mathbb{R} .

DEFINIZIONE VI.6.2. Un campo di vettori di classe \mathcal{C}^k lungo una curva $\gamma \in \mathcal{C}^k(I, M)$ è un'applicazione $Y \in \mathcal{C}^k(I, TM)$ tale che $Y(t) \in T_{\gamma(t)}$ per ogni $t \in I$.

Se $k \geq 1$, chiamiamo *derivata covariante* del campo Y lungo γ il campo di vettori

$$(6.6.2) \quad \frac{DY}{dt} = \frac{d}{dt} [\tau_\gamma(t)^{-1} Y(t)] \in \mathcal{C}^{k-1}(I, TM).$$

Sia $Y \in \mathcal{C}^1(I, TM)$ un campo di vettori lungo una curva $\gamma \in \mathcal{C}^1(I, M)$. Fissiamo un riferimento $\sigma \in L(M)$ con $\pi(\sigma) = \gamma(t_0)$ per un $t_0 \in I$, e sia $\tilde{\gamma}_\sigma \in \mathcal{C}^1(I, L(M))$ il rialzamento orizzontale di γ con $\tilde{\gamma}_\sigma(t_0) = \sigma$. Allora $\nu(t) = [\tilde{\gamma}_\sigma(t)]^{-1}Y(t)$ è una curva in $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^m)$ e la derivata covariante di Y lungo γ è

$$\frac{DY}{dt} = \tilde{\gamma}_\sigma \dot{\nu}.$$

Ricordiamo la

DEFINIZIONE VI.6.3. Il campo di vettori $Y(t)$ è *parallelo lungo la curva* γ se e soltanto se $\frac{DY}{dt} = 0$ lungo γ .

I campi paralleli lungo la curva γ sono quelli della forma $\tilde{\gamma}_\sigma \nu_0$ per un vettore costante $\nu_0 \in \mathbb{R}^m$.

Possiamo estendere la definizione di derivazione covariante e di parallelismo a campi tensoriali lungo una curva. Sia $0 \in I$, $\gamma \in \mathcal{C}^1(I, M)$ una curva di classe \mathcal{C}^1 in M , $p = \gamma(0)$ e $\tau_\gamma(t) : T_p(M) \rightarrow T_{\gamma(t)}M$ il trasporto parallelo lungo la curva γ . Poiché $\tau_\gamma(t)$ è un isomorfismo lineare, la sua aggiunta $\tau_\gamma(t)^*$ ci permette di definire un isomorfismo lineare $(\tau_\gamma(t)^*)^{-1} : T_{\gamma(t)}^*M \rightarrow T_p^*M$.

Per ogni p, q interi non negativi risulta allora definita un unico isomorfismo lineare:

$$\begin{aligned} \tau_\gamma^{(r,s)}(t) : T_p^{p,q}M &\rightarrow T_{\gamma(t)}^{r,s}M \quad \text{tale che} \\ \tau_\gamma^{(r,s)}(t)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes v^1 \otimes \cdots \otimes v^q) \\ &= \tau_\gamma(t)(v_1) \otimes \cdots \otimes \tau_\gamma(t)(v_p) \otimes (\tau_\gamma(t)^*)^{-1}(v^1) \otimes \cdots \otimes (\tau_\gamma(t)^*)^{-1}(v^q) \\ &\quad \forall v_1, \dots, v_p \in T_pM, \quad \forall v^1, \dots, v^q \in T_p^*M. \end{aligned}$$

Un *campo tensoriale* di classe \mathcal{C}^k lungo una curva $\gamma \in \mathcal{C}^k(I, M)$ è un'applicazione $t \in \mathcal{C}^k(I, T^{r,s}M)$ tale che $t(t) \in T_{\gamma(t)}^{r,s}M$ per ogni $t \in I$. Se $k \geq 1$ la *derivata covariante* di t lungo γ è il campo tensoriale di classe \mathcal{C}^{k-1} lungo γ definito da

$$\frac{Dt}{dt} = \frac{d}{dt}[\tau_\gamma(t)^{-1}t(t)].$$

Se $\sigma \in L(M)$ e $\pi(\sigma) = \gamma(t_0)$ per un $t_0 \in I$, sia $\tilde{\gamma}_\sigma$ il rialzamento orizzontale di γ con $\tilde{\gamma}_\sigma(t_0) = \sigma$. Allora $t(t) = \tilde{\gamma}_\sigma(t)\phi(t)$ per una $\phi \in \mathcal{C}^k(I, T^{r,s}\mathbb{R}^m)$ e

$$\frac{Dt}{dt} = \tilde{\gamma}_\sigma(t)\dot{\phi}.$$

DEFINIZIONE VI.6.4. Il campo tensoriale t è *parallelo lungo* γ se $\frac{Dt}{dt} = 0$ lungo γ .

I campi tensoriali paralleli lungo γ sono tutti e soli quelli della forma $\tilde{\gamma}_\sigma \phi_0$, con $\phi_0 \in T^{r,s}\mathbb{R}^m$ costante.

VI.7. Geodetiche

Sia I un intervallo in \mathbb{R} e $\gamma \in \mathcal{C}^2(I, M)$ una curva di classe \mathcal{C}^2 . La sua velocità $\dot{\gamma}$ è un campo di vettori di classe \mathcal{C}^1 lungo γ , di cui possiamo calcolare la derivata covariante $(D\dot{\gamma}/dt)$ lungo s .

DEFINIZIONE VI.7.1. Una curva $\gamma \in \mathcal{C}^2(I, M)$ si dice *una geodetica* se la sua velocità $\dot{\gamma}$ è parallela lungo γ , se cioè

$$(6.7.1) \quad \frac{D\dot{\gamma}}{dt} = 0, \quad \text{su } I.$$

Scriveremo a volte $\frac{D^2\gamma}{dt^2}$ per $\frac{D\dot{\gamma}}{dt}$.

Siano $\sigma \in L(M)$ con $\pi(\sigma) = \gamma(t_0)$ per un $t_0 \in I$ e $\tilde{\gamma}_\sigma \in \mathcal{C}^2(I, L(M))$ il sollevamento orizzontale di γ con $\tilde{\gamma}_\sigma(t_0) = \sigma$. Allora $\dot{\gamma}(t) = \tilde{\gamma}_\sigma v(t)$ per una $v \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R}^m)$ e

$$(6.7.2) \quad \frac{D^2\gamma}{dt^2} = \tilde{\gamma}_\sigma \dot{v} = \tilde{\gamma}_\sigma \frac{d}{dt}([\tilde{\gamma}_\sigma]^{-1}\dot{\gamma}).$$

OSSERVAZIONE VI.7.2. In particolare, la velocità $\dot{\gamma}$ su una geodetica γ è o identicamente nulla, o diversa da zero per ogni $t \in I$.

OSSERVAZIONE VI.7.3. Supponiamo che $\gamma \in \mathcal{C}^2(I, M)$ sia una geodetica, con $\dot{\gamma} \neq 0$. Una sua riparametrizzazione $\gamma \circ \tau$, con $\tau \in \mathcal{C}^2(I', I)$ è ancora una geodetica se, e soltanto se, la τ è affine, cioè della forma $\tau(t) = at + b$. Abbiamo infatti

$$\frac{d}{dt}\gamma \circ \tau = \dot{\tau} \cdot \dot{\gamma} \circ \tau \implies \frac{D}{dt} \frac{d}{dt}(\gamma \circ \tau) = \ddot{\tau} \dot{\gamma} + \dot{\tau}^2 \frac{D\dot{\gamma}}{dt}.$$

Quindi, se γ è una geodetica, $\frac{D^2(\gamma \circ \tau)}{dt^2} = \ddot{\tau} \cdot \dot{\gamma}$. Se $\dot{\gamma} \neq 0$, questa ci dà $\ddot{\tau} = 0$, e perciò τ è affine.

PROPOSIZIONE VI.7.4. *La proiezione su M di una curva integrale di un campo di vettori orizzontale standard è una geodetica e viceversa ogni rialzamento orizzontale di una geodetica in M è la curva integrale di un campo di vettori standard.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché $[\tilde{\gamma}_\sigma]^{-1}\dot{\gamma} = \theta(\tilde{\gamma})$, l'affermazione della proposizione è conseguenza della (6.7.2). \square

Come conseguenza otteniamo:

TEOREMA VI.7.5. *Assegnati $p_0 \in M$ e $v_0 \in T_{p_0}M$ esiste un'unica geodetica γ , definita su un intervallo I contenente 0 come punto interno, tale che*

$$(6.7.3) \quad \begin{cases} \gamma(0) = p_0, \\ \dot{\gamma}(0) = v_0. \end{cases}$$

Abbiamo inoltre $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, M)$.

L'unicità va intesa nel modo seguente: se I, I' sono due intervalli di \mathbb{R} che contengono 0 e $\gamma \in \mathcal{C}^2(I, M)$, $\gamma' \in \mathcal{C}^2(I', M)$ sono due geodetiche con $\gamma(0) =$

$p_0 = \gamma'(0)$, $\dot{\gamma}(0) = v_0 = \dot{\gamma}'(0)$, allora $\gamma(t) = \gamma'(t)$ per ogni $t \in I \cap I'$. In particolare, esiste una geodetica massimale che soddisfi le condizioni iniziali (6.7.3).

Se $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, M)$ è una geodetica non costante, allora $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ per ogni $t \in I$. \square

DEFINIZIONE VI.7.6. Una connessione lineare Γ su M si dice *completa* se ogni geodetica $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, M)$ in M può essere estesa ad una geodetica definita su \mathbb{R} .

Per il Teorema VI.7.5, abbiamo

PROPOSIZIONE VI.7.7. *Condizione necessaria e sufficiente affinché la connessione Γ su M sia completa è che tutti i campi orizzontali standard siano completi su $L(M)$.* \square

DEFINIZIONE VI.7.8. Se $v \in T_pM$, $p \in M$, indicheremo con γ_v la geodetica massimale tale che $\gamma(0) = p$ e $\dot{\gamma}(0) = v$ e con $I_v \subset \mathbb{R}$ il suo massimo dominio di definizione.

Osserviamo che, se $v \in T_pM$ e $t, s \in \mathbb{R}$ sono tali che $st \in I_v$, $t \in I_{sv}$, allora $\gamma_{sv}(t) = \gamma_v(st)$.

ESEMPIO VI.7.9. La connessione lineare simmetrica piatta canonica su \mathbb{R}^m è completa. Le geodetiche sono le rette affini $t \rightarrow x_0 + tv$ di \mathbb{R}^m .

Dalla Proposizione VI.7.7 ricaviamo

PROPOSIZIONE VI.7.10. *Sia M una varietà differenziabile, su cui è assegnata una connessione \mathbf{G} -lineare con forma di Cartan ω . Sono equivalenti*

- (1) *La connessione è completa.*
- (2) *Per ogni $\alpha \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbb{R}^m)$ e $\sigma \in P$ esiste un cammino orizzontale $s \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], P)$ tale che $\theta(\dot{s}) = \alpha$.*
- (3) *Per ogni $\alpha \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbb{R}^m)$, $\beta \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathfrak{g})$ e $\sigma \in P$ esiste un cammino $s \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], P)$ tale che $\theta(\dot{s}) = \alpha$, $\omega(\dot{s}) = \beta$.*

DIMOSTRAZIONE. Per la Proposizione VI.7.7, è (2) \Rightarrow (1). Banalmente vale (3) \Rightarrow (2).

Dimostriamo che (2) \Rightarrow (3). Siano date $\alpha \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbb{R}^m)$, $\beta \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathfrak{g})$. Sappiamo che vi è una ed una sola soluzione $\gamma \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbf{G})$ di $\omega_{\mathbf{G}}(\dot{\gamma}) = \beta \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathfrak{g})$ con $\gamma(0) = e_{\mathbf{G}}$. Sia $(\gamma\alpha)(t) = \gamma(t)\alpha(t)$. Allora $\gamma\alpha \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbb{R}^m)$ e, se vale la (2), vi è un unico cammino orizzontale $s_h \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], P)$ con $s_h(0) = \sigma_0$ e $\theta(\dot{s}_h) = \gamma\alpha$. Il cammino $s = s_h \cdot \gamma \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], P)$ verifica $s(0) = \sigma_0$, $\theta(\dot{s}_h) = \gamma^{-1}\theta(\dot{s}_h) = \alpha$, $\omega(\dot{s}) = \beta$.

Concludiamo la dimostrazione verificando che (1) \Rightarrow (2). Data una curva $\alpha \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbb{R}^m)$, per (1) possiamo, per ogni partizione $T = \{t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = 1\}$ dell'intervallo $[0, 1]$ costruire un'unica curva orizzontale s_T , di classe \mathcal{C}^∞ a tratti con $s_T(0) = \sigma_0$ e $\theta(\dot{s}_T) = \beta(t_i)$ sull'intervallo $t_i < t < t_{i+1}$ per $0 \leq i < n$. Facendo tendere $\sup |t_i - t_{i-1}|$ a zero, le s_T convergono alla curva s cercata. \square

DEFINIZIONE VI.7.11. Uno *spazio simmetrico* è uno spazio localmente simmetrico⁵ la cui connessione sia completa.

VI.8. Metriche (pseudo-)Riemanniane e connessione di Levi-Civita

Sia M una varietà differenziabile di dimensione m .

DEFINIZIONE VI.8.1. Una *metrica Riemanniana* su M è un tensore simmetrico $g \in \mathfrak{T}^{0,2}(M)$ definito positivo. Richiediamo cioè che sia

$$\text{(SIMMETRIA)} \quad g(X, Y) = g(Y, X), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M),$$

$$\text{(POSITIVITÀ)} \quad g(v, v) > 0, \quad \text{se } v \in TM \text{ e } v \neq 0.$$

Una *metrica pseudo-Riemanniana* di segnatura (ν_+, ν_-) su M , con $\nu_+ + \nu_- = m$, è un tensore simmetrico $g \in \mathfrak{T}^{0,2}(M)$ che definisce, in ogni punto p di M , una forma simmetrica g_p non degenera di segnatura (ν_+, ν_-) . Richiediamo cioè che sia

$$\text{(NON DEGENERE)} \quad p \in M, v \in T_p M, g(v, w) = 0, \quad \forall w \in T_p M \implies v = 0,$$

$$\text{(SEGNATURA)} \quad T_p M \times T_p M \ni (v, w) \rightarrow g(v, w) \in \mathbb{R} \text{ ha segnatura } (\nu_+, \nu_-).$$

DEFINIZIONE VI.8.2. Una *varietà Riemanniana* (rispettivamente *pseudo-Riemanniana*) è una varietà differenziabile su cui sia stata fissata una metrica Riemanniana (rispettivamente pseudo-Riemanniana). Indicheremo a volte una varietà Riemanniana, o pseudo-Riemanniana, come una coppia (M, g) .

DEFINIZIONE VI.8.3. Siano (M, g) ed (N, h) due varietà pseudo-Riemanniane. Un'applicazione differenziabile $f : N \rightarrow M$ si dice un'*immersione isometrica* se

$$(6.8.1) \quad g_{f(q)}(f_*X_q, f_*Y_q) = h_q(X, Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(N), \quad \forall q \in N.$$

Se f è anche un diffeomorfismo locale, diciamo che è un'*isometria locale*. Se f è anche un diffeomorfismo, diciamo che è un'*isometria*.

Sia (M, g) una varietà pseudo-Riemanniana, b una forma bilineare simmetrica su \mathbb{R}^m , e supponiamo che, per ogni $p \in M$, g_p abbia la stessa segnatura di b . Indichiamo con \mathbf{O}_b il gruppo degli automorfismi lineari di \mathbb{R}^m che preservano la forma b e con \mathfrak{o}_b la sua algebra di Lie:

$$\mathbf{O}_b = \{a \in \mathbf{GL}_m(\mathbb{R}) \mid b(av, aw) = b(v, w), \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^m\},$$

$$\mathfrak{o}_b = \{X \in \mathfrak{gl}_m(\mathbb{R}) \mid b(Xv, w) + b(v, Xw) = 0, \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^m\}.$$

I gruppi \mathbf{O}_b corrispondenti a forme bilineari simmetriche con la stessa segnatura sono coniugati in $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$, e si possono identificare quindi ai gruppi $\mathbf{O}_{\nu_+, \nu_-}$ definiti in precedenza.

Otteniamo una riduzione $\mathfrak{O}_b(M) = (\mathbf{O}_b(M) \xrightarrow{\pi} M)$ ad \mathbf{O}_b di $\mathbb{L}(M)$ ponendo

$$(6.8.2) \quad \mathfrak{O}_b(M, p) = \{\sigma \in \mathbb{L}(M) \mid g_p(\sigma(v), \sigma(w)) = b(v, w), \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^m\}.$$

PROPOSIZIONE VI.8.4. *Per una connessione lineare Γ su una varietà pseudo-Riemanniana (M, g) sono equivalenti:*

⁵Cioè una varietà differenziabile su cui è fissata una connessione simmetrica con curvatura parallela.

- (1) g è parallela, cioè $\nabla g = 0$.
 (2) Γ ammette una \mathbf{O}_b -riduzione ad $\mathfrak{O}_b(M)$.

DIMOSTRAZIONE. La g si rialza ad un'applicazione $\tilde{g} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{L}(M), \text{Simm}^2(\mathbb{R}^m))$, ove abbiamo indicato con $\text{Simm}^2(\mathbb{R}^m)$ lo spazio vettoriale delle forme bilineari simmetriche su \mathbb{R}^m , con

$$\tilde{g}(\sigma)(v_1, v_2) = g(\sigma(v_1), \sigma(v_2)), \quad \forall \sigma \in \mathbf{L}(M), \quad \forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m.$$

La restrizione di \tilde{g} ad $\mathbf{O}_b(M)$ è costante ed uguale a b . Quindi $X\tilde{g} = 0$ per ogni $X \in \mathfrak{X}(\mathbf{O}_b(M))$. Questo significa che, se Γ ammette una riduzione ad $\mathfrak{O}_b(M)$, allora $\nabla g = 0$ e dimostra quindi l'implicazione (2) \Rightarrow (1).

Viceversa, se vale (1), allora \tilde{g} è costante sui fibrati di ologonia $\mathbf{L}(M)(\sigma)$ per ogni $\sigma \in \mathbf{L}(M)$. In particolare $\mathbf{L}(M)(\sigma) \subset \mathbf{O}_b(M)$ se $\sigma \in \mathbf{O}_b(M)$ e quindi Γ ammette una riduzione ad $\mathfrak{O}_b(M)$. \square

DEFINIZIONE VI.8.5. Diciamo che una connessione lineare Γ ed una metrica pseudo-Riemanniana g su M sono *compatibili* se sono soddisfatte le condizioni equivalenti della Proposizione VI.8.4. Diremo anche che la Γ è una *connessione metrica*.

TEOREMA VI.8.6 (Levi-Civita). *Sia (M, g) una varietà pseudo-Riemanniana. Vi è allora un'unica connessione lineare Γ su M simmetrica e compatibile con g .*

DIMOSTRAZIONE. Per il Teorema IV.2.7 esiste una connessione \mathbf{O}_b -principale su $\mathfrak{O}_b(M)$. Per il Teorema VI.5.3 essa può essere modificata in un unico modo ad una connessione priva di torsione. \square

DEFINIZIONE VI.8.7. L'unica connessione metrica priva di torsione su (M, g) si dice la *connessione di Levi-Civita*⁶.

Derivazione covariante associata alla connessione di Levi-Civita. Ricaviamo qui l'espressione esplicita della differenziazione covariante associata alla connessione di Levi-Civita.

La sua derivazione covariante ∇ deve soddisfare le due condizioni

$$(6.8.3) \quad \begin{cases} T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}, \\ \nabla g = 0. \end{cases}$$

Per la seconda delle (6.8.3) abbiamo per ogni $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$:

$$(6.8.4) \quad Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z).$$

Se supponiamo inoltre che valga la prima delle (6.8.3) abbiamo

$$\begin{aligned} Yg(Z, X) &= g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X) \\ &= g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_X Y) - g(Z, [X, Y]) \end{aligned}$$

⁶ Tullio Levi-Civita (Padova, 29 Marzo 1873 - Roma, 29 Dicembre 1941) matematico italiano, allievo di Gregorio Ricci-Curbastro, è l'inventore del *calcolo differenziale assoluto* (calcolo tensoriale). Ha dato notevoli contributi alla geometria differenziale, alla teoria della relatività, alla meccanica celeste, all'idrodinamica. Nel 1938 fu cacciato dall'Università in seguito alle leggi razziali.

$$\begin{aligned} Zg(X, Y) &= g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y) \\ &= g(\nabla_X Z, Y) + g(X, \nabla_Y Z) + g(Y, [Z, X]) - g(X, [Y, Z]) \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) \\ &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) + g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_X Y) - g(Z, [X, Y]) \\ &\quad - g(\nabla_X Z, Y) - g(X, \nabla_Z Y) - g(Y, [Z, X]) + g(X, [Y, Z]). \end{aligned}$$

Da questa ricaviamo la formula della derivazione covariante :

$$(6.8.5) \quad \begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) \\ &\quad - g(X, [Y, Z]) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y]). \end{aligned}$$

VI.9. Esempi

ESEMPIO VI.9.1. La metrica Euclidea di \mathbb{R}^m è definita, nelle coordinate canoniche x^1, \dots, x^m , da

$$(6.9.1) \quad g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \delta_{i,j}, \quad \text{per } 1 \leq i, j \leq m.$$

ESEMPIO VI.9.2. Siano (M, g) una varietà Riemanniana, N una varietà differenziabile ed $f : N \rightarrow M$ un'immersione differenziabile. Allora

$$(6.9.2) \quad h(X_q, Y_q) = g(f_*(X_q), f_*(Y_q)), \quad \forall q \in N, \forall X_q, Y_q \in T_q N$$

definisce una metrica Riemanniana su N .

Più in generale, se (M, g) è pseudo-Riemanniana, la (6.9.2) definisce una metrica pseudo-Riemanniana su N se, per ogni $q \in N$, il sottospazio $f_*(T_q N)$ è anisotropo in $(T_{f(q)} M, g_{f(q)})$.

ESEMPIO VI.9.3. Consideriamo su S^m la metrica Riemanniana g indotta dall'immersione canonica $S^m \hookrightarrow \mathbb{R}^{m+1}$. Sia $U = \{x \in S^m \mid x^0 + 1 > 0\}$ e consideriamo su U le coordinate locali y^1, \dots, y^m definite da

$$x^0 = \frac{1 - |y|^2}{1 + |y|^2}, \quad x^i = \frac{2y^i}{1 + |y|^2}, \quad y^i = \frac{x^i}{1 + x^0}, \quad \text{per } i = 1, \dots, m.$$

Abbiamo

$$dx^0 = -4 \frac{\sum_j y^j dy^j}{(1 + |y|^2)^2}, \quad dx^i = 2 \frac{dy^i}{(1 + |y|^2)} - 4y^i \frac{\sum_j y^j dy^j}{(1 + |y|^2)^2} \quad \text{su } S^m.$$

Quindi⁷

$$g = \sum_i dx^i \otimes dx^i|_{S^m} = 4 \frac{\sum_{i=1}^m dy^i \otimes dy^i}{(1 + |y|^2)^2}.$$

⁷La forma della metrica è particolarmente semplice perché le coordinate y^i sono conformi.

Calcoliamo ora il tensore della metrica in coordinate sferiche. Per semplicità ci limitiamo a trattare il caso della sfera di dimensione due dello spazio ordinario. Abbiamo allora su S^2

$$\begin{cases} x^0 = \cos \theta, \\ x^1 = \sin \theta \cos \phi, \\ x^2 = \sin \theta \sin \phi, \end{cases} \quad \begin{cases} dx^0 = -\sin \theta d\theta, \\ dx^1 = \cos \theta \cos \phi d\theta - \sin \theta \sin \phi d\phi, \\ dx^2 = \cos \theta \sin \phi d\theta + \sin \theta \cos \phi d\phi \end{cases}$$

e quindi, ponendo $d\theta^2 = d\theta \otimes d\theta$ e $d\phi^2 = d\phi \otimes d\phi$,

$$g = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2.$$

ESEMPIO VI.9.4. Poiché la mappa antipodale $a_0 : S^m \ni x \rightarrow -x \in S^m$ è un'isometria, la metrica g definisce, per passaggio al quoziente, una metrica \bar{g} sullo spazio proiettivo, che rende la proiezione $\pi : S^m \rightarrow \mathbb{R}P^m$ un'isometria locale.

ESEMPIO VI.9.5. La metrica dell'esempio VI.9.3 coincide su $S^2 \simeq \mathbb{C}P^1$ con la *metrica di Fubini-Study* degli spazi proiettivi complessi. È, a meno di un fattore moltiplicativo, la parte reale della *metrica di Fubini-Study* di $\mathbb{C}P^m$. Questa è una metrica Hermitiana invariante per l'azione di $\mathbf{SU}(n+1)$, che si esprime, nelle coordinate locali $w^j = z^j/z^0$ di $U_0 = \{z^0 \neq 0\}$, mediante

$$(6.9.3) \quad h = \frac{(1 + |w|^2) \sum_{j=1}^m dw^j \otimes d\bar{w}^j - \sum_{j,h=1}^m \bar{w}^j w^h dw^j \otimes d\bar{w}^h}{(1 + |w|^2)^2}.$$

Si ottiene una metrica Riemanniana ponendo $g = \operatorname{Re} h$.

ESEMPIO VI.9.6. Possiamo considerare lo spazio proiettivo reale $\mathbb{R}P^m$ come una sottovarietà differenziabile dello spazio proiettivo complesso $\mathbb{C}P^m$. La restrizione ad $\mathbb{R}P^m$ della metrica di Fubini-Study definisce una metrica $\mathbf{SO}(n+1)$ -invariante su $\mathbb{R}P^m$. La sua espressione, nelle coordinate locali $y^i = x^i/x^0$ di $U_0 = \{x^0 \neq 0\}$, è

$$(6.9.4) \quad g = \frac{(1 + |y|^2) \sum_{i=1}^m dy^i \otimes dy^i - \sum_{i,j=1}^m y^i y^j dy^i \otimes dy^j}{(1 + |y|^2)^2}.$$

ESEMPIO VI.9.7. Se \mathbf{G} è un gruppo di Lie ed \mathbf{H} un suo sottogruppo compatto, possiamo definire su $M = \mathbf{G}/\mathbf{H}$ una metrica Riemanniana \mathbf{G} -invariante. Sia $\mathbf{o} = [H]$ il punto base di M . Per il teorema di Haar sull'esistenza di misure bi-invarianti sui gruppi compatti, possiamo definire su $T_{\mathbf{o}}M$ un prodotto scalare $g_{\mathbf{o}}$ per cui i $dL_h, dR_h : T_{\mathbf{o}}M \rightarrow T_{\mathbf{o}}M$, per $h \in \mathbf{H}$, siano isometrie. Se $p = a \cdot \mathbf{o}$ per un $a \in \mathbf{G}$, poniamo.

$$g(a_*X_{\mathbf{o}}, a_*Y_{\mathbf{o}}) = g_{\mathbf{o}}(X_{p_0}, Y_{p_0})$$

Questa è una buona definizione, perché, se $b = ah$ con $h \in \mathbf{H}$, allora

$$g((ah)_*X_{\mathbf{o}}, (ah)_*Y_{\mathbf{o}}) = g_{\mathbf{o}}(h_*X_{p_0}, h_*Y_{p_0}) = g_{\mathbf{o}}(X_{p_0}, Y_{p_0}).$$

DEFINIZIONE VI.9.8. Sia \mathbf{G} un gruppo di Lie, $M = \mathbf{G}/\mathbf{H}$ un suo spazio omogeneo e g una metrica Riemanniana su M . Se g è \mathbf{G} -invariante, diciamo che (M, g) è uno *spazio Riemanniano \mathbf{G} -omogeneo*.

ESEMPIO VI.9.9. Ogni gruppo di Lie compatto \mathbf{G} ammette una metrica Riemanniana bi-invariante, invariante cioè sia rispetto alle traslazioni a destra che rispetto alle traslazioni a sinistra. Possiamo infatti considerare \mathbf{G} come uno spazio omogeneo rispetto all'azione transitiva

$$(6.9.5) \quad (\mathbf{G} \times \mathbf{G}) \times \mathbf{G} \ni ((a, b), x) \longrightarrow axb^{-1} \in \mathbf{G}.$$

Il sottogruppo di isotropia di e è $\Delta_{\mathbf{G}} = \{(a, a) \mid a \in \mathbf{G}\}$. Per l'Esempio VI.9.7, \mathbf{G} ammette una metrica g invariante per l'azione di $\mathbf{G} \times \mathbf{G}$, cioè invariante sia a destra che a sinistra.

Supponiamo che il gruppo \mathbf{G} sia un gruppo semisemplice compatto. Allora la forma di Killing

$$(6.9.6) \quad \kappa_{\mathfrak{g}}(A, B) = \text{traccia}(\text{ad}_{\mathfrak{g}}(A) \cdot \text{ad}_{\mathfrak{g}}(B))$$

è definita negativa. Otteniamo una metrica Riemanniana \mathbf{G} -invariante (sia a destra che a sinistra) ponendo

$$(6.9.7) \quad g(X_a^*, Y_a^*) = -\kappa_{\mathfrak{g}}(X, Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g},$$

dove abbiamo indicato con X^*, Y^* i campi di vettori invarianti a sinistra associati ad $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Analogamente, se \mathbf{G} è un sottogruppo compatto di $\mathbf{GL}(n, \mathbf{R})$, la forma quadratica

$$(6.9.8) \quad g_e(X, Y) = -\text{traccia}(XY), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$$

è definita positiva ed otteniamo una metrica Riemanniana invariante su \mathbf{G} definendo

$$(6.9.9) \quad g(X_a^*, Y_a^*) = -\text{traccia}(XY), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

ESEMPIO VI.9.10. Se $1 < p < m$, la forma

$$(6.9.10) \quad g = \sum_{i=1}^p dx^i \otimes dx^i - \sum_{i=p+1}^m dx^i \otimes dx^i.$$

definisce una metrica pseudo-Riemanniana su \mathbb{R}^m .

ESEMPIO VI.9.11. Consideriamo su \mathbb{R}^{m+1} la metrica pseudo-Riemanniana

$$h = -dx^0 \otimes dx^0 + \sum_{i=1}^m dx^i \otimes dx^i.$$

Il pullback di h su $M = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid x^0 = (1 + \sum_{i=1}^m |x^i|^2)^{1/2}\}$ definisce una metrica Riemanniana g , che è la metrica standard dello spazio iperbolico di Lobačevskij di dimensione n . Indichiamo con K la matrice

$$K = \begin{pmatrix} -1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

e sia $\mathbf{O}(1, n) = \{a \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{R}) \mid {}^t a K a = K\}$ il gruppo delle trasformazioni lineari di \mathbb{R}^{m+1} che lasciano invariata la K . Posto $e_0 = {}^t(1, 0, \dots, 0) \in M$,

$$\mathbf{O}_+(1, n) = \{a \in \mathbf{O}(1, n) \mid {}^t e_0 K a e_0 > 0\}$$

è un sottogruppo normale di indice due di $\mathbf{O}(1, n)$, che opera transitivamente su M e lascia invariata la metrica Riemanniana g . Lo stabilizzatore di e_0 in $\mathbf{O}_+(1, n)$ è un sottogruppo compatto, isomorfo ad $\mathbf{O}(n)$. Questa costruzione è dunque un caso particolare di quella dell'Esempio., VI.9.7.

ESEMPIO VI.9.12. Sia \mathbf{G} un gruppo di Lie semisemplice. Per un criterio di Cartan, la semisemplicità è equivalente al fatto che la forma di Killing

$$(6.9.11) \quad \kappa_{\mathfrak{g}}(X, Y) = \text{traccia}(\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)\text{ad}_{\mathfrak{g}}(Y)), \quad X, Y \in \mathfrak{g}$$

sia non degenerare sull'algebra di Lie \mathfrak{g} di \mathbf{G} . Nota che, se \mathbf{G} non è compatto, la forma di Killing è indefinita. La

$$(6.9.12) \quad g(X_a^*, Y_a^*) = -\kappa(X, Y), \quad \text{per } X, Y \in \mathfrak{g}$$

definisce allora una metrica pseudo-Riemanniana su \mathbf{G} .

VI.10. Estensione della metrica ai fibrati tensoriali

Sia g una forma bilineare simmetrica, definita su uno spazio vettoriale reale V , di dimensione finita m . Risulta allora univocamente definita una forma bilineare simmetrica, che denoteremo ancora con g , sulla potenza tensoriale k -esima $V^{\otimes k}$ e che, sulle coppie di tensori di rango uno dà

$$g(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k, w_1 \otimes \cdots \otimes w_k) = g(v_1, w_1) \cdots g(v_k, w_k).$$

Fissiamo una base e_1, \dots, e_m di V , poniamo $g_{i,j} = g(e_i, e_j)$ e siano $\alpha, \beta \in V^{\otimes k}$ con $\alpha = \sum_{i_1, \dots, i_k} \alpha^{i_1, \dots, i_k} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}$, $\beta = \sum_{j_1, \dots, j_k} \beta^{j_1, \dots, j_k} e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_k}$. Allora

$$g(\alpha, \beta) = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k \\ j_1, \dots, j_k}} g_{i_1, j_1} \cdots g_{i_k, j_k} \alpha^{i_1, \dots, i_k} \beta^{j_1, \dots, j_k}.$$

Se g è non degenera, l'applicazione lineare $B_g : V \rightarrow V^*$ ad essa associata è un isomorfismo. Utilizzando la B_g , possiamo definire una forma bilineare simmetrica su V^* ponendo

$$g(\xi, \eta) = g(B_g^{-1}(\xi), B_g^{-1}(\eta)), \quad \forall \xi, \eta \in V^*.$$

Se indichiamo con $(g^{i,j})$ l'inversa della matrice $(g_{i,j})$, otteniamo che

$$g(\xi, \eta) = \sum_{i,j} g^{i,j} \xi_i \eta_j,$$

ove $\xi = \sum_i \xi_i e^i$, $\eta = \sum_j \eta_j e^j$ per la base duale e^1, \dots, e^m in V^* di e_1, \dots, e_m .

Possiamo quindi definire il prodotto di tensori h -covarianti e k -controvarianti

$$\alpha = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_h \\ j_1, \dots, j_k}} \alpha_{j_1, \dots, j_k}^{i_1, \dots, i_h} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_h} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_k},$$

$$\beta = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_h \\ j_1, \dots, j_k}} \beta_{j_1, \dots, j_k}^{i_1, \dots, i_h} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_h} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_k},$$

mediante

$$g(\alpha, \beta) = \sum g_{i_1, i'_1} \cdots g_{i_h, i'_h} g^{j_1, j'_1} \cdots g^{j_k, j'_k} \alpha_{j_1, \dots, j_k}^{i_1, \dots, i_h} \beta_{j'_1, \dots, j'_k}^{i'_1, \dots, i'_h}.$$

Osserviamo ancora che le applicazioni

$$T^{h,k}V \ni \alpha \longrightarrow g_{i_1, j_1+k} \cdots g_{i_h, j_h+k} \alpha_{j_1, \dots, j_k}^{i_1, \dots, i_h} e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_k} \in T^{0, h+k}V,$$

$$T^{h,k}V \ni \alpha \longrightarrow g^{j_1, i_{h+1}} \dots g^{j_k, i_{h+k}} \alpha_{j_1, \dots, j_k}^{i_1, \dots, i_h} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_{h+k}} \in T^{h+k,0}V$$

sono isomorfismi lineari che preservano le estensioni della g .

Tutte queste considerazioni si estendono in modo ovvio ai tensori definiti su una varietà pseudo-Riemanniana (M, g) .

VI.11. Tensore di curvatura di una varietà pseudo-Riemanniana

Sia (M, g) una varietà pseudo-Riemanniana. Se b è una forma bilineare simmetrica non degenera in \mathbb{R}^m con la segnatura di g , allora la connessione di Levi-Civita ammette una \mathbf{O}_b -riduzione ad $\mathbf{O}_b(M)$. In particolare, la forma di Cartan ω e la forma di curvatura Ω , ristrette ad $\mathbf{O}_b(M)$, sono a valori in \mathfrak{o}_b . Perciò il tensore di curvatura R , corrispondente alla forma $\Omega \in \mathcal{Q}_{\text{Ad},0}^2(\mathbf{O}_b(M), \mathfrak{o}_b)$, è una forma $R \in \mathcal{Q}^2(M, \mathfrak{o}_g(M))$, cioè a valori nel sottofibrato $\mathfrak{o}_g(M)$ del fibrato $\mathcal{E}nd(TM)$ degli endomorfismi di TM , che consiste degli endomorfismi $A \in \mathcal{E}nd(T_pM)$ tali che

$$g(Av, w) + g(v, Aw) = 0, \quad \forall v, w \in T_pM.$$

DEFINIZIONE VI.11.1. Il *tensore di curvatura controvariante* di una varietà pseudo-Riemanniana (M, g) è il tensore

$$(6.11.1) \quad R(X_1, X_2, X_3, X_4) = g(R(X_1, X_2)X_3, X_4), \quad \forall X_1, X_2, X_3, X_4 \in \mathfrak{X}(M).$$

Il tensore di curvatura controvariante ci permette di esplicitare alcune proprietà di simmetria del tensore di curvatura. Abbiamo

PROPOSIZIONE VI.11.2. *Il tensore di curvatura controvariante verifica le identità algebriche*

$$(6.11.2) \quad R(X_2, X_1, X_3, X_4) = -R(X_1, X_2, X_3, X_4),$$

$$(6.11.3) \quad R(X_1, X_2, X_4, X_3) = -R(X_1, X_2, X_3, X_4),$$

$$(6.11.4) \quad R(X_3, X_4, X_1, X_2) = R(X_1, X_2, X_3, X_4),$$

$$(6.11.5) \quad R(X_1, X_2, X_3, X_4) + R(X_2, X_3, X_1, X_4) + R(X_3, X_1, X_2, X_4) = 0,$$

$$\forall X_1, X_2, X_3, X_4 \in \mathfrak{X}(M).$$

DIMOSTRAZIONE. Le (6.11.2), (6.11.3) sono conseguenza la prima del fatto che R è una forma alternata e la seconda del fatto che R è g -antisimmetrica. La (6.11.5) è conseguenza dell'identità algebrica di Bianchi. Mostriamo che dalle (6.11.2), (6.11.3) ed (6.11.5) segue la (6.11.4). Abbiamo infatti

$$\begin{aligned} R(X_3, X_4, X_1, X_2) &= -R(X_4, X_1, X_3, X_2) - R(X_1, X_3, X_4, X_2) \\ &= R(X_4, X_1, X_2, X_3) + R(X_1, X_3, X_2, X_4) \\ &= -R(X_1, X_2, X_4, X_3) - R(X_2, X_1, X_3, X_4) \\ &\quad - R(X_2, X_4, X_1, X_3) - R(X_3, X_2, X_1, X_4) \\ &= 2R(X_1, X_2, X_3, X_4) + R(X_2, X_4, X_3, X_1) + R(X_3, X_2, X_4, X_1) \\ &= 2R(X_1, X_2, X_3, X_4) - R(X_3, X_4, X_1, X_2). \end{aligned}$$

La dimostrazione è completa. \square

VI.12. Connessioni principali su varietà dotate di una connessione lineare

Premettiamo alcune osservazioni sul prodotto di fibrati principali.

VI.12.1. Prodotto di connessioni principali. Siano $\xi_i = (P_i \xrightarrow{\pi_i} M)$, per $i = 1, 2$, due connessioni principali con gruppi strutturali \mathbf{G}_i . Il prodotto $\xi = \xi_1 \times_M \xi_2$ è il fibrato principale su M con spazio totale

$$P = \{(\sigma_1, \sigma_2) \mid \pi_1(\sigma_1) = \pi_2(\sigma_2)\}$$

e gruppo strutturale $\mathbf{G} = \mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_2$, che agisce su P mediante

$$(\sigma_1, \sigma_2)(a_1, a_2) = (\sigma_1 a_1, \sigma_2 a_2), \quad \forall (\sigma_1, \sigma_2) \in P, \quad \forall a_1 \in \mathbf{G}_1, \quad \forall a_2 \in \mathbf{G}_2.$$

L'algebra di Lie di \mathbf{G} è la somma diretta $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ delle algebre di Lie \mathfrak{g}_i dei gruppi \mathbf{G}_i , per $i = 1, 2$. Indichiamo con $\text{pr}_i : P \rightarrow P_i$ le proiezioni $\text{pr}_i(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_i$.

PROPOSIZIONE VI.12.1. *Se $\omega_i \in \Omega^1(P_i, \mathfrak{g}_i)$ sono le forme di Cartan di connessioni principali su ξ_i , per $i = 1, 2$, allora $\omega = \text{pr}_1^* \omega_1 \oplus \text{pr}_2^* \omega_2 \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ è la forma di Cartan di una connessione principale su ξ .* \square

Siano (ρ_i, V_i) due rappresentazioni lineari dei gruppi \mathbf{G}_i . Allora (ρ, V) , con $V = V_1 \otimes V_2$ e $\rho(a_1, a_2)(v_1 \otimes v_2) = (\rho_1(a_1)v_1) \otimes (\rho_2(a_2)v_2)$ è una rappresentazione lineare di $\mathbf{G} = \mathbf{G}_1 \oplus \mathbf{G}_2$. La derivazione covariante ∇ su ξ_V si esprime per mezzo delle derivazioni covarianti ∇^i sui ξ_{iV_i} mediante

$$\nabla_X(s_1 \otimes s_2) = (\nabla_X^1 s_1) \otimes s_2 + s_1 \otimes (\nabla_X^2 s_2), \quad \forall X \in \mathfrak{X}, \quad \forall s_i \in \Gamma(M, E_{V_i}), \quad i = 1, 2.$$

VI.12.2. Connessioni principali e lineari. Sia $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato principale con gruppo strutturale \mathbf{G} , dotato di una connessione \mathbf{G} -principale con forma di Cartan $\omega^P \in \Omega_{\text{Ad}}^1(P, \mathfrak{g})$, e supponiamo di aver fissato sulla base M una connessione lineare, con forma di Cartan $\omega^M \in \Omega_{\text{Ad}}^1(L(M), \mathfrak{gl}_m(\mathbb{R}))$.

Sia (ρ, V) una rappresentazione lineare di \mathbf{G} ed $\eta = (E \xrightarrow{\pi_V} M)$ il corrispondente fibrato vettoriale. Indichiamo con ∇ la differenziazione covariante su η e con D quella definita su $\mathcal{T}^*(M)$ dalla connessione lineare.

Utilizzando la costruzione generale di §VI.12.1, possiamo definire una derivazione covariante sugli spazi $\mathcal{T}^{r,s}(M, E)$ dei tensori con coefficienti in E , che denoteremo ancora con ∇ . Per essa vale la

$$(6.12.1) \quad \nabla_X(s \otimes \alpha) = (\nabla_X s) \otimes \alpha + s \otimes D_X \alpha, \quad \forall s \in \Gamma(M, E), \quad \forall \alpha \in \mathcal{T}^{(r,s)}(M).$$

PROPOSIZIONE VI.12.2. *La derivazione covariante definisce un'applicazione lineare*

$$(6.12.2) \quad \nabla : \mathcal{T}^{r,s}(M, E) \longrightarrow \mathcal{T}^{r,s+1}(M, E).$$

Usando la derivazione covariante per i tensori a coefficienti in E , possiamo definire prima le derivate covarianti seconde, e poi, per ricorrenza, quelle di ordine superiore, di una sezione $s \in \Gamma(M, E)$. Ad esempio, abbiamo la

DEFINIZIONE VI.12.3. La derivata seconda covariante di una sezione $s \in \Gamma(M, E)$ rispetto ai campi $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ è definita da

$$(6.12.3) \quad \nabla_{X,Y}^2 s = \nabla_X(\nabla_Y s) - \nabla_{D_X Y} s.$$

OSSERVAZIONE VI.12.4. La derivata covariante $\nabla^k s$ di una sezione $s \in \Gamma(M, E)$ è un tensore in $\mathfrak{T}^{0,k}(M, E)$, cioè un'applicazione $\mathcal{C}^\infty(M)$ -multilineare

$$\underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{k \text{ volte}} \ni (X_1, \dots, X_k) \longrightarrow \nabla_{X_1, \dots, X_k}^k s \in \Gamma(M, E).$$

Verifichiamo ad esempio la $\mathcal{C}^\infty(M)$ -multilinearità della derivata seconda. La $\mathcal{C}^\infty(M)$ -linearità di $\nabla_{X,Y}^2 s$ rispetto ad X è ovvia. Se $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, abbiamo

$$\begin{aligned} \nabla_{X,fY}^2 s &= \nabla_X(\nabla_{fY} s) - \nabla_{D_X(fY)} s = \nabla_X(f\nabla_Y s) - \nabla_{fD_X Y + (Xf)Y} s \\ &= (f\nabla_X(\nabla_Y s) + (Xf)\nabla_Y s) - (f\nabla_{D_X Y} s + (Xf)\nabla_Y s) \\ &= f(\nabla_X(\nabla_Y s) + \nabla_{D_X Y} s) = f\nabla_{X,Y}^2 s. \end{aligned}$$

ESEMPIO VI.12.5. Se η è il fibrato banale con spazio totale $E = M \times V$ e ∇ la connessione banale, allora la derivata seconda di una sezione $s \in \mathcal{C}^\infty(M, V)$ è

$$\nabla_{X,Y}^2 s = XYs - (D_X Y)s.$$

Se M fosse un aperto di \mathbb{R}^m , con la connessione lineare banale, ed $X = \sum_{i=1}^m a^i \partial/\partial x^i$, $Y = \sum_{i=1}^m b^i \partial/\partial x^i$ allora

$$\nabla_{X,Y}^2 s = \sum_{i,j=1}^m a^i b^j \frac{\partial^2 s}{\partial x^i \partial x^j}.$$

OSSERVAZIONE VI.12.6. Osserviamo che, nell'Esempio VI.12.5, con connessioni banali sia sul fibrato banale che sulla base aperto di \mathbb{R}^m , il tensore della derivata seconda coincide con la matrice Hessiana dell'applicazione s ed è quindi, in particolare, simmetrico.

In generale, otteniamo

$$\begin{aligned} \nabla_{X,Y}^2 s - \nabla_{Y,X}^2 s &= (\nabla_X \nabla_Y s - \nabla_{D_X Y} s) - (\nabla_Y \nabla_X s - \nabla_{D_Y X} s) \\ &= (\nabla_X \nabla_Y s - \nabla_Y \nabla_X s - \nabla_{[X,Y]} s) - \nabla_{D_X Y - D_Y X - [X,Y]} s \\ &= R^\nabla(X, Y)s - \nabla_{T^D(X,Y)} s, \end{aligned}$$

ove abbiamo indicato con R^∇ la curvatura della connessione lineare ∇ e con T^D la torsione della connessione lineare D .

Quindi la curvatura di ∇ in modo algebrico e la torsione di D in modo differenziale ci permettono di calcolare l'ostruzione al fatto che il tensore della derivata seconda sia simmetrico.

Abbiamo quindi ottenuto la *formula di Ricci*:

$$(6.12.4) \quad \nabla_{X,Y}^2 s - \nabla_{Y,X}^2 s = R^\nabla(X, Y)s - \nabla_{T^D(X,Y)} s, \quad \forall s \in \mathcal{L}(M), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Si possono ottenere altre formule di Ricci, che esprimono in termini di curvatura e torsione come cambiano i tensori delle derivate covarianti di ordine superiore rispetto a permutazioni degli argomenti.

Connessioni lineari invarianti

VII.1. Rappresentazione lineare d'isotropia

Siano \mathbf{K} un gruppo di Lie, \mathbf{H} un suo sottogruppo chiuso, \mathfrak{K} ed \mathfrak{h} le loro algebre di Lie, ed M lo spazio omogeneo \mathbf{K}/\mathbf{H} . Indichiamo con \mathbf{o} il suo punto base, d'isotropia \mathbf{H} , con L_k il diffeomorfismo $M \ni p \rightarrow kp \in M$ definito dall'elemento k di \mathbf{K} , con $\pi : \mathbf{K} \ni k \rightarrow k\mathbf{o} \in M$ la proiezione canonica. L'applicazione

$$(7.1.1) \quad L : \mathbf{K} \ni k \longrightarrow L_k \in \mathbf{Diff}^\infty(M)$$

di \mathbf{K} nel gruppo $\mathbf{Diff}^\infty(M)$ dei diffeomorfismi di classe \mathcal{C}^∞ di M in sé è un omomorfismo di gruppi.

DEFINIZIONE VII.1.1. Il nucleo dell'omomorfismo (7.1.1) si dice *nucleo d'ineffettività* dell'azione di \mathbf{K} su M .

LEMMA VII.1.2. Il nucleo d'ineffettività \mathbf{N} e la sua algebra di Lie \mathfrak{n} sono descritti da:

$$(7.1.2) \quad \mathbf{N} = \bigcap_{a \in \mathbf{K}} \text{ad}(a)(\mathbf{H}), \quad \mathfrak{n} = \bigcap_{a \in \mathbf{K}} \text{Ad}(a)(\mathfrak{h}).$$

\mathbf{N} è un sottogruppo normale chiuso di \mathbf{K} ed \mathfrak{n} un ideale di \mathfrak{K} . □

DEFINIZIONE VII.1.3. L'azione di \mathbf{K} su M si dice *effettiva* se $\mathbf{N} = \{e\}$, *quasi effettiva* se \mathbf{N} è discreto.

OSSERVAZIONE VII.1.4. Poiché un gruppo di Lie è discreto se e soltanto se la sua algebra di Lie è $\{0\}$, l'azione di \mathbf{K} è quasi effettiva se e soltanto se $\mathfrak{n} = \{0\}$.

Lasciando fisso \mathbf{o} , gli elementi a dell'isotropia definiscono automorfismi di $T_{\mathbf{o}}M$. Abbiamo quindi una rappresentazione lineare

$$(7.1.3) \quad \mathbf{H} \ni a \longrightarrow a_* = dL_a(\mathbf{o}) \in \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(T_{\mathbf{o}}M).$$

DEFINIZIONE VII.1.5. Chiamiamo la (7.1.3) *rappresentazione lineare d'isotropia*.

Il quoziente iniettivo del differenziale in e della proiezione canonica $\mathbf{K} \xrightarrow{\pi} M$ ci permette di identificare lo spazio tangente $T_{\mathbf{o}}M$ di M nel punto base \mathbf{o} con il quoziente $\mathfrak{K}/\mathfrak{h}$ e conseguentemente la rappresentazione lineare d'isotropia con il quoziente della restrizione ad \mathbf{H} della rappresentazione aggiunta, per mezzo del

diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathfrak{g} & \xrightarrow{\text{Ad}(a)} & \mathfrak{g} & \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
 \mathfrak{k}/\mathfrak{h} & \xrightarrow{\sim} & T_0M & \xrightarrow{a_*} & T_0M & \xrightarrow{\sim} & \mathfrak{k}/\mathfrak{h}.
 \end{array}$$

Otteniamo perciò:

PROPOSIZIONE VII.1.6. *Il nucleo d'infedeltà della rappresentazione lineare d'isotropia è*

$$(7.1.4) \quad \mathbf{N}_0 = \{a \in \mathbf{H} \mid \text{Ad}(a)(X) - X \in \mathfrak{h}, \forall X \in \mathfrak{k}\}.$$

Esso è un sottogruppo chiuso di \mathbf{H} , con algebra di Lie

$$(7.1.5) \quad \mathfrak{n}_0 = \{X \in \mathfrak{h} \mid [X, Y] \in \mathfrak{h}, \forall Y \in \mathfrak{k}\}.$$

□

Valgono le inclusioni

$$(7.1.6) \quad \mathbf{N} \subset \mathbf{N}_0, \quad \mathfrak{n} \subset \mathfrak{n}_0$$

e quindi la

PROPOSIZIONE VII.1.7. *Se la rappresentazione d'isotropia è fedele, allora l'azione di \mathbf{K} su M è effettiva. Se il nucleo d'infedeltà dell'applicazione aggiunta è discreto, cioè se $\mathfrak{n}_0 = \{0\}$, allora l'azione di \mathbf{K} su M è quasi effettiva.* □

Ricordiamo che $M = \mathbf{K}/\mathbf{H}$ è un \mathbf{K} -spazio omogeneo *riduttivo* se \mathfrak{h} ammette un complemento lineare \mathbf{H} -invariante \mathfrak{m} in \mathfrak{k} , se risulta cioè

$$(7.1.7) \quad \mathfrak{k} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}, \quad \text{Ad}(\mathbf{H})(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}.$$

OSSERVAZIONE VII.1.8. Poiché tutte le rappresentazioni lineari di un gruppo di Lie compatto, o di un gruppo di Lie semisemplice¹, sono completamente riducibili, tutti gli spazi omogenei $M = \mathbf{K}/\mathbf{H}$ con \mathbf{H} compatto, o semisemplice, sono riduttivi.

La prima delle (7.1.7) ci dice che la restrizione ad \mathfrak{m} del differenziale $\pi_*(e)$ della proiezione nel quoziente è un isomorfismo lineare $\pi_*(e) : \mathfrak{m} \rightarrow T_0M$ ed, insieme alla seconda, che la restrizione ad \mathfrak{m} della rappresentazione aggiunta di \mathbf{H} su \mathfrak{k} è equivalente alla rappresentazione lineare d'isotropia.

Sia $\mathbf{H}_{\mathfrak{m}}$ il gruppo formato dalle restrizioni ad \mathfrak{m} degli automorfismi $\text{Ad}(a)$, al variare di a in \mathbf{H} .

L'isomorfismo tra \mathfrak{m} e T_0M ci permette di considerare TM come un fibrato vettoriale con fibra tipica \mathfrak{m} e con una $\mathbf{H}_{\mathfrak{m}}$ -struttura, invariante per l'azione di \mathbf{K} .

¹Un gruppo di Lie si dice *semisemplice* se la sua algebra di Lie è semisemplice, somma cioè di ideali semplici non abeliani (vedi §XXVIII.7).

LEMMA VII.1.9. *Supponiamo che $M = \mathbf{K}/\mathbf{H}$ sia riduttivo e valgano le (7.1.7). Allora, per ogni $a \in \mathbf{K}$, l'applicazione*

$$(7.1.8) \quad \mathfrak{m} \ni X \rightarrow d\pi_a(X^*) \in T_{\pi(a)}M,$$

dove $X^* \in \mathcal{Q}(\mathbf{K})$ è il campo di vettori invariante a sinistra corrispondente all'elemento $X \in \mathfrak{m} \subset \mathfrak{k}$, è un isomorfismo lineare.

DIMOSTRAZIONE. Condizione necessaria e sufficiente affinché $d\pi_a(X^*) = 0$ è che $X_a^* = L_{a^*}(X)$ sia tangente ad $a\mathbf{H}$, cioè che $X \in \mathfrak{h}$. \square

Da questo si ricava

LEMMA VII.1.10. *Se $M = \mathbf{K}/\mathbf{H}$ è riduttivo, allora TM è un fibrato vettoriale con fibra tipica \mathfrak{m} e con una \mathbf{H}_m -struttura invariante per l'azione di \mathbf{K} .* \square

PROPOSIZIONE VII.1.11. *Supponiamo che $M = \mathbf{K}/\mathbf{H}$ sia riduttivo. Se la rappresentazione lineare d'isotropia è fedele, allora $\xi = (\mathbf{K} \xrightarrow{\pi} M)$ è il fibrato principale associato ad un \mathbf{H} -struttura su M , invariante per l'azione di \mathbf{K} .* \square

VII.2. Connessioni lineari canoniche su spazi omogenei riduttivi

Sia $M = \mathbf{K}/\mathbf{H}$ uno spazio omogeneo riduttivo, con decomposizione (7.1.7). Mostriamo che la connessione principale definita nel Teorema V.13.5 è una connessione lineare su M . Ricordiamone la definizione.

Sia $\omega_{\mathbf{K}} \in \Omega^1(\mathbf{K}, \mathfrak{k})$ la forma di Maurer-Cartan di \mathbf{K} .

NOTAZIONE VII.2.1. Indichiamo con

$$(7.2.1) \quad \omega_{\mathfrak{h}} \in \Omega^1(\mathbf{K}, \mathfrak{h}) \text{ la componente di } \omega_{\mathbf{K}} \text{ in } \mathfrak{h},$$

$$(7.2.2) \quad \theta_{\mathfrak{m}} \in \Omega^1(\mathbf{K}, \mathfrak{m}) \text{ la componente di } \omega_{\mathbf{K}} \text{ in } \mathfrak{m},$$

rispetto alla decomposizione (7.1.7). Se $X \in \mathfrak{k}$, indicheremo con $X_{\mathfrak{h}}$ ed $X_{\mathfrak{m}}$ le sue componenti in \mathfrak{h} ed \mathfrak{m} , rispettivamente.

OSSERVAZIONE VII.2.2. Abbiamo, per $X, Y \in \mathfrak{k}$,

$$[X, Y] = [X_{\mathfrak{h}}, Y_{\mathfrak{h}}] + [X_{\mathfrak{h}}, Y_{\mathfrak{m}}] + [X_{\mathfrak{m}}, Y_{\mathfrak{h}}] + [X_{\mathfrak{m}}, Y_{\mathfrak{m}}].$$

Poiché \mathfrak{m} è $\text{ad}(\mathfrak{h})$ -invariante, otteniamo

$$(7.2.3) \quad [X, Y]_{\mathfrak{h}} = [X_{\mathfrak{h}}, Y_{\mathfrak{h}}] + [X_{\mathfrak{m}}, Y_{\mathfrak{m}}]_{\mathfrak{h}},$$

$$(7.2.4) \quad [X, Y]_{\mathfrak{m}} = [X_{\mathfrak{h}}, Y_{\mathfrak{m}}] + [X_{\mathfrak{m}}, Y_{\mathfrak{h}}]_{\mathfrak{h}} + [X_{\mathfrak{m}}, Y_{\mathfrak{m}}]_{\mathfrak{m}}.$$

DEFINIZIONE VII.2.3. Chiamiamo la $\theta_{\mathfrak{m}}$ *forma canonica* e la $\omega_{\mathfrak{h}}$ *forma di connessione*² dello spazio riduttivo $M = \mathbf{K}/\mathbf{H}$, relativa alla decomposizione (7.1.7).

TEOREMA VII.2.4. *Siano \mathbf{K} un gruppo di Lie connesso, \mathbf{H} un suo sottogruppo chiuso, $M = \mathbf{K}/\mathbf{H}$ e consideriamo $\xi = (\mathbf{K} \xrightarrow{\pi} M)$ come un fibrato principale con gruppo strutturale \mathbf{H} .*

²È la forma di connessione che avevamo definito nel Teorema V.13.5.

- (1) Se M è riduttivo e valgono le (7.1.7), allora la $\omega_{\mathfrak{h}}$ è la forma di Cartan di una connessione principale su ξ , invariante rispetto alle traslazioni a sinistra su \mathbf{K} , e definisce quindi su M una connessione lineare per cui gli elementi di \mathbf{K} agiscono su M come trasformazioni affini.
- (2) Ogni connessione principale su ξ , che sia invariante rispetto alle traslazioni a sinistra su \mathbf{K} , determina univocamente una decomposizione (7.1.7), rispetto alla quale la forma di Cartan sia la \mathfrak{h} -componente della forma di Maurer-Cartan di \mathbf{K} .
- (3) Le forme di torsione e di curvatura di una connessione lineare con forma di Cartan $\omega_{\mathfrak{h}}$ definita dalla (7.2.1) sono:

$$(7.2.5) \quad \Theta(X^*, Y^*) = -[X_m, Y_m]_m, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{k},$$

$$(7.2.6) \quad \Omega(X^*, Y^*) = -[X_m, Y_m]_{\mathfrak{h}}, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{k}.$$

DIMOSTRAZIONE. La (1) e la (2) sono parte dell'enunciato del Teorema V.13.5. Verifichiamo la (3). Se $X \in \mathfrak{k}$, allora X_m^* ed $X_{\mathfrak{h}}^*$ sono, rispettivamente, le componenti orizzontale e verticale di X^* . Otteniamo quindi, per $X, Y \in \mathfrak{k}$,

$$\begin{aligned} \Theta(X^*, Y^*) &= \Theta(X_m^*, Y_m^*) = X_m^* Y_m^* - Y_m^* X_m^* - \theta([X_m^*, Y_m^*]) = -\theta([X_m, Y_m]^*) \\ &= -[X_m, Y_m]_m, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega(X^*, Y^*) &= \Omega(X_m^*, Y_m^*) = X_m^* \omega_{\mathfrak{h}}(Y_m^*) - Y_m^* \omega_{\mathfrak{h}}(X_m^*) - \omega_{\mathfrak{h}}([X_m^*, Y_m^*]) \\ &= -\omega_{\mathfrak{h}}([X_m, Y_m]^*) = -[X_m, Y_m]_{\mathfrak{h}}. \end{aligned}$$

La dimostrazione è completa. \square

OSSERVAZIONE VII.2.5. Utilizzando le (7.2.5), (7.2.6), ed identificando \mathfrak{m} con $T_{\mathbf{o}}M$ mediante la $\pi_*(e)$, possiamo descrivere i tensori di torsione e curvatura nel punto base \mathbf{o} nella forma:

$$(7.2.7) \quad T_{\mathbf{o}}(X, Y) = -[X, Y]_m, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{m},$$

$$(7.2.8) \quad R_{\mathbf{o}}(X, Y)Z = -[[X, Y]_{\mathfrak{h}}, Z]_m, \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{m}.$$

OSSERVAZIONE VII.2.6. Se \mathbf{K} è un gruppo di Lie semisemplice connesso ed \mathbf{H} compatto, con \mathfrak{h} compatta massimale³, possiamo scegliere $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}$, ove \mathfrak{p} è l'ortogonale di \mathfrak{h} per la forma di Killing, ed abbiamo la *decomposizione di Cartan* $\mathfrak{k} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$. Poiché in questo caso $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{h}$, otteniamo su $M = \mathbf{K}/\mathbf{H}$ una connessione simmetrica (cioè con torsione nulla). La $\vartheta : \mathfrak{k} \rightarrow \mathfrak{k}$ uguale all'identità su \mathfrak{h} e a meno l'identità su \mathfrak{p} è un automorfismo involutivo di \mathfrak{k} , che si dice un'*involuzione di Cartan*. I campi orizzontali standard su \mathbf{K} sono i campi invarianti a sinistra X^* , con $X \in \mathfrak{m}$ e sono perciò completi. La M è quindi in questo caso uno *spazio simmetrico*.

Consideriamo ad esempio il gruppo $\mathbf{K} = \mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$ ed il sottogruppo $\mathbf{H} = \mathbf{SO}(n)$. La decomposizione di Cartan è $\mathfrak{k} = \mathfrak{v}_g(n) \oplus \mathfrak{p}$, ove \mathfrak{p} è lo spazio vettoriale delle matrici reali $n \times n$ simmetriche. Lo spazio omogeneo M ha dimensione $n(n+1)/2$ ed ha una connessione $\mathbf{SO}(n)$ -lineare canonica $\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$ -invariante, con torsione nulla e curvatura $R_{\mathbf{o}}(X, Y)Z = -[[X, Y], Z]$ per $X, Y, Z \in \mathfrak{p}$.

³Cioè una sottoalgebra massimale su cui la forma di Killing $\kappa(X, Y) = \text{traccia}(\text{ad}(X)\text{ad}(Y))$ è definita negativa.

ESEMPIO VII.2.7. Il gruppo $\mathbf{SO}(m+1)$ opera transitivamente sulla sfera S^m . La proiezione $\mathbf{SO}(m+1) \ni a \rightarrow ae_0 \in S^m$ ci permette di rappresentare la sfera S^m come lo spazio omogeneo $\mathbf{SO}(m+1)/\mathbf{SO}(m)$. La decomposizione

$$\mathfrak{o}_g(m+1) = \mathfrak{o}_g(m) \oplus \mathfrak{m}$$

ove

$$\mathfrak{o}_g(m) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \middle| A \in \mathfrak{gl}_m(\mathbb{R}), A^\dagger = -A \right\}, \quad \mathfrak{m} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -v^\dagger \\ v & 0 \end{pmatrix} \middle| v \in \mathbb{R}^m \right\}$$

descrive su M la struttura di spazio omogeneo riduttivo. È $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{o}_g(m)$ e quindi la connessione invariante su S^m è priva di torsione. Le geodetiche con origine nel punto e_0 di isotropia $\mathfrak{o}_g(m)$ sono le proiezioni su S^m dei gruppi a un parametro di $\mathbf{SO}(m+1)$ generati dagli elementi di \mathfrak{m} . Ogni matrice di \mathfrak{m} è coniugata, modulo $\mathbf{SO}(m)$, ad una matrice della forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -c & 0 \\ c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \exp(tA) = \begin{pmatrix} \cos(ct) & -\sin(ct) & 0 \\ \sin(ct) & \cos(ct) & 0 \\ 0 & 0 & I_{m-1} \end{pmatrix}.$$

La sua proiezione $\exp(tA)e_0$ è un arco di cerchio massimo di S^m passante per e_0 . Tutte le geodetiche su S^m si ottengono traslando le geodetiche per e_0 per mezzo degli elementi di $\mathbf{SO}(m+1)$ e i loro supporti sono dunque tutte e sole le intersezioni di S^m con i piani passanti per l'origine di \mathbb{R}^m .

ESEMPIO VII.2.8. Sia $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -I_m \end{pmatrix}$ ed

$$\mathbf{SO}(1, m) = \{a \in \mathbf{GL}_m(\mathbb{R}) \mid a^\dagger B a = B\}.$$

La componente connessa dell'identità $\mathbf{SO}_0(1, m)$ di $\mathbf{SO}(1, m)$ opera transitivamente su

$$M = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid x_0^2 = \sum_{i=1}^m |x^i|^2 + 1, x^0 > 0\},$$

che possiamo quindi identificare allo spazio simmetrico $\mathbf{SO}_0(1, m)/\mathbf{SO}(m)$ mediante la proiezione $\mathbf{SO}_0(1, m) \ni a \rightarrow ae_0 \in M$. L'algebra di Lie $\mathfrak{o}_g(1, m)$ di $\mathbf{SO}(1, m)$ si decompone in

$$\mathfrak{o}_g(1, m) = \mathfrak{o}_g(m) \oplus \mathfrak{m}, \quad \text{con}$$

$$\mathfrak{o}_g(m) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \middle| A \in \mathfrak{gl}_m(\mathbb{R}), A^\dagger = -A \right\} \quad \text{e} \quad \mathfrak{m} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & v^\dagger \\ v & 0 \end{pmatrix} \middle| v \in \mathbb{R}^m \right\}.$$

Abbiamo $\text{Ad}(\mathbf{SO}(m))(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}$ ed $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{o}_g(m)$. Quindi possiamo definire su M una connessione lineare canonica simmetrica. Le geodetiche uscenti da e_0 sono le proiezioni dei sottogruppi a un parametro di $\mathbf{SO}_0(1, m)$ generati dagli elementi di \mathfrak{m} . Modulo $\mathbf{SO}(m)$, ogni matrice di \mathfrak{m} è coniugata ad una della forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & c & 0 \\ c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{con } c \in \mathbb{R} \longrightarrow \exp(tA) = \begin{pmatrix} \cosh(ct) & \sinh(ct) & 0 \\ \sinh(ct) & \cosh(ct) & 0 \\ 0 & 0 & I_{m-1} \end{pmatrix}.$$

La connessione è completa. Le geodetiche per e_0 sono le intersezioni di M con i piani passanti per 0 ed e_0 . Tutte le geodetiche sono immagini di queste mediante le traslazioni rispetto al gruppo $\mathbf{SO}_0(1, m)$.

VII.3. Connessioni lineari invarianti

Possiamo applicare al caso particolare delle connessioni lineari i risultati sulle connessioni principali invarianti del §V.14.

Siano \mathbf{K} un gruppo di Lie, \mathbf{H} un suo sottogruppo chiuso, \mathfrak{k} ed \mathfrak{h} le loro algebre di Lie, ed $M = \mathbf{K}/\mathbf{H}$. Indichiamo con \mathbf{o} il punto base, di isotropia \mathbf{H} , e con $\pi_{\mathbf{K}} : \mathbf{K} \ni k \rightarrow k \cdot \mathbf{o} \in M$ la proiezione corrispondente. Indichiamo ancora con $k\sigma (= dL_k \circ \sigma)$ l'azione di \mathbf{K} su $L(M)$.

Siano m la dimensione di M e \mathbf{G} un sottogruppo chiuso di $\mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$.

DEFINIZIONE VII.3.1. Una \mathbf{G} -struttura⁴ $\xi = (P \xrightarrow{\pi_P} M)$ su M si dice \mathbf{K} -invariante se $kP = P$, per ogni $k \in \mathbf{K}$.

Ogni $X \in \mathfrak{k}$ definisce un sottogruppo a un parametro $\{\exp(tX)\}_{t \in \mathbb{R}}$ di \mathbf{K} , che agisce a sinistra, come gruppo a un parametro di diffeomorfismi, su \mathbf{K} , M e P . Indicheremo con $X^{\mathbf{K}}$, X^M ed X^P i rispettivi generatori infinitesimali. In particolare, $X^{\mathbf{K}}$ è il campo di vettori invariante a destra su \mathbf{K} corrispondente ad X , ed⁵

$$X_k^{\mathbf{K}} = [\text{Ad}(k^{-1})X]_k^*, \quad \forall k \in \mathbf{K}.$$

I campi $X^{\mathbf{K}}$ ed X^P sono rispettivamente $\pi_{\mathbf{K}}$ - e π_P -correlati ad X^M e, per ogni $\sigma \in P$, ed ℓ_{σ} -correlati tra loro dall'applicazione $\ell_{\sigma} : \mathbf{K} \ni k \rightarrow k\sigma \in P$.

LEMMA VII.3.2. Per ogni $X, Y \in \mathfrak{k}$ valgono le

$$(7.3.1) \quad [X^{\mathbf{K}}, Y^{\mathbf{K}}] = -[X, Y]^{\mathbf{K}}, \quad [X^P, Y^P] = -[X, Y]^P, \quad [X^M, Y^M] = -[X, Y]^M.$$

□

LEMMA VII.3.3. Abbiamo

$$(7.3.2) \quad k_*(X^P) = [\text{Ad}(k)(X)]^P, \quad k_*(X^M) = [\text{Ad}(k)(X)]^M, \quad \forall k \in \mathbf{K}, \forall X \in \mathfrak{k},$$

$$(7.3.3) \quad R_{a_*}X^P = X^P, \quad \forall a \in \mathbf{G}, \forall X \in \mathfrak{k}.$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo infatti, per ogni $k \in \mathbf{K}$ ed $X \in \mathfrak{k}$,

$$k \cdot (\exp(tX) \cdot p) = \exp(t\text{Ad}(k)(X)) \cdot (k \cdot p), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall p \in M,$$

$$k \cdot (\exp(tX) \cdot \sigma) = \exp(t\text{Ad}(k)(X)) \cdot (k \cdot \sigma), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall \sigma \in P.$$

Derivando rispetto a t in $t = 0$ otteniamo le (7.3.2). Se $a \in \mathbf{G}$ ed $X \in \mathfrak{k}$, allora

$$e^{tX} \cdot (\sigma \cdot a) = (e^{tX} \cdot \sigma) \cdot a, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall \sigma \in P$$

e, derivando rispetto a t in $t = 0$, otteniamo le (7.3.3). □

⁴Lo spazio totale P è cioè un sottofibrato di $L(M)$ e l'azione di \mathbf{G} su P è la restrizione dell'azione di $\mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$ su $L(M)$.

⁵Ricordiamo che X_k^* = $(L_k)_*(X)$ è il campo di vettori invariante a sinistra associato ad $X \in \mathfrak{k}$.

Il Teorema di Wang (Teorema VII.3.6) caratterizza le \mathbf{G} -connessioni affini \mathbf{K} -invarianti su M .

Per ogni $\sigma \in P_{\mathfrak{o}}$ l'applicazione

$$(7.3.4) \quad \lambda_{\sigma} : \mathbf{H} \ni h \longrightarrow \sigma^{-1} \circ h_* \circ \sigma \in \mathbf{G}$$

è un omomorfismo di gruppi di Lie. Poiché $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}_m(\mathbb{R})$, il suo differenziale nell'identità $\lambda_{\sigma*} : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{g}$ è una rappresentazione lineare di \mathfrak{h} .

Ricordiamo i risultati dimostrati nel §V.14.

LEMMA VII.3.4. *Sia ω la forma di Cartan di una \mathbf{G} -connessione lineare \mathbf{K} -invariante su ξ . Fissato un punto $\sigma_0 \in P_{\mathfrak{o}}$, l'applicazione lineare*

$$(7.3.5) \quad \Lambda_{\sigma_0} : \mathfrak{k} \ni X \longrightarrow \omega(X_{\sigma_0}^P) \in \mathfrak{g}, \quad \forall X \in \mathfrak{k}.$$

soddisfa le

$$(7.3.6) \quad \begin{cases} \Lambda_{\sigma_0}(X) = \lambda_{\sigma_0*}(X), & \forall X \in \mathfrak{h}, \\ \Lambda_{\sigma_0}(\text{Ad}_{\mathfrak{h}}(h)(X)) = \text{Ad}_{\mathfrak{g}}(\lambda_{\sigma_0}(h))(\Lambda_{\sigma_0}(X)), & \forall h \in \mathbf{H}, \forall X \in \mathfrak{k}. \quad \square \end{cases}$$

OSSERVAZIONE VII.3.5. La (7.3.6) ci dice che la Λ_{σ_0} estende l'omomorfismo di algebre di Lie λ_{σ_0*} ad un'omomorfismo dell' \mathbf{H} -modulo \mathfrak{k} sul \mathbf{G} -modulo \mathfrak{g} . Come già osservato in precedenza, Λ_{σ_0} non è, in generale, un omomorfismo di algebre di Lie.

TEOREMA VII.3.6 (Wang). *Sia ξ una \mathbf{G} -struttura \mathbf{K} -invariante su M . La (7.3.5) definisce una corrispondenza biunivoca tra le \mathbf{G} -connessioni affini \mathbf{K} -invarianti su M e le applicazioni lineari $\Lambda_{\sigma_0} \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{k}, \mathfrak{g})$ che soddisfano le (7.3.6). \square*

OSSERVAZIONE VII.3.7. La (7.3.6) implica che

$$(7.3.7) \quad \Lambda_{\sigma_0}([X, Y]) = [\lambda_{\sigma_0*}(X), \Lambda_{\sigma_0}(Y)], \quad \forall X \in \mathfrak{h}, \forall Y \in \mathfrak{k},$$

e le due condizioni sono equivalenti se \mathbf{H} è connesso.

LEMMA VII.3.8. *Per ogni $X \in \mathfrak{k}$ l'applicazione $P \ni \sigma \rightarrow \sigma \circ \omega(X_{\sigma}^P) \circ \sigma^{-1} \in T^{1,1}M$ è costante sulle fibre di ξ e definisce quindi un tensore di tipo (1, 1) su M .*

DIMOSTRAZIONE. I campi X^P sono invarianti per l'azione di \mathbf{G} sulle fibre. Quindi $\omega(X^P) \in \Omega_{\text{Ad},0}^0(P, \mathfrak{g})$ corrisponde ad una sezione $\sigma \circ \omega(X^P) \circ \sigma^{-1} \in \Gamma(M, T^{1,1})$. \square

NOTAZIONE VII.3.9. Indichiamo con $\mathbb{L} : \mathfrak{k} \rightarrow \mathfrak{T}^{1,1}(M)$ l'applicazione che fa corrispondere ad $X \in \mathfrak{k}$ il tensore di tipo (1, 1) definito nel Lemma VII.3.8.

Una connessione \mathbf{G} -lineare \mathbf{K} -invariante si può quindi considerare come il dato di un'applicazione lineare \mathbb{L} che fa corrispondere ad ogni $X \in \mathfrak{k}$ un tensore \mathbf{K} -invariante $\mathbb{L}(X) \in \mathfrak{T}^{1,1}(M)$. Se $h \in \mathbf{H}$, e $\sigma \in P_{\mathfrak{o}}$, abbiamo

$$\begin{aligned} h_* \circ \sigma \circ \omega(X^P) \circ \sigma^{-1} \circ h_*^{-1} &= \sigma \circ (\sigma^{-1} \circ h_* \circ \sigma) \circ \omega(X^P) \circ (\sigma^{-1} \circ h_* \circ \sigma)^{-1} \circ \sigma^{-1} \\ &= \sigma \circ \text{Ad}(\lambda_{\sigma}(h))(\omega(X^P)) \circ \sigma^{-1} = \sigma \circ \omega([\text{Ad}(h)(X)]^P) \circ \sigma^{-1}. \end{aligned}$$

Abbiamo perciò

PROPOSIZIONE VII.3.10. *Una connessione lineare \mathbf{K} -invariante su M è il dato di un'applicazione lineare $\mathbb{L} : \mathfrak{k} \rightarrow \mathfrak{T}^{1,1}(M)$ che soddisfa la condizione*

$$(7.3.8) \quad \begin{cases} k_*\mathbb{L}(X) = \mathbb{L}(X), & \forall k \in \mathbf{K}, \forall X \in \mathfrak{k}, \\ k_*\mathbb{L}(X)k_*^{-1}(p) = \mathbb{L}(\text{Ad}(k)(X))(p), & \forall p \in M, \forall k \in \mathbf{K}_p, \end{cases}$$

ove abbiamo indicato con $\mathbf{K}_p = \{k \in \mathbf{K} \mid kp = p\}$ lo stabilizzatore di p in \mathbf{K} . \square

Per Calcolare torsione e di curvatura di una \mathbf{G} -connessione lineare \mathbf{K} -invariante, è utile premettere il

LEMMA VII.3.11. *Con le notazioni fin qui introdotte:*

$$(7.3.9) \quad X^P\theta_\sigma(Y^P) = -\sigma^{-1}([X, Y]^M), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{k}, \quad \forall \sigma \in P.$$

Se ω è la forma di Cartan di una connessione \mathbf{G} -lineare \mathbf{K} -invariante, allora

$$(7.3.10) \quad X^P\omega(Y^P) = -\omega([X, Y]^P), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{k}.$$

DIMOSTRAZIONE. Poiché \mathbf{K} definisce un gruppo di automorfismi di ξ , la derivata di Lie di θ rispetto ai campi X^P è nulla. Abbiamo quindi

$$X^P\theta(Y^P) = (L_{X^P}\theta)(Y^P) + \theta([X^P, Y^P]) = -\sigma^{-1}(\pi_{P*}([X, Y]^P)) = -\sigma^{-1}([X, Y]^M).$$

Analogamente, poiché la derivata di Lie di ω rispetto ai campi X^P è nulla,

$$X^P\omega(Y^P) = (L_{X^P}\omega)(Y^P) + \omega([X^P, Y^P]) = -\omega([X, Y]^P).$$

\square

PROPOSIZIONE VII.3.12. *La torsione e la curvatura della connessione Γ associata all'applicazione Λ_{σ_0} sono parallele e si esprimono, mediante le formule:*

$$(7.3.11) \quad T(X^M, Y^M) = \mathbb{L}(X)Y^M - \mathbb{L}(Y)X^M - [X, Y]^M, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{k},$$

$$(7.3.12) \quad R(X^M, Y^M) = [\mathbb{L}(X), \mathbb{L}(Y)] - \mathbb{L}([X, Y]) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{k}.$$

DIMOSTRAZIONE. Utilizzando la (7.3.9) e le equazioni di struttura, abbiamo

$$\begin{aligned} \Theta_\sigma(X^P, Y^P) &= X^P\theta(Y^P) - X^P\theta(Y^P) - \theta([X^P, Y^P]) + \omega(X^P)\theta(Y^P) - \omega(Y^P)\theta(X^P) \\ &= -\sigma^{-1}([X, Y]^M) + \sigma^{-1}([Y, X]^M) + \sigma^{-1}([X, Y]^M) \\ &\quad + \Lambda_\sigma(X)\sigma^{-1}(Y^M) - \Lambda_\sigma(Y)\sigma^{-1}(X^M) \\ &= -\sigma^{-1}([X, Y]^M) + \Lambda_\sigma(X)\sigma^{-1}(Y^M) - \Lambda_\sigma(Y)\sigma^{-1}(X^M). \end{aligned}$$

Da questa ricaviamo la (7.3.11). Analogamente otteniamo

$$\begin{aligned} \Omega(X^P, Y^P) &= X^P\omega(Y^P) - Y^P\omega(X^P) - \omega([X^P, Y^P]) + [\omega(X^P), \omega(Y^P)] \\ &= \omega([X^P, Y^P]) - \omega([Y^P, X^P]) - \omega([X^P, Y^P]) + [\omega(X^P), \omega(Y^P)] \\ &= -\omega([X, Y]^P) + [\omega(X^P), \omega(Y^P)], \end{aligned}$$

da cui ricaviamo la (7.3.12). \square

VII.4. Connessioni lineari invarianti su spazi riduttivi

Utilizziamo le notazioni del §VII.3. Supponiamo inoltre, in questo paragrafo, che lo spazio omogeneo $M = \mathbf{K}/\mathbf{H}$ sia *riduttivo* e che valgano le (7.1.7). È cioè $\mathfrak{k} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$, con $\text{Ad}(\mathbf{H})(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}$. In particolare, $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$, e questa condizione è equivalente ad $\text{Ad}(\mathbf{H})(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}$ quando \mathbf{H} sia connesso.

Sia m la dimensione di M , \mathbf{G} un sottogruppo di Lie di $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$ e $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$ una \mathbf{G} -struttura su M , invariante per l'azione di \mathbf{K} .

Fissiamo un riferimento $\sigma_0 \in P_{\mathbf{o}}$, ove \mathbf{o} è il punto base di isotropia \mathbf{H} . Osserviamo che, in questo caso, identificando $T_{\mathbf{o}}M$ con \mathfrak{m} , è

$$\begin{aligned}\lambda_{\sigma_0}(h)X &= \text{Ad}(h)X = hXh^{-1}, \quad \forall h \in \mathbf{H}, \quad \forall X \in \mathfrak{m}, \\ \lambda_{\sigma_0*}(Y)X &= \text{ad}(Y)X = [Y, X], \quad \forall Y \in \mathfrak{h}, \quad \forall X \in \mathfrak{m}.\end{aligned}$$

Il Teorema V.14.15 del Capitolo IV dà in questo caso:

TEOREMA VII.4.1 (Wang). *C'è una corrispondenza biunivoca tra le \mathbf{G} -connessioni affini \mathbf{K} -invarianti su M e le applicazioni lineari*

$$(7.4.1) \quad \Lambda_{\sigma_0\mathfrak{m}} : \mathfrak{m} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

tali che

$$(7.4.2) \quad \Lambda_{\sigma_0\mathfrak{m}}(\text{Ad}_{\mathfrak{k}}(h)(X)) = \text{Ad}_{\mathfrak{g}}(\lambda_{\sigma_0}(h))(\Lambda_{\sigma_0\mathfrak{m}}(X)), \quad \forall h \in \mathbf{H}, \quad \forall X \in \mathfrak{m}.$$

□

Identifichiamo $T_{\mathbf{o}}M$ con \mathfrak{m} e di conseguenza gli elementi di \mathfrak{g} come endomorfismi di \mathfrak{m} , utilizzando il sistema di riferimento σ_0 . Indichiamo al solito con $X_{\mathfrak{m}} \in \mathfrak{m}$ ed $X_{\mathfrak{h}} \in \mathfrak{h}$ le componenti di $X \in \mathfrak{k}$ rispetto alla decomposizione (7.1.7). Con queste notazioni, la Proposizione VII.3.12 si riduce all'enunciato seguente.

TEOREMA VII.4.2. *La torsione e la curvatura della \mathbf{G} -connessione \mathbf{K} -invariante Γ sono parallele e sono espresse in termini della $\Lambda_{\sigma_0\mathfrak{m}}$ dalle formule*

$$(7.4.3) \quad T_{\mathbf{o}}(X, Y) = \Lambda_{\sigma_0\mathfrak{m}}(X)Y - \Lambda_{\sigma_0\mathfrak{m}}(Y)X - [X, Y]_{\mathfrak{m}}$$

$$(7.4.4) \quad R_{\mathbf{o}}(X, Y) = [\Lambda_{\sigma_0\mathfrak{m}}(X), \Lambda_{\sigma_0\mathfrak{m}}(Y)] - \Lambda_{\sigma_0\mathfrak{m}}([X, Y]_{\mathfrak{m}}) - \text{ad}([X, Y]_{\mathfrak{h}}) \\ \forall X, Y, Z \in \mathfrak{m} \simeq T_{\mathbf{o}}M.$$

□

DEFINIZIONE VII.4.3. Chiamiamo *canonica* la connessione lineare corrispondente alla scelta $\Lambda_{\sigma_0\mathfrak{m}} = 0$.

Poiché $\Lambda_{\sigma_0\mathfrak{m}}(X) = \omega_{\sigma_0}(X^*)$, otteniamo

PROPOSIZIONE VII.4.4. *La connessione canonica è l'unica connessione \mathbf{G} -lineare \mathbf{K} -invariante tale che, per ogni $X \in \mathfrak{m}$, il campo invariante a sinistra X^* sia orizzontale.*

□

PROPOSIZIONE VII.4.5. *Supponiamo che M sia riduttivo, ξ una \mathbf{G} -struttura su M e Γ la connessione canonica su ξ . Allora:*

- (1) Γ è completa;

- (2) *Le geodetiche sono le curve integrali dei campi X^M al variare di X in \mathfrak{m} .*
 (3) *La torsione e la curvatura di Γ soddisfano le*

$$(7.4.5) \quad T_{\mathfrak{o}}(X, Y) = -[X, Y]_{\mathfrak{m}}, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{m},$$

$$(7.4.6) \quad R_{\mathfrak{o}}(X, Y)Z = -[[X, Y]_{\mathfrak{h}}, Z], \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{m},$$

$$(7.4.7) \quad \nabla T = 0,$$

$$(7.4.8) \quad \nabla R = 0.$$

□

Viceversa, vale il

TEOREMA VII.4.6. *Sia M una varietà differenziabile connessa, dotata di una connessione lineare Γ . Fissiamo un riferimento $\sigma_0 \in \mathbb{L}(M)$ e sia $P = \mathbb{L}(\sigma_0)$ lo spazio totale per σ_0 del fibrato di ologonia $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$.*

- (1) *Supponiamo esista un gruppo di Lie connesso \mathbf{K} di trasformazioni affini di M tale che l'immagine di σ_0 mediante \mathbf{K} contenga P . Allora M è uno spazio omogeneo riduttivo di \mathbf{K} e la connessione Γ coincide con la connessione canonica.*
 (2) *Se $\nabla T = 0$, $\nabla R = 0$ ed M è semplicemente connessa, allora M ammette un gruppo di Lie \mathbf{K} di trasformazioni affini, che opera in modo semplicemente transitivo su P e la connessione su M è equivalente alla connessione canonica su uno spazio riduttivo \mathbf{K}/\mathbf{H} .*

DIMOSTRAZIONE. (1). Sia \mathbf{H} lo stabilizzatore in \mathbf{H} del punto $\mathfrak{o} = \pi_P(\sigma_0)$. Indicheremo con $\lambda : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(T_{\mathfrak{o}}M)$ la rappresentazione lineare d'isotropia di \mathbf{H} . Abbiamo un morfismo di fibrati principali

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{K} & \xrightarrow{\rho} & \mathbb{L}(M) \\ \pi_{\mathbf{K}} \downarrow & & \downarrow \pi_{\mathbb{L}(M)} \\ \mathbf{K}/\mathbf{H} & \xrightarrow{\cong} & M, \end{array}$$

con $\rho(k) = dL_k(\mathfrak{o}) \circ \sigma_0$. L'immagine P' di ρ è lo spazio totale di un sottofibrato di $\mathbb{L}(M)$, ed abbiamo

$$P \subset P' \subset \mathbb{L}(M).$$

Quindi, indicando con H_{σ_0} il sottospazio orizzontale di $T_{\sigma_0}\mathbb{L}(M)$, abbiamo

$$H_{\sigma_0} \subset T_{\sigma_0}P \subset T_{\sigma_0}P'.$$

Definiamo il sottospazio \mathfrak{m} di \mathfrak{k} come l'immagine inversa di H_{σ_0} mediante il differenziale dell'isomorfismo $d\rho(e) : \mathfrak{g} \rightarrow T_{\sigma_0}P'$. È cioè $H_{\sigma_0} = d\rho(e)(\mathfrak{m})$. Se $h \in \mathbf{H}$, abbiamo $\rho(h) = \sigma_0\lambda(h)$ e quindi $d\rho(e) \circ \text{Ad}(h) = dL_h \circ d\rho(e)$. Poiché per ipotesi le L_h sono trasformazioni affini, è $dL_h(H_{\sigma_0}) = H_{\sigma_0}$ e quindi $\text{Ad}(h)(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}$. Poiché la distribuzione orizzontale su P' è generata dalle immagini dei campi X^* di \mathbf{K} , al variare di X in \mathfrak{m} , ne segue che la connessione lineare su M coincide con la connessione canonica associata alla decomposizione $\mathfrak{k} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ sullo spazio omogeneo riduttivo \mathbf{K}/\mathbf{H} .

(2). Nel Corollario VI.4.5 abbiamo costruito un'algebra di Lie $\mathfrak{k} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$, ove \mathfrak{h} è l'algebra di Lie del gruppo di ologonia in σ_0 , $\mathfrak{m} = \mathbb{R}^m$, e le operazioni in \mathfrak{k} sono definite da

$$\begin{cases} [A, B] \in \mathfrak{h} \text{ e } [A, B]^* = [A^*, B^*] & \text{se } A, B \in \mathfrak{h}, \\ [A, X] \in \mathfrak{m} \text{ e } [A, X]^* = [A^*, X^*] = (AX)^* & \text{se } A \in \mathfrak{h}, X \in \mathfrak{m}, \\ [X, Y] = -\Omega(X^*, Y^*) \in \mathfrak{h} & \text{se } X, Y \in \mathfrak{m}, \end{cases}$$

ove ricordiamo che gli A^* sono i campi verticali fondamentali corrispondenti ad $A \in \mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}_m(\mathbb{R})$ e gli X^* sono i campi orizzontali standard caratterizzati da $\theta(X^*) = X \in \mathbb{R}^m$. Su P è definito un parallelismo completo

$$P \times \mathfrak{k} = P \times (\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}) \ni (\sigma; A, X) \rightarrow A^*_\sigma + X^*_\sigma \in TP$$

e quindi una forma $\tilde{\omega} \in \Omega^1(P, \mathfrak{k})$, con $\tilde{\omega}(A^* + X^*) = A + X$.

Sia \mathbf{K} un gruppo di Lie connesso e semplicemente connesso con algebra di Lie \mathfrak{k} ed indichiamo con $\omega_{\mathbf{K}}$ la sua forma di Maurer-Cartan. Identifichiamo lo spazio tangente del prodotto $\mathbf{K} \times P$ con il prodotto $T\mathbf{K} \times TP$ degli spazi tangenti e consideriamo la forma $\omega_{\mathbf{K}} - \tilde{\omega} \in \Omega^1(\mathbf{K} \times P, \mathfrak{k})$, ove $\omega_{\mathbf{K}}$ è la forma di Maurer-Cartan di \mathbf{K} . Sia $\mathfrak{V} = \{Z = (X, Y) \in T(\mathbf{K} \times P) \mid \omega_{\mathbf{K}}(X) = \tilde{\omega}(Y)\}$. Questa è una distribuzione il cui rango è uguale alla dimensione di P e di \mathbf{K} . Dico che \mathfrak{V} è totalmente integrabile. Infatti essa è generata dagli elementi

$$(A^* + X^*, A^* + X^*), \quad \text{con } A \in \mathfrak{h}, X \in \mathfrak{m}$$

ed abbiamo

$$\begin{aligned} & [(A_1^* + X_1^*, A_1^* + X_1^*), (A_2^* + X_2^*, A_2^* + X_2^*)] \\ &= [(A_1^* + X_1^*, A_2^* + X_2^*), [(A_1^* + X_1^*, A_2^* + X_2^*)]] \\ &= [(A_1 + X_1, A_2 + X_2)^*, [A_1^* + X_1^*, A_2^* + X_2^*]] \in \mathfrak{V}, \quad \forall A_1, A_2 \in \mathfrak{h}, \forall X_1, X_2 \in \mathfrak{m}. \end{aligned}$$

Consideriamo l'integrale massimale N di \mathfrak{V} per il punto $(e_{\mathbf{K}}, \sigma_0)$. Dico che N è il grafico di un rivestimento di \mathbf{K} su P . Infatti, ogni cammino $\gamma \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbf{K})$ (rispettivamente $\hat{\gamma} \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], P)$) determina un cammino $\alpha = \omega_{\mathbf{K}}(\dot{\gamma}) \in \mathcal{C}([0, 1], \mathfrak{k})$ (rispettivamente $\alpha = \tilde{\omega}(\dot{\hat{\gamma}}) \in \mathcal{C}([0, 1], \mathfrak{k})$). Poiché \mathbf{K} è connesso e semplicemente connesso, la proiezione sul primo fattore definisce un rivestimento a un solo foglio, e quindi un diffeomorfismo f , di N su \mathbf{K} . Componendo l'inversa di f con la proiezione di N su P , otteniamo un diffeomorfismo locale $\eta : \mathbf{K} \rightarrow P$ che è un rivestimento.

Definiamo l'azione di \mathbf{K} su P nel modo seguente. Se $k \in \mathbf{K}$ e $\sigma \in P$, fissiamo una curva continua $\gamma \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbf{K})$ con $\gamma(0) = e_{\mathbf{K}}$ e $\gamma(1) = k$. Sia $\gamma_\sigma \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], P)$ la curva definita da $\tilde{\omega}(\dot{\gamma}_\sigma) = \omega_{\mathbf{K}}(\dot{\gamma})$ con punto iniziale σ e poniamo $k\sigma = \gamma_\sigma(1)$. Poiché i laccetti in \mathbf{K} di punto iniziale $e_{\mathbf{K}}$ si trasformano in questo modo in laccetti di punto iniziale σ , l'azione è ben definita. Gli elementi $k \in \mathbf{K}$ che trasformano in sé la fibra P_σ formano un sottogruppo chiuso di \mathbf{K} . Sia \mathbf{H} la sua componente connessa dell'identità. La composizione $\pi \circ \eta$ definisce per passaggio al quoziente un rivestimento $\varpi : \mathbf{K}/\mathbf{H} \rightarrow M$, che rende commutativo il

diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{K} & \xrightarrow{\eta} & P \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbf{K}/\mathbf{H} & \xrightarrow{\varpi} & M. \end{array}$$

Poiché M è connessa e semplicemente connessa, ϖ è un diffeomorfismo. La connessione lineare su M coincide con la connessione canonica sullo spazio riduttivo \mathbf{K}/\mathbf{H} . \square

PROPOSIZIONE VII.4.7. *Sia Γ una \mathbf{G} -connessione lineare \mathbf{K} -invariante sullo spazio riduttivo $M = \mathbf{K}/\mathbf{H}$ e sia $\Lambda_{\sigma_{0\mathfrak{m}}} \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{m}, \mathfrak{g})$ l'applicazione lineare associata.*

Condizione necessaria e sufficiente affinché le curve integrali dei campi X^M , al variare di X in \mathfrak{m} , siano geodetiche, è che

$$(7.4.9) \quad \Lambda_{\sigma_{0\mathfrak{m}}}(X)X = 0, \quad \forall X \in \mathfrak{m}.$$

DIMOSTRAZIONE. Se $X \in \mathfrak{m}$, abbiamo

$$\begin{aligned} \nabla_{X^M} X^M &= \sigma \tilde{X}^M \theta(\tilde{X}^M) = \sigma \tilde{X}^M \theta(X^P) = \sigma(X^P \theta(X^P)) - [\omega(X^P)]_{\sigma}^* \theta(X^P) \\ &= -([X, X]^M) - \sigma \Lambda_{\sigma_{0\mathfrak{m}}}(X)X = -\sigma \Lambda_{\sigma_{0\mathfrak{m}}}(X)X. \end{aligned}$$

Quindi la condizione $\Lambda_{\sigma_{0\mathfrak{m}}}(X)X = 0$ è necessaria e sufficiente affinché la derivata covariante della velocità sia nulla lungo le curve integrali di X^M . \square

TEOREMA VII.4.8. *Esiste una connessione \mathbf{G} -lineare simmetrica sullo spazio omogeneo riduttivo $M = \mathbf{K}/\mathbf{H}$ le cui geodetiche siano le curve integrali dei campi X^M , al variare di X in \mathfrak{m} .*

DIMOSTRAZIONE. Basta infatti considerare la connessione corrispondente alla scelta

$$(7.4.10) \quad \Lambda_{\sigma_{0\mathfrak{m}}}(X)Y = \frac{1}{2}[X, Y]_{\mathfrak{m}}, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{m}.$$

\square

DEFINIZIONE VII.4.9. La connessione corrispondente alla scelta (7.4.10) si dice la *connessione simmetrica naturale*.

Calcoliamo la curvatura della connessione simmetrica naturale. Abbiamo, per $X, Y, Z \in \mathfrak{m}$

$$\begin{aligned} R_{\mathbf{0}}(X, Y)Z &= \frac{1}{4}[X, [Y, Z]_{\mathfrak{m}}]_{\mathfrak{m}} - \frac{1}{4}[Y, [X, Z]_{\mathfrak{m}}]_{\mathfrak{m}} - \frac{1}{2}[[X, Y]_{\mathfrak{m}}, Z]_{\mathfrak{m}} - [[X, Y]_{\mathfrak{b}}, Z] \\ &= \frac{1}{4}[X, [Y, Z]_{\mathfrak{m}}]_{\mathfrak{m}} - \frac{1}{4}[X, [Y, Z]_{\mathfrak{b}}]_{\mathfrak{m}} + \frac{1}{4}[Y, [Z, X]_{\mathfrak{m}}]_{\mathfrak{m}} - \frac{1}{4}[Y, [Z, X]_{\mathfrak{b}}]_{\mathfrak{m}} \\ &\quad + \frac{1}{2}[Z, [X, Y]_{\mathfrak{m}}]_{\mathfrak{m}} + \frac{1}{2}[Z, [X, Y]_{\mathfrak{b}}]_{\mathfrak{m}} \\ &= \frac{1}{4}[Z, [X, Y]_{\mathfrak{m}}]_{\mathfrak{m}} - \frac{1}{4}[X, [Y, Z]_{\mathfrak{b}}]_{\mathfrak{m}} - \frac{1}{4}[Y, [Z, X]_{\mathfrak{b}}]_{\mathfrak{m}} + \frac{1}{2}[Z, [X, Y]_{\mathfrak{b}}]_{\mathfrak{m}}. \end{aligned}$$

DEFINIZIONE VII.4.10. Si dice *spazio simmetrico* uno spazio omogeneo riduttivo dotato di una connessione lineare simmetrica associata ad una decomposizione (7.1.7) con $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h}$.

Abbiamo

TEOREMA VII.4.11. *La curvatura di uno spazio simmetrico è data da*

$$(7.4.11) \quad R_0(X, Y)Z = -[[X, Y], Z], \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{m} \simeq T_0M.$$

Connessioni di Cartan-Shauten. ⁶ Consideriamo il caso particolare in cui $M = \mathbf{G}$ sia un gruppo di Lie. Facciamo agire $\mathbf{K} = \mathbf{G} \times \mathbf{G}$ su \mathbf{G} mediante

$$(7.4.12) \quad \mathbf{K} \times \mathbf{G} \ni ((a, b), x) \longrightarrow axb^{-1} \in \mathbf{G}.$$

Lo stabilizzatore dell'identità è il sottogruppo

$$(7.4.13) \quad \mathbf{H} = \{(a, a) \mid a \in \mathbf{G}\}.$$

Se \mathfrak{g} è l'algebra di Lie di \mathbf{G} , allora $\mathfrak{k} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ è quella di \mathbf{K} ed $\mathfrak{h} = \{(X, X) \mid X \in \mathfrak{g}\}$ quella di \mathbf{H} .

Possiamo rappresentare $\mathbf{G} = \mathbf{K}/\mathbf{H}$ come uno spazio riduttivo in diversi modi. Tra questi, abbiamo le decomposizioni Ad(\mathbf{H})-invarianti:

$$\begin{aligned} (+) \quad & \mathfrak{k} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}_+, \quad \text{con } \mathfrak{m}_+ = \{(0, X) \mid X \in \mathfrak{g}\}, \\ (-) \quad & \mathfrak{k} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}_-, \quad \text{con } \mathfrak{m}_+ = \{(X, 0) \mid X \in \mathfrak{g}\}, \\ (0) \quad & \mathfrak{k} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}_0, \quad \text{con } \mathfrak{m}_+ = \{(X, -X) \mid X \in \mathfrak{g}\}. \end{aligned}$$

DEFINIZIONE VII.4.12 (Cartan-Shauten). Le connessioni canoniche corrispondenti alle decomposizioni (+), (-), (0), si dicono la connessione-(+), la connessione-(-) e la connessione-(0), rispettivamente.

TEOREMA VII.4.13. *La torsione e curvatura delle connessioni di Cartan-Shauten sul gruppo di Lie \mathbf{G} si esprimono con le formule:*

$$\begin{aligned} (+) \quad & T_e(X, Y) = [X, Y], \quad R = 0, \\ (-) \quad & T_e(X, Y) = -[X, Y], \quad R = 0, \\ (0) \quad & T = 0, \quad R_e(X, Y)Z = -[[X, Y], Z], \end{aligned}$$

per ogni $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

DIMOSTRAZIONE. Per evitare confusione, indicheremo con M il gruppo \mathbf{G} considerato come spazio omogeneo \mathbf{K}/\mathbf{H} . Se $(X, Y) \in \mathfrak{k}$ abbiamo $(X, Y)^{\mathbf{K}} = (X^b, Y^b)$ ed $(X, Y)^M = X^b - Y^*$, ove abbiamo indicato con X^b, Y^b i campi di vettori invarianti a destra che valgono X, Y in $e_{\mathbf{G}}$ e con Y^* il campo di vettori invariante a sinistra associato ad $Y \in \mathfrak{g}$.

Consideriamo la connessione lineare \mathbf{K} -invariante corrispondente alla scelta del complemento \mathfrak{m}_+ di \mathfrak{h} . Possiamo allora identificare lo spazio \mathbb{R}^m con \mathfrak{m}_+ . Abbiamo allora

$$\theta(X^b, Y^b) = (0, \omega_{\mathbf{G}}(Y^b - X^b)), \quad \omega(X^b, Y^b) = (\omega_{\mathbf{G}}(X^b), \omega_{\mathbf{G}}(X^b)).$$

⁶Jan Arnoldus Schouten (28 agosto 1883 - 20 gennaio 1971), matematico olandese, professore a Delft. Ha contribuito allo sviluppo del calcolo tensoriale e di Ricci.

I lavori a cui facciamo riferimento sono: E.Cartan and J.A. Schouten, *On the Geometry of the group manifold of simple and semisimple groups*, Proc. Amsterdam 29 (1926), 803-815 ed *On Riemannian manifolds admitting an absolute parallelism*, Proc. Amsterdam 29 (1926), 933-946.

Se $X \in \mathfrak{g}$, il sollevamento orizzontale di X^* è il campo $\tilde{X}^* = (0, -X^b)$. Abbiamo quindi

$$(7.4.14) \quad \tilde{X}^* \theta(\tilde{Y}^*) = (0, -X^b)(0, \omega_{\mathbf{G}}(-Y^b)) = (0, [X^b, Y^b]) = (0, -[X, Y]^b).$$

Questo ci dice che $\nabla_{X^*} Y^* = [X^*, Y^*]$. Otteniamo allora

$$\begin{aligned} T(X^*, Y^*) &= \nabla_{X^*} Y^* - \nabla_{Y^*} X^* - [X^*, Y^*] = [X^*, Y^*], \\ R(X^*, Y^*)Z^* &= (\nabla_{X^*} \nabla_{Y^*} - \nabla_{Y^*} \nabla_{X^*} - \nabla_{[X^*, Y^*]})Z^* \\ &= [X^*, [Y^*, Z^*]] - [Y^*, [X^*, Z^*]] - [X^*, Y^*, Z^*] = 0. \end{aligned}$$

Consideriamo ora la connessione lineare corrispondente alla scelta del complemento \mathfrak{m}_- . Identificando \mathbb{R}^m ad \mathfrak{m}_- , abbiamo in questo caso

$$\theta(X^b, Y^b) = (\omega_{\mathbf{G}}(X^b - Y^b), 0), \quad \omega(X^b, Y^b) = (\omega_{\mathbf{G}}(Y^b), \omega_{\mathbf{G}}(Y^b)).$$

Se $X \in \mathfrak{g}$, il sollevamento orizzontale del campo di vettori invariante a destra X^b è il campo $(X^b, 0)$. Abbiamo quindi, se $X, Y \in \mathfrak{g}$,

$$\tilde{X}^b \theta(\tilde{Y}^b) = (X^b, 0)(\omega_{\mathbf{G}}(Y^b), 0) = (\omega([X^b, Y^b]), 0) = (-\omega_{\mathbf{G}}([X, Y]^b), 0).$$

È perciò $\nabla_{X^b} Y^b = [X^b, Y^b] = -[X, Y]^b$. Otteniamo quindi

$$T(X^b, Y^b) = \nabla_{X^b} Y^b - \nabla_{Y^b} X^b - [X^b, Y^b] = [X^b, Y^b] = -[X, Y]^b.$$

Il caso della connessione (0) è conseguenza del Teorema VII.4.11, perché risulta $[\mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}_0] \subset \mathfrak{h}$, e quindi, con la corrispondente connessione, $M = \mathbf{G}$ è uno spazio affine simmetrico. \square

Calcoliamo esplicitamente la derivata covariante e la curvatura rispetto ai campi di vettori X^M , al variare di X in \mathfrak{g} , per la connessione simmetrica. In questo caso ad $X \in \mathfrak{g} \simeq \mathfrak{m}_0$ associamo il campo $X^M = X^* + X^b$. È

$$\nabla_{X^M} Y^M = \frac{1}{2}([X^*, Y^*] + [X^b, Y^b]) = \frac{1}{2}([X, Y]^* - [X, Y]^b), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Si verifica immediatamente che la torsione è nulla, mentre la curvatura è

$$\begin{aligned} R(X^M, Y^M)Z^M &= -\frac{1}{2}([X^*, Y^*], Z^*] + [X^b, Y^b], Z^b]) \\ &= -\frac{1}{2}([X, Y], Z]^* + [X, Y], Z]^b), \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}. \end{aligned}$$

VII.5. Spazi affini simmetrici

Gli spazi affini simmetrici sono varietà differenziabili affini complete dotate di una connessione lineare simmetrica con curvatura parallela. Per il Teorema VII.4.6 uno spazio affine simmetrico è della forma $M = \mathbf{K}/\mathbf{H}$, per un gruppo di Lie \mathbf{K} , la cui algebra di Lie \mathfrak{k} si decompone nella somma diretta $\mathfrak{k} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ dell'algebra di Lie \mathfrak{h} di \mathbf{H} e di un sottospazio vettoriale $\text{Ad}(\mathbf{H})$ -invariante \mathfrak{m} con $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h}$. L'applicazione lineare $\vartheta : \mathfrak{k} \rightarrow \mathfrak{k}$ definita da

$$\vartheta(X) = \begin{cases} X & \text{se } X \in \mathfrak{h}, \\ -X & \text{se } X \in \mathfrak{m}, \end{cases}$$

è un'involuzione dell'algebra di Lie \mathfrak{k} : soddisfa cioè

$$(7.5.1) \quad \vartheta^2 = \text{id}_{\mathfrak{k}}, \quad [\vartheta(X), \vartheta(Y)] = \vartheta([X, Y]), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{k}.$$

Viceversa, dato un automorfismo involutivo (7.5.1) di \mathfrak{k} , il luogo

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{k} \mid \vartheta(X) = X\}$$

dei punti fissi di ϑ è una sottoalgebra di \mathfrak{k} e l'autospazio

$$\mathfrak{m} = \{X \in \mathfrak{k} \mid \vartheta(X) = -X\}$$

dell'autovalore (-1) un suo complemento lineare in \mathfrak{k} , $\text{ad}(\mathfrak{h})$ -invariante.

PROPOSIZIONE VII.5.1. *Sia \mathbf{K} un gruppo di Lie connesso e semplicemente connesso, con algebra di Lie \mathfrak{k} . Gli spazi affini simmetrici connessi e localmente connessi di \mathbf{K} , modulo isomorfismi affini, sono in corrispondenza biunivoca con le classi di equivalenza degli automorfismi involutivi della sua algebra di Lie \mathfrak{k} .*

DIMOSTRAZIONE. Per l'ipotesi che \mathbf{K} sia connesso e semplicemente connesso, ogni automorfismo involutivo ϑ di \mathfrak{k} è il differenziale nell'identità di un automorfismo involutivo $\hat{\vartheta} : \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}$ del gruppo \mathbf{K} . L'insieme $\hat{\mathbf{H}}$ dei punti fissi dell'involuzione $\hat{\vartheta}$ è allora un sottogruppo chiuso di \mathbf{G} . La componente dell'identità \mathbf{H} di $\hat{\mathbf{H}}$ è un sottogruppo chiuso di \mathbf{K} e lo spazio omogeneo \mathbf{K}/\mathbf{H} è uno spazio affine simmetrico connesso e semplicemente connesso associato all'automorfismo involutivo ϑ . Il viceversa è conseguenza del Teorema VII.4.6. \square

OSSERVAZIONE VII.5.2. Se M è uno spazio affine simmetrico del gruppo di Lie \mathbf{K} , il suo rivestimento universale \tilde{M} è uno spazio affine simmetrico del rivestimento universale $\tilde{\mathbf{K}}$ di \mathbf{K} .

VII.5.1. Spazi affini simmetrici piatti. Il *prolungamento affine* di un sottogruppo \mathbf{G} di $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$ è il prodotto diretto $\mathbb{R}^m \times \mathbf{G}$, su cui le operazioni di gruppo sono definite da

$$(v, a)(w, b) = (v + aw, ab), \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^m, \forall a, b \in \mathbf{G}.$$

Il gruppo \mathbf{G} si può identificare al sottogruppo $\mathbf{H} = \{(0, a) \mid a \in \mathbf{G}\}$ di \mathbf{G}_1 . A sua volta, \mathbf{G}_1 si può identificare al sottogruppo di $\mathbf{GL}_{m+1}(\mathbb{R})$ delle matrici

$$(7.5.2) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & a \end{pmatrix} \quad \text{con } v \in \mathbb{R}^m, a \in \mathbf{G}.$$

La proiezione $\text{pr}_{\mathbf{G}} : \mathbf{G}_1 \ni (v, a) \rightarrow a \in \mathbf{G}$ è un omomorfismo di gruppi e quindi il suo nucleo, che è il sottogruppo abeliano $\mathbb{R}^m \simeq \{(v, I_m) \mid v \in \mathbb{R}^m\}$, è un sottogruppo normale di \mathbf{G}_1 . La sua algebra di Lie $\mathfrak{m} = \{(v, 0) \mid v \in \mathbb{R}^m\} \simeq \mathbb{R}^m$ è abeliana ed è un complemento lineare nell'algebra di Lie $\mathfrak{g}_1 = \{(v, X) \mid v \in \mathbb{R}^m, X \in \mathfrak{g}\}$ di \mathbf{G}_1 dell'algebra di Lie $\mathfrak{h} = \{(0, X) \mid X \in \mathfrak{g}\} \simeq \mathfrak{g}$ del nucleo della proiezione $\text{pr}_{\mathbf{G}}$. Lo spazio omogeneo $\mathbb{R}^m \simeq \mathbf{G}_1/\mathbf{G}$ è uno spazio affine simmetrico con curvatura nulla.

Lo spazio affine \mathbf{G}_1/\mathbf{G} corrisponde all'involuzione $(v, X) \rightarrow (-v, X)$ di \mathfrak{g}_1 .

Tutti gli spazi affini simmetrici piatti sono di questa forma.

VII.5.2. Automorfismi di un'algebra di Lie reale. Sia \mathfrak{k} un'algebra di Lie reale. Ricordiamo che ogni $X \in \mathfrak{k}$ definisce un'applicazione

$$(7.5.3) \quad \text{ad}(X) \ni Y \longrightarrow \text{ad}(X)Y = [X, Y] \in \mathfrak{k}.$$

Per l'identità di Jacobi l'applicazione $\text{ad}(X)$ è una derivazione di \mathfrak{g} . È cioè soddisfatta la

$$\text{ad}(X)[Y, Z] = [\text{ad}(X)Y, Z] + [Y, \text{ad}(X)Z], \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}.$$

DEFINIZIONE VII.5.3. Chiamiamo *derivazione* dell'algebra di Lie \mathfrak{g} un'applicazione lineare $D \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ che soddisfi l'identità di Leibnitz

$$(7.5.4) \quad D[X, Y] = [DX, Y] + [X, DY], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Indichiamo con $\mathfrak{D}(\mathfrak{g})$ l'insieme di tutte le derivazioni di \mathfrak{g} . Le derivazioni $\text{ad}(X)$, al variare di X in \mathfrak{g} , si dicono *interne*. Indichiamo con $\text{ad}(\mathfrak{g}) = \{\text{ad}(X) \mid X \in \mathfrak{g}\}$ l'insieme delle derivazioni interne di \mathfrak{g} .

LEMMA VII.5.4. *Le derivazioni di \mathfrak{g} formano una sottoalgebra di Lie $\mathfrak{D}(\mathfrak{g})$ dell'algebra di Lie $\mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ degli endomorfismi lineari di \mathfrak{g} .*

Le derivazioni interne formano un ideale $\text{ad}(\mathfrak{g})$ di $\mathfrak{D}(\mathfrak{g})$.

DIMOSTRAZIONE. L'insieme $\mathfrak{D}(\mathfrak{g})$ delle derivazioni è uno spazio vettoriale reale, perché (7.5.4) è, per ogni $X, Y \in \mathfrak{g}$, una relazione lineare in D . Siano poi $D_1, D_2 \in \mathfrak{D}(\mathfrak{g})$. Abbiamo

$$\begin{aligned} [D_1, D_2][X, Y] &= D_1 D_2[X, Y] - D_2 D_1[X, Y] \\ &= D_1([D_2 X, Y] + [X, D_2 Y]) - D_2([D_1 X, Y] + [X, D_1 Y]) \\ &= [D_1 D_2 X, Y] + [D_2 X, D_1 Y] + [D_1 X, D_2 Y] + [X, D_1 D_2 Y] \\ &\quad - [D_2 D_1 X, Y] - [D_1 X, D_2 Y] - [D_2 X, D_1 Y] - [X, D_2 D_1 Y] \\ &= [(D_1 D_2 - D_2 D_1)X, Y] + [X, (D_1 D_2 - D_2 D_1)Y] \\ &= [[D_1, D_2]X, Y] + [X, [D_1, D_2]Y]. \end{aligned}$$

Questo dimostra che anche $[D_1, D_2]$ è una derivazione e quindi $\mathfrak{D}(\mathfrak{g})$ è una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$.

Osserviamo che $\text{ad}(\mathfrak{g})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathfrak{D}(\mathfrak{g})$, perché $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{D}(\mathfrak{g})$ è un'applicazione lineare. Abbiamo poi

$$[\text{ad}(X), \text{ad}(Y)] = \text{ad}([X, Y]) \quad \text{e} \quad [D, \text{ad}(X)] = \text{ad}(DX), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}, \forall D \in \mathfrak{D}(\mathfrak{g}),$$

e questo dimostra che $\text{ad}(\mathfrak{g})$ è un ideale in $\mathfrak{D}(\mathfrak{g})$. \square

DEFINIZIONE VII.5.5. Un *automorfismo* di \mathfrak{g} è un elemento $\phi \in \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ tale che

$$(7.5.5) \quad [\phi(X), \phi(Y)] = \phi([X, Y]), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Gli automorfismi di \mathfrak{g} formano un gruppo $\mathbf{Aut}(\mathfrak{g})$, che si dice il *gruppo degli automorfismi di \mathfrak{g}* .

PROPOSIZIONE VII.5.6. $\mathbf{Aut}(\mathfrak{g})$ è un sottogruppo chiuso di $\mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$, con algebra di Lie $\mathfrak{D}(\mathfrak{g})$. Il sottogruppo analitico $\mathbf{Int}(\mathfrak{g})$ di $\mathbf{Aut}(\mathfrak{g})$ generato da $\text{ad}(\mathfrak{g})$ è un sottogruppo normale di $\mathbf{Aut}(\mathfrak{g})$. \square

DIMOSTRAZIONE. Scriviamo il prodotto di Lie in \mathfrak{g} come una forma bilineare antisimmetrica $B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$. Scegliendo una base otteniamo un'identificazione

$\mathfrak{k} \simeq \mathbb{R}^n$ e possiamo rappresentare il prodotto nella forma $[X, Y] = X^\dagger BY$, per una matrice antisimmetrica B . Allora

$$\mathbf{Aut}(\mathfrak{k}) = \{a \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) \mid a^\dagger Ba = B\}$$

e di conseguenza $\mathbf{Aut}(\mathfrak{k})$ è un sottogruppo chiuso algebrico di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, con algebra di Lie

$$\{A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \mid A^\dagger B + BA = 0\} = \mathfrak{D}(\mathfrak{k}).$$

Se $a \in \mathbf{Aut}(\mathfrak{k})$ ed $X \in \mathfrak{k}$, allora

$$\begin{aligned} \text{Ad}_{\mathfrak{D}(\mathfrak{k})}(a)(\text{ad}_{\mathfrak{k}}(X))(Y) &= a \circ \text{ad}_{\mathfrak{k}}(X) \circ a^{-1}(Y) = a([X, a^{-1}(Y)]) = [a(X), Y] \\ &= \text{ad}(aX)(Y) \end{aligned}$$

Questo dimostra che $\text{Ad}_{\mathfrak{D}(\mathfrak{k})}(\text{ad}(\mathfrak{k})) = \text{ad}(\mathfrak{k})$ e quindi $\text{ad}(\mathbf{Aut}(\mathfrak{k}))$ trasforma in sé il sottogruppo $\mathbf{Int}(\mathfrak{k})$, che quindi è un sottogruppo normale. \square

OSSERVAZIONE VII.5.7. Osserviamo che il sottogruppo $\mathbf{Int}(\mathfrak{k})$ può non essere chiuso in $\mathbf{Aut}(\mathfrak{k})$. Si consideri ad esempio l'algebra \mathfrak{k} delle matrici complesse triangolari superiori generata dalle quattro matrici

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\pi+2}{3} & & \\ & \frac{\pi-1}{3} & \\ & & -\frac{2\pi+1}{3} \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} [A, B_1] &= B_1, & [A, B_2] &= \pi B_2, & [A, C] &= (\pi + 1)C, \\ [B_1, B_2] &= C, & [B_1, C] &= 0, & [B_2, C] &= 0. \end{aligned}$$

Nella base A, B_1, B_2, C Le matrici diagonali di $\mathbf{Int}(\mathfrak{k})$ sono della forma

$$\text{diag}(1, e^z, e^{\pi z}, e^{(1+\pi)z})$$

al variare di z in \mathbb{C} . La sua chiusura contiene tutte le matrici della forma

$$\text{diag}(1, \rho \exp(it), \rho^\pi \exp(is), \rho^{1+\pi} \exp(i(t+s))),$$

con $s, t, \rho \in \mathbb{R}$ e $\rho > 0$. Quindi $\mathbf{Int}(\mathfrak{k})$ non è un sottogruppo chiuso di $\mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{k})$.

VII.5.3. Involuzioni \mathbb{C} -lineari del gruppo lineare complesso. Gli automorfismi interni dell'algebra di Lie lineare complessa $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ sono della forma

$$\text{Ad}(a)(X) = aXa^{-1}, \quad \forall X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}), \quad \text{con } a \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}).$$

Infatti $\exp(\text{Ad}(X))(Y) = \exp(X)Y \exp(-X)$ per ogni $X, Y \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ e l'esponenziale di matrici $\exp : \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ è surgettivo. Il nucleo di Ad è costituito dai multipli dell'identità. Quindi

PROPOSIZIONE VII.5.8. *Il gruppo degli automorfismi interni di $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ e di $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ è il gruppo $\mathbf{PL}_n(\mathbb{C}) = \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})/(\mathbb{C}^* I_n)$ delle proiettività di \mathbb{CP}^{n-1} .* \square

PROPOSIZIONE VII.5.9. *Gli automorfismo involutivi interni di $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ e di $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ sono coniugati, modulo automorfismi, a*

$$(I) \quad \vartheta(X) = I_{\nu, n-\nu} X I_{\nu, n-\nu} \quad \text{con } I_{\nu, n-\nu} = \begin{pmatrix} I_\nu & \\ & -I_{n-\nu} \end{pmatrix}$$

DIMOSTRAZIONE. Un automorfismo interno $X \rightarrow aXa^{-1}$ è involutivo se e soltanto se $a^2Xa^{-2} = X$ per ogni $X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$. Questo equivale al fatto che a^2 commuti con ogni matrice X e sia quindi un multiplo dell'identità. Il polinomio minimo di a divide quindi un polinomio della forma $x^2 - k$, con $k \in \mathbb{C}$. Perciò a è semisemplice ed abbiamo, in una base opportuna di \mathbb{C}^n ,

$$a = \text{diag}(\underbrace{\lambda, \dots, \lambda}_{\nu \text{ volte}}, \underbrace{-\lambda, \dots, -\lambda}_{n - \nu \text{ volte}}).$$

Moltiplicando questa matrice per una costante opportuna, possiamo fare in modo che $a \in \mathbf{SL}_n(\mathbb{C})$. Da questo segue la tesi. \square

Indichiamo con $\mathbf{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{f})$ il gruppo degli automorfismi \mathbb{C} -lineari di un'algebra di Lie complessa \mathfrak{f} . Chiaramente $\mathbf{Int}(\mathfrak{f})$ è un sottogruppo normale di $\mathbf{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{f})$.

TEOREMA VII.5.10 (Cartan). *Il quoziente $\mathbf{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{sl}_{\mathbb{C}}(n))/\mathbf{Int}(\mathfrak{sl}_{\mathbb{C}}(n))$ è un gruppo isomorfo a \mathbb{Z}_2 , generato dall'immagine dell'automorfismo $X \rightarrow -X^\dagger$.* \square

PROPOSIZIONE VII.5.11. *Gli automorfismo involutivi esterni \mathbb{C} -lineari di $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ sono coniugati, modulo automorfismi, a*

$$(II) \quad \vartheta(X) = -X^\dagger;$$

$$(III) \quad \vartheta(X) = JX^\dagger J \text{ ove } n = 2\nu \text{ è pari e } J = \begin{pmatrix} & -I_\nu \\ I_\nu & \end{pmatrix}.$$

DIMOSTRAZIONE. Per il Teorema VII.5.10 un automorfismo esterno ϑ di $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ è della forma $\vartheta(X) = -aX^\dagger a^{-1}$, con $a \in \mathbf{SL}_n(\mathbb{C})$. È

$$X = \vartheta^2(X) = a(a^{-1})^\dagger X a^\dagger a^{-1} \implies X a^\dagger a^{-1} = a^\dagger a^{-1} X, \quad \forall X \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}).$$

Da questa relazione segue che $a^\dagger a^{-1} = kI_n$, cioè $a^\dagger = ka$. Allora è $a = a^{\dagger\dagger} = k^2 a$ e quindi $k = \pm 1$. Poiché $k^n = 1$ in quanto $a, a^\dagger \in \mathbf{SL}_n(\mathbb{C})$, ne segue che $k = 1$, ed a è simmetrica, se n è dispari ed a può essere o simmetrica o antisimmetrica quando n è pari. Ogni matrice simmetrica $a \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ si può rappresentare nella forma $a = bb^\dagger$ per un'opportuna $b \in \mathbf{SL}_n(\mathbb{C})$. Quindi $\vartheta(X) = -b([b^{-1}Xb]^\dagger)b^{-1}$, cioè $\text{ad}(b^{-1}) \circ \vartheta(X) = -[\text{ad}(b^{-1}(X))]^\dagger$ e quindi ϑ è coniugata ad un automorfismo involutivo della forma (II). In modo analogo, nel caso n sia pari ed a antisimmetrica, si verifica che ϑ è coniugata a un endomorfismo di tipo (III). \square

Abbiamo quindi tre tipi di spazi affini simmetrici complessi connessi e semplicemente connessi del gruppo $\mathbf{SL}_n(\mathbb{C})$:

$$(I) \quad \mathbf{SL}_n(\mathbb{C})/\mathbf{S}(\mathbf{GL}_\nu(\mathbb{C}) \times \mathbf{GL}_{n-\nu}(\mathbb{C})), \quad 1 \leq \nu \leq n/2,$$

$$(II) \quad \mathbf{SL}_n(\mathbb{C})/\mathbf{SO}_n(\mathbb{C}),$$

$$(III) \quad \mathbf{SL}_{2\nu}(\mathbb{C})/\mathbf{Sp}_\nu(\mathbb{C}),$$

ove ricordiamo le notazioni pei gruppi di Lie complessi e le loro algebre di Lie:

$$\mathbf{SO}_n(\mathbb{C}) = \{a \in \mathbf{SL}_n(\mathbb{C}) \mid a^\dagger a = I_n\}, \quad \mathfrak{o}_n(\mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) \mid X + X^\dagger = 0\},$$

$$\mathbf{Sp}_\nu(\mathbb{C}) = \{a \in \mathbf{SL}_{2\nu}(\mathbb{C}) \mid a^\dagger J a = J\}, \quad \mathfrak{sp}_\nu(\mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{sl}_{2\nu}(\mathbb{C}) \mid X^\dagger J + JX = 0\}.$$

VII.5.4. Forme reali. Ogni algebra di Lie reale \mathfrak{k}_0 si può *complessificare*, estendendo il prodotto alla complessificazione \mathfrak{k} dello spazio vettoriale \mathfrak{k}_0 per \mathbb{C} -bilinearità. Viceversa, se un'algebra di Lie complessa \mathfrak{k} contiene una sottoalgebra reale \mathfrak{k}_0 di cui è la complessificazione, il coniugio

$$X + iY \longrightarrow X - iY, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{k}_0$$

rispetto alla forma reale \mathfrak{k}_0 è un automorfismo involutivo anti- \mathbb{C} -lineare di \mathfrak{k} con \mathfrak{k}_0 come luogo di punti fissi.

PROPOSIZIONE VII.5.12. *Sia \mathfrak{k} un'algebra di Lie complessa. Il luogo di punti fissi di un qualsiasi suo automorfismo involutivo anti- \mathbb{C} -lineare è una forma reale \mathfrak{k}_0 di \mathfrak{k} .*

DIMOSTRAZIONE. Sia ϑ un automorfismo involutivo anti- \mathbb{C} -lineare di \mathfrak{k} . Indichiamo con \mathfrak{k}_0 e \mathfrak{k}_1 gli autospazi reali in \mathfrak{k} di ϑ , relativi agli autovalori 1 e -1 , rispettivamente. Abbiamo $i\mathfrak{k}_0 \subset \mathfrak{k}_1$ e $i\mathfrak{k}_1 \subset \mathfrak{k}_0$, da cui deduciamo che $\mathfrak{k}_1 = i\mathfrak{k}_0$ e quindi $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{k}_1 = \mathfrak{k}_0 \oplus i\mathfrak{k}_0$ e \mathfrak{k} è la complessificazione dell'algebra di Lie reale \mathfrak{k}_0 . \square

Sia \mathbf{K} un gruppo di Lie connesso e semplicemente connesso con algebra di Lie \mathfrak{k} e sia \mathbf{K}_0 il sottogruppo analitico di \mathbf{K} generato dalla sua forma reale \mathfrak{k}_0 . Per la Proposizione VII.5.1 il sottogruppo \mathbf{K}_0 è chiuso e \mathbf{K}/\mathbf{K}_0 ammette una connessione lineare, associata alla decomposizione $\mathfrak{k} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ con $\mathfrak{h} = \mathfrak{k}_0$ ed $\mathfrak{m} = i\mathfrak{k}_0$, che lo rende uno spazio affine simmetrico.

Élie Cartan ha classificato (a meno di automorfismi) le forme reali delle algebre di Lie complesse semisemplici, riconducendolo a quello degli automorfismi \mathbb{C} -lineari involutivi che commutano con una involuzione anti- \mathbb{C} -lineare fissata.

VII.5.5. Sottoalgebre di Cartan. Nella sua tesi di dottorato, nel 1894, É. Cartan introdusse una nozione fondamentale per la classificazione delle algebre di Lie semisemplici e riduttive⁷ complesse e reali e quindi degli spazi simmetrici affini e Riemanniani.

Sia \mathfrak{k} un'algebra di Lie.

DEFINIZIONE VII.5.13. Una *sottoalgebra di Cartan* di \mathfrak{k} è una sua sottoalgebra di Lie nilpotente \mathfrak{d} , massimale tra quelle che sono autonormalizzanti, per cui cioè

$$\mathfrak{d} = \{X \in \mathfrak{k} \mid [X, \mathfrak{d}] \subset \mathfrak{d}\}.$$

Le sottoalgebre di Cartan di un'algebra riduttiva \mathfrak{k} coincidono con le loro sottoalgebre abeliane massimali, e queste a loro volta sono i commutatori $\mathfrak{d} = \{X \in \mathfrak{k} \mid [X, A] = 0\}$ degli elementi regolare A di \mathfrak{k} , quelli cioè per cui $\text{ad}(A) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{k})$ abbia rango massimo.

Supponiamo che $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ per qualche n e sia \mathfrak{d} una sua sottoalgebra di Cartan. Il sottogruppo analitico \mathbf{D} di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ generato da \mathfrak{d} è un gruppo abeliano, isomorfo a un prodotto diretto $\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} \times S^1 \times \cdots \times S^1$ di ℓ_v copie del gruppo additivo \mathbb{R} ed ℓ_k copie del gruppo moltiplicativo $S^1 = \{z \mid |z| = 1\} \subset \mathbb{C}$. Diciamo che \mathfrak{d} è *vettoriale* se $\ell_k = 0$, *compatta* se $\ell_v = 0$, e chiamiamo in generale ℓ_v la sua

⁷Un'algebra di Lie \mathfrak{k} si dice riduttiva se, per ogni suo ideale \mathfrak{h} , esiste un altro ideale \mathfrak{a} tale che $\mathfrak{k} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}$.

dimensione vettoriale ed ℓ_k la sua *dimensione compatta*. Queste nozioni sono però relative alla rappresentazione di \mathfrak{k} come algebra lineare. Esse diventano indipendenti dalla particolare realizzazione se ci restringiamo al caso delle algebre di Lie semisemplici.

DEFINIZIONE VII.5.14. Un'algebra di Lie semisemplice reale si dice *split* se contiene una sottoalgebra di Cartan vettoriale.

Un'algebra di Lie semisemplice si dice *compatta* se è l'algebra di Lie di un gruppo compatto.

Vale il

TEOREMA VII.5.15. *Ogni algebra di Lie semisemplice complessa ammette una forma reale split e una forma reale compatta, uniche a meno di isomorfismi.* \square

VII.5.6. Forme reali dei gruppi classici semplici. Le forme reali delle algebre di Lie semisemplici, modulo il coniugio, sono state classificate da E.Cartan. Diamo la lista delle forme reali per le algebre semplici complesse $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$, $\mathfrak{so}_{2\nu+1}(\mathbb{C})$, $\mathfrak{sp}_n(\mathbb{C})$, $\mathfrak{so}_{2\nu}(\mathbb{C})$.

Poniamo

$$J_\nu = \begin{pmatrix} 0 & I_\nu \\ -I_\nu & 0 \end{pmatrix}, \quad I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}, \quad I_{p,q,r} = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & I_r \end{pmatrix}.$$

Forme reali di $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$. Gli spazi omogenei $\mathbf{SL}_n(\mathbb{C})/\mathbf{K}_0$, ove \mathbf{K}_0 è una forma reale di $\mathbf{SL}_n(\mathbb{C})$ sono spazi affini simmetrici di dimensione $n^2 - 1$.

- (1) $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ è la forma split, corrispondente all'involuzione $\vartheta(X) = \bar{X}$. Lo spazio affine simmetrico $\mathbf{SL}_n(\mathbb{C})/\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$ è la grassmanniana degli n -piani totalmente reali di \mathbb{C}^n . È una varietà differenziabile di dimensione $n^2 - 1$.
- (2) $\mathfrak{su}_n = \{X \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) \mid X^* + X = 0\}$ è la forma compatta, corrispondente all'involuzione $\vartheta(X) = -X^*$. Lo spazio affine simmetrico corrispondente è uno spazio Riemanniano simmetrico con curvatura sezionale negativa $\mathbf{SL}_n(\mathbb{C})/\mathbf{SU}_n$.
- (3) $\mathfrak{su}(\nu, n - \nu)$, per $1 \leq \nu < n$, con $\vartheta(X) = -I_{\nu, n-\nu} X^* I_{\nu, n-\nu}$. Lo spazio affine simmetrico $\mathbf{SL}_n(\mathbb{C})/\mathbf{SU}(\nu, n - \nu)$ è l'aperto dello spazio proiettivo reale $\mathbb{P}(\mathfrak{p}_n)$ associato allo spazio vettoriale \mathfrak{p}_n delle forme Hermitiane simmetriche, che corrisponde alle forme non degeneri di indice di Witt ν .
- (4) $\mathfrak{sl}_\nu(\mathbb{H}) = \{X \in \mathfrak{sl}_{2\nu}(\mathbb{C}) \mid X J_\nu = J_\nu \bar{X}\}$, con $n = 2\nu$ pari e $\vartheta(X) = -J_\nu \bar{X} J_\nu$. Il sottogruppo $\mathbf{SL}_\nu(\mathbb{H})$ consiste delle matrici a di $\mathbf{SL}_{2\nu}(\mathbb{C})$ che soddisfano $aJ = J\bar{a}$.

Forme reali di $\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C})$. Gli spazi omogenei $\mathbf{SO}_{2n+1}(\mathbb{C})/\mathbf{K}_0$, ove abbiamo indicato con \mathbf{K}_0 una forma reale di $\mathbf{SO}_{2n+1}(\mathbb{C})$, sono spazi affini simmetrici di dimensione $n(2n + 1)$. Essi sono le grassmanniane dei $(2n + 1)$ -piani totalmente reali di \mathbb{C}^{2n+1} su cui la restrizione della parte reale di una forma bilineare simmetrica assegnata è non degenera ed ha segnatura assegnata.

Su $\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{sl}_{2n+1}(\mathbb{C}) \mid X^\dagger = -X \text{ e } \bar{X} = -X^*\}$.

- (1) $\mathfrak{so}_{n,n+1} = \{X \in \mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C}) \mid X^* I_{n,n+1} + I_{n,n+1} X = 0\}$ è la forma split, con $\vartheta(X) = -I_{n,n+1} X^* I_{n,n+1}$.
- (2) \mathfrak{so}_{2n+1} è la forma compatta, con $\vartheta(X) = -X^* = \bar{X}$. Lo spazio omogeneo corrispondente $\mathbf{SO}_{2n+1}(\mathbb{C})/\mathbf{SO}_{2n+1}$ è Riemanniano simmetrico con curvatura sezionale negativa.
- (3) $\mathfrak{so}_{\nu,2n-\nu+1} = \{X \in \mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C}) \mid X^* I_{\nu,2n-\nu+1} + I_{\nu,2n-\nu+1} X = 0\}$, con $0 < \nu < n$, con $\vartheta(X) = -I_{\nu,2n-\nu+1} X^* I_{\nu,2n-\nu+1}$.

Forme reali di $\mathfrak{sp}_n(\mathbb{C})$. È $\mathfrak{sp}_n(\mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{sl}_{2n}(\mathbb{C}) \mid J_n X + X^\dagger J_n = 0\}$. Poiché $J_n^2 = -I_{2n}$, otteniamo $-X^* = J\bar{X}J$. Osserviamo che, se $0 \leq \nu \leq n$, allora $J I_{\nu,2(n-\nu),\nu} = I_{\nu,2(n-\nu),\nu} J$. Gli spazi affini simmetrici $\mathbf{Sp}_n(\mathbb{C})/\mathbf{K}_0$, ove \mathbf{K}_0 è una forma reale di $\mathbf{Sp}_n(\mathbb{C})$, hanno dimensione $n(2n+1)$.

- (1) $\mathfrak{sp}_n(\mathbb{R}) = \{X \in \mathfrak{sl}_{2n}(\mathbb{R}) \mid J_n X + X^\dagger J_n = 0\}$ è la forma split, con $\vartheta(X) = \bar{X}$. Il quoziente $\mathbf{Sp}_n(\mathbb{C})/\mathbf{Sp}_n(\mathbb{R})$ è uno spazio affine simmetrico che si può identificare all'aperto nella grassmanniana dei sottospazi reali di dimensione $2n$ di \mathbb{C}^{2n} su cui la restrizione della parte reale di una forma bilineare alternata assegnata su \mathbb{C}^{2n} è non degenera.
- (2) $\mathfrak{sp}_n = \{X \in \mathfrak{sp}_n(\mathbb{C}) \mid X + X^* = 0\} = \mathfrak{sp}_n(\mathbb{C}) \cap \mathfrak{su}_n$ è la forma compatta, con $\vartheta(X) = -X^*$. Il quoziente $\mathbf{Sp}_n(\mathbb{C})/\mathbf{Sp}_n$ è uno spazio Riemanniano simmetrico con curvatura sezionale negativa.
- (3) $\mathfrak{sp}_{\nu,n-\nu} = \{X \in \mathfrak{sp}_n(\mathbb{C}) \mid X^* I_{\nu,2n-2\nu,\nu} + I_{\nu,2n-2\nu,\nu} X = 0\}$, con $0 < \nu < n$ e $\vartheta(X) = -I_{\nu,2n-2\nu,\nu} X^* I_{\nu,2n-2\nu,\nu}$.

Forme reali di $\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})$. È $X^* = -\bar{X}$. Gli spazi affini simmetrici $\mathbf{SO}_{2n}(\mathbb{C})/\mathbf{K}_0$, con \mathbf{K}_0 forma reale di $\mathbf{SO}_{2n}(\mathbb{C})$, hanno dimensione $n(2n-1)$.

- (1) La forma split è $\mathfrak{o}_{n,n} = \{X \in \mathfrak{o}_{2n}(\mathbb{C}) \mid X^* I_{n,n} + I_{n,n} X = 0\}$, con $\vartheta(X) = -I_{n,n} X^* I_{n,n}$.
- (2) La forma compatta è $\mathfrak{o}_{2n} = \{X \in \mathfrak{sl}_{2n}(\mathbb{R}) \mid X^\dagger + X = 0\}$, con $\vartheta(X) = \bar{X} = -X^*$. Il quoziente $\mathbf{SO}_{2n}(\mathbb{C})/\mathbf{SO}_{2n}$ è Riemanniano simmetrico con curvatura sezionale negativa.
- (3) $\mathfrak{o}_{\nu,2n-\nu} = \{X \in \mathfrak{sl}_{2n}(\mathbb{R}) \mid X^\dagger I_{\nu,2n-\nu} + I_{\nu,2n-\nu} X = 0\}$, con $0 < \nu < n$. Lo spazio affine simmetrico $\mathbf{SO}_n(\mathbb{C})/\mathbf{SO}_{\nu,n-\nu}$ ha dimensione $n(n-1)/2$.
- (4) $\mathfrak{su}_n^*(\mathbb{H}) = \{X \in \mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C}) \mid X J_n = J_n \bar{X}\} = \left\{ \begin{pmatrix} X & iY \\ i\bar{Y} & \bar{X} \end{pmatrix} \middle| X \in \mathfrak{o}_\nu(\mathbb{C}), Y \in \mathfrak{u}_n \right\}$,
con $\vartheta(X) = -J_n \bar{X} J_n$.

Applicazione esponenziale e campi di Jacobi

VIII.1. L'applicazione esponenziale

Sia M una varietà differenziabile affine. Fissiamo un punto $p_0 \in M$. Le geodetiche di punto iniziale p_0 sono parametrizzate dalla loro velocità iniziale $v \in T_{p_0}M$. La geodetica γ_v , di velocità iniziale v , è la soluzione del problema di Cauchy

$$(8.1.1) \quad \begin{cases} \frac{D^2\gamma_v}{dt^2} = 0, \\ \gamma_v(0) = p_0, \\ \dot{\gamma}_v(0) = v. \end{cases}$$

Indichiamo con I_v il suo intervallo massimale di definizione. È $I_{kv} = k^{-1}I_v$ per ogni numero reale $k \neq 0$ e

$$(8.1.2) \quad \gamma_{kv}(t) = \gamma_v(kt), \quad \forall t \in k^{-1}I_v.$$

Per la dipendenza \mathcal{C}^∞ delle soluzioni del problema di Cauchy dai dati iniziali, (8.1.1), l'insieme

$$(8.1.3) \quad W_{p_0} = \{v \in T_{p_0}M \mid 1 \in I_v\}$$

è un intorno aperto di 0 in $T_{p_0}M$, che, per la (8.1.2) è stellato rispetto all'origine. La

$$(8.1.4) \quad \text{Exp}_{p_0} : W_{p_0} \ni v \longrightarrow \gamma_v(1) \in M$$

è un'applicazione di classe \mathcal{C}^∞ .

DEFINIZIONE VIII.1.1. La (8.1.4) si dice *l'applicazione esponenziale in p_0* associata alla connessione lineare Γ di M .

OSSERVAZIONE VIII.1.2. Se la connessione Γ è completa, allora, per ogni punto p_0 , l'applicazione esponenziale è definita su $T_{p_0}M$.

ESEMPIO VIII.1.3. Se \mathbf{G} è un gruppo di Lie reale su cui sia fissata una connessione di Cartan-Shauten, è $\text{Exp}_e(X) = \exp(X)$ per ogni $X \in \mathfrak{g} = T_e\mathbf{G}$. Usando l'identificazione $T\mathbf{G} \ni v \rightarrow (\pi(v), \omega_{\mathbf{G}}(v)) \in \mathbf{G} \times \mathfrak{g}$, abbiamo $\text{exp}_a(X) = a \exp(X)$ per ogni $a \in \mathbf{G}$ ed $X \in \mathfrak{g}$. In particolare, \mathbf{G} con una qualsiasi delle connessioni di Cartan-Shauten, è completo.

PROPOSIZIONE VIII.1.4. *L'applicazione esponenziale in $p_0 \in M$ definisce un diffeomorfismo di un intorno aperto di 0 in $T_{p_0}M$ su un intorno aperto di p_0 in M .*

DIMOSTRAZIONE. L'enunciato è conseguenza del teorema dell'applicazione inversa, perché il differenziale di Exp_{p_0} in 0 è l'identità su $T_{p_0}M$. \square

In particolare, l'esponenziale in p_0 definisce una carta locale con centro in p_0 .

VIII.2. Intorni normali ed intorni convessi

DEFINIZIONE VIII.2.1. Un intorno stellato $N_0(p)$ dell'origine in T_pM , contenuto in W_{p_0} , e su cui Exp_p definisca un diffeomorfismo su un aperto N_p di M , si dice *normale*, ed $N_p = \text{Exp}_p(N_0(p))$ si dice *un intorno normale di p in M* .

DEFINIZIONE VIII.2.2. Se v_1, \dots, v_m è una base di T_pM , si dicono *coordinate normali del punto $q \in N_p$* i numeri reali x^1, \dots, x^m tali che

$$\text{Exp}_p(x^1 v_1 + \dots + x^m v_m) = q.$$

Le coordinate normali definiscono una carta coordinata in N_p .

TEOREMA VIII.2.3. *Ogni punto $p_0 \in M$ ha un sistema fondamentale di intorni normali N_{p_0} che sono anche intorni normali di ciascuno dei suoi punti.*

In particolare, per ogni coppia di punti p_1, p_2 di N_{p_0} vi è una e una sola geodetica di estremi¹ p_1, p_2 contenuta in N_{p_0} .

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo coordinate locali x^1, \dots, x^m in un intorno U di p_0 in M , con $x^j(p_0) = 0$ per $j = 1, \dots, m$. Se $q_0 \in U$ ed $r > 0$, e definiamo

$$V(q_0, r) = \left\{ p \in U \mid \sum_{j=1}^m |x^j(p) - x^j(q_0)|^2 < r^2 \right\}.$$

Utilizzando i teoremi di esistenza, unicità, dipendenza \mathcal{C}^∞ dai dati iniziali per le equazioni differenziali ordinarie ed il teorema delle funzioni implicite, possiamo trovare un $r_0 > 0$ tale che, per ogni $p \in V(p_0, 2r_0)$, l'aperto $V(p, 2r_0)$ sia contenuto in un intorno normale di p . In particolare, tutti gli aperti $V(p, r)$, con $p \in V(p_0, r_0)$ ed $r \leq r_0$ sono *semplici*, ovvero contengono al più un segmento di geodetica che congiunga due punti assegnati.

Sia $F(p) = \sum_{j=1}^m |x^j(p)|^2 \in \mathcal{C}^\infty(U)$. Ad una geodetica $\gamma \in \mathcal{C}^\infty([a, b], V(p_0, r_0))$ associamo la funzione $G(t) = F(\gamma(t)) \in \mathcal{C}^\infty([a, b])$. Abbiamo²

$$\begin{aligned} \dot{G}(t) &= 2 \sum_{j=1}^m x^j(t) \dot{x}^j(t), \\ \ddot{G}(t) &= 2 \sum_{j=1}^m \left(|\dot{x}^j(t)|^2 + x^j(t) \ddot{x}^j(t) \right) \\ &= 2 \sum_{i,j=1}^m \left(\delta_{i,j} - \sum_{h=1}^m x^h(t) \cdot \Gamma_{i,j}^h(\gamma(t)) \right) \dot{x}^i(t) \dot{x}^j(t). \end{aligned}$$

Possiamo quindi determinare un numero reale r^* , con $0 < r^* \leq r_0$, tale che, per ogni geodetica $\gamma : [a, b] \rightarrow V(p_0, r^*)$, la funzione $F(\gamma(t))$ sia strettamente convessa.

¹Se $\gamma \in \mathcal{C}^0([0, 1], M)$ chiamiamo i punti $\gamma(0)$ e $\gamma(1)$ *estremi* di γ .

²I simboli di Christoffel $\Gamma_{i,j}^h$ sono definiti da $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{h=1}^m \Gamma_{i,j}^h \frac{\partial}{\partial x^h}$. Le geodetiche soddisfano le equazioni locali $\ddot{x}^h + \sum_{i,j=1}^m \dot{x}^i \dot{x}^j = 0$, per $1 \leq h \leq m$. Vedi §XXIX.3.

Fissiamo un $r > 0$ tale che ogni $p \in V(p_0, r)$ abbia un intorno normale N_p con $V(p_0, r) \subset N_p \subset V(p_0, r^*)$. Dati due punti $q_0, q_1 \in V(p_0, r)$ vi è un'unica geodetica $\gamma : [0, 1] \rightarrow V(p_0, r^*)$, che congiunge q_0 a q_1 . Poiché $F(\gamma(0)) < r^2$, $F(\gamma(1)) < r^2$, segue dalla convessità di $F(\gamma(t))$ che $\gamma(t) \in V(p_0, r)$ per ogni $t \in [0, 1]$. \square

DEFINIZIONE VIII.2.4. Un sottoinsieme A di M si dice

- *convesso* se, per ogni coppia di suoi punti contiene una geodetica che li congiunge;
- *semplice* se, per ogni coppia di suoi punti vi è al più una geodetica che li congiunge.

Per il Teorema VIII.2.3, abbiamo:

TEOREMA VIII.2.5. *Ogni punto di M ammette un sistema fondamentale di intorni aperti semplici e convessi.* \square

Sia N_p un intorno normale di un punto $p \in M$. Per ogni $q \in N_p$, v'è un'unica geodetica $\gamma_{[p,q]} : [0, 1] \rightarrow N_p$ che congiunge p a q . Il trasporto parallelo lungo la geodetica $\gamma_{[p,q]}$ ci permette di definire un'applicazione lineare $\tau_{p,q} : T_p M \rightarrow T_q M$. Indichiamo con $v^* \in \mathfrak{X}(N_p)$ il campo di vettori

$$(8.2.1) \quad v^*(q) = \tau_{p,q}(v) \in \mathfrak{X}(N_p).$$

DEFINIZIONE VIII.2.6. Il campo di vettori (8.2.1) si dice *adattato* al vettore tangente $v \in T_p M$.

Possiamo utilizzare i campi di vettori adattati per esprimere con una formula il differenziale dell'esponenziale di una connessione analitica.

DEFINIZIONE VIII.2.7. Se M è una varietà analitica reale, la connessione ∇ si dice *analitica* se $\nabla_X Y$ è analitico in $U^{\text{aperto}} \subset M$ per ogni coppia di campi di vettori X, Y che siano analitici in U .

Questa condizione equivale al fatto che i simboli di Christoffel, calcolati in un sistema di riferimento analitico, siano analitici.

Indichiamo con L_X la derivata di Lie rispetto al campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$.

TEOREMA VIII.2.8. *Sia M una varietà analitica su cui sia assegnata una connessione affine analitica Γ . Siano $p \in M$ e $v \in T_p M$. Allora esiste un $\epsilon > 0$ tale che Exp_p sia definita ed analitica in un intorno di $\{tv \mid -\epsilon \leq t \leq \epsilon\}$ e si ha:*

$$(8.2.2) \quad (d\text{Exp}_p)(tv)(w) = \left\{ \frac{1 - e^{L_{-tv^*}}}{L_{tv^*}}(w^*) \right\}_{\text{Exp}_p(tv)} \quad \forall |t| \leq \epsilon.$$

OSSERVAZIONE VIII.2.9. Se (M, g) è una varietà Riemanniana, in coordinate normali (N_{p_0}, x) abbiamo:

$$(8.2.3) \quad \begin{cases} g_{i,j}(x) = \delta_{i,j} + O(|x|^2) \\ \Gamma_{j,k}^i(0) = 0. \end{cases}$$

VIII.3. Definizione dei campi di Jacobi

VIII.3.1. Superfici parametriche. Sia M una varietà differenziabile.

DEFINIZIONE VIII.3.1. Una *superficie parametrica in M* è il dato di un aperto connesso U di \mathbb{R}^2 e di un'applicazione differenziabile $f : U \rightarrow M$.

Siano (t, s) le coordinate cartesiane di \mathbb{R}^2 . Poniamo

$$\partial f(t, s)/\partial t = f_*(\partial/\partial t)_{(t,s)}, \quad \text{e} \quad \partial f(t, s)/\partial s = f_*(\partial/\partial s)_{(t,s)}.$$

Chiamiamo *campo di vettori su f* un'applicazione differenziabile $V : U \rightarrow TM$ che renda commutativo il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} & & TM \\ & \nearrow V & \downarrow \pi \\ U & & M \\ & \searrow f & \end{array}$$

Supponiamo ora che su M sia assegnata una connessione lineare Γ . Per ogni s fissato, la $t \rightarrow f(t, s)$, e per ogni t fissato la $s \rightarrow f(t, s)$, sono curve differenziabili in M e possiamo quindi calcolare le derivate covarianti di V lungo ciascuna di tali curve. Le denoteremo con

$$(8.3.1) \quad \frac{DV}{\partial t}(t, s) \quad \text{e} \quad \frac{DV}{\partial s}(t, s).$$

LEMMA VIII.3.2. Siano $f : U \rightarrow M$ una superficie parametrica in M e V un campo di vettori su f . Valgono allora le:

$$(8.3.2) \quad \frac{D}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s} = T \left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right),$$

$$(8.3.3) \quad \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} V - \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} V = R \left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right) V.$$

DIMOSTRAZIONE. La verifica delle formule è immediata quando la f si scriva, in un sistema di coordinate locali x^1, \dots, x^m , mediante:

$$(t, s) \rightarrow (t, s, 0, \dots, 0).$$

Ciò è possibile vicino a ciascun punto (t, s) in cui la f sia un'immersione, cioè in cui $\frac{\partial f}{\partial t}$ e $\frac{\partial f}{\partial s}$ siano linearmente indipendenti. Perturbando la f , ed osservando che le formule che vogliamo dimostrare dipendono con continuità dalla f e dalle sue derivate, ci riconduciamo al caso in cui f sia un'immersione. \square

VIII.3.2. L'equazione di Jacobi. Fissiamo un punto $p \in M$ e consideriamo l'applicazione esponenziale Exp_p , definita sull'intorno W_p di 0 in $T_p M$. Per calcolarne il differenziale in un punto $v \in W_p$, consideriamo una curva $v(s) \in \mathcal{C}^\infty([-\epsilon, \epsilon], T_p M)$ con $v(0) = v$ e $\dot{v}(0) = w$ e la superficie parametrica

$$(8.3.4) \quad f(t, s) = \text{Exp}_p(t v(s)),$$

definita su un intorno aperto U di $[0, 1] \times (-\epsilon, \epsilon)$ in \mathbb{R}^2 . È

$$(8.3.5) \quad (\text{Exp}_p)_*(v)(w) = \frac{\partial f(1, 0)}{\partial s}.$$

Il campo di vettori $J(t) = \frac{\partial f(t, 0)}{\partial s}$ soddisfa un'equazione differenziale lineare del second'ordine lungo la geodetica $\gamma(t) = \text{Exp}_p(tv)$. Infatti, poiché per ogni s la $t \rightarrow f(t, s) = \text{Exp}_p(tv(s))$ è una geodetica, per il Lemma VIII.3.2 abbiamo

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t} + R \left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right) \frac{\partial f}{\partial t} \\ &= \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{D}{\partial t} \left(T \left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right) \right) + R \left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s} \right) \frac{\partial f}{\partial t}. \end{aligned}$$

Abbiamo quindi ottenuto l'equazione di Jacobi per il campo di vettori $J(t)$ lungo la geodetica $\gamma(t) = \text{Exp}_p(tv)$:

$$(8.3.6) \quad \frac{D^2 J}{dt^2} + \frac{DT(J, \dot{\gamma})}{dt} + R(J, \dot{\gamma})\dot{\gamma} = 0.$$

L'equazione di Jacobi per una connessione simmetrica si semplifica nella

$$(8.3.7) \quad \ddot{J} + R(J, \dot{\gamma})\dot{\gamma} = 0.$$

Sia $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, M)$ una geodetica.

DEFINIZIONE VIII.3.3. Chiamiamo *campi di Jacobi* lungo γ le soluzioni della (8.3.6).

Indichiamo con $\mathcal{J}(\gamma)$ l'insieme dei campi di Jacobi lungo γ .

PROPOSIZIONE VIII.3.4. Sia $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, M)$ una geodetica e sia $t_0 \in I$. Per ogni coppia v_0, w_0 di vettori tangenti in $T_{\gamma(t_0)}M$ esiste uno ed un solo campo di Jacobi J lungo γ che soddisfi le condizioni iniziali $J(t_0) = v_0, \dot{J}(t_0) = w_0$.

$\mathcal{J}(\gamma)$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione $2m$.

DIMOSTRAZIONE. L'enunciato segue dal fatto che la (8.3.6) è un'equazione differenziale ordinaria del second'ordine lineare per il campo $J(t)$. \square

LEMMA VIII.3.5. Siano $p \in M, v, w \in T_pM$. Allora

$$(8.3.8) \quad J(t) = \text{Exp}_{p_*}(tv)(tw)$$

è il campo di Jacobi lungo la geodetica $\gamma(t) = \text{Exp}_p(tv)$ che soddisfa le condizioni iniziali:

$$(8.3.9) \quad J(0) = 0, \quad \dot{J}(0) = w.$$

DIMOSTRAZIONE. Infatti, $J(t) = \partial f(t, 0)/\partial s$ per la superficie parametrica

$$(t, s) \rightarrow f(t, s) = \text{Exp}_p(t(v + sw)).$$

Poiché $f(0, s) = p$ per ogni s , è $J(0) = 0$. Abbiamo poi

$$\frac{DJ(0)}{dt} = \left(\frac{D}{dt} \right)_{t=0} \left[(\text{Exp}_p)_*(tv)(tw) \right] = \left(\frac{D}{dt} \right)_{t=0} \left[t (\text{Exp}_p)_*(tv)(w) \right]$$

$$= \left[(\text{Exp}_p)_*(tv)(w) + t \frac{D}{dt}((\text{Exp}_p)_*(tv)(w)) \right]_{t=0} = w.$$

□

OSSERVAZIONE VIII.3.6. Per ogni geodetica γ , la sua velocità $\dot{\gamma}$ ed il campo $t\dot{\gamma}$ sono di Jacobi lungo γ .

Dal Lemma VIII.3.5 abbiamo:

PROPOSIZIONE VIII.3.7. Sia N_0 un intorno normale di 0 in T_pM , $v \in N_0$ e $w_0 \in T_pM$. Allora $d\text{Exp}_p(v)(w)$ è il valore in 1 del campo di Jacobi J_w lungo la geodetica $\gamma(t) = \text{Exp}_p(tv)$, che soddisfa le condizioni iniziali $J_w(0) = 0$, $\dot{J}_w(0) = w$. □

COROLLARIO VIII.3.8. I punti singolari di Exp_p sono i vettori $v \in N_0$ per cui esiste un campo di Jacobi non nullo lungo $\gamma(t) = \text{Exp}_p(tv)$ che si annulli in 0 ed 1. □

ESEMPIO VIII.3.9. Sia \mathbf{G} un gruppo di Lie con algebra di Lie \mathfrak{g} . Per calcolare il differenziale dell'applicazione esponenziale, consideriamo su \mathbf{G} la connessione lineare di Cartan-Shauten di tipo (+). Essa ha curvatura nulla e torsione $T(X^*, Y^*) = [X^*, Y^*]$ sui campi di vettori invarianti a sinistra. Fissiamo $X \in \mathfrak{g}$. L'equazione dei campi di Jacobi lungo la geodetica $\gamma(t) = \exp(tX)$ si può scrivere, utilizzando l'isomorfismo di $T\mathbf{G}$ con $\mathbf{G} \times \mathfrak{g}$ dato dalla forma di Maurer-Cartan, e posto quindi $J(t) = \exp(tX)_* Y(t)$, mediante

$$Y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathfrak{g}), \quad \ddot{Y} + [X, \dot{Y}] = 0.$$

Abbiamo cioè

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} Y(t) \\ \dot{Y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & -\text{ad}(X) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y(t) \\ \dot{Y}(t) \end{pmatrix}.$$

Poiché

$$\begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & -\text{ad}(X) \end{pmatrix}^h = \begin{pmatrix} 0 & (-\text{ad}(X))^{h-1} \\ 0 & (-\text{ad}(X))^h \end{pmatrix} \quad \forall h > 0,$$

otteniamo

$$\exp \left(t \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & -\text{ad}(X) \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} I & \frac{I - \exp(-t \text{ad}(X))}{\text{ad}(X)} \\ 0 & \exp(-t \text{ad}(X)) \end{pmatrix},$$

ove abbiamo posto, se A è un endomorfismo di \mathfrak{g} ,

$$\frac{\exp(A) - I}{A} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{A^h}{(h+1)!}.$$

I campi di Jacobi lungo γ sono quindi della forma

$$Y(t) = Y_0 + \frac{I - \exp(-t \text{ad}(X))}{\text{ad}(X)} Y_1, \quad Y_0, Y_1 \in \mathfrak{g}.$$

In particolare, poiché il differenziale dell'esponenziale in X valuta in 1 il campo di Jacobi con valore iniziale 0 e velocità iniziale $Z \in \mathfrak{g}$, otteniamo

$$d\exp(X)(Z) = \frac{I - \exp(-\text{ad}(X))}{\text{ad}(X)} \exp(X)Z.$$

VIII.4. Campi di Jacobi su una varietà Riemanniana

Supponiamo che (M, g) sia una varietà Riemanniana, e consideriamo su M la connessione di Levi-Civita.

DEFINIZIONE VIII.4.1. Un *riferimento mobile* lungo una curva $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, M)$ è una curva $\sigma = (e_1, \dots, e_m) \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbf{O}(M))$ tale che:

- (1) per ogni $t \in I$, $e_1(t), \dots, e_m(t)$ è una base ortonormale di $T_{\gamma(t)}M$;
- (2) per ogni $i = 1, \dots, m$, $e_i \in \mathcal{C}^\infty(I, TM)$ è parallelo lungo γ .

Un riferimento mobile è cioè un sollevamento orizzontale $\tilde{\gamma}$ di γ in $\mathfrak{o}(M)$.

Se $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, M)$ è una geodetica, allora

$$\frac{d}{dt}g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) = 2g\left(\frac{D\dot{\gamma}(t)}{dt}, \dot{\gamma}(t)\right) = 0.$$

Quindi

LEMMA VIII.4.2. *Le geodetiche non costanti di una varietà Riemanniana (M, g) sono parametrizzate mediante un multiplo della lunghezza d'arco.* \square

Potremo dunque scegliere, su una geodetica non costante $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, M)$, un riferimento mobile $(e_1, \dots, e_m) \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbf{O}(M))$ con $e_1 = \dot{\gamma}/\|\dot{\gamma}\|$. Poniamo

$$(8.4.1) \quad a_{i,j}(t) = R(e_i(t), \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t), e_j(t)) = g(R(e_i(t), \dot{\gamma}(t)), \dot{\gamma}(t), e_j(t)).$$

Per la prima identità di Bianchi, i coefficienti $a_{i,j}$ sono simmetrici. Abbiamo infatti

$$\begin{aligned} a_{i,j}(t) &= g(R(e_i(t), \dot{\gamma}(t)) \dot{\gamma}(t), e_j(t)) = -g(R((e_i(t), \dot{\gamma}(t)) e_j(t), \dot{\gamma}(t))) \\ &= g(R(\dot{\gamma}(t), e_j(t)) e_i(t), \dot{\gamma}(t)) + g(R(e_j(t), e_i(t)) \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) \\ &= g(R(e_j(t), \dot{\gamma}(t)) \dot{\gamma}(t), e_i(t)) = a_{j,i}(t), \end{aligned}$$

perché $R(v, w)$ è un endomorfismo g_p -antisimmetrico di T_pM per ogni $v, w \in T_pM$. È poi, per la scelta di e_1 , $a_{1,i} = a_{i,1} = 0$ per ogni $i = 1, \dots, m$.

Le componenti f^i di un campo di Jacobi $J(t) = \sum_{i=1}^m f^i(t)e_i(t)$ rispetto al riferimento mobile scelto sulla geodetica γ , soddisfano il sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$(8.4.2) \quad \ddot{f}^i + \sum_{j=1}^m a_{i,j} f^j = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

In particolare,

$$(8.4.3) \quad \ddot{f}^1 = 0.$$

I campi di Jacobi $\dot{\gamma}(t) = \|\dot{\gamma}\| e_1(t)$ e $t\dot{\gamma}(t) = t\|\dot{\gamma}\| e_1(t)$ sono le soluzioni della (8.4.2), corrispondenti, rispettivamente, alle condizioni iniziali

$$\begin{cases} f(t_0) = (\|\dot{\gamma}\|, 0, \dots, 0), \\ \dot{f}(t_0) = 0 \end{cases} \quad \text{ed} \quad \begin{cases} f(t_0) = 0, \\ \dot{f}(t_0) = (\|\dot{\gamma}\|, 0, \dots, 0). \end{cases}$$

Dalla (8.4.3) segue il

LEMMA VIII.4.3. Sia $\gamma \in \mathcal{C}^\infty([0, a], M)$ una geodetica e fissiamo $t_0 \in I$. Ogni campo di Jacobi J tale che

$$(8.4.4) \quad g(J(t_0), \dot{\gamma}(t_0)) = 0 \quad e \quad g(\dot{J}(t_0), \dot{\gamma}(t_0)) = 0$$

soddisfa

$$(8.4.5) \quad g(J(t), \dot{\gamma}(t)) = 0 \quad e \quad g(\dot{J}(t), \dot{\gamma}(t)) = 0, \quad \forall t \in I. \quad \square$$

COROLLARIO VIII.4.4. Sia $p_0 \in M$, $v \in W_{p_0} \subset T_{p_0}M$ e $w \in T_{p_0}M$ con $w \perp v$. Allora $\text{Exp}_{p_0}(v)_* w \perp \text{Exp}_{p_0}(v)_* v$. \square

Il tensore di curvatura R della connessione di Levi-Civita è una due-forma a coefficienti nel fibrato $\mathfrak{o}_g(M) \subset T^{1,1}M$ degli endomorfismi g -antisimmetrici di TM . La

$$(8.4.6) \quad R(X_1, X_2, X_3, X_4) = g(R(X_1, X_2)X_3, X_4), \quad \forall X_1, X_2, X_3, X_4$$

definisce una forma bilineare simmetrica su $\Lambda^2 TM$, con $R(X_1 \wedge X_2, X_3 \wedge X_4) = R(X_1, X_2, X_3, X_4)$. In particolare, se α è il piano di $T_p M$ generato dai vettori X_1, X_2 , il quoziente $R(X_1, X_2, X_1, X_2)/(\|X_1 \wedge X_2\|^2)$, ove $\|X_1 \wedge X_2\|^2 = g(X_1, X_1)g(X_2, X_2) - |g(X_1, X_2)|^2$, non dipende dalla scelta della base X_1, X_2 di α .

DEFINIZIONE VIII.4.5. Chiamiamo *curvatura sezionale* di (M, g) rispetto al piano α di TM il numero reale $K(\alpha)$ per cui

$$(8.4.7) \quad R(X_1, X_2, X_1, X_2) = -K(\alpha)(g(X_1, X_1)g(X_2, X_2) - |g(X_1, X_2)|^2)$$

per ogni base $X_1, X_2 \in T_p M$ di α .

ESEMPIO VIII.4.6. Supponiamo che $\mathbf{G} \subset \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ sia un gruppo semplice lineare, la cui algebra di Lie \mathfrak{k} ammetta una decomposizione di Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{m}$, con $\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{g} \cap \mathfrak{u}_n$ e $\mathfrak{m} = \mathfrak{g} \cap \mathfrak{p}_n$. Possiamo definire su \mathbf{G}/\mathbf{K} una struttura di spazio Riemanniano simmetrico definendo su \mathfrak{m} il prodotto scalare

$$g_0(X, Y) = \text{tr}_{\mathbb{R}}(XY) = \text{Re traccia}(X, Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{m}.$$

Poiché $R_0(X, Y)Z = -[[X, Y], Z]$, abbiamo

$$\begin{aligned} -R(X, Y, X, Y) &= \text{tr}_{\mathbb{R}}([X, Y], [X, Y]) = \text{tr}_{\mathbb{R}}([X, Y]XY) - \text{tr}_{\mathbb{R}}(X[X, Y]Y) \\ &= \text{tr}_{\mathbb{R}}(XY[X, Y]) - \text{tr}_{\mathbb{R}}(YX[X, Y]) = \text{tr}_{\mathbb{R}}([X, Y][X, Y]) \end{aligned}$$

La curvatura sezionale è allora data da

$$K(\langle X, Y \rangle) = \text{tr}_{\mathbb{R}}([X, Y], [X, Y]) / (\text{tr}_{\mathbb{R}}(X^2)\text{tr}_{\mathbb{R}}(Y^2) - |\text{tr}_{\mathbb{R}}(XY)|^2) < 0$$

per ogni $X, Y \in \mathfrak{m}$. perché $[X, Y] \in \mathfrak{u}_n$ ed ha quindi autovalori puramente immaginari.

La somma diretta $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_0 \oplus i\mathfrak{m}$ è ancora un'algebra di Lie reale. Il sottogruppo analitico \mathbf{K} di $\mathbf{SL}_n(\mathbb{C})$ da essa generato è compatto. Il quoziente $M' = \mathbf{K}/\mathbf{K}_0$ è uno spazio Riemanniano simmetrico, con la metrica definita su $T_0 M$ da

$$g_0(X, Y) = -\text{tr}_{\mathbb{R}}(XY), \quad \forall X, Y \in i\mathfrak{m}.$$

Sostituendo iX ed iY ad X ed Y nei calcoli precedenti otteniamo per la curvatura sezionale

$$K(\langle iX, iY \rangle) = -\text{tr}_{\mathbb{R}}([X, Y], [X, Y]) / (\text{tr}_{\mathbb{R}}(X^2)\text{tr}_{\mathbb{R}}(Y^2) - |\text{tr}_{\mathbb{R}}(XY)|^2) > 0$$

per ogni $iX, iY \in \text{im}$.

Gli spazi Riemanniani simmetrici M ed M' dell'esempio si dicono *in dualità*: possiamo dire che le curvatures sezionali dell'uno sono l'opposto delle curvatures sezionali dell'altro.

Se $\mathbf{G} = \mathbf{SO}^+(1, n)$, questa costruzione ci dà M uguale allo spazio di Lobachevskij n -dimensionale, con curvatura sezionale costante -1 , ed M' alla sfera S^n , con curvatura sezionale costante 1 .

ESEMPIO VIII.4.7 (Campi di Jacobi su una varietà a curvatura sezionale costante). Supponiamo che M abbia curvatura sezionale costante K e sia γ una geodetica su M . Supponiamo che γ sia parametrizzata per lunghezza d'arco.

Fissiamo un campo di vettori $w(t)$ parallelo su γ , con $\|w(t)\| = 1$ e $g(w(t), \dot{\gamma}(t)) = 0$. Allora $R(w(t), \dot{\gamma}(t))\dot{\gamma}(t) = Kw(t)$. Poiché $Dw/dt = 0$ lungo γ , ne segue che le

$$(8.4.8) \quad J(t) = \begin{cases} K^{-1}(A \cos(t\sqrt{K}) + B \sin(t\sqrt{K})) \cdot w(t) & \text{se } K > 0, \\ (A + Bt) \cdot w(t) & \text{se } K = 0, \\ K^{-1}(A \cosh(t\sqrt{-K}) + B \sinh(t\sqrt{-K})) \cdot w(t) & \text{se } K < 0 \end{cases}$$

sono campi di Jacobi ortogonali lungo γ . Tutti i campi di Jacobi ortogonali si ottengono al variare di $w(t)$ tra i campi di vettori ortogonali paralleli lungo γ .

ESEMPIO VIII.4.8. Più in generale, possiamo considerare il caso in cui sia $\nabla R = 0$, che si verifica ad esempio per una metrica invariante su uno spazio omogeneo riduttivo. Sia $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, M)$ una geodetica. Supporremo per semplicità che $0 \in I$ e $\|\dot{\gamma}\| = 1$. Abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{a_{i,j}(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} g(R(e_i(t), \dot{\gamma}(t)) \dot{\gamma}(t), e_j(t)) \\ &= \frac{Dg}{dt}(R(e_i(t), \dot{\gamma}(t)) \dot{\gamma}(t), e_j(t)) + g\left(\frac{DR}{dt}(e_i(t), \dot{\gamma}(t)) \dot{\gamma}(t), e_j(t)\right) \\ &\quad + g(R(\dot{e}_i(t), \dot{\gamma}(t)) \dot{\gamma}(t), e_j(t)) + g(R(e_i(t), \ddot{\gamma}(t)) \dot{\gamma}(t), e_j(t)) \\ &\quad + g(R(e_i(t), \dot{\gamma}(t)) \ddot{\gamma}(t), e_j(t)) + g(R(e_i(t), \dot{\gamma}(t)) \dot{\gamma}(t), \dot{e}_j(t)) = 0 \end{aligned}$$

e quindi i coefficienti $a_{i,j}$ sono costanti lungo γ . Possiamo fissare il riferimento mobile $\sigma = (e_1, \dots, e_m)$ lungo γ in modo che i vettori e_i diagonalizzino $(a_{i,j})$, che cioè

$$\sum_{j=1}^m a_{i,j} e_j(t) = k_i e_i(t), \quad \text{per } i = 1, \dots, m$$

ove $k_1 = 0$ e k_2, \dots, k_m sono gli autovalori della matrice $(a_{i,j})$. Allora

$$J'_i = \begin{cases} k_i^{-1} \cos(t\sqrt{k}) e_i(t) & \text{se } k_i > 0, \\ e_i(t) & \text{se } k_i = 0, \\ k_i^{-1} \cosh(t\sqrt{-k_i}) & \text{se } k_i < 0, \end{cases} \quad J''_i = \begin{cases} k_i^{-1} \sin(t\sqrt{k}) e_i(t) & \text{se } k_i > 0, \\ t e_i(t) & \text{se } k_i = 0, \\ k_i^{-1} \sinh(t\sqrt{-k_i}) e_i(t) & \text{se } k_i < 0, \end{cases}$$

per $i = 1, \dots, m$ formano una base dello spazio vettoriale di $\mathcal{J}(\gamma)$.

VIII.5. Punti coniugati

Sia $\gamma \in \mathcal{C}^\infty([a, b], M)$ una geodetica.

DEFINIZIONE VIII.5.1. Diciamo che t_0, t_1 , con $a \leq t_0 < t_1 \leq b$, sono *coniugati* lungo γ se esiste un campo di Jacobi $J(t)$ non identicamente nullo su γ che si annulli in t_0 e t_1 . La *molteplicità* di (t_0, t_1) è la dimensione dello spazio vettoriale:

$$(8.5.1) \quad \{J \in \mathcal{J}(\gamma) \mid J(t_0) = 0, J(t_1) = 0\}.$$

Diremo anche che due punti $p_0, p_1 \in M$ sono *coniugati* se $p_0 = \gamma(t_0)$ e $p_1 = \gamma(t_1)$ per una geodetica $\gamma \in \mathcal{C}^\infty([a, b], M)$ per cui t_0, t_1 siano coniugati e chiameremo la dimensione di (8.5.1) *molteplicità* di (p_0, p_1) lungo γ .

Se pensiamo t_0 fissato, chiameremo la dimensione dello spazio vettoriale (8.5.1) *molteplicità di t_1* .

OSSERVAZIONE VIII.5.2. Fissato $t_0 \in [a, b]$, lo spazio vettoriale dei campi di Jacobi che si annullano in t_0 ha dimensione m . Tra di essi c'è il campo di vettori $(t - t_0)\dot{\gamma}(t)$, che si annulla soltanto nel punto t_0 . Quindi la *molteplicità* di un punto coniugato è un intero $\leq (n - 1)$.

ESEMPIO VIII.5.3. Nel caso della sfera $\mathbf{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}$, le geodetiche sono i cerchi massimi (intersezioni di \mathbf{S}^n con i piani per l'origine). Su ciascuna di esse il punto antipodale (e il punto stesso) è coniugato con molteplicità $(n - 1)$.

DEFINIZIONE VIII.5.4. Sia $p \in M$. Il *luogo coniugato* di p è l'insieme $C(p)$ dei punti q di M tali che

- (1) $q = \text{Exp}_p(t_q v_q)$ per qualche $0 \neq v_q \in T_p M$ e $t_q > 0$;
- (2) esiste un campo di Jacobi $J \in \mathcal{J}(\text{Exp}_p(t v_q))$ con $J(0) = 0, J(t_q) = 0$.

ESEMPIO VIII.5.5. Nel caso della sfera $\mathbf{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}$, è $C(x) = \{-x\}$ per ogni $x \in \mathbf{S}^n$.

PROPOSIZIONE VIII.5.6. Sia $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ una geodetica, con $\gamma(0) = p \in M, \dot{\gamma}(0) = v \in T_p M \setminus \{0\}$. Allora $\gamma(\tau)$, con $0 < \tau \leq a$ è *coniugato di 0* lungo γ se e soltanto se τv è un punto singolare dell'applicazione Exp_p , e la *molteplicità* del punto coniugato $\gamma(\tau)$ è la dimensione del nucleo di $(\text{Exp}_p)_*(\tau v)$.

DIMOSTRAZIONE. Infatti i campi di Jacobi lungo γ che si annullano in 0 sono tutti e soli quelli della forma $J(t) = [(\partial E_p(t(v + sw)))/\partial s]_{s=0}$ e il loro valore in τ è $(\text{Exp}_p)_*(\tau v)(\tau w)$. \square

PROPOSIZIONE VIII.5.7. Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ una geodetica. Se a e b non sono coniugati, allora il problema al contorno:

$$(8.5.2) \quad \begin{cases} \frac{D^2 J}{dt^2} + R(\dot{\gamma}, J)\dot{\gamma} = 0 \\ J(a) = v_a, J(b) = v_b \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione per ogni coppia di vettori $v_a \in T_{\gamma(a)} M$ e $v_b \in T_{\gamma(b)} M$.

DIMOSTRAZIONE. Se a e b non sono coniugati, l'applicazione lineare

$$\mathcal{J}(\gamma) \ni J \rightarrow (J(a), J(b)) \in T_{\gamma(a)}M \oplus T_{\gamma(b)}M$$

è iniettiva e quindi anche surgettiva perché i due spazi vettoriali hanno la stessa dimensione finita $2m$. \square

Proprietà metriche delle varietà Riemanniane

IX.1. Geodetiche e distanza Riemanniana

Sia (M, g) è una varietà Riemanniana. Poniamo

$$(9.1.1) \quad (v|w) = g(v, w), \quad \|v\| = \sqrt{g(v, v)} \geq 0, \quad \text{se } p \in M \text{ e } v, w \in T_p M.$$

Considereremo su M la struttura affine definita dalla connessione di Levi-Civita.

Sia $\gamma \in \mathcal{C}^1([a, b], M)$ una curva differenziabile.

DEFINIZIONE IX.1.1. La *lunghezza* $L(\gamma)$ e l'*energia*, o *azione* $E(\gamma)$ di γ sono definite dagli integrali:

$$(9.1.2) \quad L(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

$$(9.1.3) \quad E(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|^2 dt.$$

Se $\|\dot{\gamma}(t)\| = 1$ per ogni $t \in [a, b]$ diciamo che γ è *parametrizzata per lunghezza d'arco*. In questo caso $t_2 - t_1 = \int_{t_1}^{t_2} \|\dot{\gamma}(t)\| dt$ per ogni $a \leq t_1 < t_2 \leq b$.

Queste definizioni si estendono in modo ovvio al caso in cui γ sia di classe \mathcal{C}^1 a tratti.

Indichiamo con $\mathcal{C}_r^1([a, b], M)$ la famiglia delle curve di classe \mathcal{C}^1 a tratti definite sull'intervallo $[a, b]$ e con $\mathcal{C}_r^1([a, b], a, b; M, p, q)$ il sottoinsieme di $\mathcal{C}_r^1([a, b], M)$ delle curve γ di punto iniziale $\gamma(a) = p$ e punto finale $\gamma(b) = q$.

Dalle formule di cambiamento di variabile negli integrali ricaviamo il

LEMMA IX.1.2. *La lunghezza di una curva non dipende dalla sua parametrizzazione.* □

Supponiamo che M sia connessa.

DEFINIZIONE IX.1.3. La *distanza Riemanniana* tra due punti $p, q \in M$ è

$$(9.1.4) \quad d(p, q) = \inf\{L(\gamma) \mid \gamma \in \mathcal{C}_r^1([0, 1], 0, 1; M, p, q)\}.$$

NOTAZIONE IX.1.4. Per semplicità indicheremo a volte, nel seguito, con \overline{pq} la distanza Riemanniana $d(p, q)$ di due punti p, q di M .

PROPOSIZIONE IX.1.5. *Sia $N_{p_0}(r) = \{v \in T_{p_0}M \mid \|v\| < r\}$, con $r > 0$, un intorno normale dell'origine in $T_{p_0}M$ e $B_{p_0}(r) = \text{Exp}_{p_0}(N_{p_0}(r))$ il corrispondente intorno normale di p_0 in M . Allora*

$$(9.1.5) \quad d(p_0, \text{Exp}_{p_0}(v)) = \|v\|, \quad \forall v \in N_{p_0}(r)$$

e $B_{p_0}(r) = \{p \in M \mid d(p, p_0) < r\}$ è la palla aperta di centro p_0 e raggio r della distanza Riemanniana.

DIMOSTRAZIONE. Per ipotesi, Exp_{p_0} è un diffeomorfismo di $N_{p_0}(r)$ su $B_{p_0}(r)$. Quindi, ogni cammino $\gamma \in \mathcal{C}_{\text{tr}}^1([0, 1], B_{p_0}(r))$ da p_0 ad $\text{Exp}_{p_0}(v)$ si può scrivere in modo unico nella forma $\gamma(t) = \text{exp}_{p_0}(\alpha(t))$ con $\alpha \in \mathcal{C}_{\text{tr}}^1([0, 1], N_{p_0}(r))$ ed $\alpha(0) = 0$, $\alpha(1) = v$. Possiamo limitarci a considerare il caso in cui α sia semplice e parametrizzata per un multiplo della lunghezza d'arco. Per $t > 0$ decomponiamo $\dot{\alpha}(t)$ nella sua componente radiale $\dot{\alpha}_r(t) = (\dot{\alpha}(t)|\alpha(t))\alpha(t)/\|\alpha(t)\|^2$ ed in quella normale $\dot{\alpha}_n(t) = \dot{\alpha}(t) - \dot{\alpha}_r(t)$ alla direzione radiale. Allora $\|\dot{\alpha}_r\|$ è definita e continua per $t > 0$ e limitata sull'intervallo $(0, 1]$. Abbiamo

$$\dot{\gamma}(t) = \text{Exp}_{p_0*}(\dot{\alpha}(t)) = \text{Exp}_{p_0*}(\dot{\alpha}_r(t)) + \text{Exp}_{p_0*}(\dot{\alpha}_n(t)) = \dot{\gamma}_r(t) + \dot{\gamma}_n(t).$$

Per la Proposizione VIII.3.7 ed il Lemma VIII.4.3 i vettori $\dot{\gamma}_r$ e $\dot{\gamma}_n$ sono ortogonali. Inoltre $\|\dot{\gamma}_r\| = \|\dot{\alpha}_r\|$ e $\|\dot{\gamma}_n\| = 0$ se e soltanto se $\|\dot{\alpha}_n\| = 0$. Osserviamo che

$$2 \frac{d\|\alpha\|}{dt} \|\alpha\| = \frac{d\|\alpha\|^2}{dt} = 2(\dot{\alpha}|\alpha) = \pm 2\|\dot{\alpha}_r\| \cdot \|\alpha\|.$$

Quindi

$$\int_0^1 \|\dot{\alpha}_r(t)\| dt = \int_0^1 \left| \frac{d}{dt} \|\alpha(t)\| \right| dt \geq \int_0^1 \frac{d}{dt} \|\alpha(t)\| dt = \|v\|.$$

Otteniamo perciò

$$L(\gamma) = \int_0^1 \|\dot{\gamma}\| \geq \int_0^1 \|\dot{\gamma}_r\| dt \geq \|v\|$$

e vale l'uguaglianza solo quando $\dot{\alpha}_n(t)$ sia identicamente nulla, cioè quando γ sia la geodetica $\text{Exp}_{p_0}(tv)$. Per concludere la dimostrazione basta osservare che ogni cammino di classe $\mathcal{C}_{\text{tr}}^1$ che congiunga p_0 ad un punto non contenuto in $B_{p_0}(r)$ ha, per la prima parte della dimostrazione, lunghezza maggiore o uguale ad r . \square

Per la Proposizione IX.1.5 le geodetiche minimizzano localmente la lunghezza d'arco. Abbiamo cioè

COROLLARIO IX.1.6. Se $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, M)$ è una geodetica, allora per ogni $t_0 \in I$ possiamo trovare $\epsilon_0 > 0$ tale che $d(\gamma(t), \gamma(t_0)) = \|\dot{\gamma}(t_0)\| \cdot |t - t_0|$ per $|t - t_0| < \epsilon_0$. \square

DEFINIZIONE IX.1.7. Chiamiamo *segmento* il supporto di una geodetica $\gamma \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], M)$ tale che

$$d(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) = \|\dot{\gamma}\| |t_1 - t_2|, \quad \forall 0 \leq t_1, t_2 \leq 1.$$

Chiamiamo *retta* il supporto di una geodetica $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, M)$ non costante e completa, cioè definita per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Per la Proposizione IX.1.5 abbiamo

TEOREMA IX.1.8. $M \times M \ni (p, q) \rightarrow d(p, q)$ è una distanza su M . La topologia indotta dalla distanza Riemanniana coincide con la topologia di varietà di M . \square

IX.2. Il funzionale dell'energia

Mostriamo in questo paragrafo che le geodetiche di una varietà Riemanniana sono i punti stazionari del funzionale dell'energia.

LEMMA IX.2.1. *Per ogni curva $\gamma \in \mathcal{C}_r^1([a, b], M)$ vale la disuguaglianza:*

$$(9.2.1) \quad L(\gamma)^2 \leq (b-a)E(\gamma).$$

In (9.2.1) vale l'uguaglianza se e soltanto se $\|\dot{\gamma}(t)\| = \text{costante}$.

DIMOSTRAZIONE. La disuguaglianza di Hölder dà

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt \leq \left(\int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|^2 dt \right)^{1/2} \cdot \left(\int_a^b dt \right)^{1/2} = (b-a)^{1/2} E(\gamma)^{1/2}$$

e vale l'uguaglianza se e soltanto se $\|\dot{\gamma}(t)\|$ è costante. \square

COROLLARIO IX.2.2. *Se $\gamma \in \mathcal{C}_r^1([a, b], M)$ è parametrizzata per lunghezza d'arco, allora $E(\gamma)$ è minimo di $\{E(\gamma \circ \phi)\}$, al variare di ϕ tra i diffeomorfismi di $[a, b]$.* \square

PROPOSIZIONE IX.2.3. *L'equazione delle geodetiche*

$$(9.2.2) \quad \frac{D^2\gamma}{dt^2} = 0$$

è l'equazione di Eulero-Lagrange per il funzionale dell'energia con estremi fissi.

DIMOSTRAZIONE. Sia $f \in \mathcal{C}^1([a, b] \times I, M)$, ove I è un intervallo reale contenente 0, con $f(a, s) = p_a$ e $f(b, s) = p_b$ sono costanti per $s \in I$. Abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \int_a^b \left\| \frac{\partial f}{\partial t} \right\|^2 dt &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial s} \left\| \frac{\partial f}{\partial t} \right\|^2 dt = 2 \int_a^b \left(\frac{D}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t} \middle| \frac{\partial f}{\partial t} \right) dt \\ &= 2 \int_a^b \left(\frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s} \middle| \frac{\partial f}{\partial t} \right) dt = -2 \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial s} \middle| \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t} \right) dt, \end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che il tensore della metrica è parallelo, che la connessione di Levi-Civita è priva di torsione, e che $\frac{\partial f}{\partial s}$ è un campo di vettori che si annulla negli estremi d'integrazione. Se $\gamma(t) = f(t, 0)$ è un estremo del funzionale dell'energia con estremi fissi, la derivata di $E(f_s)$ si annulla per $s = 0$. Otteniamo quindi

$$\int_a^b \left(\frac{D^2\gamma}{dt^2} \middle| V \right) dt = 0$$

per ogni campo di vettori V di classe \mathcal{C}^1 lungo γ che si annulli agli estremi. Questa relazione è equivalente alla (9.2.2). \square

IX.3. Varietà di Riemann compatte

TEOREMA IX.3.1. *Sia (M, g) una varietà Riemanniana compatta. Ogni curva continua $\gamma \in \mathcal{C}([0, 1], M)$ è omotopa, in un'omotopia che lascia fissi i suoi estremi $p_0 = \gamma(0)$ e $p_1 = \gamma(1)$, ad una geodetica. Essa può essere scelta come una curva di lunghezza minima nella classe $[\gamma]$ di γ in $\pi([0, 1], 0, 1; M, p_0, p_1)$.*

DIMOSTRAZIONE. Gli intorni normali sono contrattili e quindi due archi qualsiasi, che abbiano gli stessi estremi e siano contenuti in un intorno normale, sono omotopi in un'omotopia con gli estremi fissi. Sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{1 \leq i \leq k}$ un ricoprimento finito di M mediante aperti semplici e convessi.

Possiamo fissare un numero reale positivo r tale che, per ogni $p \in M$ la palla $B(p, r) = \{q \in M \mid d(p, q) < r\}$ sia contenuta in un aperto del ricoprimento¹ \mathcal{U} .

Siano $p_0, p_1 \in M$ ed α una classe di omotopia in $\pi([0, 1], 0, 1; M, p_0, p_1)$. Sia² $\mu = \inf\{L(\gamma) \mid \gamma \in \alpha\}$ e $\{\gamma_n\}_{n \geq 0}$ una successione in α con $\{L(\gamma_n)\}$ decrescente a μ . Possiamo supporre che le γ_n siano delle geodetiche a tratti, e quindi di classe \mathcal{C}_r^1 , parametrizzate per lunghezza d'arco. È allora $\|\dot{\gamma}_n\| = L(\gamma_n)$ e $d(\gamma_n(t), \gamma_n(s)) \leq L(\gamma_n)|t - s|$ per ogni $0 \leq s, t \leq 1$. Poiché le $L(\gamma_n)$ sono uniformemente limitate, pur di scegliere un intero N sufficientemente grande, avremo, con $t_i = i/N$, $d(\gamma_n(t_i), \gamma_n(t_{i-1})) = L(\gamma_n)/N < r$ se $1 \leq i \leq n$. È $\gamma_n(t_0) = p_0$ e $\gamma_n(t_N) = p_1$ per ogni n . In generale, le $\{\gamma_n(t_i)\}$ sono, per ogni $i = 0, \dots, N$, delle successioni a valori nel compatto M . Quindi, a meno di passare ad una sottosuccessione, possiamo supporre che tutte le $N+1$ successioni $\{\gamma_n(t_i)\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergano a punti $\gamma(t_i)$ di M . Per costruzione, $d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i-1})) = \mu/N < r$ per ogni $i = 1, \dots, N$. Quindi le coppie di punti $\gamma(t_i), \gamma(t_{i-1})$ appartengono ad uno stesso aperto semplice e convesso del ricoprimento \mathcal{U} e possono quindi essere congiunte da un unico arco di geodetica di lunghezza μ/N . Otteniamo in questo modo una spezzata $\gamma \in \mathcal{C}_r^1([0, 1], M)$ di lunghezza μ , che possiamo parametrizzare per un multiplo della lunghezza d'arco, e che realizza il minimo delle lunghezze tra i cammini continui che congiungono p_0 a p_1 ed è quindi la geodetica cercata. \square

COROLLARIO IX.3.2. *Due punti qualsiasi di una varietà Riemanniana compatta sono estremi di un segmento che li congiunge.*

IX.4. Il teorema di Hopf-Rinow

DEFINIZIONE IX.4.1. Una varietà affine M si dice *geodeticamente completa* se è completa rispetto alla connessione di Levi-Civita.

¹Infatti, se ciò non fosse vero, per ogni intero positivo ν potremmo trovare un punto p_ν in M tale che $B(p_\nu, 2^{-\nu})$ non sia contenuto in nessun aperto del ricoprimento \mathcal{U} . Poiché M è compatto, a meno di passare ad una estratta, possiamo supporre che la successione $\{p_\nu\}$ converga ad un punto $p_\infty \in M$. È $p_\infty \in U_{i_0}$ per qualche i_0 e $B(p_\infty, r) \subset U_{i_0}$ per qualche $r > 0$. Ma, se $2^{1-\nu} < r, \mu > \nu$ e $d(p_\mu, p_\infty) < 2^{-\nu-1}$, la palla $B(p_\mu, 2^{-\mu})$ sarebbe contenuta in $B(p_\infty, r)$ e quindi in U_{i_0} , contraddicendo la scelta della successione $\{p_\nu\}$.

²La lunghezza di una curva continua $\gamma \in \mathcal{C}([0, 1], M)$ in uno spazio metrico (M, d) è l'estremo inferiore delle somme $\sum_{i=1}^N d(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i))$ al variare di $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = 1$ tra tutte le partizioni finite dell'intervallo $[0, 1]$.

TEOREMA IX.4.2 (Hopf-Rinow³). Sia (M, g) una varietà Riemanniana. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- (1) Con la distanza Riemanniana, M è uno spazio metrico completo;
- (2) i sottoinsiemi chiusi e limitati di M sono compatti;
- (3) esiste un punto $p_0 \in M$ tale che Exp_{p_0} sia definita su tutto $T_{p_0}M$;
- (4) M è geodeticamente completa.

Ognuna delle (1), (2), (3), (4) implica:

- (5) due punti qualsiasi $p, q \in M$ possono essere congiunti da una geodetica di lunghezza $d(p, q)$, sono cioè estremi di un segmento che li congiunge.

DIMOSTRAZIONE. In primo luogo mostriamo che, se Exp_{p_0} è definita su tutto $T_{p_0}M$, allora ogni $p \in M$ può essere congiunto a p_0 da una geodetica di lunghezza $d(p, p_0)$. In particolare, questo dimostra che (4) \implies (5).

Sia $\rho > 0$ tale che $\overline{B_{p_0}(\rho)}$ sia contenuto in un intorno normale di p_0 . In particolare, è $\overline{B_{p_0}(\rho)} = \{p \in M \mid d(p, p_0) \leq \rho\}$. Sia p un qualsiasi punto di M . Se $r = d(p, p_0) \leq \rho$, è $p \in \overline{B_{p_0}(\rho)}$ e quindi $p = \text{Exp}_{p_0}(v)$ per qualche $v \in T_{p_0}$ e, per la Proposizione IX.1.5 la $t \rightarrow \text{Exp}_{p_0}(tv)$ è l'unica geodetica che congiunge p_0 a p ed ha lunghezza r . Supponiamo sia $r > \rho$ e sia $\{\gamma_n\}$ una successione di curve di classe $\mathcal{C}_{\text{tr}}^1$, parametrizzate per lunghezza d'arco, di estremi p_0, p , con $L(\gamma_n) \searrow r$. Ciascuna di esse contiene un punto q_n in $\partial B_{p_0}(\rho)$. Poiché, per la Proposizione IX.1.5, $d(p_0, q_n) = \rho$, abbiamo

$$L(\gamma_n) \geq d(p_0, q_n) + d(q_n, p) = \rho + d(q_n, p) \geq r.$$

Se quindi p_ρ è un punto limite della successione $\{q_n\}$, abbiamo $d(p_\rho, p) = r - \rho$. Sia $v \in T_{p_0}M$ con $\|v\| = 1$ e $p_\rho = \text{Exp}_{p_0}(\rho v)$. Dico che $p = \text{Exp}_{p_0}(rv)$. Sia infatti

$$I = \{\tau \in [0, r] \mid d(\text{Exp}_{p_0}(t v), p) = r - t, \forall 0 \leq t \leq \tau\}.$$

Dobbiamo dimostrare che $r \in I$. Osserviamo che l'intervallo I è chiuso e contiene $[0, \rho]$. Mostriamo che I è anche aperto in $[0, r]$. Sia $t_0 \in I$. Se $t_0 = r$, allora $I = [0, r]$ e non c'è nulla da dimostrare. Consideriamo allora un $t_0 \in I$ con $\rho \leq t_0 < r$. Sia $p_{t_0} = \gamma(t_0)$. Fissiamo $0 < \epsilon < \min(\rho, r - t_0)$, in modo che la chiusura di $B_{p_{t_0}}(\epsilon)$ sia contenuta in un intorno semplice convesso U di p_{t_0} . Ripetendo il ragionamento svolto sopra, su $\partial B_{p_{t_0}}(\epsilon)$ possiamo trovare un punto $p_{t_0+\epsilon}$ a distanza $r - t_0 - \epsilon$ da p . Questo punto appartiene a una geodetica $\text{Exp}_{p_{t_0}}([t - t_0]w)$, per un $w \in T_{p_{t_0}}M$, con $\|w\| = 1$, tale che $d(\text{Exp}_{p_{t_0}}([t - t_0]w), p) = r - t$ per $t_0 \leq t \leq t_0 + \epsilon$. Se questa non coincidesse con la geodetica $\text{Exp}_{p_0}(tv)$ sull'intervallo $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$, potremmo trovare una curva di lunghezza minore di r che congiunge p_0 a p , prendendo $\text{Exp}_{p_0}(tv)$ per $0 \leq t \leq t_0 - \epsilon$, la geodetica in U che congiunge $\text{Exp}_{p_0}([t_0 - \epsilon]v)$ a $p_{t_0+\epsilon}$ in U , ed una curva da $p_{t_0+\epsilon}$ a p la cui lunghezza approssimi $d(p, q) = r - t_0 - \epsilon$. Questo dimostra che $t_0 + \epsilon \in I$. Quindi $I = [0, r]$ e la nostra affermazione è dimostrata.

³Hopf, H., Rinow, W., Über den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Fläche, Commentarii Mathematici Helvetici 3 (1931), 209-225. Heinz Hopf (1894-1971) matematico tedesco, ha dato importanti contributi alla topologia e alla geometria differenziale. Willi Ludwig August Rinow (1907-1979), geometra differenziale, fu suo studente a Berlino.

Completiamo ora la dimostrazione delle altre implicazioni del teorema.

(4) \Rightarrow (3) è banale.

(3) \Rightarrow (2) Se A è un sottoinsieme limitato di M , è $A \subset \overline{B(p, R)}$ per qualche $R > 0$ e quindi è un sottoinsieme del compatto $\text{Exp}_p(\{v \in T_p M \mid \|v\| \leq R\})$. La (2) segue quindi dal fatto che un sottoinsieme chiuso di un compatto è compatto.

(2) \Rightarrow (1) Ogni successione di Cauchy $\{p_n\} \subset M$ è limitata e quindi la chiusura della sua immagine è compatta. Esiste perciò una sottosuccessione convergente e dunque la successione $\{p_n\}$ stessa è convergente.

(1) \Rightarrow (4) Sia $p \in M$ e consideriamo la geodetica $t \rightarrow \gamma(t) = \text{Exp}_p(tv)$. Sia I il suo intervallo massimale di definizione. Se fosse $\sup I = T_0 < +\infty$, potremmo scegliere una successione $\{t_n\}$ tale che $t_n \nearrow T_0$. Poiché $d(\gamma(t_n), \gamma(t_m)) \leq \|v\| |t_n - t_m|$, la $\{\gamma(t_n)\}$ è una successione di Cauchy. Per ipotesi ammette un limite $p_0 \in M$. Se $B(p_0, r)$ è un intorno normale di p_0 e $\gamma(t_n) \in B(p_0, r)$, vi è un unico $v_0 \in T_{p_0} M$ tale che $\gamma(t_n) = \text{Exp}_{p_0}((t_n - T_0)v_0)$ e le geodetiche $\gamma(t)$ ed $\text{Exp}_{p_0}((t - T_0)v_0)$ coincidono sull'intervallo $[t_n, T_0)$. Questo mostra che $\text{Exp}_p(tv)$ è definita in un intorno destro di T_0 . Ciò contraddice la scelta di T_0 e mostra quindi che $T_0 = +\infty$. Analogamente si dimostra che la γ è definita per ogni $t < 0$.

Ciò completa la dimostrazione. \square

PROPOSIZIONE IX.4.3. *Se (M, g) è completa, per due punti p_0, p_1 di M passa almeno una retta.*

DIMOSTRAZIONE. L'affermazione è conseguenza immediata della (5) del Teorema IX.4.2 e del fatto che completezza metrica e geodetica sono equivalenti. \square

PROPOSIZIONE IX.4.4. *Se (M, g) è completa, dati una retta e un punto vi è almeno una retta incidente e perpendicolare alla retta data e passante per il punto assegnato.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $r_t \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, M)$ la retta assegnata e $p_0 \in M$. L'affermazione è banale se $p_0 \in r = r(\mathbb{R})$. Supponiamo quindi che $\delta = d(p_0, r) > 0$. La palla chiusa $\overline{B}_{p_0}(2\delta)$ è compatta e $\overline{B}_{p_0}(2\delta) \cap r$ è compatto e non vuoto. Poiché la distanza da un punto è una funzione reale continua ci sarà un punto di $\overline{B}_{p_0}(2\delta) \cap r$, che possiamo supporre corrisponda al valore 0 del parametro, per cui $\overline{p}_0, \overline{r}_0 = d(p_0, r) = \delta$. La retta p_t per p_0 ed $r_0 = p_1$ è perpendicolare ad r in r_0 . Definiamo infatti $f \in \mathcal{C}^\infty([0, 1] \times [-\epsilon, \epsilon], M)$ in modo che, per ogni $-\epsilon < s < \epsilon$, $t \rightarrow f(t, s)$ sia la geodetica da p_0 ad r_s . Poiché $E(s) = \int_0^1 \|\partial f(t, s)/\partial t\|^2 dt$ ha un minimo per $s = 0$, il campo di Jacobi $J(t) = (\partial f/\partial s)_{s=0}$ soddisfa le condizioni

$$J(0) = 0, \quad \int_0^1 (J(t)|\dot{\gamma}(t)) = 0.$$

Decomponiamo J nella somma di un campo di Jacobi J_n ortogonale a p_t e di un campo tangenziale J_t . Poiché $J(0) = 0$, esso è della forma della forma $ct\dot{\gamma}(t)$. Quindi

$$0 = \int_0^1 (J(t)|\dot{\gamma}(t)) = \int_0^1 ct \overline{p_0 r_0}^2 dt = \frac{c}{2} \overline{p_0 r_0}^2$$

e $c = 0$. Dunque $J(t)$ è perpendicolare a γ ed in particolare lo è $J(0)$, che è un vettore tangente ad r in r_0 . \square

PROPOSIZIONE IX.4.5. *Se (M, g) è completa, allora ogni classe di omotopia di curve continue tra due punti p_0, p_1 di M contiene una geodetica di lunghezza minima.*

DIMOSTRAZIONE. Sia α una classe di omotopia in $\pi([0, 1], 0, 1; M, p_0, p_1)$, $\mu = \inf\{L(\gamma) \mid \gamma \in \alpha\}$ e sia $\{\gamma_n\} \subset \alpha$ una successione di curve di classe \mathcal{C}_r^1 , parametrizzate per multipli della lunghezza d'arco, con $L(\gamma_n) \searrow \mu$. I supporti delle γ_n sono tutti contenuti in un compatto $\overline{B}_{p_0}(R)$, per $R > 0$ e possiamo quindi utilizzare l'argomento della dimostrazione del Teorema IX.3.1 per ottenere una geodetica in α . \square

Il punto (5) del Teorema IX.4.2 si può riformulare nella

PROPOSIZIONE IX.4.6. *Se (M, g) è completa, allora per ogni coppia di punti distinti c è un segmento che li ha come estremi.*

OSSERVAZIONE IX.4.7. Il segmento che unisce due punti può non essere univocamente determinato, come ad esempio nel caso di punti antipodali di una sfera S^m con la metrica standard. Il segmento è invece unico se consideriamo lo spazio proiettivo $\mathbb{R}P^m$. Se chiamiamo *rette* le sue geodetiche, per $\mathbb{R}P^m$ con la metrica che rende la proiezione canonica $S^m \rightarrow \mathbb{R}P^m$ un'isometria locale, in esso valgono le affermazioni che per due punti passi una ed una sola retta e che due punti sono gli estremi di uno ed un solo segmento.

TEOREMA IX.4.8. *Se (M, g) è connessa e completa e contiene un punto p_0 privo di punti coniugati, allora $\text{Exp}_{p_0} : T_{p_0}M \rightarrow M$ è un rivestimento. In particolare, se M è semplicemente connesso, l'inversa di Exp_{p_0} definisce un diffeomorfismo di M con uno spazio Euclideo.*

DIMOSTRAZIONE. Se (M, g) è connessa e completa e contiene un punto p_0 privo di punti coniugati, allora Exp_{p_0} , che è definita su tutto $T_{p_0}M$ perché abbiamo supposto (M, g) completa, non ha punti critici⁴. Possiamo quindi considerare su $T_{p_0}M$ la metrica Riemanniana $g^* = \text{Exp}_{p_0}^* g$. Anche $(T_{p_0}M, g^*)$ è una varietà Riemanniana completa per il teorema di Hopf-Rinow, perché tutte le geodetiche di g^* passanti per l'origine, che hanno come supporto le rette per l'origine in $T_{p_0}M$, sono geodetiche complete. L'applicazione Exp_{p_0} definisce un'isometria di $(T_{p_0}M, g^*)$ su (M, g) . La sua immagine è aperta per il teorema dell'inversa locale perché Exp_{p_0} non ha punti critici, ed è chiusa perché è un'isometria di uno spazio metrico completo. Poiché abbiamo supposto M connesso, Exp_{p_0} è allora anche surgettiva e definisce perciò un rivestimento, perché ogni aperto semplice convesso di (M, g) è di trivializzazione. \square

⁴Ricordiamo che una coppia (p_0, p_1) di punti di M è coniugata se p_1 è un valore critico di Exp_{p_0}

IX.5. Varietà Riemanniane con curvatura sezionale negativa

DEFINIZIONE IX.5.1. Diciamo che una varietà Riemanniana (M, g) ha curvatura sezionale *non positiva* (rispettivamente *negativa*) se $K(\alpha) \leq 0$ (rispettivamente $K(\alpha) < 0$) per ogni 2-piano $\alpha \subset T_p M$, per ogni $p \in M$.

Ricordiamo che i campi di Jacobi sono le soluzioni, lungo le curve geodetiche $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, M)$, dell'equazione differenziale

$$(9.5.1) \quad \frac{D^2 J}{dt^2} + R(J, \dot{\gamma})\dot{\gamma} = 0.$$

LEMMA IX.5.2. Sia J un campo di Jacobi lungo una geodetica $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, M)$ di (M, g) . Se la curvatura sezionale è non positiva, allora $\|J(t)\|$ è una funzione convessa. Il campo $J(t)$ si annulla al più per un valore di t . Se non è identicamente nullo ed è ortogonale a γ , e la curvatura sezionale è negativa, allora la $\|J(t)\|$ è strettamente convessa.

DIMOSTRAZIONE. Calcoliamo le derivate prime e seconde del quadrato della norma di un campo di Jacobi $J(t)$ lungo una geodetica $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, M)$. Abbiamo

$$\frac{d}{dt}\|J(t)\|^2 = 2(\dot{J}(t), J(t)), \quad \frac{d^2}{dt^2}\|J(t)\|^2 = 2(\ddot{J}(t), J(t)) + 2\|\dot{J}(t)\|^2,$$

ove \dot{J} e \ddot{J} sono le derivate covarianti prima e seconda di J lungo γ . Utilizzando l'equazione (9.5.1), che caratterizza i campi di Jacobi, otteniamo

$$\frac{d^2}{dt^2}\|J(t)\|^2 = -2R(J, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}, J) + 2\|\dot{J}\|^2.$$

Quindi, se la curvatura sezionale è non negativa, $\frac{d^2}{dt^2}\|J(t)\|^2 \geq 2\|\dot{J}\|^2$ e, nei punti in cui $\|J(t)\| > 0$ abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}\|J(t)\| &= \frac{1}{4}\|J(t)\|^{-3} \left(2\|J(t)\|^2 \frac{d^2}{dt^2}\|J(t)\|^2 - \left| \frac{d}{dt}\|J(t)\|^2 \right|^2 \right) \\ &\geq \|J(t)\|^{-3} \left(\|J(t)\|^2 \|\dot{J}(t)\|^2 - |(\dot{J}(t), J(t))|^2 \right) \geq 0 \end{aligned}$$

per la disuguaglianza di Cauchy. Una funzione non negativa che è convessa nei punti in cui è positiva è convessa e quindi $\|J(t)\|$ è convessa. Osserviamo che, se $J \neq 0$, allora gli zeri di J sono isolati. In particolare, un campo di Jacobi si annulla al più in un punto di γ . Se la curvatura sezionale è negativa, per i campi di Jacobi ortogonali a γ abbiamo $\frac{d^2}{dt^2}\|J(t)\| > 0$ nei punti in cui $J \neq 0$, e quindi la $J(t)$ è strettamente convessa. \square

TEOREMA IX.5.3 (von Mangoldt-Cartan⁵). Una varietà Riemanniana (M, g) con curvatura sezionale non positiva non contiene coppie di punti coniugati.

⁵Hans Carl Friedrich von Mangoldt (1854-1925) ha dimostrato questo risultato nel 1881 nel caso delle superfici (*Ueber diejenigen Punkte auf positiv gekrumraten Flächen, welche die Eigenschaft haben, dass die von ihnen ausgehenden geoditischen Linien nie aufhoren, kirzeste Linien zu sein.* Journ. für Math., vol. 91, 23-53, 1881). La formulazione generale è dovuta a Élie Cartan (1869-1951) (*La géométrie des espaces de Riemann, Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 9* (1925), p. 1-61).

Se (M, g) è connessa e completa, allora per ogni $p_0 \in M$, l'applicazione $\text{Exp}_{p_0} : T_{p_0} \rightarrow M$ è un rivestimento.

DIMOSTRAZIONE. Per il Lemma IX.5.2 i campi di Jacobi hanno soltanto zeri isolati e quindi non ci possono essere punti coniugati lungo le geodetiche. L'affermazione successiva è quindi conseguenza del Teorema IX.4.8. \square

COROLLARIO IX.5.4. Una varietà Riemanniana (M, g) , connessa e semplicemente connessa, e con curvatura sezionale non positiva, è diffeomorfa ad uno spazio Euclideo. \square

TEOREMA IX.5.5. Supponiamo che (M, g) abbia curvatura sezionale non positiva. Siano p un punto di M ed N_0 un intorno aperto di 0 in $T_p M$, stellato rispetto all'origine, su cui Exp_p sia definito. Allora

$$(9.5.2) \quad \|d\text{Exp}_p(v)(w)\| \geq \|w\|, \quad \forall v \in N_0, \forall w \in T_p M.$$

In particolare, se $\gamma_0 \in \mathcal{C}^1([a, b], N_0)$, è

$$(9.5.3) \quad L(\gamma_0) = \int_a^b \|\dot{\gamma}_0(t)\|_p dt \leq L(\text{Exp}_p \circ \gamma_0).$$

DIMOSTRAZIONE. La prima affermazione è conseguenza del Lemma IX.5.2, perché $d\text{Exp}(v)(w)$ è il valore per $t = 1$ del campo di Jacobi $J(t) = d\text{Exp}(tv)(tw)$, con $J(0) = 0$ e $\dot{J}(0) = w$. Poiché $\|J(t)\|$ è convessa, abbiamo

$$\|J(1)\| - \|J(\epsilon)\| \geq \frac{d\|J(t)\|}{dt} \Big|_{t=\epsilon} (1 - \epsilon) = \frac{(\dot{J}(\epsilon)|J(\epsilon))}{\|J(\epsilon)\|} (1 - \epsilon).$$

Passando al limite per $\epsilon \searrow 0$, otteniamo la (9.5.2). La (9.5.3) è conseguenza del fatto che $\frac{d}{dt}\text{Exp}_p(\gamma_0(t)) = d\text{Exp}_p(\dot{\gamma}_0(t))$. \square

PROPOSIZIONE IX.5.6. Supponiamo che (M, g) sia completa e a curvatura sezionale non positiva. Allora ogni classe del gruppo fondamentale $\pi_1(M, p_0)$ contiene un'unica geodetica di lunghezza minima.

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo un punto $p_0 \in M$. Per il Teorema IX.4.2, l'applicazione $\text{Exp}_{p_0} : T_{p_0} M \rightarrow M$ è un rivestimento. Quindi i laccetti geodetici in p_0 omotopi corrispondono a segmenti uscenti dall'origine e con lo stesso secondo estremo in $T_{p_0} M \rightarrow M$, cioè due laccetti geodetici in p_0 sono omotopi se e soltanto se sono coincidenti. \square

DEFINIZIONE IX.5.7. Un triangolo geodetico in M è il dato di tre segmenti, gli estremi di ciascuno dei quali siano anche estremi degli altri due.

I tre segmenti si dicono *lati*, i loro estremi *vertici* e gli angoli che essi formano due a due nei punti d'intersezione *angoli* del triangolo geodetico.

Ricordiamo che l'angolo α tra due curve regolari $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{C}^1([0, 1], M)$ uscenti dallo stesso punto p_0 è il valore $\alpha \in [0, \pi]$ per cui

$$(\dot{\gamma}_1(0)|\dot{\gamma}_2(0)) = \|\dot{\gamma}_1(0)\| \|\dot{\gamma}_2(0)\| \cos \alpha.$$

NOTAZIONE IX.5.8. Per semplicità indicheremo nel seguito con \overline{pq} la distanza Riemanniana $d(p, q)$ di due punti p, q di M .

PROPOSIZIONE IX.5.9. Sia (M, g) una varietà Riemanniana a curvatura sezionale non positiva e B una palla convessa e semplice di M . Siano p_0, p_1, p_2 i vertici di un triangolo geodetico e poniamo $a = \overline{p_1 p_2}$, $b = \overline{p_0 p_2}$, $c = \overline{p_0 p_1}$, $\alpha = \widehat{p_1 p_0 p_2}$, $\beta = \widehat{p_0 p_1 p_2}$, $\gamma = \widehat{p_0 p_2 p_1}$, con $0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq \pi$. Valgono allora le disuguaglianze:

$$(9.5.4) \quad a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \leq c^2$$

$$(9.5.5) \quad \alpha + \beta + \gamma \leq \pi.$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo $p_0 = \text{Exp}_{p_2}(v_0)$, $p_1 = \text{Exp}_{p_2}(v_1)$, per due vettori $v_0, v_1 \in T_{p_2}M$ con $\|v_0\| = b$, $\|v_1\| = a$. Il lato $[p_0, p_1]$ del triangolo è il supporto di una geodetica $\gamma \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], M)$, di lunghezza c , che possiamo scrivere nella forma $\gamma = \text{Exp}_{p_2} \circ \gamma_0$, con $\gamma_0 \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], T_{p_2}M)$ e $\gamma_0(0) = v_0$, $\gamma_0(1) = v_1$. Per il Teorema IX.5.5,

$$c^2 = |L(\gamma)|^2 \geq |L(\gamma_0)|^2 \geq \|v_1 - v_0\|^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Le ampiezze α', β', γ' degli angoli interni del triangolo Euclideo i cui lati hanno lunghezze a, b, c soddisfano

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma' = c^2, \quad a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta' = b^2, \quad b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha' = a^2.$$

Poiché gli angoli $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ sono tutti compresi tra 0 e π , per la prima parte della dimostrazione abbiamo $\alpha \leq \alpha', \beta \leq \beta', \gamma \leq \gamma'$. Essendo $\alpha' + \beta' + \gamma' = \pi$, otteniamo anche la seconda disuguaglianza. \square

OSSERVAZIONE IX.5.10. La Proposizione IX.5.9 si applica in particolare a tutti i triangoli geodetici di una varietà Riemanniana completa con curvatura sezionale non positiva.

PROPOSIZIONE IX.5.11. Se (M, g) è connessa e completa, con curvatura sezionale non positiva, allora per ogni coppia di punti distinti di M passa una e una sola retta.

DIMOSTRAZIONE. L'enunciato è un'immediata conseguenza del Teorema di von Mangoldt-Cartan. \square

PROPOSIZIONE IX.5.12. Sia (M, g) connessa, semplicemente connessa e completa, con curvatura scalare non positiva. Allora per ogni retta ed ogni punto fuori di essa esiste un'unica retta incidente e perpendicolare alla retta data e che passi per il punto assegnato.

DIMOSTRAZIONE. Per la Proposizione IX.4.4, per ogni punto p_0 ed ogni retta r che non lo contiene, c'è una retta r' per p_0 , incidente e perpendicolare ad r in un punto p_1 . Se ce ne fosse un'altra, incidente ad r in un punto $p_2 \neq p_1$, la somma degli angoli interni del triangolo geodetico $p_0 p_1 p_2$ sarebbe maggiore di π . \square

Ricordiamo la

DEFINIZIONE IX.5.13. Una funzione reale $f \in \mathcal{C}^0(M, \mathbb{R})$, definita su una varietà differenziabile affine M , si dice *convessa* se, per ogni intervallo $I \subset \mathbb{R}$ ed ogni geodetica $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, M)$, la funzione composta $f \circ \gamma \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ è convessa.

PROPOSIZIONE IX.5.14. *Se (M, g) è una varietà Riemanniana semplicemente connessa, completa e con curvatura sezionale non positiva, allora la distanza da un punto è una funzione convessa.*

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo tre punti q, p_0, p_1 di M . Sia $p_t \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], M)$ il segmento che congiunge p_0 a p_1 . Abbiamo $\overline{p_0 p_t} = t \overline{p_0 p_1}$, $\overline{p_t p_1} = (1-t) \overline{p_0 p_1}$. Sia $\alpha_t = \widehat{p_0 p_t q}$. Poiché $\widehat{p_1 p_t q} = \pi - \alpha_t$, otteniamo dalla (9.5.4), applicata ai triangoli geodetici $p_0 p_t q$ e $p_1 p_t q$:

$$\begin{aligned} \overline{p_t q}^2 + t^2 \overline{p_0 p_1}^2 - 2t \overline{p_0 p_1} \cdot \overline{p_t q} \cos \alpha_t &\leq \overline{p_0 q}^2, \\ \overline{p_t q}^2 + (1-t)^2 \overline{p_0 p_1}^2 + 2(1-t) \overline{p_0 p_1} \cdot \overline{p_t q} \cos \alpha_t &\leq \overline{p_1 q}^2. \end{aligned}$$

Moltiplichiamo per $(1-t)$ la prima e per t la seconda diseuguaglianza e sommiamole. Otteniamo:

$$\overline{p_t q}^2 + t(1-t) \overline{p_0 p_1}^2 \leq (1-t) \overline{p_0 q}^2 + t \overline{p_1 q}^2.$$

Poiché per la diseuguaglianza triangolare $\overline{p_0 p_1} \geq |\overline{p_0 q} - \overline{p_1 q}|$, otteniamo che

$$\begin{aligned} \overline{p_t q}^2 &\leq (1-t) \overline{p_0 q}^2 + t \overline{p_1 q}^2 - t(1-t) |\overline{p_0 q} - \overline{p_1 q}|^2 \\ &\leq (1-t)^2 \overline{p_0 q}^2 + t^2 \overline{p_1 q}^2 + 2t(1-t) \overline{p_0 q} \cdot \overline{p_1 q} \\ &\leq ((1-t) \overline{p_0 q} + t \overline{p_1 q})^2, \end{aligned}$$

da cui ricaviamo che la $t \rightarrow \overline{p_t q}$ è convessa. \square

Nella dimostrazione abbiamo ottenuto

LEMMA IX.5.15. *Siano p_0, p_1, q tre punti di un aperto semplice convesso di una varietà Riemanniana (M, g) a curvatura sezionale non positiva. Consideriamo il segmento $p_t \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], M)$ di estremi p_0, p_1 . Allora*

$$(9.5.6) \quad \overline{p_t q}^2 \leq (1-t) \overline{p_0 q}^2 + t \overline{p_1 q}^2 - t(1-t) \overline{p_0 p_1}^2, \quad \forall 0 \leq t \leq 1. \quad \square$$

LEMMA IX.5.16. *Supponiamo che (M, g) abbia curvatura sezionale non positiva. Siano $p_0 \in M$ ed N_{p_0} un intorno normale di p_0 in M . Allora la funzione $p \rightarrow \overline{p p_0}$ è differenziabile su $N_{p_0} \setminus \{p_0\}$ e*

$$(9.5.7) \quad d_p \overline{p p_0}(w) = -\|w\| \cos \alpha, \quad \forall p \in N_{p_0}, \forall w \in T_p M,$$

ove α è l'angolo che il segmento $[p_0, p]$ forma con la direzione w .

DIMOSTRAZIONE. Sia $f(p) = \overline{p p_0}$. È $f(\text{Exp}_{p_0}(v)) = \|v\|$. Quindi

$$df(p)(d\text{Exp}_{p_0}(v)(w)) = \frac{(v|w)}{\|v\|} = \|w\| \cos \widehat{vw}, \quad \text{se } p = \text{Exp}_{p_0}(v), v, w \in T_{p_0} M.$$

Poiché il trasporto parallelo preserva l'ortogonalità lungo la geodetica, otteniamo la tesi, perché l'angolo \widehat{vw} è il supplementare di quello che il segmento $[0, v]$ forma con la semiretta $\{v + tw \mid t \geq 0\}$. \square

OSSERVAZIONE IX.5.17. Si potrebbe utilizzare il Lemma IX.5.16 e la (9.5.7) per dimostrare la convessità della funzione distanza, verificando che la derivata della distanza di un punto di una geodetica dal punto fissato p_0 è una funzione non decrescente.

Più in generale, se (M, g) è completa, connessa e semplicemente connessa ed ha curvatura sezionale non positiva, allora la funzione $M \times M \ni (p_1, p_2) \rightarrow d(p_1, p_2) \in \mathbb{R}$ è convessa e \mathcal{C}^∞ fuori dalla diagonale.

LEMMA IX.5.18. *Supponiamo che (M, g) abbia curvatura sezionale non positiva. Siano $p_t \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], M)$ e $q_t \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], M)$ due geodetiche uscenti dallo stesso punto p_0 i cui supporti siano contenuti in un aperto semplice convesso di M . Allora*

$$(9.5.8) \quad d(p_t, q_t) \leq t d(p_1, q_1), \quad \forall 0 \leq t \leq 1.$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo, per la (9.5.6):

$$\begin{aligned} \overline{p_1 q_t^2} &\leq t \overline{p_1 q_1^2} + (1-t) \overline{p_0 p_1^2} - t(1-t) \overline{p_0 q_1^2}, \\ \overline{p_t q_t^2} &\leq t \overline{p_1 q_t^2} + (1-t) \overline{p_0 q_t^2} - t(1-t) \overline{p_0 p_1^2}. \end{aligned}$$

Tenuto conto che $\overline{p_0 q_t} = t \overline{p_0 q_1}$, sostituendo la prima diseuguaglianza nella seconda otteniamo

$$\begin{aligned} \overline{p_t q_t^2} &\leq t \left(t \overline{p_1 q_1^2} + (1-t) \overline{p_0 p_1^2} - t(1-t) \overline{p_0 q_1^2} \right) + t^2(1-t) \overline{p_0 q_1^2} - t(1-t) \overline{p_0 p_1^2} \\ &\leq t^2 \overline{p_1 q_1^2}, \end{aligned}$$

che è la diseuguaglianza cercata. \square

PROPOSIZIONE IX.5.19. *Supponiamo che (M, g) abbia curvatura sezionale non negativa. Allora la funzione $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ è convessa.*

DIMOSTRAZIONE. Dobbiamo verificare che, se $p_t, q_t \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], M)$ sono due geodetiche, allora la funzione $f(t) = \overline{p_t q_t} \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ è convessa. Il segmento $r_t \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], M)$ che unisce p_0 a q_1 ha lo stesso punto iniziale di p_t ed i segmenti $\{t \rightarrow r_{1-t}\}$ e $\{t \rightarrow q_{1-t}\}$ hanno lo stesso punto iniziale q_0 . Per il Lemma IX.5.18 valgono quindi

$$\overline{p_t r_t} \leq t \overline{p_1 q_1}, \quad \overline{r_t q_t} \leq (1-t) \overline{p_0 q_0}, \quad \forall 0 \leq t \leq 1.$$

Otteniamo perciò

$$\overline{p_t q_t} \leq \overline{p_t r_t} + \overline{r_t q_t} \leq (1-t) \overline{p_0 q_0} + t \overline{p_1 q_1}, \quad \forall 0 \leq t \leq 1.$$

La dimostrazione è completa. \square

Mostriamo ora che ogni gruppo compatto di isometrie di una varietà Riemanniana a curvatura non positiva è un gruppo di rotazioni. Il significato di questa affermazione è spiegato dall'enunciato seguente.

TEOREMA IX.5.20. *Sia (M, g) una varietà Riemanniana connessa e completa, con curvatura sezionale non positiva. Sia \mathbf{K} un gruppo topologico compatto e localmente compatto, che agisce su M come un gruppo di isometrie. Allora \mathbf{K} ha almeno un punto fisso in M .*

DIMOSTRAZIONE. Siano λ la misura di Haar su \mathbf{K} , normalizzata in modo che sia $\int_{\mathbf{K}} d\lambda = 1$, e d la distanza su M a definita dalla metrica g . Fissiamo un punto $p_0 \in M$ e definiamo su M una funzione continua, ponendo

$$\Psi(p) = \int_{\mathbf{K}} |d(p, kp_0)|^2 d\lambda(k).$$

Osserviamo che $\Psi(kp) = \Psi(p)$ per ogni $k \in \mathbf{K}$. Dico che $\Psi(p)$ ha minimo in M . Infatti, l'orbita $\mathbf{K}p_0$ è compatta e quindi ha diametro $\delta = \max_{p_1, p_2 \in \mathbf{K}p_0} d(p_1, p_2)$ finito. Se $d(p, p_0) > 2\delta$,

$$\begin{aligned} \Psi(p) &= \int_{\mathbf{K}} |d(p, kp_0)|^2 d\lambda(k) \geq \int_{\mathbf{K}} |d(p, p_0) - d(p_0, kp_0)|^2 d\lambda(k) \\ &> \delta^2 \geq \Psi(p_0). \end{aligned}$$

Per l'ipotesi che (M, g) sia completa, la palla chiusa $\overline{B_{p_0}(2\delta)}$ è compatta. Il minimo di Ψ su $\overline{B(p_0, 2\delta)}$ è anche minimo di Ψ su M . Sia $q_0 \in \overline{B_{p_0}(2\delta)}$ un punto di minimo di Ψ . Poiché Ψ è \mathbf{K} -invariante, per dimostrare che q_0 è punto fisso di \mathbf{K} è sufficiente verificare che $\Psi(p) > \Psi(q_0)$ per ogni $p \neq q_0$.

Sia $p \in M$ un punto distinto da q_0 , $k \in \mathbf{K}$ ed α_k l'angolo delle geodetiche uscenti da q_0 e passanti per p e kp_0 , rispettivamente. Per il teorema del coseno è

$$(*) \quad |d(p, kp_0)|^2 \geq |d(q_0, kp_0)|^2 + |d(p, q_0)|^2 - 2d(q_0, kp_0)d(p, q_0) \cos \alpha_k.$$

Poiché q_0 è punto di minimo per Ψ , indicando con $t \rightarrow q_t$ la geodetica di estremi q_0 e $p = q_1$, abbiamo

$$\left. \frac{d}{dt} \int_{\mathbf{G}} |d(q_t, kp_0)|^2 d\lambda(k) \right|_{t=0} = 0.$$

Fissato $k \in \mathbf{K}$, è $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} |d(q_t, kp_0)|^2 = -2d(p, q_0) d(kp_0, q_0) \cos \alpha_k$.

Quindi, differenziando sotto il segno d'integrale, otteniamo

$$\int_{\mathbf{G}} d(q_0, p) \cdot d(q_0, kp_0) \cos \alpha_k d\lambda(k) = 0.$$

Integrando (*) membro a membro abbiamo perciò

$$\Psi(p) \geq \Psi(q_0) + |d(p, q_0)|^2.$$

La dimostrazione è completa. \square

Questo teorema di punto fisso si può considerare un caso particolare del teorema di Cartan sull'esistenza del baricentro:

TEOREMA IX.5.21 (Cartan (1929)). *Supponiamo che (M, g) sia completa, connessa e semplicemente connessa, ed abbia curvatura sezionale non positiva. Sia K un compatto non vuoto di M e λ una misura di probabilità⁶ su K . Allora la funzione*

$$f(p) = \int_K |d(p, q)|^2 d\lambda(q)$$

⁶È cioè positiva e di massa totale 1.

è strettamente convessa ed ammette un unico punto di minimo in M . Il suo gradiente⁷ è definito da

$$\nabla f(p) = \int_K \text{Exp}_p^{-1}(q) d\lambda(q).$$

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione è simile a quella del teorema precedente. \square

Interpretando una misura di probabilità come una distribuzione di massa tra i punti di K , l'unico minimo del funzionale f ne è il *centro di massa*. In particolare, quando K consiste di un numero finito di punti p_0, p_1, \dots, p_k , possiamo considerare il *poliedro* dei punti $p = t_0 p_0 + t_1 p_1 + \dots + t_k p_k$, con $t_i \geq 0$ e $t_0 + t_1 + \dots + t_k = 1$, ove p è il punto di minimo della funzione $f(p) = \sum_{i=0}^k t_i |d(p, p_i)|^2$. I punti interni del poliedro di $(k+1)$ punti sufficientemente vicini tra loro formano una varietà di dimensione minore o uguale di k .

IX.6. Un teorema di Bochner

Sia \mathbf{G} un gruppo topologico.

DEFINIZIONE IX.6.1. Un'azione locale di \mathbf{G} su una varietà differenziabile M è il dato di un aperto U di M e di una applicazione continua $\phi : \mathbf{G} \times U \rightarrow M$ tale che

- (1) $\phi_a = \{p \rightarrow \phi(a, p)\} \in \mathcal{C}^\infty(U, M)$, $\forall a \in \mathbf{G}$,
- (2) $\mathbf{G} \ni a \rightarrow \phi_a \in \mathcal{C}^\infty(U, M)$ sia continua,
- (3) $\phi_e(p) = \phi(e, p) = p$, $\forall p \in U$,
- (4) $\phi_a \circ \phi_b(p) = \phi(ab)(p)$ se $a, b \in \mathbf{G}$, e $p, \phi_b(p) \in U$.

TEOREMA IX.6.2. Sia \mathbf{G} un gruppo compatto. Supponiamo definita un'azione locale di \mathbf{G} su M con un punto fisso p_0 . Allora possiamo trovare una carta locale (U, x) con centro in p_0 in cui \mathbf{G} operi come un gruppo di trasformazioni lineari.

DIMOSTRAZIONE. Possiamo supporre che $M = \mathbb{R}^n$, che ogni $a \in \mathbf{G}$ definisca una $\phi_a \in \mathcal{C}^\infty(B_0(r), B_0(R))$ per due numeri reali $0 < r < R$, e che 0 sia punto fisso di tutte le ϕ_a . Indichiamo con $y = (y^1, \dots, y^m)$ le coordinate di \mathbb{R}^m . L'applicazione

$$\mathbf{G} \ni a \longrightarrow L_a = \frac{\partial \phi_a(0)}{\partial y} \in \mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$$

che associa ad $a \in \mathbf{G}$ lo Jacobiano di ϕ_a in 0 è un omomorfismo di gruppi tale che

$$\phi_a(y) = L_a y + o(|y|), \quad \forall a \in \mathbf{G}, \forall y \in B_0(r).$$

Sia λ la misura di Haar biinvariante su \mathbf{G} di volume 1 e definiamo la trasformazione

$$R(y) = \int_{\mathbf{G}} L_{a^{-1}} \circ \phi_a(y) d\lambda(a).$$

⁷Il gradiente di f è il campo di vettori ∇f tale che $df(p)(v) = (\nabla f|_v)$ per ogni $v \in T_p M$, per ogni $p \in M$.

Per il teorema di derivazione sotto il segno d'integrale, l'applicazione R è differenziabile su W e

$$\frac{\partial R(y)}{\partial y} v = \int_{\mathbf{G}} L_{a^{-1}} \frac{\partial \phi_a(y)}{\partial y} v d\lambda(a), \quad \forall y \in B_0(r), \quad \forall v \in \mathbb{R}^m.$$

In particolare, $\partial R(0)/\partial y = I_m$ e quindi, per il teorema delle funzioni implicite, la R definisce un diffeomorfismo di un intorno U di 0 in $B_0(r) \subset \mathbb{R}^m$ su un intorno U' di 0 in \mathbb{R}^m .

Abbiamo poi, se $b \in \mathbf{G}$ ed $y, \phi_b(y) \in B_0(r)$:

$$\begin{aligned} L_b \circ R(y) &= L_b \int_{\mathbf{G}} L_{a^{-1}} \circ \phi_a(y) d\lambda(a) = \int_{\mathbf{G}} L_b L_{a^{-1}} \circ \phi_a(y) d\lambda(a) \\ &= \int_{\mathbf{G}} L_{ba^{-1}} \circ \phi_{ab^{-1}} \circ \phi_b(y) d\lambda(ab^{-1}) = R \circ \phi_b(y). \end{aligned}$$

Quindi, in un intorno sufficientemente piccolo di 0 in $B_0(r)$, abbiamo

$$R \circ \phi_b \circ R^{-1} = L(b).$$

La dimostrazione è completa. \square

TEOREMA IX.6.3. *Sia \mathbf{G} un gruppo topologico localmente compatto, con un'azione locale su una varietà differenziabile M . Allora esiste un intorno dell'identità N_e in \mathbf{G} tale che gli elementi di ogni sottogruppo di \mathbf{G} che sia contenuto in N_e lascino fissi tutti i punti di un aperto non vuoto di M .*

DIMOSTRAZIONE. Sia U_0 un aperto non vuoto di M tale che ogni $a \in \mathbf{G}$ definisca un diffeomorfismo di U_0 su un aperto di M . Fissiamo un qualsiasi aperto non vuoto V_0 relativamente compatto in U_0 e sia N'_e un intorno aperto relativamente compatto dell'identità in \mathbf{G} tale che ogni elemento di N'_e definisca un'applicazione che trasformi \bar{V}_0 in un aperto contenuto in U_0 . Ciò è possibile perché per ipotesi l'applicazione ϕ è continua per la topologia di gruppo topologico assegnata su \mathbf{G} e la compatta-aperta su $\mathcal{C}^\infty(U_0, M)$.

Possiamo supporre che U_0 sia l'aperto di una carta locale x , con $x(U_0) = B_0(R) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid |x| < R\}$, che $x(V_0) = B_0(r)$ con $0 < r < R$. Gli elementi a di N'_e definiscono allora delle applicazioni $\psi_a \in \mathcal{C}^\infty(B_0(r), B_0(R))$ e possiamo, fissato un numero reale $\epsilon < 1$ con $0 < \epsilon < R - r$, considerare un intorno N_e di e relativamente compatto in N'_e e tale che, per ogni a in N_e sia

$$|x - \psi_a(x)| + \|I_m - \partial \psi_a / \partial x\| < \epsilon, \quad \text{se } |x| \leq r.$$

Sia \mathbf{G}_0 un sottogruppo contenuto in N_e . La sua chiusura è un sottogruppo compatto $\mathbf{H} = \bar{\mathbf{G}}_0$ contenuto in $N'_e \Subset N'_e$. Sia λ la misura di Haar biinvariante su \mathbf{H} e definiamo, per $x \in B_0(r)$,

$$R(x) = \int_{\mathbf{H}} \psi_a(x) d\lambda(a)$$

Differenziando sotto il segno d'integrale otteniamo

$$\left| \frac{\partial R(x)}{\partial x} v \right| = \left| \int_{\mathbf{H}} \frac{\partial \psi_a(x)}{\partial x} v d\lambda(a) \right| \geq (1 - \epsilon) |v|, \quad \forall x \in B_0(r), \quad \forall v \in \mathbb{R}^m.$$

In particolare, R è invertibile nell'intorno di ogni punto x di $B_0(r)$.

Per ogni $b \in \mathbf{H}$, per l'invarianza della misura di Haar abbiamo

$$R \circ \phi_b = \int_{\mathbf{H}} \psi_a \circ \psi_b d\lambda(a) = \int_{\mathbf{H}} \phi_{ab} d\lambda(a) = \int_{\mathbf{H}} \phi_{ab} d\lambda(ab) = R$$

ne segue che ψ_b è l'identità su $B_0(r)$. \square

Da questo ricaviamo il teorema⁸ sulla non esistenza di sottogruppi *piccoli*.

TEOREMA IX.6.4. *Sia \mathbf{G} un gruppo topologico localmente compatto di diffeomorfismi \mathcal{C}^∞ di una varietà differenziabile M . Allora esiste un intorno N dell'identità in \mathbf{G} che non contiene sottogruppi di \mathbf{G} diversi da $\{e\}$. \square*

COROLLARIO IX.6.5. *Sia \mathbf{G} un gruppo topologico di trasformazioni differenziabili di una varietà M . Allora esiste un intorno dell'identità N_e in \mathbf{G} tale che, per ogni $a \in N_e \setminus \{e\}$ esiste un intero k tale che $a^k \notin N_e$.*

TEOREMA IX.6.6. *Sia \mathbf{G} un gruppo localmente compatto di diffeomorfismi di una varietà M . Se l'identità e di \mathbf{G} non è un punto isolato di \mathbf{G} , allora⁹ di \mathbf{G} , allora \mathbf{G} contiene sottogruppi a un parametro.*

⁸S.Bochner e D.Montgomery, *Locally compact groups of differentiable transformations*, *Annals of Mathematics*, **47**, (1946) pp.639-653.

⁹Ciò significa che ogni intorno di e in \mathbf{G} elementi distinti da e .

Gruppi di trasformazioni

X.1. Il gruppo delle isometrie di uno spazio metrico

Sia (M, d_M) uno spazio metrico. Indichiamo con $B_p(r) = \{q \in M \mid d_M(q, p) < r\}$ e con $\bar{B}_p(r) = \{q \in M \mid d_M(q, p) \leq r\}$ le palle, rispettivamente aperta e chiusa, di centro p e raggio R .

DEFINIZIONE X.1.1. Se (M, d_M) ed (N, d_N) sono due spazi metrici, un'applicazione $f : M \rightarrow N$ è un'isometria se preserva le distanze, se cioè

$$d_N(f(p_1), f(p_2)) = d_M(p_1, p_2), \quad \forall p_1, p_2 \in M.$$

OSSERVAZIONE X.1.2. Ogni isometria è un'applicazione continua e iniettiva.

Un'isometria di uno spazio metrico in sé può non essere surgettiva. Si consideri ad esempio il caso in cui M sia la semiretta $\{t \geq 0\} \subset \mathbb{R}$, con la metrica standard. La $M \ni t \rightarrow f(t) = t + 1 \in M$ è un'isometria non surgettiva.

DEFINIZIONE X.1.3. Si chiama *isometria globale* o *congruenza* un'isometria invertibile.

Le isometrie invertibili di (M, d_M) in sé formano un gruppo, che chiamiamo *gruppo delle isometrie di M* , ed indicheremo con $\mathbf{I}(M)$.

PROPOSIZIONE X.1.4. Se (M, d_M) è compatta e connessa, allora ogni isometria di M in sé è globale.

DIMOSTRAZIONE. Sia f un'isometria di M in sé. L'immagine $f(M)$ è compatta e quindi chiusa. Supponiamo per assurdo che f non sia surgettiva e sia $p_0 \in M$ con $\delta = d_M(p_0, f(M)) = \max_{p \in M} d_M(p, f(M)) > 0$. Definiamo per ricorrenza $p_{n+1} = f(p_n) = f^{n+1}(p_0)$ per ogni intero $n \geq 0$. Se $0 \leq n_1 < n_2$ abbiamo

$$d_M(p_{n_1}, p_{n_2}) = d_M(f^{n_1}(p_0), f^{n_2}(p_0)) = d_M(p_0, f^{n_2-n_1}(p_0)) \geq \delta > 0.$$

La $\{p_n\}$ non ha quindi punti di accumulazione in M , e ciò contraddice la compattezza di M . La dimostrazione è completa. \square

LEMMA X.1.5. Sia (N, d_N) uno spazio metrico localmente compatto. Siano (M, d_M) un altro spazio metrico ed $\{f_v\} \subset \mathcal{C}(M, N)$ una successione di isometrie di M in N . Sia p_0 un punto di M e supponiamo che la successione $\{f_v(p_0)\}$ converga in N ad un punto q_0 . Se $r > 0$ e $\bar{B}_{q_0}(r)$ è compatta in N , allora possiamo estrarre da $\{f_v\}$ una sottosuccessione $\{f_{k_v}\}$ che converge, uniformemente su $\bar{B}_{p_0}(r)$, ad una isometria $f : \bar{B}_{p_0}(r) \rightarrow \bar{B}_{q_0}(r)$.

DIMOSTRAZIONE. Possiamo fissare un numero reale $R > r$ tale che $\bar{B}_{q_0}(R)$ sia ancora compatta in N . A meno di passare ad una sottosuccessione, possiamo supporre che $d_N(f_\nu(p_0), q_0) < (R - r)/2$ per ogni indice ν . Allora

$$d_N(f_\nu(p), q_0) \leq d_N(f_\nu(p), f_\nu(p_0)) + d_N(f_\nu(p_0), q_0) \leq (R + r)/2 + (R - r)/2 = R$$

se $d_M(p, p_0) \leq (R + r)/2$,

cioè $f_\nu(\bar{B}_{p_0}((R + r)/2)) \subset \bar{B}_{q_0}(R)$ per ogni ν .

Per ogni intero ν possiamo fissare dei sottoinsiemi finiti A_ν di $\bar{B}_{p_0}((R + r)/2)$ tali che $A_\nu \subset A_{\nu+1}$ e $\bar{B}_{p_0}((R + r)/2) \subset \bigcup_{p \in A_\nu} B_p(r2^{-\nu})$. Infatti, se ciò non fosse possibile, potremmo trovare un $\epsilon > 0$ ed, in $\bar{B}_{p_0}((R + r)/2)$, una successione $\{p_n\}$ con $d(p_{n_1}, p_{n_2}) > \epsilon$ se $n_1 \neq n_2$. Ma questo darebbe una contraddizione, perché le successioni $\{f_\nu(p_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ sarebbero allora prive di punti di accumulazione, pur essendo contenute nel compatto $\bar{B}_{q_0}(R)$.

Per ogni $p \in \bar{B}_{p_0}((R + r)/2)$, la successione $\{f_\nu(p)\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ è a valori nel compatto $\bar{B}_{q_0}(R)$ ed ammette perciò una sottosuccessione convergente. Possiamo quindi costruire per ricorrenza una sequenza di successioni estratte $\{f_\nu\} \supset \{f_\nu^{(1)}\} \supset \dots \supset \{f_\nu^{(\mu)}\} \supset \dots$ tali che $d(f_\nu^{(\mu)}(p), f_{\nu'}^{(\mu)}(p)) < r2^{-\mu}$ per ogni ν, ν' se $p \in A_\mu$. Dico che la $\{f_\nu^{(\nu)}\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente su $\bar{B}_{p_0}((R + r)/2)$ ad un'isometria $f : \bar{B}_{p_0}((R + r)/2) \rightarrow B_{q_0}((R + r)/2) \subset M$. Abbiamo infatti

$$d_N(f_\nu^{(\nu)}(p), f_\mu^{(\mu)}(p))$$

$$\leq \inf_{\bar{p} \in A_\nu} \left(d_N(f_\nu^{(\nu)}(p), f_\nu^{(\nu)}(\bar{p})) + d_N(f_\nu^{(\nu)}(\bar{p}), f_\mu^{(\mu)}(\bar{p})) + d_N(f_\mu^{(\mu)}(p), f_\mu^{(\mu)}(\bar{p})) \right) \leq 3r2^{-\nu},$$

$\forall p \in \bar{B}_{p_0}((R + r)/2), \forall \nu < \mu.$

Ne segue che, per ogni $p \in \bar{B}_{p_0}((R + r)/2)$, la $\{f_\nu^{(\nu)}(p)\}$ è una successione di Cauchy a valori nel compatto $\bar{B}_{q_0}(R)$. Le restrizioni a $\bar{B}_{p_0}((R + r)/2)$ delle $f_\nu^{(\nu)}$ convergono quindi uniformemente ad una funzione $f : \bar{B}_{p_0}((R + r)/2) \rightarrow \bar{B}_{q_0}(R)$. La f è un'isometria ed inoltre, poiché $f(p_0) = q_0$, essa trasforma $\bar{B}_\rho(p_0)$ in $\bar{B}_{q_0}(\rho)$ per ogni $\rho \leq (R + r)/2$. \square

Considereremo nel seguito di questo paragrafo isometrie di uno spazio metrico M in sé. Indicheremo per semplicità con d , invece che d_M , la distanza su M .

Vale il seguente

LEMMA X.1.6. *Supponiamo che (M, d) sia uno spazio metrico localmente compatto e connesso e sia $\{f_\nu\}$ una successione di isometrie globali di M in sé. Sia $p_0 \in M$ e supponiamo che la successione $\{f_\nu(p_0)\}$ converga ad un punto q_0 di M . Allora, se $r > 0$ e $\bar{B}_{p_0}(r)$ è compatta, possiamo estrarre da $\{f_\nu\}$ una sottosuccessione $\{f_{k_\nu}\}$ che converge, uniformemente su $\bar{B}_{p_0}(r)$, ad un'isometria f di $\bar{B}_{p_0}(r)$ su $\bar{B}_{q_0}(r)$.*

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo $R > r$ in modo che $\bar{B}_{p_0}(R)$ sia ancora compatta in M . Se ν_0 è tale che $d(f(p_0), q_0) < (R - r)/2$, allora, poiché abbiamo supposto che le f_ν fossero invertibili, abbiamo

$$f_{\nu_0}(\bar{B}_{p_0}(R)) = \bar{B}_{f_{\nu_0}(p_0)}(R) \supset \bar{B}_{q_0}((R + r)/2).$$

Quindi anche $\bar{B}_{q_0}(r)$ è compatta e possiamo applicare il LemmaX.1.5 sia alla successione $\{f_v\}$ che alla successione delle inverse $\{f_v^{-1}\}$. Otteniamo così una sottosuccessione $\{f_{k_v}\}$ che converge uniformemente su $\bar{B}_{p_0}(r)$ ad una isometria f a valori in $\bar{B}_{q_0}(r)$, e tale che la successione delle inverse $\{f_{k_v}^{-1}\}$ converga uniformemente su $\bar{B}_{q_0}(r)$ all'inversa della f . \square

LEMMA X.1.7. *Sia (M, d) uno spazio metrico localmente compatto e connesso. Dati due punti q_0, q di M è possibile trovare una successione finita q_0, q_1, \dots, q_k e numeri reali positivi r_0, r_1, \dots, r_k tali che*

- (1) $q_k = q$;
- (2) per ogni $i = 0, 1, \dots, k$ la palla chiusa $\bar{B}_{q_i}(r_i)$ è compatta in M ;
- (3) $d(q_i, q_{i-1}) \leq r_{i-1}$ per $1 \leq i \leq k$.

DIMOSTRAZIONE. Fissato il punto q_0 , indichiamo con N il sottoinsieme di M formato dai punti q per cui è possibile trovare una successione finita q_0, \dots, q_k che soddisfi le condizioni (1), (2), (3). Se $q \in N$ e $q = q_k$ per una sequenza q_0, \dots, q_k di punti di M ed r_0, \dots, r_k di numeri reali positivi che soddisfano le (1), (2), (3), allora tutti i punti della palla $B_q(r_k)$ appartengono ancora ad N . Quindi N è aperto in M .

Supponiamo ora che q appartenga alla chiusura \bar{N} di N e sia $\bar{B}_q(R)$, con $R > 0$, una palla compatta di M con centro in q . Allora possiamo trovare una successione q_0, \dots, q_k di punti di M ed r_0, \dots, r_k di numeri reali positivi che soddisfano (1), (2), (3), e con $d(q_k, q) < R/2$. Possiamo allora considerare le nuove successioni q_0, \dots, q_k, q_{k+1} di punti di M ed r'_0, \dots, r'_{k+1} di numeri reali positivi, con $r'_i = r_i$ per $i < k$, $r'_k = \max(r_k, R/2)$ ed $r'_{k+1} = R$. Esse soddisfano le (1), (2), (3) e quindi $q \in N$. Ciò dimostra che N è anche chiuso.

Poiché $q_0 \in N \neq \emptyset$, il sottoinsieme N di M è aperto e chiuso e non vuoto nel connesso M e dunque uguale ad M . \square

PROPOSIZIONE X.1.8. *Supponiamo che (M, d) sia connesso e localmente compatto. Sia $p_0 \in M$. Da ogni successione $\{f_v\}$ di isometrie globali di M per cui $\{f_v(p_0)\}$ sia convergente si può estrarre una sottosuccessione $\{f_{k_v}\}$ che converga, uniformemente sui compatti di M , ad un'isometria globale di M .*

DIMOSTRAZIONE. Inseriamo il punto p_0 in una successione $\{p_\mu\}_{\mu \geq 0}$ densa in M . Per ogni μ sia $\rho_\mu > 0$ tale che $\bar{B}_{p_\mu}(\rho_\mu)$ sia compatto in M . Mostriamo per ricorrenza che è possibile trovare una sequenza

$$\{f_v\} \supset \{f_v^{(0)}\} \supset \dots \supset \{f_v^{(\mu)}\} \supset \dots$$

di successioni, ciascuna estratta dalla precedente, tali che $\{f_v^{(\mu)}\}$ converga uniformemente su $\bigcup_{0 \leq j \leq \mu} \bar{B}_{p_j}(\rho_j)$. La possibilità di trovare la $\{f_v^{(0)}\}$ è conseguenza del LemmaX.1.6. Supponiamo sia $\mu > 0$ e di aver costruito le $\{f_v^{(j)}\}$ per $j < \mu$. Siano q_0, \dots, q_k con $q_0 = p_0$ e $q_k = p_k$ una sequenza finita di punti di M ed r_0, \dots, r_k di numeri reali positivi che soddisfino le condizioni (1), (2), (3) del LemmaX.1.7. Possiamo prendere $r_k = \rho_\mu$. Per il LemmaX.1.6 è possibile estrarre da $\{f_v^{(\mu-1)}\}$ una sottosuccessione $\{\phi_v^{(0)}\}$ che converga uniformemente in tutti i punti di $\bar{B}_{q_0}(r_0)$. In particolare, $\{\phi_v^{(0)}(q_1)\}$ è convergente e quindi, per il LemmaX.1.6 se ne può estrarre

una $\{\phi_v^{(1)}\}$ che converga uniformemente su $\bar{B}_{q_1}(r_1)$. Per ricorrenza, otterremo dopo k passi una successione estratta $\{\phi_v^{(k)}\}$ di isometrie che converge uniformemente su $\bar{B}_{q_0}(r_0) \cup \dots \cup \bar{B}_{q_k}(r_k)$. In particolare, la $\{f_v^{(\mu)}\} = \{\phi_v^{(k)}\}$ converge uniformemente su $\bigcup_{0 \leq j \leq \mu} \bar{B}_{p_j}(\rho_j)$.

La successione estratta $\{f_v^{(\nu)}\}$ converge allora uniformemente su tutti i compatti di M ad un'isometria $f : M \rightarrow M$. Per dimostrare che f è globale, osserviamo che, posto $\phi_v = [f_v^{(\nu)}]^{-1}$ e $q_0 = f(p_0)$, la $\{\phi_v(q_0)\}$ converge a p_0 . Possiamo allora inserire q_0 in una successione densa $\{q_\mu\}_{\mu \geq 0}$ di punti di M e ripetere il ragionamento svolto in precedenza. Dalla $\{\phi_v\}$ possiamo allora estrarre una sottosuccessione $\{\phi_{k_\nu}\}$ che converge uniformemente su tutti i compatti di M ad una ϕ , che si verifica facilmente essere l'inversa della f trovata in precedenza. \square

Dalla Proposizione X.1.8 si ricavano gli enunciati seguenti.

TEOREMA X.1.9. *Il gruppo $\mathbf{I}(M)$ delle isometrie di uno spazio metrico connesso e localmente compatto è localmente compatto rispetto alla topologia compatta-aperta.* \square

PROPOSIZIONE X.1.10. *Il gruppo delle isometrie globali di uno spazio metrico localmente compatto (M, d) che lasciano fisso un punto p_0 di M è un gruppo compatto.*

Le isometrie di uno spazio metrico compatto (M, d) formano un gruppo compatto. \square

X.2. Un teorema di Bochner-Montgomery

In questo paragrafo dimostriamo il teorema di Bochner-Montgomery¹ che ci dice che ogni gruppo localmente compatto di trasformazioni differenziabili è un gruppo di Lie.

Siano M una varietà differenziabile e \mathbf{G} un gruppo topologico di diffeomorfismi di M . Si suppone che l'inclusione di \mathbf{G} in $\mathcal{C}^\infty(M, M)$ sia continua.

TEOREMA X.2.1. *Supponiamo che \mathbf{G} sia compatto e che vi sia un punto fisso p_0 per tutte le $a \in \mathbf{G}$. Allora l'applicazione*

$$(10.2.1) \quad \mathbf{G} \ni a \longrightarrow da \in \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(T_{p_0}M)$$

è un isomorfismo di gruppi. Possiamo inoltre trovare una carta locale (U, x) con centro in p_0 tale che, nelle coordinate x , gli elementi di a si scrivano come trasformazioni lineari.

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo una carta locale (V, y) con centro in p_0 tale che $y(V) = B_0(\mathbb{R}^m) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid |y| < R\}$. Fissiamo $0 < r < R$ in modo che $|y(a(p))| < R$ se $p \in V$ e $|y(p)| < r$. Indichiamo con $\phi_a \in \mathcal{C}^\infty(B_0(r), B_0(\mathbb{R}^m))$ l'applicazione $y \circ a \circ y^{-1}$ su $B_0(r)$ e con $L : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$ l'applicazione che fa corrispondere ad $a \in \mathbf{G}$ lo Jacobiano L_a in 0 di ϕ_a . La L è un omomorfismo di gruppi e

$$\phi_a(y) = L_a y + o(|y|), \quad \forall a \in \mathbf{G}, \forall y \in B_0(r).$$

¹Salomon Bochner e Deane Montgomery, *Locally Compact Groups of Differentiable Transformations*, Annals of Mathematics, **47**, (1946), pp. 639-653

Sia λ la misura di Haar biinvariante su \mathbf{G} di volume 1 e definiamo la trasformazione

$$R(y) = \int_{\mathbf{G}} L_{a^{-1}} \circ \phi_a(y) d\lambda(a).$$

Per il teorema di derivazione sotto il segno d'integrale, l'applicazione R è differenziabile su W e

$$\frac{\partial R(y)}{\partial y} v = \int_{\mathbf{G}} L_{a^{-1}} \frac{\partial \phi_a(y)}{\partial y} v d\lambda(a), \quad \forall y \in B_0(r), \quad \forall v \in \mathbb{R}^m.$$

In particolare, $\partial R(0)/\partial y = I_m$ e quindi, per il teorema delle funzioni implicite, la R definisce un diffeomorfismo di un intorno U di 0 in $B_0(r) \subset \mathbb{R}^m$ su un intorno U' di 0 in \mathbb{R}^m .

Abbiamo poi, se $b \in \mathbf{G}$ ed $y, \phi_b(y) \in B_0(r)$:

$$\begin{aligned} L_b \circ R(y) &= L_b \int_{\mathbf{G}} L_{a^{-1}} \circ \phi_a(y) d\lambda(a) = \int_{\mathbf{G}} L_b L_{a^{-1}} \circ \phi_a(y) d\lambda(a) \\ &= \int_{\mathbf{G}} L_{ba^{-1}} \circ \phi_{ab^{-1}}(\phi_b(y)) d\lambda(ab^{-1}) = R \circ \phi_b(y). \end{aligned}$$

Quindi, in un intorno sufficientemente piccolo di 0 in $B_0(r)$, abbiamo

$$R \circ \phi_b \circ R^{-1} = L_b.$$

La dimostrazione è completa. \square

COROLLARIO X.2.2. *Supponiamo che \mathbf{G} sia compatto ed M connessa. Allora l'unica trasformazione di \mathbf{G} che lasci fissi i punti di un aperto non vuoto di M è l'identità.*

DIMOSTRAZIONE. Sia a una trasformazione di \mathbf{G} che lasci fissi i punti di un aperto non vuoto U di M . Il sottogruppo \mathbf{H} degli elementi di \mathbf{G} che lasciano fissi i punti di U è un sottogruppo chiuso e quindi compatto di \mathbf{G} . Sia N la parte interna dell'insieme dei punti fissi comuni a tutte le applicazioni di \mathbf{H} . Per ipotesi, $N \neq \emptyset$. Se p_0 appartiene alla chiusura di N , esso è un punto fisso di tutte le trasformazioni di \mathbf{H} . Per il Teorema X.2.1, possiamo trovare una carta locale con centro in p_0 in cui tutti gli elementi di \mathbf{H} si scrivano come trasformazioni lineari. Ma una trasformazione lineare che sia l'identità su un aperto non vuoto è l'identità, e quindi gli elementi di \mathbf{H} lasciano fissi anche tutti i punti di un intorno di p_0 e quindi $p_0 \in N$. Essendo aperto e chiuso in M e non vuoto, l'insieme N dei punti fissi delle trasformazioni in \mathbf{H} coincide con M . Quindi $a \in \mathbf{H} = \{\text{id}_M\}$ e dunque a è l'identità su M . \square

Dimostriamo poi che un gruppo localmente compatto di trasformazioni differenziabili non contiene *sottogruppi piccoli*. Il significato di questa affermazione è spiegato nel teorema seguente.

TEOREMA X.2.3. *Supponiamo che \mathbf{G} sia un gruppo localmente compatto di diffeomorfismi di una varietà connessa M . Esiste allora un intorno N_e dell'identità di \mathbf{G} che non contiene sottogruppi non banali.*

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo una carta locale (U, x) con $x(U) = B_0(R)$. Se $0 < r < R$, indichiamo con U_r l'aperto $\{p \in U \mid |x(p)| < r\}$. Se $a \in \mathcal{C}^\infty(U_r, U)$ indicheremo con $\phi_a \in \mathcal{C}^\infty(B_0(r), B_0(R))$ l'applicazione $x \circ a \circ x^{-1}$ su $B_0(r)$.

Sia N_e un intorno compatto dell'identità in \mathbf{G} tale che

$$a(\bar{U}_r) \Subset U_{(r+R)/2}, \quad e \quad \left\| \frac{\partial \phi_a(x)}{\partial x} - I_m \right\| < \frac{1}{2}, \quad \forall |x| \leq \frac{r+R}{2}, \quad \forall a \in N_e.$$

$$a(\bar{U}_{(r+R)/2}) \Subset U,$$

Sia \mathbf{G}_0 un sottogruppo contenuto in N_e . La sua chiusura è un sottogruppo compatto $\mathbf{H} = \bar{\mathbf{G}}_0$ contenuto in \bar{N}_e . Sia λ la misura di Haar biinvariante su \mathbf{H} e definiamo, per $x \in B_0((r+R)/2)$, la funzione \mathcal{C}^∞ a valori in $B_0(R)$,

$$R(x) = \int_{\mathbf{H}} \phi_a(x) d\lambda(a).$$

Differenziando sotto il segno d'integrale otteniamo

$$\left| \frac{\partial R(x)}{\partial x} v \right| = \left| \int_{\mathbf{H}} \frac{\partial \phi_a(x)}{\partial x} v d\lambda(a) \right| \geq \frac{1}{2} |v|, \quad \forall x \in B_0((r+R)/2), \quad \forall v \in \mathbb{R}^m.$$

In particolare, R è invertibile nell'intorno di ogni punto x di $B_0(r)$.

Per ogni $b \in \mathbf{H}$, per l'invarianza della misura di Haar abbiamo

$$R \circ \phi_b = \int_{\mathbf{H}} \phi_a \circ \phi_b d\lambda(a) = \int_{\mathbf{H}} \phi_{ab} d\lambda(a) = \int_{\mathbf{H}} \phi_{ab} d\lambda(ab) = R$$

su $B_0(r)$. Ne segue, in particolare, che ϕ_b è l'identità su un intorno di 0 in $B_0(r)$. La tesi è allora conseguenza del Corollario X.2.2. \square

COROLLARIO X.2.4. *Sia \mathbf{G} un gruppo topologico di trasformazioni differenziabili di una varietà M . Allora esiste un intorno dell'identità N_e in \mathbf{G} tale che, per ogni $a \in \mathbf{G}$, con $a \neq e$, esista un intero positivo k tale che $a^k \notin N_e$.*

DIMOSTRAZIONE. È sufficiente considerare l'intorno $N_e = \{a \in N'_e \mid a^{-1} \in N'_e\}$ per un intorno N'_e dell'identità che non contenga sottogruppi non banali. \square

Fissiamo un intorno compatto N_e dell'identità in \mathbf{G} che soddisfi la condizione del Corollario X.2.4. Se

$$(10.2.2) \quad k_a + 1 = \inf\{h \in \mathbb{N} \mid a^h \notin N_e\}, \quad \text{per } a \in \mathbf{G},$$

abbiamo $k_a \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, con $k_e = \infty$, $k_a = 0$ se $a \notin N_e$ e $1 \leq k_a < \infty$ se $a \in N_e \setminus \{e\}$.

Fissiamo una carta coordinata (U, x) in M , con centro in un punto $p_0 \in M$, $U \Subset M$, ed $x(U) = B_0(R)$ e poniamo, per $0 < r < R$, $U_r = \{p \in U \mid |x(p)| < r\}$. Se $a(U_r) \subset U$, indicheremo con $\phi_a \in \mathcal{C}^\infty(B_0(r), B_0(R))$ la funzione $\phi_a = x \circ a \circ x^{-1}$.

Fissiamo $0 < r_1 < r_2 < r_3 < R$ ed $\epsilon > 0$. Possiamo supporre che, se $a \in N_e$, sia

$$a(\bar{U}_{r_1}) \Subset U_{r_2} \Subset a(U_{r_3}) \Subset U, \quad \sup_{x \in \bar{U}_{r_3}} \left\| \frac{\partial \phi_a(x)}{\partial x} - I_m \right\| < \epsilon.$$

Con le notazioni introdotte sopra, vale il

LEMMA X.2.5. *Possiamo trovare una costante positiva C tale che, se $a \in N_e$, sia*

$$|x - \phi_a(x)| \leq C/k_a, \quad \forall x \in B_0(r_1).$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $a \in N_e$. Se $x_1, x_2 \in B_0(r_2)$, allora

$$\begin{aligned}\phi_a(x_2) - \phi_a(x_1) &= \int_0^1 \left[\frac{d}{dt} \phi_a(x_1 + t(x_2 - x_1)) \right] dt \\ &= \left[\int_0^1 \frac{\partial \phi_a}{\partial x}(x_1 + t(x_2 - x_1)) dt \right] (x_2 - x_1) = (x_2 - x_1) + v\end{aligned}$$

ove v è un vettore con $|v| \leq \epsilon |x_2 - x_1|$.

Osserviamo ora che, se $a \in N_e$, poiché $a, \dots, a^{k_a} \in N_e$, abbiamo $\phi_{a^h}(x) \in B_0(r_2)$ se $x \in B_0(r_1)$ e $0 \leq h \leq k_a$. Quindi

$$\phi_{a^{k_a}}(x) - x = \sum_{h=0}^{k_a-1} (\phi_{a^h}(\phi_a(x)) - \phi_{a^h}(x)) = k_a(\phi_a(x) - x) + (v_1 + \dots + v_{k_a}),$$

con $|v_i| \leq \epsilon |\phi(x) - x|$ per ogni $i = 1, \dots, k_a$. Otteniamo perciò

$$r_2 \geq |\phi_{a^{k_a}}(x) - x| \geq k_a(1 - \epsilon) |\phi(x) - x|, \quad \forall x \in B_0(r_1),$$

da cui segue la tesi. \square

COROLLARIO X.2.6. *Con le notazioni del Lemma precedente, abbiamo*

$$|x - \phi_{a^h}(x)| \leq Ch/k_a, \quad \text{se } h \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq h \leq k_a.$$

TEOREMA X.2.7. *Sia \mathbf{G} un gruppo localmente compatto di diffeomorfismi di una varietà M . Se l'identità e di \mathbf{G} non è un punto isolato di \mathbf{G} , allora² di \mathbf{G} , allora \mathbf{G} contiene sottogruppi a un parametro.*

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo un intorno compatto N_e dell'identità in \mathbf{G} che non contenga sottogruppi non banali e sia k_a definito dalla (10.2.2). Ricordiamo che $1 < k_a < \infty$ se $a \in N_e \setminus \{e\}$. Per ogni numero razionale q con $0 \leq q \leq 1$ ed $a \in N_e \setminus \{0\}$ sia $k_a(q)$ l'intero, con $0 \leq k_a(q) \leq k_a$, definito da

$$k_a(q) = \sup\{v \in \mathbb{N} \mid v \leq qk_a\}, \quad \text{tale cioè che } 0 \leq q - \frac{k_a(q)}{k_a} < \frac{1}{k_a}.$$

Sia ora $\{a_n\}$ una successione di elementi di N_e , tutti distinti da e , che converga ad e . Per ogni $q \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$, la successione $\{a_n^{k_{a_n}(q)}\}$ è a valori in nel compatto N_e e quindi se ne può estrarre una convergente. Poiché $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ è numerabile, possiamo estrarre una sottosuccessione, che indicheremo ancora con $\{a_n\}$, tale che le $\{a_n^{k_{a_n}(q)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ siano convergenti per ogni $q \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$. Indichiamo con $a(q)$ i limiti di tali successioni.

Mostriamo ora che la funzione $a(q)$, così definita per $q \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$, si può estendere ad un sottogruppo a un parametro di \mathbf{G} .

Per ogni punto $p_0 \in M$ possiamo trovare una carta coordinata (U, x) con centro in p_0 con $x(U) = B_0(R)$ e per cui valga il Lemma X.2.5. Poiché $\lim_{n \rightarrow \infty} k_{a_n} = \infty$, otteniamo che le ϕ_{a_n} convergono uniformemente su $B_0(r_1)$ a delle $\phi_{a(q)}$ che soddisfano, per il Corollario X.2.6, la disuguaglianza $|\phi_{a(q_1)}(x) - \phi_{a(q_2)}(x)| < C|q_1 - q_2|$, per ogni $q_1, q_2 \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ ed x in $B_0(r_1)$, per una costante $C > 0$. Possiamo dunque estendere in modo unico le $\phi_{a(q)}$ a delle applicazioni $\phi_{a(t)} \in \mathcal{C}^\infty(B_0(r_1), B_0(r_2))$ per $t \in [0, 1]$. Questo ci permette di definire le $a(t)$ per $t \in [0, 1]$ e di verificare

²Ciò significa che ogni intorno di e in \mathbf{G} elementi distinti da e .

che $a(t_1 + t_2) = a(t_1)a(t_2)$ se $t_1, t_2, t_1 + t_2 \in [0, 1]$. Poiché anche la successione $\{a_n^{-1}\}$ approssima l'identità, lo stesso ragionamento ci permette di definire $a(t)$, per $-1 \leq t \leq 0$, in modo che sia $a(t_1 + t_2) = a(t_1)a(t_2)$ se $t_1, t_2, t_1 + t_2 \in [-1, 1]$. Possiamo poi estendere $a(t)$ a tutti i $t \in \mathbb{R}$ in modo che sia $a(kt) = [a(t)]^k$ se $k \in \mathbb{N}$. Poiché abbiamo supposto che \mathbf{G} sia un sottogruppo chiuso del gruppo dei diffeomorfismi di M per la topologia compatta-aperta delle applicazioni e delle loro inverse, $a(t)$ è un sottogruppo a un parametro di \mathbf{G} . \square

Dalla dimostrazione del Teorema X.2.7 ricaviamo una caratterizzazione dei generatori infinitesimali di sottogruppi a un parametro di \mathbf{G} .

PROPOSIZIONE X.2.8. *I generatori infinitesimali X di sottogruppi a un parametro di \mathbf{G} sono tutti e soli gli elementi $X \in \mathfrak{X}(M)$ per cui esistono una successione $\{a_n\} \subset \mathbf{G}$ ed una successione k_n , con $k_n \rightarrow \infty$, tale che*

$$(10.2.3) \quad Xf = \lim_{n \rightarrow \infty} k_n (a_n^* f - f), \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

PROPOSIZIONE X.2.9. *Sia \mathbf{G} un gruppo localmente compatto di diffeomorfismi di M . Allora i generatori infinitesimali di sottogruppi a un parametro di \mathbf{G} formano una sottoalgebra di Lie reale di dimensione finita di $\mathfrak{X}(M)$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia \mathfrak{G} l'insieme dei generatori infinitesimali di sottogruppi a un parametro di \mathbf{G} . Abbiamo $0 \in \mathfrak{G}$, come generatore infinitesimale del gruppo banale $\{\text{id}_M\}$.

Se $X \in \mathfrak{X}(M)$ è il generatore infinitesimale del sottogruppo a un parametro $a(t)$, e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora λX è il generatore infinitesimale del sottogruppo a un parametro $t \rightarrow a(\lambda t)$. Quindi \mathfrak{G} è chiuso rispetto al prodotto per scalare.

Siano $a(t), b(t)$ due sottogruppi a un parametro di \mathbf{G} , con generatori infinitesimali X, Y . Se $c_n = a(\frac{1}{n}) \circ b(\frac{1}{n})$, otteniamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(f \circ c_n - f) = Xf + Yf, \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

In modo analogo, con $d_n = a(\frac{1}{n})b(\frac{1}{n})a(\frac{-1}{n})b(\frac{-1}{n})$, è

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(f \circ d_n - f) = [X, Y]f, \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

Per la Proposizione X.2.8 questo dimostra che \mathfrak{G} è un'algebra di Lie. \square

PROPOSIZIONE X.2.10. *Se \mathbf{G} è un gruppo localmente compatto di diffeomorfismi di M , allora l'algebra di Lie \mathfrak{G} dei generatori infinitesimali dei suoi sottogruppi a un parametro ha dimensione finita.*

DIMOSTRAZIONE. Si dimostra infatti che su \mathbf{G} si può definire una norma rispetto alla quale la palla unitaria è relativamente compatta. \square

X.3. Alcuni risultati sui gruppi di trasformazioni

Vale il:

TEOREMA X.3.1. *Siano M una varietà differenziabile numerabile all'infinito e \mathbf{G} un gruppo di diffeomorfismi di M in sé. Denotiamo con \mathfrak{G} l'insieme dei campi di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$ che generano sottogruppi a un parametro di \mathbf{G} .*

Se la sottoalgebra di Lie reale di $\mathfrak{X}(M)$ generata da \mathfrak{G} ha dimensione finita, allora \mathfrak{G} è un'algebra di Lie e possiamo definire su \mathbf{G} una struttura di gruppo di Lie di trasformazioni di M , con algebra di Lie (isomorfa a) \mathfrak{G} .

DIMOSTRAZIONE. Se $X \in \mathfrak{G}$, indichiamo con $\mathbb{R} \ni t \rightarrow \text{Exp}(tX) \in \mathbf{G}$ il gruppo a un parametro di diffeomorfismi generato da X . Siano $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ la sottoalgebra di Lie reale di $\mathfrak{X}(M)$ generata da \mathfrak{G} , $\tilde{\mathbf{G}}$ un gruppo di Lie connesso e semplicemente connesso con algebra di Lie $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$, ed $\exp : \mathfrak{G} \rightarrow \tilde{\mathbf{G}}$ la corrispondente applicazione esponenziale. Ogni $X \in \mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ è generatore infinitesimale di un gruppo locale a un parametro di diffeomorfismi di M , che denoteremo ancora con $\text{Exp}(tX)$:

$$V_X \ni (t, p) \longrightarrow \text{Exp}(tX)p \in M, \quad \{0\} \times M \subset V_X^{\text{aperto}} \subset \mathbb{R} \times M,$$

$$\text{Exp}(0X)p = p, \quad \frac{d}{dt} \text{Exp}(tX)p = X_{\text{Exp}(tX)p}, \quad \forall p \in M, \quad \forall (t, p) \in V_X.$$

I campi X di \mathfrak{G} sono completi e quindi porremo $V_X = (\mathbb{R} \times M)$, se $X \in \mathfrak{G}$.

Poiché abbiamo supposto che $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ sia di dimensione finita, per i teoremi di esistenza e unicità e dipendenza \mathcal{C}^∞ dai dati iniziali per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie, possiamo trovare un intorno aperto \mathcal{U} di $(\{e\} \times M)$ in $(\tilde{\mathbf{G}} \times M)$ tale che, se $(g, p) \in \mathcal{U}$, allora vi sono $X \in \mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ e $t \in \mathbb{R}$ tali che $(t, p) \in V_X$ e $g = \text{exp}(tX)$.

Per completare la dimostrazione, proviamo ora alcuni lemmi. \square

LEMMA X.3.2. Siano $X, Y \in \mathfrak{G}$. Allora $Z = \text{Ad}(\text{exp}(X))(Y) \in \mathfrak{G}$.

DIMOSTRAZIONE. Dobbiamo verificare che Z genera un sottogruppo a un parametro di \mathbf{G} . Poiché

$$M \ni p \rightarrow \text{Exp}(tZ)p = \text{Exp}(X) \circ \text{Exp}(tY) \circ \text{Exp}(-X)p \in M$$

definisce per ogni $t \in \mathbb{R}$ una trasformazione di \mathbf{G} , il campo Z è completo ed appartiene a \mathfrak{G} . \square

LEMMA X.3.3. \mathfrak{G} genera $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ come spazio vettoriale su \mathbb{R} .

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con W il sottospazio vettoriale di $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ generato da \mathfrak{G} . Per il lemma precedente, abbiamo $\text{Ad}(\text{exp}(\mathfrak{G}))(\mathfrak{G}) \subset \mathfrak{G}$ e quindi, per linearità, abbiamo anche $\text{Ad}(\text{exp}(\mathfrak{G}))(W) \subset W$. Poiché \mathfrak{G} genera $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ come algebra di Lie, $\text{exp}(\mathfrak{G})$ genera $\tilde{\mathbf{G}}$ come gruppo. L'insieme degli elementi $g \in \tilde{\mathbf{G}}$ per cui $\text{Ad}(g)(W) \subset W$ è un sottogruppo di $\tilde{\mathbf{G}}$. Ne segue che $\text{Ad}(\tilde{\mathbf{G}})(W) \subset W$. Otteniamo in particolare che $\text{Ad}(\text{exp}(W))(W) \subset W$, che ci dà, differenziando, $[W, W] \subset W$. Quindi W è un'algebra di Lie e perciò coincide con $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$. \square

LEMMA X.3.4. $\mathfrak{L}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}$.

DIMOSTRAZIONE. Siano $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{G}$ una base di $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ come spazio vettoriale. Allora l'applicazione

$$t_1 X_1 + \dots + t_n X_n \rightarrow \text{exp}(t_1 X_1) \cdots \text{exp}(t_n X_n)$$

è un diffeomorfismo di un intorno N_0 di 0 in $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ su un intorno U_e dell'identità e di $\tilde{\mathbf{G}}$. Quindi, se $Y \in \mathfrak{L}(\mathfrak{G})$, possiamo trovare un $\epsilon > 0$ e funzioni $a_i : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$

tali che $\sum_{i=1}^n a_i(t)X_i \in N_0$ ed

$$\exp(tY) = \exp(a_1(t)X_1) \cdots \exp(a_n(t)X_n) \quad \text{in } \tilde{\mathbf{G}} \text{ se } |t| < \epsilon.$$

Questa uguaglianza ci dà la

$$\text{Exp}(tY) = \text{Exp}(a_1(t)X_1) \circ \cdots \circ \text{Exp}(a_n(t)X_n) \quad \text{su } M \text{ se } |t| < \epsilon.$$

Definendo $\text{Exp}(tY) = (\text{Exp}[(t/\nu)Y])^\nu$ se $|t| < \nu\epsilon$, otteniamo che $Y \in \mathfrak{G}$. Questo completa la dimostrazione del lemma. \square

Proseguiamo nella dimostrazione del Teorema XVI.2.1.

Sia \mathbf{G}^* il gruppo di diffeomorfismi di M generato da $\exp(\mathfrak{G})$. Poiché \mathbf{G}^* è generato dai sottogruppi a un parametro contenuti in \mathbf{G} , abbiamo $\mathbf{G}^* \subset \mathbf{G}$. Poiché per ogni $g \in \mathbf{G}$ ed ogni sottogruppo a un parametro $\mathbb{R} \ni t \rightarrow a_t \in \mathbf{G}$ anche $\mathbb{R} \ni t \rightarrow \text{ad}(g)(a_t) \in \mathbf{G}$ è ancora un sottogruppo a un parametro di \mathbf{G} , il sottogruppo \mathbf{G}^* è normale in \mathbf{G} . Inoltre, l'applicazione $\text{ad}(g) : \mathbf{G}^* \rightarrow \mathbf{G}^*$ è continua³ per la topologia di gruppo di Lie di \mathbf{G}^* , perché trasforma sottogruppi a un parametro in sottogruppi a un parametro.

Il Teorema XVI.2.1 è conseguenza del lemma seguente.

LEMMA X.3.5. *Sia \mathbf{G}^* un sottogruppo normale di un gruppo \mathbf{G} . Se \mathbf{G}^* è un gruppo topologico e le applicazioni $\text{ad}(g) : \mathbf{G}^* \rightarrow \mathbf{G}^*$ sono continue per ogni $g \in \mathbf{G}$, allora vi è un'unica topologia di gruppo topologico su \mathbf{G} per cui \mathbf{G}^* sia aperto in \mathbf{G} .*

DIMOSTRAZIONE. Definiamo su \mathbf{G} la topologia meno fine per cui sono aperti tutti gli insiemi $L_g(A)$ con A aperto di \mathbf{G}^* . Si verifica facilmente che questa topologia è l'unica con le proprietà richieste nell'enunciato del lemma. \square

OSSERVAZIONE X.3.6. Osserviamo che la topologia su \mathbf{G} che si ottiene nel Teorema XVI.2.1 può risultare più fine della topologia compatta-aperta. Inoltre, non è detto che le componenti connesse di \mathbf{G} , con la topologia che abbiamo definito, formino un insieme di cardinalità al più numerabile. Possiamo ad esempio considerare l'azione sul gruppo additivo \mathbb{R} , che identifichiamo alla varietà M , di un qualsiasi suo sottogruppo \mathbf{G} totalmente sconnesso: in questo caso $\mathfrak{G} = \{0\}$ ed otteniamo su \mathbf{G} la topologia discreta.

TEOREMA X.3.7. *Siano M una varietà differenziabile connessa e numerabile all'infinito e \mathbf{G} un gruppo localmente compatto di trasformazioni differenziabili di M . Allora i generatori infinitesimali dei sottogruppi a un parametro di \mathbf{G} è una sottoalgebra di Lie di dimensione finita di $\mathfrak{X}(M)$.*

DIMOSTRAZIONE. \square

³ Un teorema di Chevalley ([Theory of Lie groups. Princeton Univ. Press, 1946], p.128) ci dice che, se \mathbf{G} e \mathbf{G}' sono due gruppi di Lie, un omomorfismo algebrico $\phi : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}'$ è un omomorfismo di gruppi di Lie se e soltanto se trasforma sottogruppi a un parametro di \mathbf{G} in sottogruppi a un parametro di \mathbf{G}' .

X.4. Parallelismo assoluto

Ricordiamo che un *parallelismo assoluto* su una varietà differenziabile M è una sezione $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(M, L(M))$ del fibrato dei suoi sistemi di riferimento. In modo equivalente, è il dato di m campi di vettori X_1, \dots, X_m che definiscano, in ogni punto $p \in M$, una base $(X_1(p), \dots, X_m(p))$ di $T_p M$. Un diffeomorfismo $f : M \rightarrow M$ definisce un diffeomorfismo di fibrati principali $\hat{f} : L(M) \rightarrow L(M)$.

DEFINIZIONE X.4.1. Se (M, σ) è la coppia formata da una varietà differenziabile M e da un parallelismo assoluto σ assegnato su M , chiameremo *automorfismi* di (M, σ) i diffeomorfismi $f : M \rightarrow M$ tali che $\hat{f} \circ \sigma = \sigma \circ f$, cioè $df \circ \sigma(p) = \sigma(f(p))$ per ogni $p \in M$.

Gli automorfismi di (M, σ) formano un gruppo, che denoteremo $\mathbf{Aut}(M, \sigma)$.

TEOREMA X.4.2. Sia (M, σ) la coppia formata da una varietà differenziabile connessa M numerabile all'infinito e da un parallelismo assoluto σ su M . Allora $\mathbf{Aut}(M, \sigma)$ è un gruppo di Lie di trasformazioni con $\dim_{\mathbb{R}} \mathbf{Aut}(M, \sigma) \leq \dim_{\mathbb{R}} M$. Più precisamente, per ogni $p \in M$, l'applicazione

$$(*) \quad \mathbf{Aut}(M, \sigma) \ni g \rightarrow g(p) \in M$$

è iniettiva e la sua immagine è una sottovarietà chiusa di M . Vi è un'unica struttura di gruppo di Lie su $\mathbf{Aut}(M, \sigma)$ per cui la (*) sia un diffeomorfismo.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\sigma(p) = (X_1(p), \dots, X_m(p))$ e sia \mathfrak{B} il sottospazio vettoriale reale di $\mathfrak{X}(M)$ generato da X_1, \dots, X_m . Per definizione, le trasformazioni di $\mathbf{Aut}(M, \sigma)$ lasciano \mathfrak{B} invariante. In particolare gli elementi di $\mathbf{Aut}(M, \sigma)$ commutano con gli elementi dei sottogruppi a un parametro $\phi_v(t)$ di diffeomorfismi di M generati dagli elementi v di \mathfrak{B} . Poniamo $\tau_v = \phi_v(1)$. Osserviamo che, per ogni punto $p \in M$, $\tau_v(q)$ è definita per v in un intorno di 0 in \mathfrak{B} e q in un intorno di p in M .

LEMMA X.4.3. Per ogni $p \in M$ l'applicazione $\mathbf{Aut}(M, \sigma) \ni g \rightarrow g(p) \in M$ è iniettiva.

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $g \in \mathbf{Aut}(M, \sigma)$ l'insieme $F_g = \{q \in M \mid g(q) = q\}$ dei punti fissi di g è un sottoinsieme chiuso di M . Fissato un punto $q \in M$, al variare di v in un intorno di 0 in \mathfrak{B} , gli elementi $\tau_v(q)$ sono definiti e formano un intorno di q in M . Poiché, come abbiamo osservato, $g \circ \tau_v = \tau_v \circ g$, otteniamo che F_g contiene un intorno di q . Dunque F_g risulta aperto e chiuso in M e quindi o è vuoto, o coincide con M per l'ipotesi che M sia connesso. \square

Sia $\gamma : [0, T] \rightarrow M$ ($T > 0$) una curva differenziabile. Risultano allora determinate m funzioni scalari $a_\gamma^i : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $\dot{\gamma}(t) = \sum_{i=1}^m a_\gamma^i(t) X_i(\gamma(t))$ per ogni $t \in [0, T]$. Due curve differenziabili $\gamma_1, \gamma_2 : [0, T] \rightarrow M$ si diranno *parallele nel parallelismo completo* σ se $a_{\gamma_1}^i(t) = a_{\gamma_2}^i(t)$ per ogni $t \in [0, T]$. Osserviamo che, data una curva differenziabile $\gamma : [0, T] \rightarrow M$ ed un punto q_0 , vi è al più una curva differenziabile γ' parallela a γ ed uscente dal punto q_0 ; esisterà poi comunque, per qualche $0 < \epsilon \leq T$ sufficientemente piccolo, una $\gamma' : [0, \epsilon] \rightarrow M$ uscente da p_0 e parallela alla restrizione di γ a $[0, \epsilon]$.

LEMMA X.4.4. *Per ogni $p_0 \in M$, l'insieme $\mathbf{Aut}(M, \sigma)(p_0)$ è chiuso in M .*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\{a_k\}$ una successione di elementi di $\mathbf{Aut}(M, \sigma)$ tali che $\{a_k(p_0)\}$ converga a un elemento $q_0 \in M$.

Dimostriamo che ogni curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ uscente dal punto p_0 ammette una parallela $\gamma' : [0, 1] \rightarrow M$ uscente da q_0 .

A questo scopo, indichiamo con T l'estremo superiore dei numeri reali $a > 0$ per cui la restrizione di γ a $[0, a]$ ammette una parallela γ'_a con punto iniziale q_0 . Vogliamo dimostrare che esiste la parallela γ'_T . A questo scopo, osserviamo che esistono le parallele $\gamma'_{T'}$, per ogni $0 < T' < T$ e che per ogni t con $0 \leq t < T$, abbiamo $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k(\gamma(t)) = \gamma'_{T'}(t)$ per $0 \leq t \leq T' < T$.

Fissiamo poi un intorno \mathfrak{B}_0 di 0 in \mathfrak{B} e un intorno U di $\gamma(T)$ in M tali che $\tau_v(p)$ sia definita per $v \in \mathfrak{B}_0$ e $p \in U$. Allora τ_v è anche definita, per $v \in \mathfrak{B}_0$, su tutti gli insiemi $a_k(U)$. Sia $t_0 < T$ tale che $a_k(\gamma(t_0)) \in U$ per ogni $k \gg 1$ e $\gamma(T) = \tau_{v_0}(\gamma(t_0))$ per qualche $v_0 \in \mathfrak{B}_0$.

Possiamo allora definire γ'_T ponendo $\gamma'_T(t) = \gamma'_{T'}(t)$ se $0 \leq t \leq T' < T$ e $\gamma'_T(T) = \tau_{v_0}(\gamma'_{T'}(t_0))$ se $t_0 \leq T' < T$.

Se fosse $T < 1$, potremmo prolungare γ'_T con una parallela a $\gamma(t - T)$ uscente dal punto $\gamma'_T(T)$, contraddicendo la definizione di T . Quindi $T = 1$ e questo dimostra l'esistenza della parallela. Poiché $\gamma'(1) = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k(\gamma(1))$, l'estremo $\gamma'(1)$ non dipende dalla scelta del cammino γ , ma soltanto dal suo punto finale $\gamma(1)$.

Dimostriamo in questo modo che $\{a_k(q)\}$ converge per ogni $q \in M$ e otteniamo quindi un'applicazione $a : M \rightarrow M$ mediante $a(q) = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k(q)$ per ogni $q \in M$. Poiché $\tau_v(a(q)) = a(\tau_v(q))$ per ogni $q \in M$, la a è chiaramente differenziabile. Si può dimostrare che è invertibile, ripetendo i ragionamenti appena svolti per la successione delle applicazioni inverse $\{a_k^{-1}\}$. \square

Abbiamo facilmente:

LEMMA X.4.5. *Sia \mathfrak{l} l'algebra di Lie dei campi di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$ tali che $[X, \mathfrak{B}] = \{0\}$. Per ogni $p \in M$, l'applicazione $\mathfrak{l} \ni X \rightarrow X(p) \in T_p M$ è iniettiva.*

DIMOSTRAZIONE. I generatori di sottogruppi a un parametro di $\mathbf{Aut}(M, \sigma)$ sono gli elementi di \mathfrak{l} che generano sottogruppi a un parametro di diffeomorfismi di M . Quindi, per il Teorema XVI.2.1, il gruppo $\mathbf{Aut}(M, \sigma)$ è un gruppo di Lie, e l'applicazione $\mathbf{Aut}(M, \sigma) \ni a \rightarrow a(p) \in M$ definisce per ogni $p \in M$ un diffeomorfismo di $\mathbf{Aut}(M, \sigma)$ con una sottovarietà differenziabile chiusa di M . \square

Completiamo ora la dimostrazione del Teorema XVI.2.8. L'insieme \mathfrak{G} dei campi di vettori $X \in \mathfrak{l}$ che generano sottogruppi a un parametro di trasformazioni di M è una sottoalgebra di Lie di \mathfrak{l} , e quindi ha dimensione finita. Possiamo perciò applicare il Teorema XVI.2.1 al gruppo $\mathbf{G} = \mathbf{Aut}(M, \sigma)$ e a \mathfrak{G} , e concludere che \mathbf{G} ha una struttura di gruppo di Lie con algebra di Lie \mathfrak{G} . Poiché l'azione $\mathbf{G} \times M \rightarrow M$ è differenziabile, fissato un qualsiasi punto $p_0 \in M$, l'immersione differenziabile $\mathbf{G} \ni g \rightarrow g(p_0) \in M$ è un diffeomorfismo di \mathbf{G} con una sottovarietà differenziabile chiusa di M . \square

Ricordiamo che vale il teorema⁴:

TEOREMA X.4.6 (Bochner-Montgomery). *Sia \mathbf{G} un gruppo topologico localmente compatto e numerabile all'infinito di trasformazioni differenziabili di una varietà differenziabile paracompatta M . Allora \mathbf{G} è un gruppo di Lie.*

Ricordiamo ancora⁵ il:

TEOREMA X.4.7 (Dantzig-van der Waerden). *Sia (E, d) uno spazio metrico localmente compatto. Sia $\mathbf{Isom}(E, d)$ il gruppo delle isometrie di (M, E) e, per $x \in E$, indichiamo con $\mathbf{Isom}_x(E, d)$ lo stabilizzatore di x in $\mathbf{Isom}(E, d)$. Consideriamo su $\mathbf{Isom}(E, d)$ la topologia compatta-aperta. Allora $\mathbf{Isom}(E, d)$ è localmente compatto e $\mathbf{Isom}_x(E, d)$ è compatto per ogni $x \in M$. Se M è compatto, anche $\mathbf{Isom}(E, d)$ è compatto.*

OSSERVAZIONE X.4.8. Ricordiamo ancora che, se (M, g) è una varietà Riemanniana e d è la distanza nella metrica corrispondente, allora le isometrie $f : M \rightarrow M$ per la metrica d sono applicazioni differenziabili che preservano il tensore g della metrica. Indicheremo nel seguito con $\mathbf{O}(M, g)$ il gruppo delle isometrie della varietà Riemanniana (M, g) , cioè:

$$\mathbf{O}(M, g) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(M, M) \mid f^*g = g\}.$$

Se d è la distanza su M definita dalla metrica g , allora $\mathbf{Isom}(M, d) = \mathbf{O}(M, g)$.

⁴S.Bochner, D.Montgomery *Locally compact groups of differentiable transformations*, Ann. of Math. **47** (1946), pp.639-657.

⁵D.Dantzig, B.L.van der Waerden *Über metrisch homogene Räume*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **6** (1928) pp.374-376. Una dimostrazione completa si può trovare anche in: Kobayashi-Nomizu *Foundations of Differential Geometry*, New York: John Wiley & Sons, vol.1, 1963, alle pagine 46-50.

Trasformazioni e decomposizione di de Rham

XI.1. Applicazioni affini

Siano M, N due varietà differenziabili, di dimensioni m, n rispettivamente.

Un'applicazione $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ trasforma un campo di vettori $V \in \mathcal{C}^\infty(I, M)$ lungo una curva $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, M)$ in un campo di vettori $df(V)$ lungo la curva $f \circ \gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, N)$.

Supponiamo fissate su M ed N due strutture affini.

DEFINIZIONE XI.1.1. Diciamo che $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ è un'applicazione affine se, per ogni $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, M)$ ed ogni campo di vettori V parallelo lungo γ in M il campo di vettori $df(V)$ è parallelo lungo $f \circ \gamma$ in N .

Siano $\xi_M = (P_M \xrightarrow{\pi_M} M)$ e $\xi_N = (P_N \xrightarrow{\pi_N} N)$ due fibrati d'olonomia su M ed N , con gruppi di olonomia \mathbf{G}_M e \mathbf{G}_N , rispettivamente. Ad essi possiamo associare il sottofibrato ξ_f di \mathbb{L}_f , il cui spazio totale consiste delle coppie (σ, τ) in $P_M \times P_N$.

PROPOSIZIONE XI.1.2. *Supponiamo che M sia connessa. Condizione necessaria e sufficiente affinché $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ sia una trasformazione affine è che la restrizione $\mathcal{J}f : P_f \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ del suo Jacobiano a P_f sia costante.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, M)$ una curva, definita su un intervallo I di \mathbb{R} contenente l'origine. Siano $p_0 = \gamma(0)$ e $q_0 = f(p_0)$. Fissiamo due sistemi di riferimento $\sigma_0 \in P_{M, p_0}$ e $\tau_0 \in P_{N, q_0}$ e siano α il sollevamento orizzontale di γ per σ_0 e β il sollevamento orizzontale di $f \circ \gamma$ per τ_0 . I campi di vettori orizzontali lungo γ sono della forma αv , con $v \in \mathbb{R}^m$. La condizione affinché f sia affine è che¹ $df(\alpha v) = \beta \mathcal{J}f(\alpha, \beta)v$ sia parallela lungo $f \circ \gamma$, cioè che $\mathcal{J}f(\alpha, \beta)v$ per ogni $v \in \mathbb{R}^m$, e quindi $\mathcal{J}f(\alpha, \beta)$, sia costante su I . Poiché P_M è il luogo dei punti che si possono connettere a σ_0 mediante cammini orizzontali, ne segue la tesi. \square

OSSERVAZIONE XI.1.3. In particolare, se consideriamo su \mathbb{R}^m ed \mathbb{R}^n le connessioni affini standard, con curvatura e torsione nulle, i concetti di applicazione affine da \mathbb{R}^m in \mathbb{R}^n nel senso della geometria elementare e di quella differenziale coincidono.

PROPOSIZIONE XI.1.4. *Un'applicazione affine $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ trasforma geodetiche in geodetiche. Se $p \in M$ ed $f(p) = q$, allora $f(\text{Exp}_p(v)) = \text{Exp}_q(df(p_0)v)$ per ogni v in un intorno aperto di 0 in $T_p M$.* \square

¹Ricordiamo che lo Jacobiano di f nei sistemi di riferimento α, β è

$$\mathcal{J}f(\alpha, \beta) = \beta^{-1} \circ df \circ \alpha : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

COROLLARIO XI.1.5. *Se M è connessa, fissati $p \in M$, $q \in N$ ed $A \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(T_p M, T_q N)$, vi è al più un'applicazione affine $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ tale che $f(p) = q$ e $df(p) = A$. \square*

PROPOSIZIONE XI.1.6. *Con la topologia compatta-aperta l'insieme delle applicazioni affini $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ è una varietà differenziabile di dimensione minore o uguale ad $n(m+1)$. \square*

ESEMPIO XI.1.7. Se M è una varietà affine completa, le geodetiche in $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, M)$ formano una varietà differenziabile diffeomorfa a TM , e quindi di dimensione $2m$.

Fissiamo su S^m la connessione di Levi-Civita associata alla metrica standard. Allora le trasformazioni affini di S^m in sé sono isometrie e formano un gruppo di dimensione $m(m+1)/2$, isomorfo ad $\mathbf{SO}(m+1)$. Se invece di S^m consideriamo lo spazio di Lobačeskij $H_m = \mathbf{SO}^+(1, m)/\mathbf{SO}(m)$ di dimensione m , il gruppo delle affinità è generato dalle isometrie e dalle omotetie con centro in un punto, ed ha dimensione $m(m+1)/2 + 1$.

XI.2. Sottovarietà affini

DEFINIZIONE XI.2.1. Una sottovarietà differenziabile N di una varietà differenziabile affine M si dice *affine* se i trasporti paralleli di vettori tangenti ad N lungo curve con supporto in N sono ancora tangenti ad N .

PROPOSIZIONE XI.2.2. *Se N è una sottovarietà differenziabile affine di una varietà differenziabile affine M , allora vi è un'unica connessione lineare su N per cui l'inclusione $N \hookrightarrow M$ sia un'applicazione affine.*

DIMOSTRAZIONE. L'unicità è conseguenza del fatto che il trasporto parallelo caratterizza completamente la connessione. Possiamo supporre che M, N siano connesse. Sia $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato d'olonomia di M , con gruppo strutturale \mathbf{G} . Fissato un punto p_0 di N ed un riferimento $\sigma_0 \in P_{p_0}$, sia

$$V = \{v \in \mathbb{R}^m \mid \sigma_0 v \in T_{p_0} N\}.$$

Sia P' il sottospazio di P che consiste di tutti i riferimenti $\sigma \in P$ che possono essere congiunti a σ_0 dal rialzamento orizzontale di un cammino in N . Poiché N è una sottovarietà affine, abbiamo allora

$$T_p N = \{\sigma v \mid v \in V\}, \quad \forall \sigma \in P'_p, \quad \forall p \in N.$$

Infatti dalla definizione di sottovarietà affine segue che $\sigma(t)v$ è tangente ad N per ogni vettore $v \in V$ ed ogni cammino orizzontale in $\pi^{-1}(N) \subset P$ con punto iniziale σ_0 . Quindi $\sigma v \in TN$ per ogni $v \in \mathbb{R}^m$ e vale l'uguaglianza perché i due spazi vettoriali hanno la stessa dimensione.

Il gruppo $\mathbf{G}' = \{a \in \mathbf{G} \mid \sigma_0 a \in P'\}$ è un sottogruppo di Lie di \mathbf{G} che lascia invariante il sottospazio vettoriale V . Possiamo allora considerare il sottofibrato $\eta = (Q \xrightarrow{\pi} N)$ di $\mathbb{L}(N)$ la cui fibra in $p \in N$ consiste degli isomorfismi $\sigma : V \rightarrow T_p N$ al variare di σ in P'_p . Abbiamo quindi un'applicazione naturale $\varpi : P' \rightarrow Q$ che consiste nella restrizione a V degli elementi di P' . Per ogni $v \in V$ vi è su Q un unico campo di vettori v^Q che è ϖ -correlato a v^* . I campi v^Q definiscono in Q la

distribuzione orizzontale di una connessione \mathbf{G}'_V -lineare, ove \mathbf{G}'_V è il gruppo delle restrizioni a V degli elementi di \mathbf{G}' . \square

LEMMA XI.2.3. *Siano p un punto di una varietà differenziabile affine M e W un sottospazio vettoriale di T_pM . Esiste al più un germe di sottovarietà affine N di M con $p \in N$ e $T_pN = W$.* \square

PROPOSIZIONE XI.2.4. *Se N è una sottovarietà affine connessa di una varietà differenziabile affine completa M , allora N è una sottovarietà aperta di una sottovarietà affine di M completa.* \square

XI.3. Varietà totalmente geodetiche

Sia M una varietà differenziabile, S una sua sottovarietà. Un'applicazione continua $\phi : N \rightarrow S$, per cui $N \ni p \rightarrow \phi(p) \in M$ sia differenziabile, è anche differenziabile come applicazione a valori in S .

Se (M, g) è una varietà Riemanniana, possiamo considerare su S la struttura Riemanniana definita dalla restrizione h della metrica g . Le geodetiche di M contenute in S sono anche geodetiche di S . In generale non è vero il viceversa.

DEFINIZIONE XI.3.1. Diciamo che una sottovarietà S di M è *geodetica* in p se contiene tutte le geodetiche di M tangenti ad S in p . Diciamo che S è *totalmente geodetica* se è geodetica in ogni suo punto.

Le sottovarietà geodetiche 1-dimensionali sono le geodetiche massimali di M .

PROPOSIZIONE XI.3.2. *Sia S una sottovarietà di M , geodetica in un punto $p \in M$. Se M è completa, allora anche S è completa.*

PROPOSIZIONE XI.3.3. *Se la sottovarietà S di M è totalmente geodetica, allora l'inclusione $S \hookrightarrow M$ è un'isometria locale.*

TEOREMA XI.3.4. *Sia (M, g) una varietà Riemanniana ed S una sua sottovarietà, completa per la restrizione della metrica g . Se il trasporto parallelo in M lungo le curve di S trasforma vettori tangenti ad S in vettori tangenti ad S , allora S è totalmente geodetica. Viceversa, se S è totalmente geodetica, il trasporto parallelo in M lungo le curve di S trasforma vettori tangenti ad S in vettori tangenti ad S .*

DIMOSTRAZIONE. Poiché abbiamo supposto S completa, la dimostrazione si riduce a considerare la situazione locale. Basterà allora verificare che, se si scelgono coordinate locali x^1, \dots, x^n tali che x^1, \dots, x^m siano coordinate locali su S , allora i simboli di Christoffel della connessione di Levi-Civita su S si ottengono da quelli della connessione di Levi-Civita su M per restrizione del dominio di definizione degli indici. \square

TEOREMA XI.3.5. *Sia (M, g) una varietà Riemanniana connessa, semplicemente connessa, completa, con curvatura sezionale negativa. Sia S una sua sottovarietà totalmente geodetica. Per ogni $p \in S$, le geodetiche uscenti da p e perpendicolari ad S formano una sottovarietà S^\perp ed M è unione disgiunta delle sottovarietà S^\perp al variare di p in S .*

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo, per ogni $p \in S$,

$$S = \exp_p(T_p S), \quad S^\perp = \exp_p(T_p^\perp S).$$

Poiché $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ è un diffeomorfismo, S^\perp è una sottovarietà.

Se $q \in M$, poiché S è chiusa, vi è un punto $p \in S$ che realizza la minima distanza di q da S e $q \in S^\perp$. Tale punto p è unico, perché se ci fosse un altro punto p' che realizza la minima distanza, le geodetiche da q a p e a p' formerebbero angoli di $\pi/2$ con il segmento di geodetica di S che congiunge p a p' e ci sarebbe quindi un triangolo geodetico con somma degli angoli interni $> \pi$. \square

XI.4. Trasformazioni affini

Sia M una varietà affine.

DEFINIZIONE XI.4.1. Un diffeomorfismo $f \in \mathcal{C}^\infty(M, M)$ di M in sé si dice una *trasformazione affine* se è un'applicazione affine.

L'inversa di una trasformazione affine è ancora una trasformazione affine. Abbiamo quindi

PROPOSIZIONE XI.4.2. *Le trasformazioni affini di M formano un gruppo.* \square

NOTAZIONE XI.4.3. Indicheremo con $\mathbf{A}(M)$ il gruppo delle trasformazioni affini di M .

DEFINIZIONE XI.4.4. Ad ogni diffeomorfismo $f \in \mathcal{C}^\infty(M, M)$ corrisponde l'automorfismo

$$(11.4.1) \quad \hat{f} : \mathbf{L}(M) \ni \sigma \longrightarrow df \circ \sigma \in \mathbf{L}(M),$$

che chiamiamo il *rilevamento Jacobiano* di f .

LEMMA XI.4.5. *Un diffeomorfismo $\hat{f} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{L}(M), \mathbf{L}(M))$ è il rilevamento Jacobiano di un diffeomorfismo di M se e soltanto se preserva le fibre e lascia invariante la forma canonica θ di $\mathbf{L}(M)$.*

DIMOSTRAZIONE. Se \hat{f} è il rilevamento Jacobiano di un diffeomorfismo f di M in sé, e $w \in T_\sigma \mathbf{L}(M)$, abbiamo

$$\begin{aligned} (\hat{f}^* \theta)(w) &= \theta(d\hat{f}(w)) = [\hat{f}(\sigma)]^{-1} \pi_*(d\hat{f}(w)) = [\hat{f}(\sigma)]^{-1} df(\pi_*(w)) \\ &= \sigma^{-1} \circ df^{-1} \circ df(\pi_*(w)) = \sigma^{-1} \pi_*(w) = \theta(w), \quad \forall w \in T_\sigma \mathbf{L}(M). \end{aligned}$$

Viceversa, un diffeomorfismo ψ di $\mathbf{L}(M)$ in sé che lascia invariante la θ , preserva le fibre in quanto

$$\begin{aligned} \psi^* \theta(wa) &= \theta(d\psi(wa)) = \psi(\sigma a)^{-1} d\psi(wa) = a^{-1} \sigma^{-1} \pi_* w, \\ &\text{ci dice che } \psi(\sigma a) = \psi(\sigma) a, \quad \forall w \in T_\sigma \mathbf{L}(M), \quad \forall a \in \mathbf{GL}_m(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Detto f il diffeomorfismo indotto sulla base abbiamo

$$\pi^* w = \sigma \theta(w) = \sigma(\psi^* \theta)(w) = \sigma \circ [\psi(\sigma)]^{-1} df(\pi_* w), \quad \forall w \in T_\sigma \mathbf{L}(M).$$

Quindi $\psi(\sigma) \circ \sigma^{-1} = df$, cioè $\psi = df \circ \sigma = \hat{f}$. \square

PROPOSIZIONE XI.4.6. *Un diffeomorfismo f di M è una trasformazione affine se e soltanto se il suo rilevamento Jacobiano preserva la forma di Cartan ω .*

Viceversa, un diffeomorfismo di $L(M)$ che preservi la forma canonica e la forma di Cartan è il rilevamento Jacobiano di una trasformazione affine di M .

DIMOSTRAZIONE. Se f è una trasformazione affine, allora \hat{f} preserva la distribuzione orizzontale e quindi la forma di Cartan, e viceversa. L'ultima affermazione segue dal fatto che un diffeomorfismo di $L(M)$ che preservi la forma canonica è il rilevamento Jacobiano di un differomorfismo di M . \square

PROPOSIZIONE XI.4.7. *Un diffeomorfismo f di M è una trasformazione affine se e soltanto se \hat{f} lascia invarianti i campi orizzontali fondamentali.*

DIMOSTRAZIONE. Se $f \in \mathcal{C}^\infty(M, M)$ è una trasformazione affine, allora \hat{f} lascia invarianti θ ed ω , e quindi anche i campi v^* (con $v \in \mathbb{R}^m$), caratterizzati da $\theta(v^*) = v$ ed $\omega(v^*) = 0$. Viceversa, da $d\hat{f}(v^*) = v^*$ per ogni $v \in \mathbb{R}^m$ segue che \hat{f} preserva la distribuzione orizzontale e quindi è una trasformazione affine. Come vedremo nel seguito, le isometrie di una varietà Riemanniana di dimensione n formano un gruppo di Lie di dimensione minore o uguale ad $n(n-1)/2$. di dimensione \square

PROPOSIZIONE XI.4.8. *Sia M sia una varietà differenziabile affine connessa. Allora una trasformazione affine di M è completamente determinata dal suo differenziale in un punto.*

DIMOSTRAZIONE. Siano f_1, f_2 due trasformazioni affini di M . Il luogo N dei punti di M in cui f_1 ed f_2 coincidono con i loro differenziali è chiuso. Poiché $f_i(\text{Exp}_p(v)) = \text{Exp}_{f_i(p)}(df(p_i)(v))$ per ogni $p \in M$ e v in un intorno di 0 in T_pM , l'insieme N è anche aperto. Se quindi $N \neq \emptyset$, è $N = M$ per l'ipotesi che M sia connessa. \square

Vale il

TEOREMA XI.4.9. *Il gruppo $\mathbf{A}(M)$ delle trasformazioni affini di M è un gruppo di Lie di dimensione minore o uguale ad $m(m+1)$.*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo su \mathbb{R}^m e su $\mathfrak{gl}_m(\mathbb{R})$ i prodotti scalari standard². Allora il rilevamento Jacobiano di una trasformazione affine è un diffeomorfismo di $L(M)$ che preserva la metrica

$$\hat{g}(X, Y) = (\theta(X)|\theta(Y)) + (\omega(X)|\omega(Y)), \quad \forall \sigma \in L(M), \quad \forall X, Y \in T_\sigma L(M).$$

Quindi $\mathbf{A}(M)$ è un gruppo topologico localmente compatto per il Teorema di van Dantzig-van der Waerden³ e, per il teorema di Bochner-Montgomery⁴ un gruppo di Lie. Per la Proposizione XI.4.8 la sua dimensione è minore o uguale alla dimensione $m(m+1)$ dello spazio totale $L(M)$ dei sistemi di riferimento di M . \square

²È $(v|w) = w^\dagger v$ se $v, w \in \mathbb{R}^m$ ed $(X|Y) = \text{traccia}(Y^\dagger X)$ se $X, Y \in \mathfrak{gl}_m(\mathbb{R})$.

³David van Dantzig (1900-1959) e Bartel Leendert van der Waerden 1903-1996) sono matematici olandesi. Il risultato citato è in *Über metrisch homogene Räume*, Sem. Univ. Hamburg **6**, (1928), pp.374-376.

⁴Salomon Bochner e Deane Montgomery, *Locally compact groups of differentiable transformations*, Annals of Mathematics, **47**, (1946), pp. 639-656.

XI.5. Affinità infinitesime

Ad un campo di vettori X sulla varietà M corrisponde un gruppo locale un parametro di diffeomorfismi di M . Il suo rialzamento Jacobiano è un gruppo locale a un parametro di diffeomorfismi di $L(M)$.

DEFINIZIONE XI.5.1. Il suo generatore infinitesimale \hat{X} si dice il *rilevamento Jacobiano di X* .

LEMMA XI.5.2. *Un campo di vettori \hat{X} su $L(M)$ è il rilevamento Jacobiano di un campo di vettori X su M se e soltanto se verifica le due condizioni:*

$$(11.5.1) \quad dR_a(\hat{X}) = \hat{X}, \quad \forall a \in \mathbf{GL}_m(\mathbb{R}),$$

$$(11.5.2) \quad L_{\hat{X}}\theta = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo di vettori su M e $\{\phi_t\}$ il gruppo locale a un parametro da esso generato. Da $\hat{\phi}_t^*\theta = \theta$ otteniamo la (11.5.2). È poi $\hat{\phi}_t(\sigma) = d\phi_t \circ \sigma$, e quindi

$$dR_a(\hat{X}_\sigma) = \left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0} \hat{\phi}_t(\sigma a) = \left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0} d\phi_t \circ \sigma a = \hat{X}_{\sigma a}, \quad \forall \sigma \in L(M), \quad \forall a \in \mathbf{GL}_m(\mathbb{R}).$$

Viceversa, se valgono le (11.5.1), (11.5.2), il gruppo a un parametro generato da \hat{X} consiste di diffeomorfismi locali di $L(M)$ che preservano le fibre e lasciano θ invariante, e sono quindi, per il Lemma XI.4.5 il rilevamento Jacobiano di un gruppo locale a un parametro di automorfismi di M , il cui generatore infinitesimale X soddisfa $X_{\pi(\sigma)} = \pi_*(\hat{X}_\sigma)$ per ogni $\sigma \in L(M)$. \square

Supponiamo che M sia una varietà differenziabile affine.

DEFINIZIONE XI.5.3. Un campo di vettori X su M è un' *affinità infinitesima* se il gruppo locale a un parametro da esso generato consiste di affinità locali.

PROPOSIZIONE XI.5.4. *Sia X un campo di vettori su M ed \hat{X} il suo rilevamento Jacobiano. Sono equivalenti:*

- (1) X è un' *affinità infinitesima*;
- (2) $L_{\hat{X}}\omega = 0$;
- (3) $[\hat{X}, v^*] = 0$, per ogni $v \in \mathbb{R}^m$;
- (4) $[\hat{X}, \hat{Y}] = [\hat{X}, Y]$, per ogni⁵ $Y \in \mathfrak{X}(M)$.
- (5) $L_X \circ \nabla_Y - \nabla_Y \circ L_X = \nabla_{[X, Y]}$, per ogni $Y \in \mathfrak{X}(M)$.

DIMOSTRAZIONE. (1) \Rightarrow (2) è conseguenza del fatto che il rilevamento Jacobiano di una trasformazione affine preserva la distribuzione orizzontale.

(2) \Rightarrow (3). Per il Lemma XI.5.2 è anche $L_{\hat{X}}\theta = 0$. Otteniamo, per ogni $v \in \mathbb{R}^m$,

$$0 = \hat{X}v = \hat{X}(\theta(v^*)) = (L_{\hat{X}}\theta)(v^*) - \theta([\hat{X}, v^*]) = -\theta([\hat{X}, v^*]),$$

$$0 = \hat{X}\omega(v^*) = (L_{\hat{X}}\omega)(v^*) - \omega([\hat{X}, v^*]) = -\omega([\hat{X}, v^*])$$

e perciò la (3).

⁵Indichiamo con \tilde{Y} , o anche con $\#(Y)$, il rialzamento orizzontale di un campo $Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Supponiamo che valga la (3). Ogni campo orizzontale $Z \in \mathcal{H}(L(M))$ si può scrivere come una combinazione lineare $Z = \sum_{i=1}^m f^i e_i^*$, a coefficienti $f^i \in \mathcal{C}^\infty(L(M))$, dei campi orizzontali standard e_1^*, \dots, e_m^* associati alla base canonica e_1, \dots, e_m di \mathbb{R}^m . Se \hat{X} soddisfa (3), allora

$$[\hat{X}, Z] = \sum_{i=1}^m (Zf^i)e_i^* + \sum_{i=1}^m f^i[\hat{X}, e_i^*] = \sum_{i=1}^m (Zf^i)e_i^* \in \mathcal{H}(L(M)).$$

Quindi la derivata di Lie rispetto ad \hat{X} preserva la distribuzione orizzontale ed è quindi un'affinità infinitesima. Poiché, per ogni $Y \in \mathfrak{X}(M)$, il campo \tilde{Y} è π -correlato ad Y , ne segue che $[\hat{X}, \tilde{Y}]$ è il campo orizzontale corrispondente ad $[X, Y]$ e vale quindi la (4).

Poiché $L_{\hat{X}}\theta = 0$, perché \hat{X} è un rilevamento Jacobiano, otteniamo

$$\begin{aligned} \theta(\mathcal{L}([X, \nabla_Y Z] - \nabla_Y[X, Z])) &= \theta([\hat{X}, \widetilde{\nabla_Y Z}]) - \tilde{Y}\theta([\hat{X}, \tilde{Z}]) = \hat{X}\theta(\widetilde{\nabla_Y Z}) - \tilde{Y}\hat{X}\theta(\tilde{Z}) \\ &= [\hat{X}, \tilde{Y}]\theta(\tilde{Z}), \quad \forall Y, Z \in \mathfrak{X}(M). \end{aligned}$$

La (5) è dunque equivalente ad

$$[\hat{X}, \tilde{Y}]\theta(\tilde{Z}) = [\widetilde{X}, \tilde{Y}]\theta(\tilde{Z}), \quad \forall Y, Z \in \mathfrak{X}(M),$$

che, essendo $[\hat{X}, \tilde{Y}]$ è un campo $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$ -invariante, è equivalente alla (4) e cioè al fatto che la derivata di Lie rispetto ad \hat{X} , preservando la distribuzione orizzontale, sia un'affinità infinitesima. \square

PROPOSIZIONE XI.5.5. *L'insieme $\alpha(M)$ delle affinità infinitesime di M è un'algebra di Lie di dimensione minore o uguale ad $m(m+1)$. Se M è connessa, per ogni $\sigma \in L(M)$ l'applicazione $\alpha(M) \ni X \rightarrow \hat{X}_\sigma \in T_\sigma L(M)$ è iniettiva.*

DIMOSTRAZIONE. Se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, allora $[\widetilde{X}, \tilde{Y}] = [\hat{X}, \hat{Y}]$ ed $[L_{\hat{X}}, L_{\hat{Y}}] = L_{[\hat{X}, \hat{Y}]}$. Il fatto che $\alpha(M)$ sia un'algebra di Lie è allora conseguenza della caratterizzazione (2) della Proposizione XI.5.4. Infatti

$$L_{[\hat{X}, \hat{Y}]} \omega = [L_{\hat{X}}, L_{\hat{Y}}] \omega = 0 \quad \text{se } X, Y \in \alpha(M).$$

Per dimostrare che $\alpha(M)$ ha dimensione finita $\leq m(m+1)$, è sufficiente dimostrare che, se M è connessa, ogni affinità infinitesima X per cui \hat{X} abbia un punto critico è identicamente nulla. Sia $X \in \alpha(M)$. Il luogo dei punti critici di \hat{X} in $L(M)$ è un chiuso $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$ -invariante. Poiché, per la (3) della Proposizione XI.5.4, $[v^*, \hat{X}] = 0$ per ogni $v \in \mathbb{R}^m$, il campo \hat{X} è invariante per il flusso dei v^* e quindi, se ha un punto critico σ_0 , sono punti critici tutti i punti σ dello spazio totale del fibrato d'olonomia per il punto σ_0 . Questo implica che X , che è π -correlato ad \hat{X} , è identicamente nullo. \square

PROPOSIZIONE XI.5.6. *La restrizione ad una geodetica di un'affinità infinitesima è un campo di Jacobi.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $X \in \alpha(M)$ un'affinità infinitesima. Se $\gamma \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], M)$ è un arco geodetico, esiste un $\epsilon > 0$ per cui il flusso ϕ_s di X sia definito, per $|s| \leq \epsilon$, in un intorno del supporto $\gamma([0, 1])$ di γ . La $f(t, s) = \phi_s \circ \gamma(t)$ è una superficie parametrica di classe \mathcal{C}^∞ , definita per $(t, s) \in [0, 1] \times [-\epsilon, \epsilon]$, e per ogni $|s| \leq \epsilon$ la

$t \rightarrow \phi_s \circ \gamma(t)$ è una geodetica. Quindi $X_{\gamma(t)} = \partial f(t, 0)/\partial s$ è un campo di Jacobi lungo γ . \square

Ricordiamo che un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$ è *completo* se genera un gruppo a un parametro di diffeomorfismi di M .

TEOREMA XI.5.7. *L'algebra di Lie del gruppo $\mathbf{A}(M)$ delle affinità di M è la sottoalgebra di $\mathfrak{a}(M)$ formata dai campi completi.*

PROPOSIZIONE XI.5.8. *Se l'algebra di Lie $\mathfrak{a}(M)$ delle affinità infinitesime ha dimensione $m(m+1)$, allora la connessione è piatta, ha cioè torsione e curvatura nulle.*

DIMOSTRAZIONE. Se $\mathfrak{a}(M)$ ha dimensione $m(m+1)$, per ogni $\sigma_0 \in L(M)$ l'applicazione $\mathfrak{a}(M) \ni X \rightarrow \hat{X}_{\sigma_0} \in T_{\sigma_0}L(M)$ è un isomorfismo lineare. Quindi, per ogni $A \in \mathfrak{gl}_m(\mathbb{R})$ vi è uno ed un solo campo $X \in \mathfrak{a}(M)$ tale che $\hat{X}_{\sigma_0} = A^*_{\sigma_0}$, ove A^* è il campo verticale fondamentale associato ad A . Siano $v, w \in \mathbb{R}^m$. Allora

$$\hat{X}_{\sigma_0} \Theta(v^*, w^*) = A^*_{\sigma_0} \Theta(v^*, w^*).$$

Calcoliamo separatamente i due membri di quest'uguaglianza. Poiché

$$L_{\hat{X}} \Theta = L_{\hat{X}}(d\theta + \omega \wedge \theta) = d(L_{\hat{X}}\theta) + (L_{\hat{X}}\omega) \wedge \theta + \omega \wedge L_{\hat{X}}\theta = 0,$$

otteniamo

$$\hat{X} \Theta(v^*, w^*) = (L_{\hat{X}} \Theta)(v^*, w^*) + \Theta([\hat{X}, v^*], w^*) + \Theta(v^*, [\hat{X}, w^*]) = 0.$$

È poi

$$L_{A^*} \Theta = A^* \lrcorner d\Theta + d(A^* \lrcorner \Theta) = A^* \lrcorner (\Omega \wedge \theta - \omega \wedge \Theta) = -A\Theta$$

e quindi otteniamo che $A\Theta_{\sigma_0}(v^*, w^*) = 0$ per ogni $A \in \mathfrak{gl}_m(\mathbb{R})$, per ogni $v, w \in \mathbb{R}^m$ ed ogni $\sigma_0 \in L(M)$. Questo dimostra che $\Theta = 0$. In modo analogo si dimostra che anche $\Omega = 0$. \square

PROPOSIZIONE XI.5.9. *Se la connessione è completa, allora anche tutte le affinità infinitesime sono complete, sono cioè generatori infinitesimali di gruppi a un parametro di trasformazioni affini di M .*

XI.6. Isometrie di una varietà Riemanniana

Sia (M, g) una varietà Riemanniana connessa e d la distanza associata alla metrica g .

Ricordiamo che un'isometria di M è un'applicazione $\phi : M \rightarrow M$ che preserva le distanze, tale cioè che sia

$$d(\phi(p_1), \phi(p_2)) = d(p_1, p_2), \quad \forall p_1, p_2 \in M.$$

Diciamo che è un'isometria globale, o una congruenza se è anche bigettiva.

DEFINIZIONE XI.6.1. Un'applicazione $\phi : M \rightarrow M$ è un isomorfismo Riemanniano locale se è \mathcal{C}^∞ e $\phi^*g = g$. Diremo che è un isomorfismo Riemanniano se è anche bigettiva.

Segue dalla definizione della distanza Riemanniana che un isomorfismo Riemanniano è anche una congruenza. Le due nozioni sono di fatto equivalenti, come conseguenza del seguente teorema.

TEOREMA XI.6.2. *Un'isometria $\phi : M \rightarrow M$ rispetto alla distanza Riemanniana è differenziabile di classe \mathcal{C}^∞ ed è un isomorfismo Riemanniano locale.*

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che gli archi di geodetica $\gamma \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], M)$ si possono caratterizzare come gli archi differenziabili per cui esistono costanti $c \geq 0$ ed $\epsilon > 0$ per cui

$$d(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) = c|t_2 - t_1|, \quad \forall 0 \leq t_1, t_2 \leq 1, \text{ con } |t_1 - t_2| < \epsilon.$$

Quindi un'isometria ϕ di M è un'applicazione continua che trasforma archi geodetici in archi geodetici e segmenti in segmenti. In particolare, se $\phi(p_0) = q_0$, possiamo associare a ϕ un'applicazione $\lambda : T_{p_0} \rightarrow T_{q_0}$ omogenea di grado uno che fa corrispondere ad un segmento $\{\text{Exp}_{p_0}(tv)\}_{0 \leq t \leq 1}$, per v in un intorno normale di 0 in $T_{p_0}M$, il segmento $\{\text{Exp}_{q_0}(t\lambda(v))\}_{0 \leq t \leq 1}$. L'applicazione λ preserva le lunghezze dei vettori. Osserviamo che l'angolo α tra due geodetiche $\text{Exp}_{p_0}(tv)$ ed $\text{Exp}_{p_0}(tw)$ uscenti dallo stesso punto p_0 si può calcolare, utilizzando il teorema del coseno, mediante

$$\cos \alpha = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d(\text{Exp}_{p_0}(tv), \text{Exp}_{p_0}(tw)) - t^2(\|v\|^2 + \|w\|^2)}{2t^2\|v\|\|w\|}.$$

Quindi l'applicazione λ preserva anche gli angoli ed è perciò un'isometria lineare di $T_{p_0}M$ su $T_{q_0}M$. In un intorno normale di p_0 abbiamo $\phi(\text{Exp}_{p_0}(v)) = \text{Exp}_{q_0}(\lambda(v))$ e questo dimostra che ϕ è di classe \mathcal{C}^∞ e $d\phi(p_0) = \lambda$. Dunque $\phi^*g = g$ e ϕ è un isomorfismo Riemanniano. \square

PROPOSIZIONE XI.6.3. *Le congruenze di una varietà Riemanniana (M, g) formano un gruppo.* \square

Indichiamo con $\mathbf{I}(M, g)$ il gruppo delle congruenze della varietà Riemanniana (M, g) . Osserviamo che, se $\phi \in \mathbf{I}(M, g)$ abbiamo :

$$(11.6.1) \quad \forall p \in M \exists r_p > 0 \text{ tale che } \phi(\text{Exp}_p(v)) = \text{Exp}_{\phi(p)}(d\phi(p)(v)) \\ \forall v \in T_pM \text{ con } \|v\| < r_p.$$

PROPOSIZIONE XI.6.4. *Sia (M, g) una varietà Riemanniana connessa, p_0 un punto di M . Se $\phi, \psi \in \mathbf{I}(M, g)$ e $\phi(p_0) = \psi(p_0)$, $d\phi(p_0) = d\psi(p_0)$, allora $\phi = \psi$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $N = \{p \in M \mid \phi(p) = \psi(p), \quad d\phi(p) = d\psi(p)\}$. Poiché ϕ e ψ sono di classe \mathcal{C}^∞ , N è chiuso. Per la ((11.6.1)), l'insieme N è anche aperto e quindi coincide con M . \square

Ogni congruenza di (M, g) definisce un diffeomorfismo nello spazio totale $\mathbf{O}_g(M)$ del fibrato dei sistemi di riferimento ortonormali di M . Su questo la forma di Cartan $\omega \in \mathcal{Q}^1(\mathbf{O}_g(M), \mathfrak{o}_m)$ della connessione di Levi-Civita e la forma canonica $\theta \in \mathcal{Q}^1(\mathbf{O}_g(M), \mathbb{R}^m)$ definiscono un parallelismo completo

$$T\mathbf{O}_g(M) \ni X \rightarrow (\pi(X), \theta(X), \omega(X)) \in M \times \mathbb{R}^m \times \mathfrak{o}_m.$$

LEMMA XI.6.5. Se $\phi \in \mathbf{I}(M, g)$, allora

$$(11.6.2) \quad \tilde{\phi} : \mathbf{O}_g(M) \ni \sigma \longrightarrow d\phi \circ \sigma \in \mathbf{O}_g(M)$$

definisce un morfismo del fibrato principale $\mathfrak{O}_g(M)$ con

$$(11.6.3) \quad \tilde{\phi}^*\theta = \theta, \quad \tilde{\phi}^*\omega = \omega.$$

Viceversa, ogni isomorfismo $(\phi, \tilde{\phi})$ del fibrato principale $\mathfrak{O}_g(M)$ che soddisfi (11.6.3) è il sollevamento di una congruenza $\phi \in \mathbf{I}(M, g)$.

Come conseguenza abbiamo il seguente teorema di Myers-Steenrod⁶.

TEOREMA XI.6.6. Il gruppo $\mathbf{I}(M, g)$ delle congruenze di una varietà Riemanniana connessa di dimensione m è un gruppo di Lie di dimensione minore o uguale ad $m(m+1)/2$.

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo un punto p_0 in M ed un riferimento ortonormale $\sigma_0 \in \mathbf{O}_g(M)$ in p_0 . Se $\phi \in \mathbf{I}(M, g)$, allora $d\phi(p_0) = \sigma^{-1} \circ \tilde{\phi}(\sigma_0) \circ \sigma_0^{-1}$. Quindi, per la Proposizione XI.6.4, la ϕ è completamente determinata da $\tilde{\phi}(\sigma_0)$ e l'applicazione $\mathbf{I}(M, g) \ni \phi \rightarrow \tilde{\phi}(\sigma_0) \in \mathbf{O}_g(M)$ è iniettiva e continua. Sia N l'immagine di questa applicazione.

Dico che N è un chiuso di $\mathbf{O}_g(M)$. Sia infatti $\{\phi_\nu\}$ una successione in $\mathbf{I}(M, g)$ tale che $\{\tilde{\phi}_\nu(\sigma_0)\}$ converga in $\mathbf{O}_g(M)$ ad un riferimento ortonormale σ_1 in un punto p_1 di M . Fissiamo $r > 0$ in modo che $B_{p_0}(r)$ e $B_{p_1}(r)$ siano intorni normali di p_0 e p_1 rispettivamente. Definiamo $f : B_{p_0}(r) \rightarrow B_{p_1}(r)$ mediante $f(\text{Exp}_{p_0}(v)) = \text{Exp}_{p_1}(\sigma_1 \circ \sigma_0(v))$ se $v \in T_{p_0}M$ e $\|v\| < r$. Su tutti i sottoinsiemi compatti di $B_{p_0}(r)$ la f è limite uniforme delle ϕ_ν e quindi è un'isometria di $B_{p_0}(r)$ su $B_{p_1}(r)$. Consideriamo la famiglia

$$\mathcal{F} = \left\{ (U, \psi) \left| \begin{array}{l} B_{p_0}(r) \subset U \text{ aperto connesso, } \psi \in \mathcal{C}^\infty(U, M), \psi|_{B_{p_0}(r)} = f, \\ d(\psi(p), \psi(q)) = d(p, q), \forall p, q \in U \end{array} \right. \right\}.$$

ed introduciamo su di essa la relazione d'ordine

$$(U_1, \psi_1) < (U_2, \psi_2) \iff U_1 \subset U_2 \text{ e } \psi_2|_{U_1} = \psi_1.$$

Si verifica immediatamente che questa famiglia è induttiva ed ammette quindi un elemento massimale (W, ϕ) . Dico che $W = M$ e $\phi \in \mathbf{I}(M, g)$. Infatti, se $\{q_\nu\}$ è una successione di punti di W che converge ad un punto q di M , allora esiste un $\eta > 0$ tale che per ogni ν la palla $B_{q_\nu}(\eta)$ sia un intorno normale di q_ν in M . Le ϕ_ν convergono allora su $B_{q_\nu}(\eta)$, uniformemente sui compatti, ad una isometria locale ψ' di $B_{q_\nu}(\eta)$ in M che, per la Proposizione XI.6.4, coincide con ϕ su $B_{q_\nu}(\eta) \cap W$. Quindi per la massimalità $B_{q_\nu}(\eta) \subset W$ e, poiché M è connessa, questo dimostra che $W = M$, cioè che ϕ è un'isometria definita su M . Per verificare che è surgettiva, osserviamo che $\{\tilde{\phi}_\nu^{-1}(\sigma_1)\}$ converge a σ_0 . Ripetendo il ragionamento svolto sopra, ne ricaviamo che ϕ_ν^{-1} converge ad un'isometria $\psi \in \mathcal{C}^\infty(M, M)$, che è l'inversa di ϕ .

⁶S. B. Myers and N. E. Steenrod *The Group of Isometries of a Riemannian Manifold* Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 40, No. 2 (Apr., 1939), pp. 400-416. Vedi anche Richard S. Palais, *On the differentiability of isometries* Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957), 805-807

Da questa osservazione segue che $\mathbf{I}(M, g)$ è localmente compatto, e quindi un gruppo di Lie diffeomorfo, come varietà differenziabile, ad una sottovarietà N di $\mathbf{O}_g(M)$, e quindi di dimensione minore o uguale ad $m(m + 1)/2$. \square

XI.7. Campi di Killing

Sia (M, g) una varietà pseudo-Riemanniana.

DEFINIZIONE XI.7.1. Un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$ è *di Killing*⁷ se è generatore infinitesimale di un gruppo locale a un parametro di isometrie locali di (M, g) .

Indicheremo con $\mathfrak{i}(M, g)$ l'insieme dei campi di Killing di (M, g) .

Poiché le isometrie pseudo-Riemanniane sono trasformazioni affini per la connessione di Levi-Civita, abbiamo

PROPOSIZIONE XI.7.2. *I campi di Killing sono affinità infinitesime per la connessione di Levi-Civita.* \square

Vale il seguente

TEOREMA XI.7.3. *Sono equivalenti, per $X \in \mathfrak{X}(M)$:*

- (1) X è di Killing;
- (2) la derivata di Lie $L_X g$ del tensore della metrica è nulla;
- (3) la derivata covariante ∇X è g -antisimmetrica, cioè

$$(11.7.1) \quad g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X) = 0, \quad \forall Y, Z \in \mathfrak{X}(M);$$

Se X è un campo di Killing, allora

- (4) per ogni $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ risulta

$$(11.7.2) \quad [X, \nabla_Y Z] = \nabla_Y [X, Z] + \nabla_{[X, Y]} Z.$$

- (5) la restrizione di X lungo ogni geodetica è un campo di Jacobi;

- (6) $\nabla_{YZ}^2 X + R(X, Y)Z = 0$ per ogni $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

DIMOSTRAZIONE. L'equivalenza (1) \Leftrightarrow (2) è conseguenza immediata della definizione. Verifichiamo la (2) \Leftrightarrow (3). Se $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ abbiamo

$$\begin{aligned} (L_X g)(Y, Z) &= X(g(Y, Z)) - g([X, Y], Z) - g(Y, [X, Z]) \\ &= g(\nabla_X Y - [X, Y], Z) + g(\nabla_X Z - [X, Z], Y) \\ &= g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X) \end{aligned}$$

perché la connessione di Levi-Civita è simmetrica. Quindi la (11.7.1) è condizione necessaria e sufficiente affinché $L_X g = 0$.

La (4) è la (5) della Proposizione XI.5.4. Abbiamo poi

$$\begin{aligned} \nabla_{YZ}^2 X &= \nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_{\nabla_Y Z} X \\ &= \nabla_Y (\nabla_X Z - [X, Z]) - \nabla_X \nabla_Y Z + [X, \nabla_Y Z] \\ &= -R(X, Y)Z - \nabla_{[X, Y]} Z - \nabla_Y [X, Z] + [X, \nabla_Y Z] \end{aligned}$$

⁷ Wilhelm Karl Joseph Killing (1847-1923), matematico tedesco, professore a Münster dal 1892, fu un pioniere della teoria dei gruppi e delle algebre di Lie e, tra l'altro, scoprì nel 1887 l'algebra eccezionale G_2 .

ed otteniamo quindi la (6) perché per la (5) la somma degli ultimi tre termini nell'ultima riga è nulla. \square

PROPOSIZIONE XI.7.4. *I campi di Killing su (M, g) formano un'algebra di Lie $\mathfrak{i}(M, g)$ di dimensione minore o uguale ad $m(m+1)/2$. Se $\mathfrak{i}(M, g)$ ha dimensione $m(m+1)/2$, allora (M, g) è uno spazio a curvatura costante. La dimostrazione dell'ultima affermazione si può ottenere ripetendo gli argomenti usati per dimostrare la Proposizione XI.5.8.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché, per il Teorema XI.7.3, $\mathfrak{i}(M, g) = \{X \in \mathfrak{X}(M) \mid L_X g = 0\}$, i campi di Killing formano una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{X}(M)$. Inoltre, la restrizione ad $\mathbf{O}_g(M)$ del rilevamento Jacobiano \hat{X} di un campo di Killing X è un campo di vettori su $\mathbf{O}_g(M)$. Se quindi $\sigma_0 \in \mathbf{O}_g(M)$, otteniamo per la Proposizione XI.5.5 un'applicazione lineare iniettiva $\mathfrak{i}(M, g) \ni X \rightarrow \hat{X}_{\sigma_0} T\mathbf{O}_g(M)$. Questo dimostra che $\mathfrak{i}(M, g)$ ha dimensione minore o uguale ad $m(m+1)/2$. \square

XI.8. Riducibilità

Rappresentazioni riducibili e decomponibili. Sia \mathbf{G} un gruppo di Lie e $(\rho, V) = \rho : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(V)$ una sua rappresentazione lineare reale. Un sottospazio lineare W di V si dice \mathbf{G} -invariante se $\rho(a)(W) = W$ per ogni $a \in \mathbf{G}$. I sottospazi $\{0\}$ e V sono sottospazi \mathbf{G} -invarianti *banali*.

DEFINIZIONE XI.8.1. Diciamo che ρ è

- *irriducibile* se V non contiene sottospazi \mathbf{G} -invarianti non banali;
- *riducibile* se non è irriducibile;
- *decomponibile* se V si può decomporre nella somma diretta di due sottospazi \mathbf{G} -invarianti non banali;
- *indecomponibile* se non è decomponibile;
- *completamente decomponibile* se ogni sottospazio \mathbf{G} -invariante ammette in V un complemento lineare \mathbf{G} -invariante.

Una definizione analoga si dà per una rappresentazione lineare $(\rho_*, V) = \rho_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(V)$ di un'algebra di Lie \mathfrak{g} . Un sottospazio lineare W di V si dice \mathfrak{g} -invariante se $\rho_*(A)(W) \subset W$ per ogni $A \in \mathfrak{g}$. I sottospazi $\{0\}$ e V sono sottospazi \mathfrak{g} -invarianti *banali*.

DEFINIZIONE XI.8.2. Diciamo che ρ_* è

- *irriducibile* se V non contiene sottospazi \mathfrak{g} -invarianti non banali;
- *riducibile* se non è irriducibile;
- *decomponibile* se V si può decomporre nella somma diretta di due sottospazi \mathfrak{g} -invarianti non banali;
- *indecomponibile* se non è decomponibile;
- *completamente decomponibile* se ogni sottospazio \mathfrak{g} -invariante ammette in V un complemento lineare \mathfrak{g} -invariante.

Se \mathfrak{g} è l'algebra di Lie di un gruppo di Lie \mathbf{G} , ad ogni rappresentazione lineare (ρ, V) di \mathbf{G} corrisponde la rappresentazione $(\rho_* = d\rho_e, V)$ di \mathfrak{g} . Vale anche il viceversa se \mathbf{G} è connesso e semplicemente connesso.

Abbiamo le implicazioni

$$(\rho_*, V) \text{ irriducibile} \implies (\rho, V) \text{ irriducibile}$$

$$(\rho_*, V) \text{ indecomponibile} \implies (\rho, V) \text{ indecomponibile}$$

$$(\rho, V) \text{ completamente decomponibile} \implies (\rho_*, V) \text{ completamente decomponibile}$$

e valgono le implicazioni opposte quando \mathbf{G} sia connesso.

Se (ρ, V) è completamente decomponibile, lo spazio V si decompone in modo unico in una somma diretta

$$V = V_0 \oplus V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$$

in cui $V_0 = \{v \in V \mid a(v) = v, \forall a \in \mathbf{G}\}$ è il luogo dei punti fissi di \mathbf{G} e la restrizione di \mathbf{G} a ciascuno dei sottospazi vettoriali V_i , per $1 \leq i \leq k$, è irriducibile.

Riducibilità di varietà affini. Sia M una varietà differenziabile affine connessa, dotata di una connessione lineare priva di torsione. Sia $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$ un suo fibrato d'olonomia, con gruppo d'olonomia $\mathbf{G} \subset \mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$. Indichiamo con $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^m)$ l'algebra di Lie di \mathbf{G} .

DEFINIZIONE XI.8.3. Diciamo che M è *irriducibile* se l'azione naturale di \mathbf{G} su \mathbb{R}^m è irriducibile.

Supponiamo che M sia riducibile e sia V un sottospazio \mathbf{G} -invariante non banale di \mathbb{R}^m .

LEMMA XI.8.4. *La distribuzione vettoriale $\mathfrak{D}_V(P)$ su P generata dallo spazio vettoriale $\{A^* \mid A \in \mathfrak{g}\} + \{v^* \mid v \in V\}$ è involutiva.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché abbiamo supposto che la connessione su M sia simmetrica, $[v_1^*, v_2^*]$ è un campo verticale per ogni $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m$. Poiché V è \mathbf{G} -invariante, abbiamo poi $[A^*, v^*] = (Av)^*$ con $Av \in V$ per ogni $v \in V$. Da questo segue la tesi. \square

PROPOSIZIONE XI.8.5. *L'insieme $T_V M = \{\sigma v \mid \sigma \in P, v \in V\}$ è un sottofibrato vettoriale di TM . La distribuzione vettoriale $\mathfrak{D}_V(M) = \Gamma(M, T_V M)$ su M è involutiva.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché per ipotesi V è \mathbf{G} -invariante, abbiamo $\sigma_1 V = \sigma_2 V$ se $\pi(\sigma_1) = \pi(\sigma_2)$. In particolare, per ogni aperto U di M ed ogni $\sigma \in \Gamma(U, P)$ la $U \times V \ni (p, v) \rightarrow \sigma(p)v \in T_V M|_U$ è una trivializzazione locale di $T_V M$ su U , e quindi $T_V M$ è un sottofibrato vettoriale di TM .

La distribuzione $\mathfrak{D}_V(P)$ è il pullback della $\mathfrak{D}_V(M)$ mediante la proiezione di P sulla base. Quindi $\mathfrak{D}_V(M)$ è involutiva perché $\mathfrak{D}_V(P)$ lo è. \square

PROPOSIZIONE XI.8.6. *Sia Q un integrale totale di \mathfrak{D}_V in P . Allora Q è lo spazio totale di un fibrato \mathbf{G} -principale la cui base N è una sottovarietà affine di M .*

DIMOSTRAZIONE. Per il teorema di Frobenius, per ogni punto σ_0 di P passa una ed una sola varietà integrale massimale Q della distribuzione involutiva $\mathfrak{D}_V(P)$. Poiché $\mathfrak{D}_V(P)$ contiene tutti i campi verticali, Q è \mathbf{G} -invariante. La Q è lo spazio

totale di un fibrato \mathbf{G} -principale la cui base è l'integrale massimale di $\mathfrak{D}_V(M)$ per il punto $p_0 = \pi(\sigma_0)$. Per costruzione, N è una sottovarietà affine di M . Infatti il trasporto parallelo in M lungo le curve con supporto in N di vettori tangenti ad N sono le curve $\tilde{\gamma}v$ con $\tilde{\gamma}$ orizzontale e con supporto in Q e $v \in V$, e sono quindi a valori in TN . \square

La struttura affine di N è descritta dalla Proposizione XI.2.2. La sua ologonomia è un sottogruppo del gruppo delle restrizioni a V degli elementi di \mathbf{G} .

XI.9. Decomponibilità e teorema di de Rham

Sia M una varietà differenziabile affine, connessa, e con una connessione simmetrica. Fissiamo un suo fibrato d'ologonomia $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$, con gruppo strutturale $\mathbf{G} \subset \mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$. Denotiamo con \mathfrak{g} l'algebra di Lie di \mathbf{G} .

DEFINIZIONE XI.9.1. Diciamo che M è *decomponibile* se l'azione naturale di \mathbf{G} su \mathbb{R}^m è decomponibile.

Sia $\mathbb{R}^m = V_1 \oplus V_2$ una decomposizione di \mathbb{R}^m nella somma diretta di due sottospazi \mathbf{G} -invarianti. Indicheremo con $\mathfrak{D}_{V_i}(P)$ e $\mathfrak{D}_{V_i}(M)$, per $i = 1, 2$, le distribuzioni involutive su P e su M associate al sottospazio \mathbf{G} -invariante V_i .

LEMMA XI.9.2. *Abbiamo*

$$\omega([v_1^*, w_1^*])v_2 = 0, \quad \omega([v_2^*, w_2^*])v_1 = 0, \quad \forall v_1, w_1 \in V_1, \forall v_2, w_2 \in V_2.$$

DIMOSTRAZIONE. Siano $v_1, w_1 \in V_1, v_2 \in V_2$. Poiché la forma di torsione Θ è nulla, dall'equazione di struttura $D\Theta = \Omega \wedge \theta$ ricaviamo che

$$(11.9.1) \quad \omega([v_1^*, v_2^*])w_1 + \omega([v_2^*, w_1^*])v_1 + \omega([w_1^*, v_1^*])v_2 = 0.$$

Poiché V_1 e V_2 sono \mathfrak{g} -invarianti, otteniamo $\omega([w_1^*, v_1^*])(V_2) \subset V_1 \cap V_2 = \{0\}$. \square

PROPOSIZIONE XI.9.3. *Sia M_1 una sottovarietà integrale di $\mathfrak{D}_{V_1}(M)$, p_0 un punto di M_1 e σ_0 un riferimento in P_{p_0} . Sia \mathbf{G}_1^0 il gruppo di ologonomia ristretta in σ_0 del fibrato $P|_{M_1} \xrightarrow{\pi} M_1$. Risulta allora $a(v) = v$ per ogni $v \in V_2$ e per ogni $a \in \mathbf{G}_1^0$.*

DIMOSTRAZIONE. Per il teorema di Ambrose-Singer l'algebra di Lie di \mathbf{G}_1^0 è generata dagli elementi della forma $\omega([v_1^*, w_1^*]_\sigma)$ al variare di v_1, w_1 in V_1 e di σ nel fibrato di ologonomia di M_1 per σ_0 . La tesi è quindi conseguenza del Lemma XI.9.2. \square

PROPOSIZIONE XI.9.4. *Supponiamo inoltre che (M, g) sia una varietà Riemanniana con la connessione di Levi-Civita. Allora*

$$[v_1^*, v_2^*] = 0, \quad \forall v_1 \in V_1, v_2 \in V_2.$$

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo $v_2 \in V_2, \sigma \in P$, e definiamo, per ogni $v \in V_1$, $A(v) = \omega([v^*, v_2^*]_\sigma)$. Per il Lemma XI.9.2 e la (11.9.1) è $A(v)w = A(w)v$ per ogni $v, w \in V_1$. Otteniamo allora

$$\begin{aligned} (A(v)w|z) &= (A(w)v|z) = -(v|A(w)z) = -(v|A(z)w) = (A(z)v|w) = (A(v)z|w) \\ &= -(A(v)w|z), \quad \forall v, w, z \in V_1. \end{aligned}$$

e quindi $A(v)w = 0$ per ogni $v, w \in V_1$. Questo ci dice che $\omega(v_1^*, v_2^*)w = 0$ per ogni $v_1, w \in V_1$ e $v_2 \in V_2$. Con ragionamento analogo dimostriamo che $\omega(v_1^*, v_2^*)w = 0$ per ogni $v_1 \in V_1$ e $v_2, w \in V_2$. Quindi $\omega(v_1^*, v_2^*) = 0$. Poiché la connessione di Levi-Civita è priva di torsione, otteniamo la tesi. \square

Poniamo

$$(11.9.2) \quad \begin{cases} \mathfrak{g}_1 = \{X \in \mathfrak{g} \mid Xv_2 = 0, \forall v_2 \in V_2\}, \\ \mathfrak{g}_2 = \{X \in \mathfrak{g} \mid Xv_1 = 0, \forall v_1 \in V_1\}. \end{cases}$$

PROPOSIZIONE XI.9.5. (1) *La sottoalgebra \mathfrak{g}_i è generata dagli elementi $[v_i^*, w_i^*]_\sigma$ al variare di v_i, w_i in V_i e di σ in P .*

(2) *$\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ sono ideali di \mathfrak{g} ed abbiamo la decomposizione*

$$(11.9.3) \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2.$$

DIMOSTRAZIONE. La prima affermazione è una conseguenza immediata del Lemma XI.9.2.

Se $v_1, w_1 \in V_1, v_2, w_2 \in V_2$, abbiamo

$$\begin{aligned} [[v_1^*, w_1^*], [v_2^*, w_2^*]] &= [[[v_1^*, w_1^*], v_2^*], w_2^*] + [v_2^*, [[v_1^*, w_1^*], w_2^*]] \\ &= [[[v_1^*, v_2^*], w_1^*], w_2^*] + [[v_1^*, [w_1^*, v_2^*]], w_2^*] \\ &\quad + [v_2^*, [[v_1^*, w_2^*], w_1^*]] + [v_2^*, [v_1^*, [w_1^*, w_2^*]]] = 0 \end{aligned}$$

e quindi $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2] = 0$ e $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ sono ideali di \mathfrak{g} .

Per il Teorema di Ambrose-Singer, \mathfrak{g} è generata dagli elementi $[v^*, w^*]_\sigma$ al variare di v, w in \mathbb{R}^m e di σ in P . Per la Proposizione XI.9.4 è $[v^*, w^*]_\sigma = [v_1^*, w_1^*]_\sigma + [v_2^*, w_2^*]_\sigma$ se $v_1, w_1 \in V_1, v_2, w_2 \in V_2$ e $v = v_1 + v_2, w = w_1 + w_2$. Questo dimostra la (11.9.3). \square

PROPOSIZIONE XI.9.6. *Se M è connesso e semplicemente connesso, allora \mathbf{G} è il prodotto diretto dei suoi sottogruppi normali*

$$\mathbf{G}_1 = \{a \in \mathbf{G} \mid a(v) = v, \forall v \in V_2\}, \quad \mathbf{G}_2 = \{a \in \mathbf{G} \mid a(v) = v, \forall v \in V_1\}.$$

DIMOSTRAZIONE. Se M è connesso e semplicemente connesso, il gruppo di ologonomia \mathbf{G} coincide con il gruppo d'ologonomia ristretto. La conclusione è quindi conseguenza della proposizione precedente. \square

Dalle proposizioni XI.9.4 e XI.9.5 ricaviamo la

PROPOSIZIONE XI.9.7. *Abbiamo:*

- (1) *Per $i = 1, 2$ la distribuzione vettoriale $\mathfrak{D}'_{V_i}(P)$ su P generata da $\{X^* \mid X \in \mathfrak{g}_i\} + \{v^* \mid v \in V_i\}$ è involutiva.*
- (2) *Il gruppo di ologonomia ristretta di una sottovarietà integrale M_i di $\mathfrak{D}_{V_i}(M)$ è contenuto in \mathbf{G}_i .* \square

Fissiamo un punto p_0 in M e siano M_i ($i = 1, 2$) gli integrali completi delle distribuzioni vettoriali definite dalle sezioni dei fibrati $T_{V_i}M = \{\sigma v \mid \sigma \in P, v \in V_i\}$. Osserviamo che, se $\sigma_0 \in P_0$, allora $\sigma_{i,0} : V_i \ni v \rightarrow \sigma_0 v \in T_{V_i}M$ sono sistemi di riferimento di M_i in p_0 , per $i = 1, 2$. Siano $P_i \xrightarrow{\pi_i} M_i$ i corrispondenti fibrati di ologonomia passanti per il riferimento $\sigma_{i,0}$.

Indichiamo con $\theta_i \in \Omega^1(P_i, V_i)$ la forma canonica e con $\omega_i \in \Omega^1(P_i, \mathfrak{g}_i)$ la forma di Cartan della connessione di Levi-Civita di M_i . Sul prodotto $P_1 \times P_2 \times P$ consideriamo la forma $\eta = (\theta_1 \oplus \theta_2 - \theta, \omega_1 \oplus \omega_2 - \omega) \in \Omega^1(P_1 \times P_2 \times P, \mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{g})$.

LEMMA XI.9.8. *ker η è una distribuzione involutiva su $P_1 \times P_2 \times P$.*

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che $\ker \eta$ è la distribuzione generata dallo spazio vettoriale

$$\{(v_1^*, v_2^*, v^*; X_1^*, X_2^*, X^*) \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2, v = v_1 + v_2, X_1 \in \mathfrak{g}_1, X_2 \in \mathfrak{g}_2, X = X_1 + X_2\}$$

e quindi è involutiva per le proposizioni XI.9.4 e XI.9.5. \square

Sia $\varpi : P_1 \times P_2 \times P \ni (\sigma_1, \sigma_2, \sigma) \rightarrow (\pi_1(\sigma_1), \pi_2(\sigma_2), \pi(\sigma)) \in M_1 \times M_2 \times M$ la proiezione naturale. Sia Q l'integrale totale di $\ker \eta$ per il punto $(\sigma_{1,0}, \sigma_{2,0}, \sigma_0)$.

LEMMA XI.9.9. *La proiezione $N = \varpi(Q)$ è una sottovarietà differenziabile di $M_1 \times M_2 \times M$. Le proiezioni $N \ni (p_1, p_2, p) \rightarrow (p_1, p_2) \in M_1 \times M_2$ ed $N \ni (p_1, p_2, p) \rightarrow p \in M$ sono diffeomorfismi locali.* \square

COROLLARIO XI.9.10. *Possiamo allora trovare intorno aperti U_1, U_2, U di p_0 in M_1, M_2, M tale che vi sia un'isometria $f : U_1 \times U_2 \rightarrow M$ tale che $f(p, p_0) = p$ per ogni $p \in U_1$ ed $f(p_0, p) = p$ per ogni $p \in U_2$.* \square

TEOREMA XI.9.11. *Se M è connessa, semplicemente connessa e completa, allora vi è una ed una sola isometria $f : M_1 \times M_2 \rightarrow M$ tale che $f(p, p_0) = p$ per ogni $p \in M_1$ ed $f(p_0, p) = p$ per ogni $p \in M_2$. Le sottovarietà affini M_1 ed M_2 di M sono anch'esse connesse, semplicemente connesse e complete.*

DIMOSTRAZIONE. Si costruisca Q come sopra, sostituendo ad M_1 e ad M_2 i loro rivestimenti universali \tilde{M}_1, \tilde{M}_2 . La costruzione ci dà rivestimenti connessi $N \rightarrow \tilde{M}_1 \times \tilde{M}_2$ ed $N \rightarrow M$, che sono diffeomorfismi perché $\tilde{M}_1 \times \tilde{M}_2$ ed M sono semplicemente connessi. Otteniamo quindi un diffeomorfismo di $\tilde{M}_1 \times \tilde{M}_2$ su M con grafico N . Poiché M_1 ed M_2 sono le immagini di \tilde{M}_1, \tilde{M}_2 , ne segue che $\tilde{M}_1 = M_1, \tilde{M}_2 = M_2$. \square

Il gruppo di ologonia \mathbf{G} di (M, g) è compatto e quindi la sua rappresentazione su \mathbb{R}^m è completamente decomponibile. Otteniamo quindi, costruendo le sottovarietà affini M_0, M_1, \dots, M_k corrispondenti alle componenti V_0 su cui \mathbf{G} opera banalmente ed alle rappresentazioni irriducibili V_1, \dots, V_k , il

TEOREMA XI.9.12 (de Rham). *Ogni varietà Riemanniana (M, g) connessa, semplicemente connessa e completa è decomponibile in un prodotto $(M_0, g_0) \times (M_1, g_1) \times \dots \times (M_k, g_k)$ di una varietà Euclidea (M_0, g_0) e di k varietà Riemanniane irriducibili $(M_1, g_1), \dots, (M_k, g_k)$.* \square

Immersioni, isometrie, campi di Killing

XII.1. Immersioni pseudo-Riemanniane

XII.1.1. Sottofibrati con sottogruppo strutturale riduttivo e connessione indotta. Siano $\xi_G = (P_G \xrightarrow{\pi_G} M)$ un fibrato principale con gruppo strutturale \mathbf{G} e $\xi_H = (P_H \xrightarrow{\pi_H} M)$ un suo sottofibrato principale, con gruppo strutturale $\mathbf{H} < \mathbf{G}$. Indichiamo con \mathfrak{h} e \mathfrak{g} le rispettive algebre di Lie.

DEFINIZIONE XII.1.1. Diciamo che \mathbf{H} è *riduttivo in* \mathfrak{g} se \mathfrak{h} ammette in \mathfrak{g} un complemento $\text{Ad}(\mathbf{H})$ -invariante, se cioè possiamo trovare un sottospazio vettoriale \mathfrak{m} di \mathfrak{g} tale che

$$(12.1.1) \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}, \quad \text{Ad}(h)(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m} \quad \forall h \in \mathbf{H}.$$

Indichiamo con $\text{pr}_{\mathfrak{h}} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ la proiezione su \mathfrak{h} associata alla decomposizione (12.1.1). Poiché $\text{pr}_{\mathfrak{h}}$ commuta con $\text{Ad}(h)$ per ogni $h \in \mathbf{H}$, vale la

PROPOSIZIONE XII.1.2. Se $\omega_{\mathfrak{g}} \in \Omega^1(P_G, \mathfrak{g})$ è la forma di Cartan di una connessione principale su ξ_G , allora $\omega_{\mathfrak{h}} = \text{pr}_{\mathfrak{h}} \circ \iota^* \omega_{\mathfrak{g}} \in \Omega^1(P_H, \mathfrak{h})$ è la forma di Cartan di una connessione su ξ_H . \square

OSSERVAZIONE XII.1.3. I sottogruppi compatti e i sottogruppi semisemplici sono riduttivi. Se \mathbf{H} è compatto o semisemplice, possiamo definire su \mathfrak{g} una forma bilineare simmetrica β invariante, tale cioè che

$$\beta([X_1, X_2], X_3) + \beta(X_2, [X_1, X_3]) = 0, \quad \forall X_1, X_2, X_3 \in \mathfrak{g},$$

e la cui restrizione su \mathfrak{h} sia non degenera. Possiamo allora scegliere \mathfrak{m} come l'ortogonale di \mathfrak{h} rispetto alla forma β .

XII.1.2. Una decomposizione canonica per i gruppi ortogonali. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n e g una forma bilineare simmetrica non degenera su V . Fissiamo una decomposizione ortogonale

$$(12.1.2) \quad V = U \oplus W, \quad U \perp W,$$

con $\dim U = m > 0$, $\dim W = k > 0$, $m + k = n$. I due sottospazi U e W sono anisotropi. Consideriamo i gruppi

$$\begin{aligned} \mathbf{O}_g(V) &= \{a \in \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(V) \mid g(a(v), a(v)) = g(v, v), \quad \forall v \in V\}, \\ \mathbf{O}_g(U) &= \{a \in \mathbf{O}_g(V) \mid a(w) = w, \quad \forall w \in W\}, \\ \mathbf{O}_g(W) &= \{a \in \mathbf{O}_g(V) \mid a(u) = u, \quad \forall u \in U\}, \\ \mathbf{O}_g(U, W) &= \{a \in \mathbf{O}_g(V) \mid a(U) = U, \quad a(W) = W\} \simeq \mathbf{O}_g(U) \times \mathbf{O}_g(W). \end{aligned}$$

Ciascuno dei sottogruppi $\mathbf{O}_g(U)$, $\mathbf{O}_g(W)$ ed $\mathbf{O}_g(U, W)$ è riduttivo nell'algebra di Lie $\mathfrak{o}_g(V)$ di $\mathbf{O}_g(V)$. Indichiamo con $\mathfrak{o}_g(U)$, $\mathfrak{o}_g(W)$, $\mathfrak{o}_g(U, W)$ le loro algebre di Lie. La forma

$$(12.1.3) \quad \beta(X, Y) = \text{tr}(XY) \quad \text{per } X, Y \in \mathfrak{o}_g(V)$$

è non degenera ed invariante su $\mathfrak{o}_g(V)$ e le sottoalgebre $\mathfrak{o}_g(U)$, $\mathfrak{o}_g(W)$, $\mathfrak{o}_g(U, W)$ sono β -anisotrope. Abbiamo perciò decomposizioni β -ortogonali

$$\begin{aligned} \mathfrak{o}_g(V) &= \mathfrak{o}_g(U) \oplus \mathfrak{m}_U, & \text{con } \text{Ad}(\mathbf{O}_g(U))(\mathfrak{m}_U) &= \mathfrak{m}_U, \\ \mathfrak{o}_g(V) &= \mathfrak{o}_g(W) \oplus \mathfrak{m}_W, & \text{con } \text{Ad}(\mathbf{O}_g(W))(\mathfrak{m}_W) &= \mathfrak{m}_W, \\ \mathfrak{o}_g(V) &= \mathfrak{o}_g(U, W) \oplus \mathfrak{m}_{U,W}, & \text{con } \text{Ad}(\mathbf{O}_g(U, W))(\mathfrak{m}_{U,W}) &= \mathfrak{m}_{U,W}, \end{aligned}$$

con $\mathfrak{m}_{U,W} = \mathfrak{m}_U \cap \mathfrak{m}_W$, poiché $\mathfrak{o}_g(U, W) = \mathfrak{o}_g(U) \oplus \mathfrak{o}_g(W)$.

Possiamo dare una rappresentazione matriciale di questi oggetti scegliendo una base e_1, \dots, e_n di V per cui e_1, \dots, e_m sia una base di U ed e_{m+1}, \dots, e_n una base di W . In questa base

$$\begin{aligned} g &= \begin{pmatrix} g_U & 0 \\ 0 & g_W \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{o}_g(V) &= \left\{ \begin{pmatrix} X_{U,U} & X_{U,W} \\ X_{W,U} & X_{W,W} \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} {}^t X_{U,U} g_U + g_U X_{U,U} = 0, \\ {}^t X_{W,W} g_W + g_W X_{W,W} = 0, \\ {}^t X_{W,U} g_W + g_U X_{U,W} = 0 \end{array} \right. \right\}, \\ \mathfrak{o}_g(U) &= \left\{ \begin{pmatrix} X_{U,U} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left| {}^t X_{U,U} g_U + g_U X_{U,U} = 0 \right. \right\}, \\ \mathfrak{m}_U &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & X_{U,W} \\ X_{W,U} & X_{W,W} \end{pmatrix} \in \mathfrak{o}_g(V) \right\}, \\ \mathfrak{o}_g(W) &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & X_{W,W} \end{pmatrix} \left| {}^t X_{W,W} g_W + g_W X_{W,W} = 0 \right. \right\}, \\ \mathfrak{m}_W &= \left\{ \begin{pmatrix} X_{U,U} & X_{U,W} \\ X_{W,U} & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{o}_g(V) \right\}, \\ \mathfrak{o}_g(U, W) &= \left\{ \begin{pmatrix} X_{U,U} & 0 \\ 0 & X_{W,W} \end{pmatrix} \in \mathfrak{o}_g(V) \right\}, \\ \mathfrak{m}_{U,W} &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & X_{U,W} \\ X_{W,U} & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{o}_g(V) \right\}. \end{aligned}$$

XII.1.3. La nozione di immersione pseudo-Riemanniana. Siano (M, g) ed (N, h) due varietà pseudo-Riemanniane.

DEFINIZIONE XII.1.4. Un'immersione pseudo-Riemanniana è un'applicazione differenziabile $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ per cui sia $g = f^*h$, cioè

$$(12.1.4) \quad g_p(X, Y) = h(f_*(X_p), f_*(Y_p)), \quad \forall p \in M, \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Poiché g è non degenera, abbiamo

PROPOSIZIONE XII.1.5. Ogni immersione pseudo-Riemanniana è un'immersione differenziabile. \square

OSSERVAZIONE XII.1.6. Viceversa, se (N, h) è una varietà pseudo-Riemanniana, ed $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ un'immersione differenziabile, condizione necessaria e sufficiente affinché $g = f^*h$ definisca una struttura pseudo-Riemanniana su M è che f_*T_pM sia anisotropo in $(T_{f(p)}N, h_{f(p)})$ per ogni $p \in M$.

XII.1.4. Fibrati e connessioni associati ad un'immersione sub-Riemanniana.

Sia $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ un'immersione sub-Riemanniana. Indichiamo con f^*TN il pullback su M del fibrato tangente di N :

$$f^*TN = \{(p, w) \in M \times TN \mid f(p) = \pi_N(w)\}.$$

DEFINIZIONE XII.1.7. Il fibrato normale dell'immersione pseudo-Riemanniana f è il sottofibrato vettoriale di f^*TN

$$(12.1.5) \quad NM = \{(p, w) \in f^*TN \mid w \perp T_pM\}.$$

Supponiamo che g, h abbiano in ogni punto segnatura $(p_g, q_g), (p_h, q_h)$ con $p_g \leq p_h, q_g \leq q_h, p_g + q_g = m, p_h + q_h = n = m + k$ e fissiamo una matrice simmetrica

$$b = \begin{pmatrix} b_1 & \\ & b_2 \end{pmatrix}$$

con segnatura (p_h, q_h) , con b_1 simmetrica con segnatura (p_g, q_g) , b_2 simmetrica con segnatura $(p_h - p_g, q_h - q_g)$. Introduciamo i fibrati principali con spazi totali

$$\mathbf{O}_b(N) = \bigcup_{q \in N} \{\sigma \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, T_qN) \mid {}^t v b v = h(\sigma(v), \sigma(v)), \forall v \in \mathbb{R}^n\},$$

$$\mathbf{O}_b(M) = \bigcup_{p \in M} \{\sigma \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, T_{f(p)}N) \mid {}^t v b v = h(\sigma(v), \sigma(v)), \forall v \in \mathbb{R}^n\},$$

$$\mathbf{O}_{b_1}(M) = \bigcup_{p \in M} \{\sigma \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m, T_pM) \mid {}^t v b_1 v = g(\sigma(v), \sigma(v)), \forall v \in \mathbb{R}^m\},$$

$$\mathbf{O}_{b_2}(M) = \bigcup_{p \in M} \{\sigma \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^k, N_pM) \mid {}^t v b_2 v = h(\sigma(v), \sigma(v)), \forall v \in \mathbb{R}^k\},$$

$$\mathbf{O}_b(M, N) = \bigcup_{p \in M} \{\sigma \in \mathbf{O}_{b_p}(M) \mid \sigma(e_i) \in f_*T_pM, 1 \leq i \leq m\},$$

ove abbiamo indicato con e_1, \dots, e_n i vettori della base canonica di \mathbb{R}^n .

Utilizzeremo la decomposizione canonica e le notazioni introdotte in §XII.1.2, indicheremo con V la fibra tipica di TN , con U quella di TM e con W quella di NM . La connessione di Levi-Civita di (N, h) induce connessioni principali sui fibrati principali sopra descritti. Indicheremo con ω la forma di Cartan su $\mathbf{O}_b(N)$ e con $\omega^t, \omega^v, \omega^{t,v}$ le connessioni affini sui fibrati $\mathbf{O}_{b_1}(M), \mathbf{O}_{b_2}(M), \mathbf{O}_b(M, N)$, rispettivamente. Su $\mathbf{O}_b(M)$ abbiamo il pullback della connessione di Levi-Civita su N .

XII.1.5. La seconda forma fondamentale.

NOTAZIONE XII.1.8. Useremo le seguenti notazioni:

- pr_ν e pr_τ sono le proiezioni ortogonali di f^*TN su NM e TM , rispettivamente,
- ∇^τ indica la differenziazione covariante corrispondente alla connessione di Levi Civita su (M, g) ;
- D indica la differenziazione covariante corrispondente alla connessione di Levi-Civita su (N, h) ;
- ∇^f è la derivazione covariante su f^*TS associata al pullback della connessione di Levi-Civita su (N, h) ;
- ∇^ν è la derivazione covariante sul fibrato NM definita da $\nabla_X^\nu Y = \text{pr}_\nu \nabla_X^f Y$ per $X \in \mathfrak{X}(M)$, $Y \in \Gamma(M, NM)$;
- R, R^f, R^ν sono i tensori di curvatura corrispondenti alla connessione di Levi-Civita di (M, g) , al pullback di quella di (S, h) , alla connessione lineare sul fibrato normale, rispettivamente.

LEMMA XII.1.9. Se $X, X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$, $Y \in \Gamma(M, NM)$, allora

$$(12.1.6) \quad \nabla_{X_1}^\tau X_2 = \text{pr}_\tau(\nabla_{X_1}^f X_2) \quad e \quad \nabla_X^\nu Y = \text{pr}_\nu(\nabla_X^f Y).$$

DIMOSTRAZIONE. Si verifica facilmente che la $\nabla_{X_1}^\tau X_2 = \text{pr}_\tau(\nabla_{X_1}^f X_2)$, per $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$, definisce la derivazione covariante di una connessione affine simmetrica su M . Per dimostrare che $\nabla' = \nabla^\tau$, che cioè ∇' coincide con la connessione di Levi-Civita di (M, g) , è sufficiente verificare che è pseudo-metrica. Per semplicità, possiamo supporre che $M \subset N$, identificando così TM ad un sottospazio di TN . Abbiamo allora $\nabla_X^f Y = D_X Y$ se $X \in \mathfrak{X}(M)$ ed Y un campo di vettori lungo M . È quindi

$$\begin{aligned} (\nabla_X' g)(X_1, X_2) &= Xg(X_1, X_2) - g(\nabla_X' X_1, X_2) - g(X_1, \nabla_X' X_2) \\ &= Xh(X_1, X_2) - h(\nabla_X' X_1, X_2) - h(X_1, \nabla_X' X_2) \\ &= Xh(X_1, X_2) - h(D_X X_1, X_2) - h(X_1, D_X X_2) = 0 \end{aligned}$$

perché D è una connessione pseudo-metrica su (N, h) . \square

LEMMA XII.1.10. Se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, allora

$$(12.1.7) \quad \nabla_X^f Y = \nabla_Y^f X + [X, Y].$$

DIMOSTRAZIONE. Se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ sono f -correlati a campi $U, V \in \mathfrak{X}(S)$, Allora $\nabla_X Y, \nabla_Y X, [X, Y]$ sono f -correlati a $D_U V, D_V U, [U, V]$. La (12.1.7) è conseguenza del fatto che la connessione di Levi-Civita su S sia simmetrica. Utilizzando la partizione dell'unità e il fatto che (12.1.7) ha natura locale, possiamo ricondurre la dimostrazione al caso di coppie di campi di vettori che siano f -correlati a campi di vettori su S . \square

Definiamo

$$(12.1.8) \quad \mathbb{I}(X, Y) = \text{pr}_N(\nabla_X^f Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

PROPOSIZIONE XII.1.11. \mathbb{I} è un tensore simmetrico a valori nel fibrato normale NM .

DIMOSTRAZIONE. La tesi è conseguenza del Lemma XII.1.10:

$$\mathbb{I}(X, Y) = \text{pr}_v(\nabla_X^f Y) = \text{pr}_v(\nabla_Y^f X + [X, Y]) = \text{pr}_v(\nabla_Y^f X) = \mathbb{I}(Y, X),$$

perché $\text{pr}_v([X, Y]) = 0$, per ogni $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. \square

DEFINIZIONE XII.1.12. Il tensore $\mathbb{I} \in \text{Simm}^2(M, NM)$ si dice *la seconda forma fondamentale* dell'immersione pseudo-Riemanniana f .

Poiché f è un'isometria pseudo-Riemanniana, abbiamo

$$(12.1.9) \quad \nabla_X Y = \text{pr}_\tau(\nabla_X^f Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

e vale quindi la

PROPOSIZIONE XII.1.13 (formula di Gauss). Se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, allora

$$(12.1.10) \quad \nabla_X^f Y = \nabla_X Y + \mathbb{I}(X, Y). \quad \square$$

Utilizzando i tensori g ed h , possiamo ricavare da \mathbb{I} un nuovo tensore:

DEFINIZIONE XII.1.14. Sia $B \in \mathfrak{T}^{1,1}(M, N^*M)$ il tensore definito da

$$(12.1.11) \quad \begin{cases} \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(M, NM) \ni (X, V) \rightarrow B_X V \in \mathfrak{X}(M), \\ g(B_X V, Y) = -h(\mathbb{I}(X, Y), V), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M), \quad \forall V \in \Gamma(M, NM). \end{cases}$$

Esso serve ad esprimere la componente tangenziale della derivata covariante di un campo di vettori normali.

PROPOSIZIONE XII.1.15 (equazione di Weingarten). Se $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $V \in \Gamma(M, NM)$, allora

$$(12.1.12) \quad \nabla_X^f V = B_X V + \text{pr}_v(\nabla_X^f V).$$

DIMOSTRAZIONE. Siano $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $V \in \Gamma(M, NM)$. Abbiamo

$$g(\nabla_X^f V, Y) = h(\nabla_X^f V, Y) = X(h(V, Y)) - h(V, \nabla_X^f Y) = -h(V, \mathbb{I}(X, Y)).$$

Quindi $B_X V$ è la componente in TM di $\nabla_X^f V$ ed otteniamo la (12.1.12). \square

Siano $X_1, X_2, X_3 \in \mathfrak{X}(M)$. Abbiamo

$$\nabla_{X_1}^f \nabla_{X_2}^f X_3 = \nabla_{X_1}^f (\nabla_{X_2} X_3 + \mathbb{I}(X_2, X_3)) = \nabla_{X_1} \nabla_{X_2} X_3 + \mathbb{I}(X_1, \nabla_{X_2} X_3) + \nabla_{X_1}^f (\mathbb{I}(X_2, X_3)).$$

Calcoliamo la componente in TM di $\nabla_{X_1}^f (\mathbb{I}(X_2, X_3))$. Per ogni $X_4 \in \mathfrak{X}(M)$ otteniamo

$$\begin{aligned} h(\nabla_{X_1}^f (\mathbb{I}(X_2, X_3)), X_4) &= X_1 h(\mathbb{I}(X_2, X_3), X_4) - h(\mathbb{I}(X_2, X_3), \nabla_{X_1}^f X_4) \\ &= -h(\mathbb{I}(X_2, X_3), \mathbb{I}(X_1, X_4)). \end{aligned}$$

Risulta perciò

$$(12.1.13) \quad \left\{ \begin{aligned} R^f(X_1, X_2)X_3 &= \nabla_{X_1}^f \nabla_{X_2}^f X_3 - \nabla_{X_2}^f \nabla_{X_1}^f X_3 - \nabla_{[X_1, X_2]}^f X_3 \\ &= \nabla_{X_1} \nabla_{X_2} X_3 - \nabla_{X_2} \nabla_{X_1} X_3 - \nabla_{[X_1, X_2]} X_3 \\ &\quad + \mathbb{I}(X_1, \nabla_{X_2} X_3) - \mathbb{I}(X_2, \nabla_{X_1} X_3) - \mathbb{I}([X_1, X_2], X_3) \\ &\quad + \nabla_{X_1}^f (\mathbb{I}(X_2, X_3)) - \nabla_{X_2}^f (\mathbb{I}(X_1, X_3)). \end{aligned} \right.$$

Se $X_4 \in \mathfrak{X}(M)$ abbiamo allora

$$h(R^f(X_1, X_2)X_3, X_4) = g(R(X_1, X_2)X_3, X_4) - h(\mathbb{I}(X_2, X_3), \mathbb{I}(X_1, X_4)) \\ + h(\mathbb{I}(X_1, X_3), \mathbb{I}(X_2, X_4)).$$

Ricordiamo la notazione

$$R^f(X_1, X_2, X_3, X_4) = h(R^f(X_1, X_2)X_3, X_4), \quad R(X_3, X_2, X_3, X_4) = g(R(X_1, X_2)X_3, X_4).$$

Abbiamo ottenuto

PROPOSIZIONE XII.1.16 (Equazione di Gauss). *Se $X_1, X_2, X_3, X_4 \in \mathfrak{X}(M)$, allora*

$$(12.1.14) \quad \left\{ \begin{aligned} R^f(X_1, X_2, X_3, X_4) &= R(X_1, X_2, X_3, X_4) \\ &\quad + h(\mathbb{I}(X_1, X_3), \mathbb{I}(X_2, X_4)) - h(\mathbb{I}(X_1, X_4), \mathbb{I}(X_2, X_3)). \end{aligned} \right.$$

Per le formule per la derivazione covariante sui fibrati vettoriali sugli spazi affini del §VI.12 del Capitolo VI, abbiamo:

$$\nabla_{X_1}^f (\mathbb{I}(X_2, X_3)) = (\nabla_{X_1}^f \mathbb{I})(X_2, X_3) - \mathbb{I}(\nabla_{X_1} X_2, X_3) - \mathbb{I}(X_2, \nabla_{X_1} X_3).$$

Possiamo quindi riscrivere (12.1.13) nella forma

$$(12.1.15) \quad \left\{ \begin{aligned} R^f(X_1, X_2)X_3 &= R(X_1, X_2)X_3 + (\nabla_{X_1}^f \mathbb{I})(X_2, X_3) + \mathbb{I}(\nabla_{X_1} X_2, X_3) \\ &\quad - (\nabla_{X_2}^f \mathbb{I})(X_1, X_3) - \mathbb{I}(\nabla_{X_2} X_1, X_3) - \mathbb{I}([X_1, X_2], X_3) \\ &= R(X_1, X_2)X_3 + (\nabla_{X_1}^f \mathbb{I})(X_2, X_3) - (\nabla_{X_2}^f \mathbb{I})(X_1, X_3). \end{aligned} \right.$$

Da questa otteniamo

PROPOSIZIONE XII.1.17 (Equazione di Codazzi-Mainardi). *Se $X_1, X_2, X_3 \in \mathfrak{X}(M)$ ed $Y \in \Gamma(M, NM)$, allora*

$$(12.1.16) \quad R^f(X_1, X_2, X_2, Y) = h((\nabla_{X_1}^f \mathbb{I})(X_2, X_3), Y) - h((\nabla_{X_2}^f \mathbb{I})(X_1, X_3), Y).$$

Siano ora $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ ed $Y_1, Y_2 \in \Gamma(M, NM)$. Abbiamo

$$h(\nabla_{X_1}^v \nabla_{X_2}^v Y_1, Y_2) = h(\nabla_{X_1}^f (\nabla_{X_2}^f Y_1 - B_{X_2} Y_1), Y_2) \\ = h(\nabla_{X_1}^f \nabla_{X_2}^f Y_1, Y_2) - h(\mathbb{I}(X_1, B_{X_2} Y_1), Y_2) \\ = h(\nabla_{X_1}^f \nabla_{X_2}^f Y_1, Y_2) + h(B_{X_1} Y_2, B_{X_2} Y_1).$$

Da questa uguaglianza ricaviamo

PROPOSIZIONE XII.1.18 (Equazione di Ricci). *Se* $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$, $Y_1, Y_2 \in \Gamma(M, NM)$, allora

$$(12.1.17) \quad \begin{cases} h(R^v(X_1, X_2)Y_1, Y_2) = h(R^f(X_1, X_2)Y_1, Y_2) \\ \quad - h(B_{X_1}Y_1, B_{X_2}Y_2) + h(B_{X_1}Y_2, B_{X_2}Y_1). \end{cases}$$

XII.2. Proprietà algebriche del tensore di curvatura

Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita n .

DEFINIZIONE XII.2.1. Un *tensore algebrico di curvatura* è una forma bilineare simmetrica

$$(12.2.1) \quad R : \Lambda^2 V \times \Lambda^2 V \rightarrow \mathbb{R}$$

per cui valga l'*identità algebrica di Bianchi*:

$$(12.2.2) \quad R(v_1, v_2, v_3, v_4) + R(v_1, v_3, v_4, v_2) + R(v_1, v_4, v_2, v_3) = 0 \\ \forall v_1, v_2, v_3, v_4 \in V.$$

Abbiamo posto qui

$$(12.2.3) \quad R(v_1, v_2, v_3, v_4) = R(v_1 \wedge v_2, v_3 \wedge v_4) \quad \text{per } v_1, v_2, v_3, v_4 \in V.$$

In modo equivalente, possiamo dire che R è una forma quadri-lineare che soddisfa le proprietà :

$$\begin{aligned} (i) \quad & R(v_2, v_1, v_3, v_4) = -R(v_1, v_2, v_3, v_4) \\ (ii) \quad & R(v_1, v_2, v_4, v_3) = -R(v_1, v_2, v_3, v_4) \\ (iii) \quad & R(v_3, v_4, v_1, v_2) = R(v_1, v_2, v_3, v_4) \\ (iv) \quad & R(v_1, v_2, v_3, v_4) + R(v_1, v_3, v_4, v_2) + R(v_1, v_4, v_2, v_3) = 0 \\ & \forall v_1, v_2, v_3, v_4 \in V. \end{aligned}$$

Notiamo che (i) e (iii) implicano (ii) e che (iii) è una conseguenza di (i), (ii), (iv).

DEFINIZIONE XII.2.2. L'insieme $\mathfrak{R}(V)$ dei tensori di curvatura su V è un sottospazio vettoriale dello spazio $T^{[0,4]}V$ dei tensori 0-covarianti e 4-contovarianti su V .

Vale il

LEMMA XII.2.3. *Siano* $R, R' \in \mathfrak{R}(V)$. Allora

$$(12.2.4) \quad R(v_1, v_2, v_1, v_2) = R'(v_1, v_2, v_1, v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V \implies R = R'.$$

DIMOSTRAZIONE. Basta dimostrare il lemma nel caso sia $R' = 0$. Utilizziamo le formule di polarizzazione per forme bilineari simmetriche: fissato $v_0 \in V$, la forma bilineare simmetrica $V \times V \ni (u, v) \rightarrow R(u, v_0, v, v_0) \in \mathbb{R}$ è nulla in quanto è nulla la forma quadratica associata.

Quindi, per ogni coppia $v_1, v_3 \in V$ anche la forma bilineare simmetrica $V \times V \ni (u, v) \rightarrow R(v_1, u, v_3, v) + R(v_3, u, v_1, v) \in \mathbb{R}$ è nulla in quanto è nulla la forma quadratica ad essa associata.

Applicando le proprietà (iii) e (ii) otteniamo:

$$0 = R(v_1, v_2, v_3, v_4) + R(v_1, v_4, v_3, v_2) = R(v_1, v_2, v_3, v_4) - R(v_1, v_4, v_2, v_3).$$

Quindi, per ogni $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$ abbiamo:

$$R(v_1, v_2, v_3, v_4) = R(v_1, v_4, v_2, v_3) = R(v_1, v_3, v_4, v_2)$$

da cui:

$$3R(v_1, v_2, v_3, v_4) = R(v_1, v_2, v_3, v_4) + R(v_1, v_3, v_4, v_2) + R(v_1, v_4, v_2, v_3) = 0.$$

La dimostrazione è completa. \square

Fissiamo su V un prodotto scalare $(\cdot | \cdot)$. Esso determina univocamente un prodotto scalare su $\Lambda^2 V$ tale che, per ogni base ortonormale $\{e_1, \dots, e_n\}$ di V , la $\{e_i \wedge e_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ sia una base ortonormale in $\Lambda^2 V$. Per la norma associata risulta

$$(12.2.5) \quad |v_1 \wedge v_2|^2 = |v_1|^2 |v_2|^2 - (v_1 | v_2)^2, \quad \forall v_1, v_2 \in V.$$

OSSERVAZIONE XII.2.4. Il secondo membro della (12.2.5) è il quadrato dell'area del parallelogrammo di lati v_1, v_2 . Infatti, l'altezza relativa alla base v_1 è $\left| v_2 - \frac{(v_1 | v_2)}{|v_1|^2} v_1 \right|$ e quindi il quadrato dell'area è

$$|v_1|^2 \cdot \left| v_2 - \frac{(v_1 | v_2)}{|v_1|^2} v_1 \right|^2 = |v_1|^2 |v_2|^2 - (v_1 | v_2)^2.$$

Per il prodotto scalare vale la formula

$$(12.2.6) \quad (v_1 \wedge v_2 | v_3 \wedge v_4) = (v_1 | v_3)(v_2 | v_4) - (v_1 | v_4)(v_2 | v_3), \quad \forall v_1, v_2, v_3, v_4 \in V.$$

LEMMA XII.2.5. *Il prodotto scalare (12.2.6) è un tensore algebrico di curvatura.*

DIMOSTRAZIONE. Occorre verificare che il prodotto scalare (12.2.6) su $\Lambda^2 V$ verifichi l'identità di Bianchi. Abbiamo

$$(v_1 \wedge v_2 | v_3 \wedge v_4) = (v_1 | v_3)(v_2 | v_4) - (v_1 | v_4)(v_2 | v_3),$$

$$(v_1 \wedge v_3 | v_4 \wedge v_2) = (v_1 | v_4)(v_2 | v_3) - (v_1 | v_2)(v_3 | v_4),$$

$$(v_1 \wedge v_4 | v_2 \wedge v_3) = (v_1 | v_2)(v_3 | v_4) - (v_1 | v_3)(v_2 | v_4)$$

e sommando membro a membro otteniamo la (12.2.2). \square

Fissato un prodotto scalare su V , possiamo associare ad ogni tensore algebrico di curvatura R una funzione reale definita sui 2-piani α di V , ponendo

$$(12.2.7) \quad K^R(\alpha) = \frac{R(v_1, v_2, v_2, v_1)}{(v_1 | v_1)(v_2 | v_2) - (v_1 | v_2)^2} \quad \text{se } \langle v_1, v_2 \rangle = \alpha.$$

La (12.2.7) si semplifica nella

$$(12.2.8) \quad K^R(\alpha) = R(v_1, v_2, v_2, v_1) \quad \text{se } v_1, v_2 \text{ è una base ortonormale di } \alpha.$$

DEFINIZIONE XII.2.6. La $K^R(\alpha)$, definita dalla (12.2.7), si dice la *curvatura sezionale*.

Per il Lemma XII.2.3 la curvatura sezionale determina completamente il relativo tensore di curvatura.

La curvatura sezionale è costante ed uguale a -1 per il prodotto scalare di $\Lambda^2 V$. Per il Lemma XII.2.3 abbiamo

PROPOSIZIONE XII.2.7. *Una forma algebrica di curvatura che abbia curvatura sezionale costante è un multiplo del prodotto scalare su $\Lambda^2 V$.* \square

DEFINIZIONE XII.2.8. La *contrazione di Ricci* è l'applicazione $\mathbf{O}(V)$ -equivariante

$$(12.2.9) \quad \mathcal{R}ic : \mathfrak{R}(V) \ni R \longrightarrow S_R \in S^2(V), \quad \text{con } S_R(v, w) = \text{tr } R(v, \cdot, w, \cdot),$$

ove la traccia si calcola, a partire da una qualsiasi base ortonormale e_1, \dots, e_n di V mediante

$$\text{tr } R(v, \cdot, w, \cdot) = \sum_{i=1}^n R(v, e_i, w, e_i).$$

La forma S_R si dice il *tensore di Ricci* associato al tensore di curvatura R .

OSSERVAZIONE XII.2.9. Fissato un vettore $v \in V$, con $(v|v) = 1$, possiamo determinare vettori v_2, \dots, v_n che formino con $v_1 = v$ una base ortonormale. Detto α_i , per $i = 2, \dots, n$ il piano generato da v e v_i , abbiamo allora:

$$(12.2.10) \quad S_R(v, v) = \sum_{i=2}^n K(\alpha_i).$$

DEFINIZIONE XII.2.10. Chiamiamo *curvatura scalare* di $R \in \mathfrak{R}(V)$ la traccia del suo tensore di Ricci

$$(12.2.11) \quad s_R = \text{tr}(\mathcal{R}ic(R)) = \sum_{i,j=1}^n R(e_i, e_j, e_i, e_j),$$

ove e_1, \dots, e_n è una qualsiasi base ortonormale di V .

OSSERVAZIONE XII.2.11. La curvatura scalare è il doppio della traccia di R considerato come una forma bilineare simmetrica su $\Lambda^2 V$.

DEFINIZIONE XII.2.12 (Prodotto di Kulkarni-Nomizu). Il *prodotto di Kulkarni-Nomizu* $s_1 \otimes s_2$ di due forme bilineari simmetriche s_1, s_2 su V è il tensore 4-controvariante definito da

$$(12.2.12) \quad \begin{aligned} s_1 \otimes s_2(v_1, v_2, w_1, w_2) &= \sum_{h,k \in S_2} \varepsilon(h)\varepsilon(k) s_1(v_{h_1}, w_{k_1}) s_2(v_{h_2}, w_{k_2}) \\ &= s_1(v_1, w_1) s_2(v_2, w_2) + s_1(v_2, w_2) s_1(v_1, w_1) \\ &\quad - s_1(v_1, w_2) s_2(v_2, w_1) - s_1(v_2, w_1) s_2(v_1, w_2). \end{aligned}$$

LEMMA XII.2.13. *Il prodotto $s_1 \otimes s_2$ di due forme $s_1, s_2 \in S^2(V)$ è un tensore algebrico di curvatura.*

DIMOSTRAZIONE. Si verifica con calcolo diretto che $s_1 \otimes s_2$ soddisfa le (i), (ii), (iii), (iv) della Definizione XII.2.1. \square

OSSERVAZIONE XII.2.14. Se indichiamo con g il prodotto scalare di V , e con G il suo corrispondente su $\Lambda^2 V$, abbiamo

$$G = \frac{1}{2} g \otimes g.$$

LEMMA XII.2.15. Sia s una forma bilineare simmetrica su V . Allora

$$(12.2.13) \quad \mathcal{R}ic(s \otimes g) = (n-2)s + \text{tr}(s) \cdot g.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia e_1, \dots, e_n una base ortonormale di V . Allora :

$$\begin{aligned} S_{s \otimes g}(v_1, v_2) &= \sum_{i=1}^n (s \otimes g)(v_1, e_i, v_2, e_i) = \sum_{i=1}^n (s(v_1, v_2)g(e_i, e_i) + s(e_i, e_i)g(v_1, v_2) \\ &\quad - s(v_1, e_i)g(v_2, e_i) - s(v_2, e_i)g(v_1, e_i)) \\ &= n s(v_1, v_2) + \text{tr}(s)g(v_1, v_2) - s(v_1, v_2) - s(v_2, v_1) \\ &= (n-2)s(v_1, v_2) + \text{tr}(s)g(v_1, v_2). \end{aligned}$$

□

OSSERVAZIONE XII.2.16. In particolare,

$$(12.2.14) \quad \mathcal{R}ic(g \otimes g) = 2(n-1)g.$$

Se $R \in \mathfrak{R}(V)$ ed S_R il suo tensore di Ricci, abbiamo

$$\mathcal{R}ic(R - a S_R \otimes g + b g \otimes g) = (1 - a(n-2))S_R + (2b(n-1) - a S_R)g.$$

Se $n \geq 3$, possiamo porre $a = (n-2)^{-1}$ e $b = S_R \frac{1}{2(n-1)(n-2)}$. Otteniamo così un tensore di curvatura

$$(12.2.15) \quad W_R = R - \frac{1}{n-2}S_R \otimes g + \frac{1}{2(n-1)(n-2)}S_R \cdot g \otimes g \in \ker \mathcal{R}ic.$$

DEFINIZIONE XII.2.17. Si chiamano *tensori di Weyl* i tensori di curvatura W che hanno contrazione di Ricci nulla. Il tensore W_R di (12.2.15) si dice la *parte di Weyl* di R .

La differenza $z_R = S_R - \frac{1}{n}S_R \cdot g$ si dice il *tensore di Ricci a traccia nulla* di R .

Abbiamo

$$(12.2.16) \quad R = \frac{-1}{2(n-1)(n-2)}S_R \cdot g \otimes g + \frac{1}{n-2}S_R \otimes g + W_R$$

$$(12.2.17) \quad R = \frac{1}{2n(n-1)}S_R \cdot g \otimes g + \frac{1}{n-2}z_R \otimes g + W_R$$

La (12.2.17) è la *decomposizione irriducibile del tensore algebrico di curvatura*.

TEOREMA XII.2.18 (decomposizione algebrica del tensore di curvatura). Sia R un tensore algebrico di curvatura sullo spazio vettoriale reale V , di dimensione $n > 2$. Sono allora univocamente determinati: un numero reale s (curvatura scalare), una forma bilineare simmetrica S_R (curvatura di Ricci), una forma bilineare simmetrica con traccia nulla z_R , e una forma di curvatura W (la curvatura di Weyl) con $S_W = 0$ tali che valgano le decomposizioni (12.2.16), (12.2.17).

Se $n = 2$, abbiamo $R = \frac{1}{2} \cdot s \cdot g \otimes g$. Se $n = 3$, allora $W = 0$.

XII.3. La curvatura sezionale

Sia (M, g) una varietà Riemanniana di dimensione $n \geq 2$. Definiamo il *tensore di curvatura* su M mediante :

$$(12.3.1) \quad \begin{aligned} R(X_1, X_2, X_3, X_4) &= g(R(X_3, X_4)X_1, X_2), \\ \forall X_1, X_2, X_3, X_4 &\in \mathfrak{X}(M). \end{aligned}$$

PROPOSIZIONE XII.3.1. *Il tensore di curvatura definisce in ogni punto di M un tensore algebrico di curvatura.*

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo facilmente

$$R(X_1, X_2, X_4, X_4) = -R(X_1, X_2, X_3, X_4).$$

Osserviamo poi che, essendo nulla la torsione della connessione di Levi-Civita :

$$\begin{aligned} & R(X_1, X_2)X_3 + R(X_2, X_3)X_1 + R(X_3, X_1)X_2 \\ &= \nabla_{X_1}\nabla_{X_2}X_3 - \nabla_{X_2}\nabla_{X_1}X_3 - \nabla_{[X_1, X_2]}X_3 \\ &+ \nabla_{X_2}\nabla_{X_3}X_1 - \nabla_{X_3}\nabla_{X_2}X_1 - \nabla_{[X_2, X_3]}X_1 \\ &+ \nabla_{X_3}\nabla_{X_1}X_2 - \nabla_{X_1}\nabla_{X_3}X_2 - \nabla_{[X_3, X_1]}X_2 \\ &= \nabla_{X_1}[X_2, X_3] + \nabla_{X_2}[X_3, X_1] + \nabla_{X_3}[X_1, X_2] \\ &- \nabla_{[X_1, X_2]}X_3 - \nabla_{[X_2, X_3]}X_1 - \nabla_{[X_3, X_1]}X_2 \\ &= [X_1, [X_2, X_3]] + [X_2, [X_3, X_1]] + [X_3, [X_1, X_2]] = 0 \end{aligned}$$

Da questa ricaviamo l'identità di Bianchi :

$$\begin{aligned} & R(X_1, X_2, X_3, X_4) + R(X_1, X_4, X_2, X_3) + R(X_1, X_3, X_4, X_2) = 0 \\ & \forall X_1, X_2, X_3, X_4 \in \mathfrak{X}(M). \end{aligned}$$

Dimostriamo ora che $R(X_2, X_1, X_3, X_4) = -R(X_1, X_2, X_3, X_4)$. A questo scopo è sufficiente verificare che $R(X_1, X_1, X_3, X_4) = 0$ per ogni $X_1, X_3, X_4 \in \mathfrak{X}(M)$. Abbiamo :

$$\begin{aligned} R(X_1, X_1, X_3, X_4) &= g(R(X_3, X_4)X_1, X_1) \\ &= g((\nabla_{X_3}\nabla_{X_4} - \nabla_{X_4}\nabla_{X_3} - \nabla_{[X_3, X_4]})X_1, X_1) \\ &= X_3g(\nabla_{X_4}X_1, X_1) - g(\nabla_{X_4}X_1, \nabla_{X_3}X_1) \\ &- X_4g(\nabla_{X_3}X_1, X_1) + g(\nabla_{X_3}X_1, \nabla_{X_4}X_1) \\ &- \frac{1}{2}[X_3, X_4]g(X_1, X_1) \\ &= \frac{1}{2}X_3X_4g(X_1, X_1) - \frac{1}{2}X_4X_3g(X_1, X_1) \\ &- \frac{1}{2}[X_3, X_4]g(X_1, X_1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

In questo modo abbiamo verificato le proprietà (i), (ii) e (iv) di un tensore algebrico di curvatura e segue quindi che vale anche la proprietà (iii), cioè che

$$R(X_1, X_2, X_3, X_4) = R(X_3, X_4, X_1, X_2) \quad \text{per ogni } X_1, X_2, X_3, X_4 \in \mathfrak{X}(M).$$

In particolare è anche $R(X_1, X_2, X_3, X_4) = g(R(X_1, X_2)X_3, X_4)$. \square

Sia $p \in M$. Per ogni piano $\alpha \subset T_pM$, definiamo la *curvatura sezionale* di M rispetto al piano α come la quantità $K(\alpha)$ relativa al tensore algebrico di curvatura

R_p :

$$(12.3.2) \quad K(\alpha) = \frac{-R(v_1, v_2, v_1, v_2)}{\|v_1 \wedge v_2\|^2} = \frac{-R(v_1, v_2, v_1, v_2)}{g(v_1, v_1)g(v_2, v_2) - |g(v_1, v_2)|^2} \quad \text{se } \alpha = \langle v_1, v_2 \rangle.$$

Fissato il punto p , l'esponenziale \exp_p definisce un diffeomorfismo di un intorno convesso $N_0(p)$ di 0 in p su un intorno normale U_p di p in M . Inoltre, per un $r_0 > 0$, l'esponenziale trasforma, per ogni $0 < r \leq r_0$, la palla $B_p(0, r)$ di centro 0 e raggio r di $T_p M$ rispetto alla metrica definita dal prodotto scalare g_p nella palla $B_p(r)$ della distanza definita dalla metrica Riemanniana su M . Consideriamo un 2-piano $\alpha \subset T_p M$. L'immagine $\exp_p(\alpha \cap N_0(p))$ è una sottovarietà V_α di U_p di dimensione reale 2, su cui la restrizione di g definisce una metrica Riemanniana. Utilizzando tale metrica possiamo calcolare l'area $A(r)$ di $V_\alpha \cap B_p(r)$ per $0 < r \leq r_0$. Avremo $A(r) = \pi r^2 + o(r^2)$ per $r \searrow 0$. La curvatura sezionale misura il modo in cui $A(r)$ approssima l'area del disco piano dello stesso raggio :

$$(12.3.3) \quad K(\alpha) = 12 \cdot \lim_{r \searrow 0} \frac{\pi r^2 - A(r)}{\pi r^4}.$$

Operatori differenziali sulle varietà Riemanniane

XIII.1. Elemento di volume ed operatore di Hodge

Sia M una varietà differenziabile di dimensione m . Ad una forma $\omega \in \Omega^m(M)$ possiamo associare una funzione

$$(13.1.1) \quad L(M) \ni \sigma \longrightarrow \omega(\sigma_1, \dots, \sigma_m) \in \mathbb{R},$$

ove $\sigma_i = \sigma(e_i) \in T_{\pi(\sigma)}M$, per la base canonica e_1, \dots, e_m di \mathbb{R}^m . La (13.1.1) definisce una sezione del fibrato in rette che corrisponde alla rappresentazione determinante $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R}) \ni a \rightarrow \det a \in \mathbb{R}_*$, e stabilisce un isomorfismo di $\Omega^m(M)$ con $\Omega_{\det}^0(L(M))$.

Una *densità positiva* su M è localmente il valore assoluto di una m -forma. Possiamo definirla in modo invariante come una funzione μ , definita sullo spazio $L(M)$ dei sistemi di riferimento di M .

DEFINIZIONE XIII.1.1. Una *densità* di classe \mathcal{C}^∞ su M è una funzione $\mu \in \mathcal{C}^\infty(L(M))$ che soddisfa

$$(13.1.2) \quad \mu(\sigma a) = |\det a| \cdot \mu(\sigma), \quad \forall \sigma \in L(M), \forall a \in \mathbf{GL}_m(\mathbb{R}).$$

Ad una densità μ di classe \mathcal{C}^∞ su M possiamo associare una misura regolare. Se (U, x) è una carta locale in M ed f una funzione continua con supporto compatto in U definiamo

$$\int f d\mu = \int f(x) \mu(\partial/\partial x) d\lambda(x),$$

dove $\partial/\partial x$ è la sezione $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m})$ di $L(M)$ su U e $d\lambda$ la misura di Lebesgue su \mathbb{R}^m . La definizione si estende, mediante partizione dell'unità, a tutte le funzioni continue a supporto compatto su M .

Sia (M, g) una varietà pseudo-Riemanniana.

DEFINIZIONE XIII.1.2. L'*elemento di volume* di (M, g) è la *densità* μ_g definita da

$$(13.1.3) \quad \mu_g(\sigma) = \sqrt{|\det g(\sigma_i, \sigma_j)|}, \quad \forall \sigma \in L(M).$$

DEFINIZIONE XIII.1.3. Se M è orientata, definiamo *forma di volume* di (M, g) l'unico elemento $\omega_g \in \Omega^m(M)$ che definisce l'orientazione di M e soddisfa

$$(13.1.4) \quad \mu_g(\sigma) = |\omega_g(\sigma_1, \dots, \sigma_m)|, \quad \forall \sigma \in L(M).$$

Ricordiamo che abbiamo esteso la pseudo-metrica ai fibrati tensoriali di M , in particolare alle forme differenziali esterne. Sulle forme di grado zero si tratta semplicemente del prodotto di numeri reali. Le m -forme alternate formano uno

spazio vettoriale di dimensione uno. Ogni varietà è localmente orientabile e quindi possiamo definire, almeno localmente, la forma di volume ω_g . Abbiamo

$$(13.1.5) \quad g(\omega_g, \omega_g) = (-1)^q$$

se q è il numero di valori propri negativi di g . Poiché la derivata covariante di una forma alternata è ancora una forma alternata, deduciamo da questa identità che

$$(13.1.6) \quad \nabla \omega_g = 0.$$

Supporremo nel seguito che (M, g) sia una varietà pseudo-Riemanniana orientata.

DEFINIZIONE XIII.1.4. Per ogni $0 \leq k \leq m$ definiamo l'operatore di Hodge

$$(13.1.7) \quad * : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{m-k}(M)$$

come l'unico operatore lineare tale che

$$(13.1.8) \quad \alpha \wedge (*\beta) = g(\alpha, \beta) \omega_g, \quad \forall \alpha, \beta \in \Omega^k(M).$$

PROPOSIZIONE XIII.1.5. L'operatore di Hodge è caratterizzato da

$$(13.1.9) \quad \int_M g(\alpha, \beta) \omega_g = \int_M (*\alpha) \wedge \beta, \quad \forall \alpha, \beta \in \Omega^k(M) \text{ con } \text{supp } \alpha \cap \text{supp } \beta \text{ compatto.}$$

PROPOSIZIONE XIII.1.6. L'operatore di Hodge gode delle seguenti proprietà¹

$$(1) \quad *1 = \omega_g, \quad *\omega_g = (-1)^q;$$

$$(2) \quad \text{se } \alpha \in \Omega^k(M), \beta \in \Omega^{m-k}(M), \text{ allora}$$

$$(13.1.10) \quad g(\alpha, *\beta) = (-1)^{k(m-k)} g(*\alpha, \beta);$$

$$(3) \quad \text{se } \alpha \in \Omega^k(M), \text{ allora}$$

$$(13.1.11) \quad **\alpha = (-1)^{k(n-k)+q} \alpha.$$

XIII.2. Codifferenziale, operatore di Laplace-Beltrami, divergenza

Sia (M, g) una varietà pseudo-Riemanniana.

XIII.2.1. Isomorfismi di dualità. Poiché la g è non degenere, vale il

LEMMA XIII.2.1. Per ogni forma differenziale $\xi \in \Omega^1(M)$ esiste un unico campo di vettori ξ^\sharp tale che

$$(13.2.1) \quad g(\xi^\sharp, X) = \xi(X), \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M). \quad \square$$

L'applicazione

$$(13.2.2) \quad \sharp : \Omega^1(M) \ni \xi \rightarrow \xi^\sharp \in \mathfrak{X}(M)$$

DEFINIZIONE XIII.2.2. L'isomorfismo (13.2.2) è l'isomorfismo di dualità di (M, g) . Indichiamo con

$$(13.2.3) \quad \flat : \mathfrak{X}(M) \ni X \rightarrow X^\flat \in \Omega(M)$$

l'isomorfismo inverso.

¹Ricordiamo che q è il numero di valori propri negativi di g .

Poiché la metrica sul fibrato cotangente è definita in modo tale che \sharp e \flat siano isometrie, vale la

$$(13.2.4) \quad g(\xi^\sharp, X) = g(\xi, X^\flat) = \xi(X), \quad \forall \xi \in \Omega^1(M), \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

LEMMA XIII.2.3. *La derivazione covariante commuta con gl'isomorfismi di dualità.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $\xi \in \Omega^1(M)$, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Abbiamo

$$\begin{aligned} g(\nabla_X(\xi^\sharp), Y) &= Xg(\xi^\sharp, Y) - g(\xi^\sharp, \nabla_X Y) = X(\xi(Y)) - \xi(\nabla_X Y) = (\nabla_X \xi)(Y) \\ &= g((\nabla_X \xi)^\sharp, Y). \end{aligned}$$

Questo dimostra che $\nabla_X(\xi^\sharp) = (\nabla_X \xi)^\sharp = \nabla_X \xi^\sharp$. Si verifica in modo analogo che $\nabla_X(Y^\flat) = (\nabla_X Y)^\flat = \nabla_X Y^\flat$. \square

Gli elementi di $\mathfrak{T}^{k,q}$ sono localmente somme finite di termini della forma

$$\tau = X_1 \otimes \cdots \otimes X_q \otimes \xi^1 \otimes \cdots \otimes \xi^k \quad \text{con } X_1, \dots, X_q \in \mathfrak{X}(M), \xi^1, \dots, \xi^k \in \Omega^1(M).$$

Possiamo estendere la definizione degli isomorfismi di dualità descrivendo applicazioni $\sharp : \mathfrak{T}^{k,q}(M) \rightarrow \mathfrak{T}^{k-1,q+1}(M)$ per $k \geq 1$ e $\flat : \mathfrak{T}^{k,q}(M) \rightarrow \mathfrak{T}^{k+1,q-1}(M)$ per $q \geq 1$ con

$$\begin{aligned} \tau^\sharp &= X_1 \otimes \cdots \otimes X_{q-1} \otimes X_q \otimes \xi^1 \otimes \xi^2 \otimes \cdots \otimes \xi^k & (k \geq 1), \\ \tau^\flat &= X_1 \otimes \cdots \otimes X_{q-1} \otimes X_q^\flat \otimes \xi^1 \otimes \xi^2 \otimes \cdots \otimes \xi^k & (q \geq 1). \end{aligned}$$

Poiché la derivazione covariante è una derivazione dell'algebra tensoriale, anche gli isomorfismi \sharp e \flat definiti sui campi tensoriali commutano con la derivazione covariante.

XIII.2.2. Gradiente, Hessiano, Operatore di Laplace-Beltrami.

DEFINIZIONE XIII.2.4. Il *gradiente* di una funzione $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ è il campo di vettori

$$(13.2.5) \quad \nabla f = df^\sharp.$$

La (13.2.5) è equivalente a

$$(13.2.6) \quad g(\nabla f, X) = Xf, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

Se $\sigma = (X_1, \dots, X_m)$ è un sistema di riferimento su un aperto U di M , posto $g_{i,j} = g(X_i, X_j)$, ed indicando con $(g^{i,j})$ la matrice inversa della $(g_{i,j})$, abbiamo

$$(13.2.7) \quad \nabla f = \sum_{i,j} g^{i,j} (X_i f) X_j.$$

In particolare, se (M, g) è Riemanniana e $\sigma = (X_1, \dots, X_m)$ un riferimento ortonormale su un aperto U di M , è

$$(13.2.8) \quad \nabla f = \sum_{i=1}^m (X_i f) X_i \quad \text{su } U, \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

DEFINIZIONE XIII.2.5. L'*Hessiano* di $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ è la derivata covariante di df

$$(13.2.9) \quad \nabla^2 f = \nabla df, \quad \text{cioè} \quad \nabla^2 f(X, Y) = XYf - (\nabla_X Y)f, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Osserviamo che

$$\nabla^2 f(Y, X) = (YX - \nabla_Y X)f = (XY - [X, Y] - \nabla_Y X)f = (XY - \nabla_X Y)f,$$

perché la connessione di Levi-Civita è simmetrica. Quindi l'Hessiano è un tensore simmetrico.

DEFINIZIONE XIII.2.6. L'operatore di Laplace-Beltrami sulle funzioni è l'opposto della traccia rispetto a g dell'Hessiano:

$$(13.2.10) \quad \Delta f = -\text{tr}_g(\nabla^2 f).$$

Se $\sigma = (X_1, \dots, X_m)$ è un sistema di riferimento su un aperto U di M , posto $g_{i,j} = g(X_i, X_j)$, ed indicando con $(g^{i,j})$ la matrice inversa della $(g_{i,j})$, abbiamo

$$(13.2.11) \quad \nabla^2 f(X_i, X_j) = (X_i X_j - \Gamma_{i,j}^h X_h)f,$$

$$(13.2.12) \quad \Delta f = -\left(\sum_{i,j} g^{i,j}(X_i X_j - \sum_h \Gamma_{i,j}^h X_h)\right)f.$$

Osserviamo che Δ è ellittico se e soltanto se la g è una metrica Riemanniana, cioè se g è definita positiva. In questo caso, se scegliamo un riferimento ortonormale $\sigma = (X_1, \dots, X_m)$ su un aperto U di M , abbiamo in U

$$(13.2.13) \quad \Delta f = -\text{tr}_g(\nabla df) = -\left(\sum_{i=1}^m X_i^2 - \nabla_{X_i} X_i\right)f \quad \text{in } U.$$

XIII.2.3. Divergenza di un campo di vettori. Supporremo in tutto questo sottoparagrafo che (M, g) sia una varietà Riemanniana orientata, con forma di volume $\omega_g \in \mathcal{Q}^m(M)$.

DEFINIZIONE XIII.2.7. La *divergenza*² in $p \in M$ di un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$ è la traccia dell'applicazione lineare $T_p M \ni Y_p \rightarrow \nabla_{Y_p} X \in T_p M$:

$$(13.2.14) \quad \text{div } X = \text{tr}(Y \rightarrow \nabla_Y X).$$

LEMMA XIII.2.8. Supponiamo che (X, g) sia Riemanniana. Se $\sigma = (Y_1, \dots, Y_m)$ è un sistema di riferimento ortonormale su un aperto U di M , allora

$$(13.2.15) \quad \text{div } X = \sum_{i=1}^m g(\nabla_{Y_i} X, Y_i) \quad \text{su } U, \forall X \in \mathfrak{X}(U).$$

Cioè, se $X = \sum_{i=1}^m f^i Y_i$, con $f^i \in \mathcal{C}^\infty(U)$, allora

$$(13.2.16) \quad \text{div } X = \sum_{i=1}^m Y_i f^i + \sum_{i,j=1}^m \Gamma_{i,j}^i f^j \quad \text{in } U,$$

dove i simboli di Christoffel $\Gamma_{j,h}^i$ sono definiti da $\nabla_{Y_j} Y_h = \sum_{i=1}^m \Gamma_{j,h}^i Y_i$.

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo

$$\nabla_{Y_i} X = \sum_{h=1}^m (Y_i f^h + \sum_{j=1}^m \Gamma_{i,j}^h f^j) Y_h$$

e quindi otteniamo la (13.2.16), che è equivalente alla (13.2.15). \square

²Per definire la divergenza di un campo di vettori è sufficiente avere assegnato su M una connessione affine.

PROPOSIZIONE XIII.2.9. *Supponiamo che (M, g) sia Riemanniana orientata, con forma di volume ω_g . Allora (indichiamo con L_X la derivata di Lie)*

$$(13.2.17) \quad L_X \omega_g = (\operatorname{div} X) \cdot \omega_g, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $\sigma = (Y_1, \dots, Y_m)$ un riferimento ortonormale locale, orientato positivamente. Allora

$$0 = X \cdot 1 = X \omega_g(Y_1, \dots, Y_m) = (L_X \omega_g)(Y_1, \dots, Y_m) + \sum_i \omega_g(\dots, [X, Y_i], \dots).$$

Posto $X = \sum_{i=1}^m f^i Y_i$, con f^i funzioni \mathcal{C}^∞ , abbiamo

$$\begin{aligned} [X, Y_i] &= \sum_{j=1}^m f^j [Y_j, Y_i] - \sum_{j=1}^m (Y_i f^j) Y_j \\ &= \sum_{j=1}^m f^j (\nabla_{Y_j} Y_i - \nabla_{Y_i} Y_j) - \sum_{j=1}^m (Y_i f^j) Y_j \\ &= \sum_{j,h=1}^m f^j (\Gamma_{j,i}^h - \Gamma_{i,j}^h) Y_h - \sum_{h=1}^m (Y_i f^h) Y_h. \end{aligned}$$

Otteniamo quindi

$$\begin{aligned} &\omega_g(Y_1, \dots, [X, Y_i], \dots, Y_m) \\ &= g\left(Y_1, \dots, \left(\sum_{j,h=1}^m f^j (\Gamma_{j,i}^h - \Gamma_{i,j}^h) Y_h - \sum_{h=1}^m (Y_i f^h) Y_h\right), \dots, Y_m\right) \\ &= g\left(Y_1, \dots, \left(\sum_{j=1}^m f^j (\Gamma_{j,i}^i - \Gamma_{i,j}^i) - (Y_i f^i)\right) Y_i, \dots, Y_m\right) \\ &= -g\left(Y_1, \dots, \left(Y_i f^i + \sum_{j=1}^m f^j \Gamma_{i,j}^i\right) Y_i, \dots, Y_m\right) \\ &= -\left(Y_i f^i + \sum_{j=1}^m f^j \Gamma_{i,j}^i\right) \end{aligned}$$

La (13.2.17) segue allora dalla (13.2.16). \square

Osserviamo che, per ogni intero non negativo k , vale la

$$(13.2.18) \quad L_X \alpha = X \lrcorner d\alpha + d(X \lrcorner \alpha), \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M), \quad \forall \alpha \in \mathcal{Q}^k(M).$$

Se $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$, ed $\alpha = f \omega_g$ con $\operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} X$ compatto in M , otteniamo

$$\int_M L_X(f \omega_g) = \int_M d(f X \lrcorner \omega_g) = 0$$

e quindi

$$\int_M g(\nabla f, X) \omega_g = \int_M X f \omega_g = \int_M L_X(f \omega_g) - \int_M f L_X \omega_g = - \int_M f \operatorname{div} X \omega_g.$$

Abbiamo dimostrato cioè che l'opposto della divergenza sui campi di vettori è l'aggiunto formale del gradiente delle funzioni:

PROPOSIZIONE XIII.2.10. *Se (M, g) è una varietà Riemanniana orientabile, allora*

$$(13.2.19) \quad \int_M g(\nabla f, X) \omega_g = - \int_M f \operatorname{div} X \omega_g, \\ \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M), \forall X \in \mathfrak{X}(M), \text{ con } \operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} X \Subset M. \quad \square$$

Da questa ricaviamo

PROPOSIZIONE XIII.2.11 (Formula d'integrazione per parti). *Se $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\text{supp } f \cap \text{supp } g \cap \text{supp } X \Subset M$, allora*

$$(13.2.20) \quad \int_M f(Xg) \omega_g = - \int_M g(Xf + f \text{div } X) \omega_g.$$

DEFINIZIONE XIII.2.12. L'operatore differenziale lineare del prim'ordine

$$(13.2.21) \quad X^* f = -Xf - f \text{div } X$$

si dice l'*aggiunto formale* del campo di vettori X .

XIII.3. Co-differenziazione covariante di forme differenziali

XIII.3.1. Forme differenziali. Indichiamo con $\mathcal{F}^k(M)$ lo spazio delle forme differenziali di grado k su M . I suoi elementi sono le applicazioni $\mathcal{C}^\infty(M)$ -multilineari

$$(13.3.1) \quad \alpha : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{k \text{ volte}} \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M).$$

Le $\alpha \in \mathcal{F}^k(M)$ sono cioè le applicazioni (13.3.1) caratterizzate da:

$$\begin{cases} \alpha(X_1, \dots, X_i + Y_i, \dots, X_k) = \alpha(X_1, \dots, X_i, \dots, X_k) + \alpha(X_1, \dots, Y_i, \dots, X_k), \\ \alpha(f_1 X_1, \dots, f_k X_k) = f_1 \cdots f_k \alpha(X_1, \dots, X_k), \\ \forall X_1, \dots, X_k, Y_1, \dots, Y_k \in \mathfrak{X}(M), \forall i = 1, \dots, k, \forall f_1, \dots, f_k \in \mathcal{C}^\infty(M), \end{cases}$$

Porremo

$$\mathcal{F}(M) = \bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{F}^k(M).$$

Osserviamo che $\mathcal{F}(M)$ è un'algebra associativa graduata per il prodotto tensoriale di forme, definito sugli elementi omogenei da

$$\begin{aligned} (\alpha \otimes \beta)(X_1, \dots, X_{h+k}) &= \alpha(X_1, \dots, X_h) \beta(X_{h+1}, \dots, X_{h+k}) \\ \forall \alpha \in \mathcal{F}^h(M), \forall \beta \in \mathcal{F}^k(M), \forall X_1, \dots, X_{h+k} \in \mathfrak{X}(M). \end{aligned}$$

XIII.3.2. Differenziazione covariante. Ricordiamo che, se ∇ è la differenziazione covariante di una connessione affine su M , allora

$$\nabla \alpha(X_0, X_1, \dots, X_k) = (\nabla_{X_0} \alpha)(X_1, \dots, X_k), \quad \forall \alpha \in \mathcal{F}^k(M), \quad \forall X_0, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M),$$

e quindi

$$\nabla : \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M), \quad \text{con } \nabla : \mathcal{F}^k(M) \rightarrow \mathcal{F}^{k+1}(M), \quad \forall k \geq 0.$$

PROPOSIZIONE XIII.3.1. *La derivazione covariante definisce una derivazione di grado 1 dell'algebra associativa graduata $\mathcal{F}(M)$.*

XIII.3.3. Forme differenziali a valori in un fibrato vettoriale.

Se $\eta = (E \xrightarrow{\pi} M)$ è un fibrato vettoriale, denoteremo con $\mathcal{F}^k(M, E)$ lo spazio delle forme differenziali, omogenee di grado k , a coefficienti in E :

$$\mathcal{F}^k(M, E) = \left\{ \alpha : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{k \text{ volte}} \longrightarrow \Gamma(M, E), \text{ } \mathcal{C}^\infty(M)\text{-multilineari} \right\}$$

Porremo, ancora,

$$\mathcal{F}(M, E) = \bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{F}^k(M, E).$$

Osserviamo che $\mathcal{F}(M, E)$ è, in modo naturale, un $\mathcal{F}(M)$ -modulo per il prodotto tensoriale di forme.

XIII.3.4. Contrazione. Se $\alpha \in \mathcal{F}^k(M, TM)$, con $k \geq 1$, per ogni $X_2, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$ fissati, la

$$\mathfrak{X}(M) \ni X \longrightarrow \alpha(X, X_2, \dots, X_k) \in \mathfrak{X}(M)$$

definisce una sezione del fibrato $TM \otimes_M T^*M \rightarrow M$ degli endomorfismi lineari delle fibre di TM . Abbiamo quindi un isomorfismo naturale

$$\mathcal{F}^k(M, TM) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}^{k-1}(M, \text{End}(TM))$$

DEFINIZIONE XIII.3.2. Sia $k \geq 1$. Indicheremo con

$$(13.3.2) \quad \text{tr}_1 : \mathcal{F}^k(M, TM) \longrightarrow \mathcal{F}^{k-1}(M)$$

l'operatore di contrazione, che associa ad $\alpha \in \mathcal{F}^k(M, TM)$ l'elemento

$$\text{tr}_1 \alpha(X_2, \dots, X_k) = \text{tr}(X \rightarrow \alpha(X, X_2, \dots, X_k)), \quad \forall X_2, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M).$$

XIII.3.5. Il co-differenziale covariante. Fissiamo su M una metrica pseudo-Riemanniana g .

DEFINIZIONE XIII.3.3. Se $k \geq 1$ definiamo un'applicazione

$$(13.3.3) \quad \sharp : \mathcal{F}^k(M) \ni \alpha \longrightarrow \alpha^\sharp \in \mathcal{F}^{k-1}(M, TM)$$

mediante

$$(13.3.4) \quad g(X_1, \alpha^\sharp(X_2, \dots, X_k)) = \alpha(X_1, \dots, X_k), \quad \forall X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M).$$

Osserviamo che questa definizione coincide con la Definizione XIII.2.2 su $\mathcal{Q}^1(M) = \mathcal{S}^1(M) = \mathcal{F}^1(M)$.

Se Y_1, \dots, Y_m è un riferimento ortonormale su un aperto U di M , ed $\alpha \in \mathcal{F}^k(M, TM)$, allora

$$\text{tr}_1 \alpha(X_2, \dots, X_k) = \sum_{i=1}^m g(Y_i, \alpha(Y_i, X_2, \dots, X_k)).$$

DEFINIZIONE XIII.3.4. Sia $k \geq 1$. Chiamiamo *co-differenziale* della forma $\alpha \in \mathcal{F}^k(M)$ la forma $\nabla^* \alpha \in \mathcal{F}^{k-1}(M)$ definita da

$$(13.3.5) \quad \nabla^* \alpha = -\text{tr}_1(\nabla \alpha)^\sharp.$$

Poniamo $\nabla^* \mathcal{F}^0(M) = 0$. La divergenza definisce allora un operatore differenziale

$$(13.3.6) \quad \nabla^* : \mathcal{F}(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M),$$

di ordine uno, omogeneo di grado -1 .

PROPOSIZIONE XIII.3.5. *Se (M, g) è orientabile, la differenziazione covariante e la co-differenziazione covariante sulle forme differenziali sono l'una l'aggiunta formale dell'altra.*

Se Y_1, \dots, Y_m è un sistema di riferimento ortonormale sull'aperto U di M , abbiamo

$$\begin{aligned} (\nabla^* \alpha)(X_1, \dots, X_{k-1}) &= - \sum_{i=1}^m (\nabla_{Y_i} \alpha)(Y_i, X_1, \dots, X_{k-1}), \text{ su } U, \\ \forall \alpha \in \mathcal{F}^k(M), \forall X_1, \dots, X_{k-1} \in \mathfrak{X}(M). \end{aligned}$$

XIII.4. Divergenza di tensori simmetrici

XIII.4.1. Forme differenziali simmetriche. Indichiamo con $\mathcal{S}^k(M)$ lo spazio delle forme simmetriche di grado k su M . Un elemento $\alpha \in \mathcal{S}^k(M)$ è una forma di $\mathcal{F}^k(M)$ che soddisfa

$$\alpha(X_1, X_2, \dots, X_k) = \alpha(X_{a_1}, X_{a_2}, \dots, X_{a_k}), \quad \forall a \in \mathbf{S}_k,$$

ove abbiamo indicato con \mathbf{S}_k il gruppo delle permutazioni di $\{1, \dots, k\}$.

Denotiamo con

$$(13.4.1) \quad \mathcal{S}(M) = \bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{S}^k(M)$$

lo spazio di tutte le forme simmetriche. Ricordiamo che $\mathcal{S}(M)$ è un'algebra associativa graduata con il prodotto, definito sugli elementi omogenei mediante

$$\begin{aligned} \alpha \vee \beta(X_1, \dots, X_{h+k}) &= \sum_{\substack{a \in \mathbf{S}_{h+k} \\ 1 \leq a_1 < \dots < a_h \leq h+k \\ 1 \leq a_{h+1} < \dots < a_{h+k} \leq h+k}} \alpha(X_{a_1}, \dots, X_{a_h}) \beta(X_{a_{h+1}}, \dots, X_{a_{h+k}}), \\ \forall \alpha \in \mathcal{S}^h(M), \forall \beta \in \mathcal{S}^k(M), \quad \forall X_1, \dots, X_{h+k} \in \mathfrak{X}(M), \end{aligned}$$

se $\alpha \in \mathcal{S}^h(M)$, $\beta \in \mathcal{S}^k(M)$.

DEFINIZIONE XIII.4.1. Indichiamo con *sim* la proiezione

$$(13.4.2) \quad \begin{aligned} \text{sim} : \mathcal{F}^k(M) \ni \alpha &\longrightarrow \text{sim}(\alpha) \in \mathcal{S}^k(M), \text{ definita da} \\ \text{sim}(\alpha)(X_1, \dots, X_k) &= \frac{1}{k!} \sum_{a \in \mathbf{S}_k} \alpha(X_{a_1}, \dots, X_{a_k}). \end{aligned}$$

Si verifica facilmente:

LEMMA XIII.4.2. *Estesa per linearità, l'applicazione $\text{sim} : \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathcal{S}(M)$ è un epimorfismo di algebre associative graduate. Il suo nucleo è l'ideale bilatero di $(\mathcal{F}(M), \otimes)$ generato dagli elementi della forma $\alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha$, al variare di α, β in $\mathcal{F}^1(M)$. \square*

OSSERVAZIONE XIII.4.3. Questo lemma ci permette di identificare $\mathcal{S}(M)$ allo spazio delle forme simmetriche su M , definito usualmente come quoziente di $\mathcal{F}(M)$ rispetto all'ideale bilatero definito nell'enunciato del Lemma.

Se $\eta = (E \xrightarrow{\pi} M)$ è un fibrato vettoriale, denoteremo con $\mathcal{S}^k(M, E)$ lo spazio delle forme differenziali simmetriche, omogenee di grado k , a coefficienti in E :

$$\mathcal{S}^k(M, E) = \left\{ \alpha \in \mathcal{F}^k(M, E) \left| \begin{array}{l} \alpha(X_1, \dots, X_k) = \alpha(X_{a_1}, \dots, X_{a_k}), \\ \forall X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M), \forall a \in \mathbf{S}_k. \end{array} \right. \right\}$$

Porremo, ancora,

$$\mathcal{S}(M, E) = \bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{S}^k(M, E).$$

Osserviamo che $\mathcal{S}(M, E)$ è un $\mathcal{S}(M)$ -modulo per l'azione definita, sugli elementi omogenei, da

$$\begin{aligned} \alpha \vee \beta(X_1, \dots, X_{h+k}) &= \sum_{\substack{a \in \mathbf{S}_{h+k} \\ 1 \leq a_1 < \dots < a_h \leq h+k \\ 1 \leq a_{h+1} < \dots < a_{h+k} \leq h+k}} \alpha(X_{a_1}, \dots, X_{a_h}) \beta(X_{a_{h+1}}, \dots, X_{a_{h+k}}), \\ \forall \alpha \in \mathcal{S}^h(M, E), \forall \beta \in \mathcal{S}^k(M), \quad \forall X_1, \dots, X_{h+k} \in \mathfrak{X}(M). \end{aligned}$$

XIII.4.2. Forme simmetriche su una varietà pseudo-Riemanniana. Fissiamo su M una metrica pseudo-Riemanniana g .

Se $\alpha \in \mathcal{F}^k(M)$, con $k \geq 0$, allora $\nabla_X \alpha \in \mathcal{F}^{k+1}(M)$ è definito da

$$\nabla \alpha(X_0, X_1, \dots, X_k) = (\nabla_{X_0} \alpha)(X_1, \dots, X_k), \quad \forall X_0, X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M).$$

DEFINIZIONE XIII.4.4. Chiamiamo *divergenza* della forma simmetrica $\alpha \in \mathcal{S}^k(M)$ la forma simmetrica $\delta \alpha \in \mathcal{S}^{k-1}(M)$ definita da

$$(13.4.3) \quad \delta \alpha = \nabla^* \alpha = -\text{tr}_1(\nabla \alpha)^\sharp.$$

La divergenza definisce un operatore differenziale

$$(13.4.4) \quad \delta : \mathcal{S}(M) \rightarrow \mathcal{S}(M),$$

di ordine uno, omogeneo di grado -1 .

Calcoliamo l'aggiunto formale della divergenza sulle forme simmetriche. Osserviamo che $\mathcal{S}^1(M) = \mathcal{Q}^1(M)$ e quindi possiamo considerare il differenziale covariante dei tensori simmetrici come un'applicazione

$$\nabla : \mathcal{S}^k(M) \longrightarrow \mathcal{S}^1(M) \otimes \mathcal{S}^k(M) \subset \mathcal{F}^{k+1}(M).$$

Componendo con la simmetrizzazione, otteniamo un operatore differenziale di ordine uno e grado uno

$$(13.4.5) \quad \delta^* : \mathcal{S}^k(M) \ni \alpha \longrightarrow \text{sim}(\nabla \alpha) \in \mathcal{S}^{k+1}(M).$$

LEMMA XIII.4.5 (co-divergenza di un tensore simmetrico). *Supponiamo che (M, g) sia orientata. La divergenza sui vettori simmetrici e l'operatore differenziale definito dalla (13.4.5) sono l'uno l'aggiunto formale dell'altro.* \square

Sia $\alpha \in \mathcal{O}^1(M) = \mathcal{S}^1(M)$. Ricordiamo che α^\sharp è il campo di vettori definito da

$$\alpha(X) = g(\alpha^\sharp, X), \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

LEMMA XIII.4.6. Se $\alpha \in \mathcal{O}^1(M)$, allora

$$(13.4.6) \quad \delta^* \alpha = \frac{1}{2} L_{\alpha^\sharp} g.$$

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, abbiamo

$$d^\nabla \alpha(X, Y) = X\alpha(Y) - \alpha(\nabla_X Y)$$

e quindi

$$\begin{aligned} \delta^* \alpha(X, Y) &= \frac{1}{2} (X\alpha(Y) + Y\alpha(X)) - \alpha(\nabla_X Y + \nabla_Y X) \\ &= \frac{1}{2} (Xg(\alpha^\sharp, Y) + Yg(X, \alpha^\sharp) - g(\alpha^\sharp, \nabla_X Y) - g(\alpha^\sharp, \nabla_Y X)) \\ &= \frac{1}{2} (g(\nabla_X \alpha^\sharp, Y) + g(X, \nabla_Y \alpha^\sharp)). \end{aligned}$$

È poi

$$\begin{aligned} (L_{\alpha^\sharp} g)(X, Y) &= \alpha^\sharp g(X, Y) - g([\alpha^\sharp, X], Y) - g(X, [\alpha^\sharp, Y]) \\ &= \alpha^\sharp g(X, Y) - g(\nabla_{\alpha^\sharp} X, Y) - g(X, \nabla_{\alpha^\sharp} Y) + g(\nabla_X \alpha^\sharp, Y) + g(X, \nabla_Y \alpha^\sharp) \\ &= (\nabla_{\alpha^\sharp} g)(X, Y) + g(\nabla_X \alpha^\sharp, Y) + g(X, \nabla_Y \alpha^\sharp) \\ &= g(\nabla_X \alpha^\sharp, Y) + g(X, \nabla_Y \alpha^\sharp), \end{aligned}$$

da cui segue la tesi. \square

OSSERVAZIONE XIII.4.7. I campi di vettori X per cui $L_X g = 0$ sono generatori infinitesimali di gruppi locali a un parametro di diffeomorfismi che preservano la metrica g su M e si dicono *campi di Killing*. È conseguenza del Lemma il fatto che la divergenza della 1-forma α si annulla se e soltanto se il corrispondente campo α^\sharp è di Killing.

Concludiamo il paragrafo con la verifica esplicita del fatto che la divergenza sia l'aggiunto formale della co-divergenza δ^* nel caso delle forme simmetriche di grado due.

LEMMA XIII.4.8. Se $\alpha \in \mathcal{S}^2(M)$, allora, per ogni $X, X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ vale la formula

$$(13.4.7) \quad (\nabla_X \alpha - L_X \alpha)(X_1, X_2) = \alpha(\nabla_{X_1} X, X_2) + \alpha(X_1, \nabla_{X_2} X).$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo infatti

$$\begin{aligned} (L_X \alpha)(X_1, X_2) &= X(\alpha(X_1, X_2)) - \alpha([X, X_1], X_2) - \alpha(X_1, [X, X_2]) \\ &= (\nabla_X \alpha)(X_1, X_2) - ([X, X_1] - \nabla_X X_1, X_2) - \alpha(X_1, [X, X_2] - \nabla_X X_2) \\ &= (\nabla_X \alpha)(X_1, X_2) - \alpha(\nabla_{X_1} X, X_2) - \alpha(X_1, \nabla_{X_2} X), \end{aligned}$$

perché la connessione di Levi-Civita è priva di torsione. \square

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $X \in \mathfrak{X}(M)$ con supporto compatto in M abbiamo

$$\int_M g(\delta\alpha, X^\flat)\omega_g = \int_M g(\alpha, \delta^*X^\flat) = \frac{1}{2} \int_M g(\alpha, L_Xg)\omega_g.$$

Osserviamo che

$$g(\alpha, L_Xg) = Xg(\alpha, g) - g(L_X\alpha, g) = g(\nabla_X\alpha - L_X\alpha, g).$$

Per calcolare l'espressione locale di questo prodotto, possiamo utilizzare un sistema di riferimento ortonormale locale X_1, \dots, X_m . Otteniamo

$$g(\alpha, L_Xg) = \sum_{i,j=1}^m (\nabla_X\alpha - L_X\alpha)(X_i, X_j)g(X_i, X_j) = 2 \sum_{i=1}^m \alpha(\nabla_{X_i}X, X_i).$$

Poiché

$$\alpha(\nabla_{X_i}X, X_i) = X_i\alpha(X, X_i) - (\nabla_{X_i}\alpha)(X, X_i) - \alpha(X, \nabla_{X_i}X_i),$$

otteniamo, prendendo X con supporto compatto nell'aperto in cui X_1, \dots, X_m definiscono un sistema ortonormale,

$$\begin{aligned} \int_M g(\delta\alpha, X^\flat)\omega_g &= \sum_{i=1}^m \int_M (X_i\alpha(X, X_i) - (\nabla_{X_i}\alpha)(X, X_i) - \alpha(X, \nabla_{X_i}X_i))\omega_g \\ &= - \sum_{i=1}^m \int_M ((\nabla_{X_i}\alpha)(X, X_i) - \alpha(X, \nabla_{X_i}X_i) - \alpha(X, X_i)\operatorname{div} X_i)\omega_g. \end{aligned}$$

Osserviamo ora che

$$\operatorname{div} X_i = \sum_{j=1}^m g(\nabla_{X_j}X_i, X_j) = - \sum_{j=1}^m g(X_i, \nabla_{X_j}X_j)$$

e dunque

$$\sum_{i=1}^m \alpha(X, X_i)\operatorname{div} X_i = - \sum_{i,j=1}^m \alpha(X, X_i)g(X_i, \nabla_{X_j}X_j) = - \sum_{j=1}^m \alpha(X, \nabla_{X_j}X_j).$$

Sostituendo nelle formule precedenti otteniamo

$$\int_M g(\delta\alpha, X^\flat)\omega_g = - \int_M \sum_{i=1}^m (\nabla_{X_i}\alpha)(X, X_i)\omega_g.$$

□

XIII.5. L'operatore di Laplace-Beltrami

PROPOSIZIONE XIII.5.1. *Abbiamo*

$$(13.5.1) \quad \Delta f = -\operatorname{div}(\nabla f), \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

DIMOSTRAZIONE. Se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, otteniamo

$$g(\nabla_X(\nabla f), Y) = Xg(\nabla f, Y) - g(\nabla f, \nabla_X Y) = XYf - \nabla_X Yf.$$

Per calcolare l'espressione locale della divergenza di ∇f , possiamo utilizzando un riferimento ortonormale $\sigma = (X_1, \dots, X_m)$, definito su un aperto U di M . Per la (13.2.15) abbiamo in U

$$\operatorname{div}(\nabla f) = \sum_{i=1}^m g(\nabla_{X_i}\nabla f, X_i) = \sum_{i=1}^m (X_i^2 - \nabla_{X_i}X_i)f = -\Delta f.$$

□

Come conseguenza delle (13.2.19) e (13.5.1) abbiamo

PROPOSIZIONE XIII.5.2. *Vale la*

$$(13.5.2) \quad \int_M g(\nabla f, \nabla \phi) \omega_g = \int_M f \Delta \phi \omega_g, \\ \forall f, \phi \in \mathcal{C}^\infty(M), \text{ con } \text{supp } f \cap \text{supp } \phi \Subset M. \quad \square$$

Se $\sigma = (X_1, \dots, X_m)$ è un riferimento ortonormale su un aperto U di M , allora

$$g\left(\sum_{i=1}^m \nabla_{X_i} X_i, X_j\right) = -\sum_{i=1}^m g(X_i, \nabla_{X_i} X_j) = -\text{div } X_j.$$

Otteniamo quindi

$$(13.5.3) \quad \sum_{i=1}^n \nabla_{X_i} X_i = -\sum_{i=1}^m (\text{div } X_i) X_i$$

e dunque l'espressione del Laplaciano sulle funzioni rispetto ad un riferimento ortonormale:

$$(13.5.4) \quad \Delta = -\sum_{i=1}^m (X_i^2 + (\text{div } X_i) X_i).$$

Siano $\alpha \in \mathfrak{T}^{1,q}(M)$ e $\beta \in \mathfrak{T}^{0,q}(M)$, con $\text{supp } \alpha \cap \text{supp } \beta \Subset U$. Allora

$$\begin{aligned} \int_M g(\alpha, \nabla \beta) &= \sum_{i=1}^m \int_M g(\alpha(X_i), \nabla_{X_i} \beta) \omega_g \\ &= \sum_{i=1}^m \int_M [X_i g(\alpha(X_i), \beta) - g((\nabla_{X_i} \alpha)(X_i), \beta) - g(\alpha(\nabla_{X_i} X_i), \beta)] \omega_g \\ &= \sum_{i=1}^m \int_M [-\text{div } X_i g(\alpha(X_i), \beta) - g((\nabla_{X_i} \alpha)(X_i), \beta) - g(\alpha(\nabla_{X_i} X_i), \beta)] \omega_g \\ &= \int_M g\left(\sum_{i=1}^m (\nabla_{X_i} \alpha)(X_i), \beta\right) \omega_g, \end{aligned}$$

perché, per la (13.5.3) la sommatoria dei primi e dei terzi addendi sono l'una l'opposta dell'altra.

XIII.5.1. Codifferenziale. Poiché la derivazione covariante commuta con gli isomorfismi b e \sharp , utilizzando la partizione dell'unità otteniamo la seguente:

PROPOSIZIONE XIII.5.3. *Siano k, q due interi non negativi. Risulta univocamente determinato un operatore differenziale lineare del prim'ordine $\flat : \mathfrak{T}^{k+1,q} \rightarrow \mathfrak{T}^{k,q}$ tale che*

$$(13.5.5) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_M g(\flat \alpha, \beta) d\mu_g &= \int_M g(\alpha, \nabla \beta) d\mu_g, \\ \forall \alpha \in \mathfrak{T}^{k+1,q}(M), \forall \beta \in \mathfrak{T}^{k,q}(M), &\text{ con } \text{supp } \alpha \cap \text{supp } \beta \text{ compatto.} \end{aligned} \right.$$

Se $\sigma = (X_1, \dots, X_m)$ è un riferimento ortonormale su un aperto U di M , abbiamo

$$(13.5.6) \quad \flat \alpha = -\sum_{i=1}^m X_i \lrcorner (\nabla_{X_i} \alpha) \text{ su } U. \quad \square$$

DEFINIZIONE XIII.5.4. Il *codifferenziale* di $\alpha \in \mathfrak{T}^{k+1,q}(M)$ è il tensore $\flat \alpha$ definito da (13.5.6).

Porremo $\flat \alpha = 0$ se $\alpha \in \mathfrak{T}^{0,q}(M)$.

XIII.5.2. Codifferenziale sulle forme alternate e Laplaciano di Hodge-deRham.

Supponiamo nel seguito che (M, g) sia Riemanniana orientata, con forma di volume ω_g .

PROPOSIZIONE XIII.5.5. *Il codifferenziale definisce un operatore $\mathfrak{d} : \Omega^{k+1} \rightarrow \Omega^k(M)$, che si può esprimere utilizzando il differenziale e l'operatore di Hodge mediante la formula*

$$(13.5.7) \quad \mathfrak{d}\alpha = (-1)^{k+1} * d(*\alpha), \quad \forall \alpha \in \Omega^k(M).$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo infatti

$$\begin{aligned} \int_M g(\mathfrak{d}\alpha, \beta)\omega_g &= \int_M g(\alpha, d\beta)\omega_g = \int_M (*\alpha) \wedge d\beta \\ &= (-1)^{k+1} \int_M (d(*\alpha)) \wedge \beta = (-1)^{k+1} \int_M g(*d*\alpha, \beta)\omega_g. \end{aligned}$$

□

DEFINIZIONE XIII.5.6. Il Laplaciano di Hodge-deRham sulle k -forme è l'operatore differenziale

$$(13.5.8) \quad \Delta = (\mathfrak{d} \circ d + d \circ \mathfrak{d}) : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(M).$$

XIII.5.3. Differenziazione di forme simmetriche.

NOTAZIONE XIII.5.7. Indichiamo con $S^k M$ il fibrato vettoriale dei tensori simmetrici k -controvarianti su M e con $\mathcal{S}^k(M)$ lo spazio delle sue sezioni, cioè delle k -forme simmetriche su M .

La differenziazione covariante ∇ definisce un'applicazione $\nabla : \mathcal{S}^k(M) \rightarrow \Omega^1(M, S^k M)$.

DEFINIZIONE XIII.5.8. Il differenziale simmetrico $\mathfrak{d}^* : \mathcal{S}^k(M) \rightarrow \mathcal{S}^{k+1}(M)$ è l'operatore differenziale

$$(13.5.9) \quad (\mathfrak{d}^*\alpha)(X_0, \dots, X_k) = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k (\nabla_{X_i}\alpha)(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_k).$$

Se $\alpha \in \mathcal{S}^1(M) = \Omega^1(M)$, posto $A = \alpha^\sharp$, abbiamo

$$\begin{aligned} (\mathfrak{d}^*\alpha)(X, Y) &= \frac{1}{2} [(\nabla_X\alpha)(Y) + (\nabla_Y\alpha)(X)] \\ &= \frac{1}{2} (X\alpha(Y) - \alpha(\nabla_X Y) + Y\alpha(X) - \alpha(\nabla_Y X)) \\ &= \frac{1}{2} (Xg(A, Y) - g(A, \nabla_X Y) + Yg(A, X) - g(A, \nabla_Y X)) \\ &= \frac{1}{2} (g(\nabla_X A, Y) + g(\nabla_Y A, X)). \end{aligned}$$

Abbiamo poi

$$\begin{aligned} (L_A g)(X, Y) &= Ag(X, Y) - g([A, X], Y) - g([A, Y], X) \\ &= Ag(X, Y) - g(\nabla_A X - \nabla_X A, Y) - g(\nabla_A Y - \nabla_Y A, X) \\ &= g(\nabla_X A, Y) + g(\nabla_Y A, X) \end{aligned}$$

perché $\nabla_A g = 0$. Abbiamo perciò

LEMMA XIII.5.9. Se $\alpha \in \mathcal{S}^1(M)$, allora

$$(13.5.10) \quad (d^*\alpha)(X, Y) = -\frac{1}{2}(L_{\alpha^\sharp}g)(X, Y).$$

DEFINIZIONE XIII.5.10. Chiamiamo *divergenza* di una forma simmetrica l'aggiunto formale del differenziale covariante sulle forme simmetriche, cioè l'applicazione $\mathfrak{d} : \mathcal{S}^{k+1}(M) \rightarrow \mathcal{S}^k(M)$ definita da

$$(13.5.11) \quad \int_M g(\mathfrak{d}\alpha, \beta) d\mu_g = \int_M g(\alpha, \mathfrak{d}^*\beta) d\mu_g$$

per ogni $\alpha \in \mathcal{S}^{k+1}(M)$ e $\beta \in \mathcal{S}^k(M)$ con $\text{supp } \alpha \cap \text{supp } \beta \Subset M$.

Osserviamo che la divergenza è la restrizione alle forme simmetriche del co-differenziale covariante della Definizione XIII.5.4.

XIII.6. Il Laplaciano naturale

Sia (M, g) una varietà Riemanniana. Ad ogni rappresentazione lineare di dimensione finita (ρ, V) di $\mathbf{O}(m)$ è associato un fibrato vettoriale $\eta = (E \xrightarrow{\pi_E} M)$, su cui la connessione di Levi-Civita definisce una differenziazione covariante. Indichiamo con $\mathcal{E}(M)$ lo spazio $\Gamma(M, E)$ delle sue sezioni, con $\mathcal{E}^{(1)}(M)$ lo spazio delle forme differenziali a coefficienti in E , cioè delle sezioni delle sezioni \mathcal{C}^∞ del fibrato $\eta \otimes \tau_M^* = (E \otimes_M T^*M \rightarrow M)$, e con

$$(13.6.1) \quad \nabla : \mathcal{E}(M) \longrightarrow \mathcal{E}^{(1)}(M),$$

la differenziazione covariante.

Possiamo definire su V un prodotto scalare³ h_V per cui $\rho(\mathbf{O}(m)) \subset \mathbf{O}_{h_V}(V)$. Indichiamo con $(\cdot | \cdot)_0$ il corrispondente prodotto scalare sulle fibre di η . Vale allora

$$(13.6.2) \quad X(s_1, s_2)_0 = (\nabla_X s_1, s_2)_0 + (s_1, \nabla_X s_2)_0.$$

Risulta allora definito un prodotto scalare naturale sulle fibre di $\eta \otimes \tau_M^*$, che indicheremo con $(\cdot | \cdot)_1$. Se $\sigma = (X_1, \dots, X_m)$ è un riferimento ortonormale su un aperto U di M ed $\alpha, \beta \in \mathcal{E}^{(1)}(M)$, allora

$$(13.6.3) \quad (\alpha | \beta)_1(p) = \sum_{i=1}^m (\alpha(\sigma_i) | \beta(\sigma_i))_0 \quad \text{su } U.$$

Siano $s \in \mathcal{E}(M)$, $\alpha \in \mathcal{E}^{(1)}(M)$ tali che $\text{supp } s \cap \text{supp } \alpha \Subset U$. Integrando per parti, otteniamo, indicando con ω_g la forma di volume su U per cui σ è orientato positivamente,

$$\begin{aligned} \int_M (\nabla s | \alpha)_1 \omega_g &= \sum_{i=1}^m \int_M (\nabla_{X_i} s | \alpha(X_i))_0 \omega_g \\ &= \sum_{i=1}^m \int_M (X_i(s | \alpha(X_i))_0 - (s | \nabla_{X_i} [\alpha(X_i)])_0) \omega_g \end{aligned}$$

³Questo prodotto scalare non è univocamente determinato. Lo è, a meno di una costante moltiplicativa, sui fattori irriducibili della rappresentazione (ρ, V) .

$$\begin{aligned}
&= \int_M L_{X_i}[(s|\alpha(X_i))_0 \omega_g] - \int_M (s|\alpha(X_i))_0 L_X \omega_g - \int_M \left(s \left| \sum_i \nabla_{X_i} [\alpha(X_i)] \right| \right)_0 \omega_g \\
&= - \int_M (s|\nabla^* \alpha)_0 \omega_g
\end{aligned}$$

ove

$$(13.6.4) \quad \nabla^* \alpha = - \sum_{i=1}^m (\nabla_{X_i} + \operatorname{div} X_i) [\alpha(X_i)] \quad \text{su } U.$$

Osserviamo che un cambiamento di orientazione cambia il segno di ω_g e quindi di tutti i termini delle equazioni precedenti. La (13.6.4) è quindi ben definita, a prescindere dal dato di un'orientazione globale su M .

DEFINIZIONE XIII.6.1. L'operatore differenziale $\nabla^* : \mathcal{E}^{(1)}(M) \rightarrow \mathcal{E}(M)$ definito da (13.6.4) si dice l'*aggiunto formale della differenziazione covariante*.

L'operatore differenziale

$$(13.6.5) \quad \nabla^* \nabla : \mathcal{E}(M) \longrightarrow \mathcal{E}(M)$$

è il *Laplaciano naturale* sulle sezioni di η rispetto alla metrica Riemanniana g .

PROPOSIZIONE XIII.6.2. *Vale la formula d'integrazione per parti*

$$(13.6.6) \quad \int_M g(\nabla s_1, \nabla s_2) d\mu_g = \int_M g(\nabla^* \nabla s_1, s_2) d\mu_g,$$

$\forall s_1, s_2 \in \mathcal{E}(M) \text{ con } \operatorname{supp} s_1 \cap \operatorname{supp} s_2 \Subset M.$

In particolare, se M è compatta, tutte le soluzioni dell'equazione omogenea

$$(13.6.7) \quad \nabla^* \nabla s = 0$$

sono parallele su M .

XIII.7. Il Laplaciano di Lichnerowicz

Descriviamo in questo paragrafo una nozione generale di Laplaciano sulle varietà Riemanniane, dovuta a Lichnerowicz⁴.

Introduciamo gli operatori di curvatura di Weitzenböck⁵.

Sia $\mathfrak{o}_M = (\mathfrak{o}(M) \xrightarrow{\pi} M)$ il fibrato vettoriale corrispondente alla rappresentazione aggiunta di $\mathbf{O}(m)$. Gli elementi di $\mathfrak{o}_p(M)$ sono gli endomorfismi \mathbb{R} -lineari di $T_p M$ che sono antisimmetrici per g_p :

$$A \in \mathfrak{o}_p(M) \iff (A \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(T_p M), \quad g_p(AX_p, Y_p) + g_p(X_p, AY_p) = 0, \quad \forall X_p, Y_p \in T_p M).$$

⁴André Lichnerowicz (1915-1998) è stato un matematico francese, allievo di Élie Cartan. Ha insegnato a Strasburgo e Parigi, dal 1952 al Collège de France. Si è occupato di geometria differenziale, relatività generale ed ha avuto un ruolo importante nella formulazione dei programmi di insegnamento della matematica in Francia.

⁵Roland Weitzenböck (1885-1955). Matematico austriaco, ha studiato a Vienna, Bonn e Göttingen. Ha insegnato a Praga, e dal 1923 al 1945 ad Amsterdam. Per la sua attività filo-nazista, fu internato al termine della guerra, fino al 1948. Si occupò di teoria degli invarianti, di invarianti spaziali e di teoria dei campi. Ottenne le formule per il Laplaciano di Hodge-deRham nel 1923. [*Invariantentheorie*, Groningen, Noordhoff]

Se $\alpha \in \Omega^2(M)$ ed $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, allora

$$g([X]\alpha]^\sharp, Y) = [X]\alpha](Y) = \alpha(X, Y) = -\alpha(Y, X) = -g(X, [Y]\alpha]^\sharp).$$

Quindi α definisce la sezione A_α del fibrato $\mathfrak{o}(M)$

$$(13.7.1) \quad A_\alpha(X) = [X]\alpha]^\sharp.$$

LEMMA XIII.7.1. *La corrispondenza $A : \Omega^2(M) \ni \alpha \rightarrow A_\alpha \in \Gamma(M, \mathfrak{o}(M))$ è un isomorfismo lineare.* \square

Possiamo associare ad $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ la sezione di $A_{X,Y}$ di $\mathfrak{o}(M)$ definita da

$$(13.7.2) \quad A_{X,Y}(Z) = g(X, Z)Y - g(Y, Z)X, \quad \forall Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Abbiamo infatti

$$\begin{aligned} g(A_{X,Y}Z_1, Z_2) &= g(g(X, Z_1)Y - g(Y, Z_1)X, Z_2) \\ &= g(X, Z_1)g(Y, Z_2) - g(Y, Z_1)g(X, Z_2) \\ &= g(Z_1, g(Y, Z_2)X - g(X, Z_2)Y) = -g(Z_1, A_{X,Y}Z_2). \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE XIII.7.2. È $A_{X,Y} = A_{(X \wedge Y)^\flat}$.

Sia ora (ρ, V) una rappresentazione lineare di $\mathbf{O}(m)$ ed $\eta = (E \xrightarrow{\pi_E} M)$ il corrispondente fibrato vettoriale. Lo spazio totale E è il quoziente di $\mathbf{O}(M) \times V$ rispetto alla relazione di equivalenza

$$(\sigma_1, v_1) \sim (\sigma_2, v_2) \iff (\pi(\sigma_1) = \pi(\sigma_2), v_2 = \rho(\sigma_2^{-1}\sigma_1)(v_1)).$$

Indichiamo con $\varpi : \mathbf{O}(M) \times V \rightarrow E$ la proiezione nel quoziente. Ricordiamo ancora che possiamo definire un prodotto scalare h_V su V per cui $\rho(\mathbf{O}(m)) \subset \mathbf{O}_{h_V}(V)$ e che questo definisce un prodotto scalare invariante sulle fibre di η . Il differenziale di ρ nell'origine definisce una rappresentazione lineare $\rho_* : \mathfrak{o}(m) \rightarrow \mathfrak{o}_{h_V}(V)$ dell'algebra di Lie, che definisce un morfismo lineare di fibrati

$$(13.7.3) \quad [\rho]_* : \mathfrak{o}(M) \longrightarrow \mathfrak{o}(E)$$

ove abbiamo indicato con $\mathfrak{o}(E)$ lo spazio degli endomorfismi lineari antisimmetrici sulle fibre di η . Esso si definisce nel modo seguente. Siano $p \in M$ e T un endomorfismo g_p -antisimmetrico di T_pM . Se $\sigma \in \mathbf{O}_p(M)$, allora $\sigma^{-1} \circ T \circ \sigma \in \mathfrak{o}(m)$. Definiamo $[\rho]_*(T)$ in modo che

$$[\rho]_*(T)\varpi(\sigma, v) = \varpi(\sigma, \rho_*(\sigma^{-1} \circ T \circ \sigma)(v)), \quad \forall v \in V.$$

Definiamo quindi una forma $c_\rho \in \Omega^2(M, \mathfrak{o}(E))$ ponendo

$$(13.7.4) \quad c_\rho(X, Y) = [\rho]_*(A_{X,Y}), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

DEFINIZIONE XIII.7.3. Chiamiamo la $c_\rho \in \Omega^2(M, \mathfrak{o}(E))$, definita dalla (13.7.4), la *forma caratteristica* del fibrato η .

Ricordiamo che su ogni spazio tensoriale $\mathfrak{T}^{r,s}(M)$ è definita la curvatura

$$(13.7.5) \quad R(X, Y)\tau = \nabla_X \nabla_Y \tau - \nabla_Y \nabla_X \tau - \nabla_{[X, Y]}\tau, \quad \forall \tau \in \mathfrak{T}^{r,s}(M), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Ad esempio, se $\alpha \in \Omega^1(M)$ ed $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, otteniamo

$$(13.7.6) \quad (R(X, Y)\alpha)(Z) = -\alpha(R(X, Y)Z).$$

Infatti

$$\begin{aligned} (R(X, Y)\alpha)(Z) &= (\nabla_X \nabla_Y \alpha)(Z) - (\nabla_Y \nabla_X \alpha)(Z) - (\nabla_{[X, Y]}\alpha)(Z) \\ &= X((\nabla_Y \alpha)(Z)) - (\nabla_Y \alpha)(\nabla_X Z) - Y((\nabla_X \alpha)(Z)) + (\nabla_X \alpha)(\nabla_Y Z) \\ &\quad - [X, Y]\alpha(Z) + \alpha(\nabla_{[X, Y]}Z) \\ &= X(Y\alpha(Z) - \alpha(\nabla_Y Z)) - (\nabla_Y \alpha)(\nabla_X Z) \\ &\quad - Y(X\alpha(Z) - \alpha(\nabla_X Z)) + (\nabla_X \alpha)(\nabla_Y Z) \\ &\quad - [X, Y]\alpha(Z) + \alpha(\nabla_{[X, Y]}Z) \\ &= XY\alpha(Z) - (\nabla_X \alpha)(\nabla_Y Z) - (\nabla_Y \alpha)(\nabla_X Z) - \alpha(\nabla_X \nabla_Y Z) \\ &\quad - YX\alpha(Z) + (\nabla_Y \alpha)(\nabla_X Z) + (\nabla_X \alpha)(\nabla_Y Z) + \alpha(\nabla_Y \nabla_X Z) \\ &\quad - [X, Y]\alpha(Z) + \alpha(\nabla_{[X, Y]}Z) \end{aligned}$$

da cui, poiché la connessione di Levi-Civita è simmetrica, otteniamo la (13.7.6).

DEFINIZIONE XIII.7.4. Il *tensore di Ricci generalizzato*, od *operatore di curvatura di Weitzenböck*, sui tensori k -controvarianti, con $k \geq 1$, è definito da

$$(13.7.7) \quad \mathcal{R}ic(\tau)(X_1, \dots, X_k) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k (R(Y_i, X_j)\tau)(X_1, \dots, X_{j-1}, Y_i, X_{j+1}, \dots, X_k),$$

ove (Y_1, \dots, Y_m) è un qualsiasi riferimento ortonormale.

In particolare, se α è una 1-forma differenziale, abbiamo

$$(13.7.8) \quad \mathcal{R}ic(\alpha)(X) = \sum_{i=1}^m R(Y_i, X)\alpha(Y_i) = -\alpha(R(Y_i, X)Y_i)$$

DEFINIZIONE XIII.7.5. Un *Laplaciano di Lichnerowicz* è della forma

$$(13.7.9) \quad \Delta_L \tau = \nabla^* \nabla \tau + c \mathcal{R}ic(\tau),$$

per una costante $c > 0$.

XIII.8. Laplaciano sulle forme differenziali alternate

XIII.8.1. Espressione del differenziale mediante la derivazione covariante. La derivazione covariante rispetto ad una connessione simmetrica ci permette di calcolare il differenziale di una forma alternata con una formula che è diretta generalizzazione di quella, in coordinate, valida per gli spazi Euclidei.

PROPOSIZIONE XIII.8.1. Se ∇ è la derivazione covariante di una connessione affine simmetrica su M , allora, per ogni $\alpha \in \Omega^k(M)$ ed $X_0, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$ vale la

$$(13.8.1) \quad d\alpha(X_0, \dots, X_k) = \sum_{j=0}^k (-1)^j (\nabla_{X_j} \alpha)(X_0, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_k).$$

Se $\sigma = (X_1, \dots, X_m)$ è un sistema di riferimento su un aperto U di M e (ξ^1, \dots, ξ^m) il coriferimento duale, definito da $\xi^i(X_j) = \delta_j^i$ per $1 \leq i, j \leq m$, abbiamo

$$(13.8.2) \quad d\alpha = \sum_{i=1}^m \xi^i \wedge \nabla_{X_i} \alpha \quad \text{in } U.$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo infatti

$$\begin{aligned} d\alpha(X_0, \dots, X_k) &= \sum_j (-1)^j X_j \alpha(\dots, \widehat{X}_j, \dots) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots) \\ &= \sum_j (-1)^j (\nabla_{X_j} \alpha)(\dots, \widehat{X}_j, \dots) \\ &\quad - \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \alpha(\nabla_{X_i} X_j, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \alpha(\nabla_{X_j} X_i, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots) \\ &= \sum_j (-1)^j (\nabla_{X_j} \alpha)(\dots, \widehat{X}_j, \dots) \\ &\quad - \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \alpha(T(X_i, X_j), \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots), \end{aligned}$$

dove T è la torsione. Otteniamo quindi la (13.8.1) se supponiamo $T = 0$.

Verifichiamo ora la (13.8.2). Basta verificare che i due membri dell'equazione assumono gli stessi valori sulle k -uple di elementi del sistema di riferimento σ . Se $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m$, otteniamo

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^m \xi^i \wedge \nabla_{X_i} \alpha \right) (X_{i_0}, \dots, X_{i_k}) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^k (-1)^j \xi^i(X_{i_j}) (\nabla_{X_i} \alpha)(\dots, \widehat{X}_{i_j}, \dots) \\ &= \sum_{j=0}^k (-1)^j (\nabla_{X_{i_j}} \alpha)(\dots, \widehat{X}_{i_j}, \dots) \end{aligned}$$

e l'ultimo termine dell'uguaglianza è uguale a $d\alpha(X_{i_0}, \dots, X_{i_k})$ per la (13.8.1). \square

XIII.8.2. Aggiunto formale del differenziale. Utilizziamo la Proposizione XIII.8.1 per calcolare l'aggiunto formale del differenziale esterno. Osserviamo che, se $\beta \in \mathcal{Q}^{k+1}(M)$ ed $X_0, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$, allora

$$(X_i \lrcorner \beta)(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_k) = (-1)^i \beta(X_0, \dots, X_k), \quad \forall i = 0, 1, \dots, k.$$

Supponiamo ora che (M, g) sia una varietà Riemanniana e $\sigma = (X_1, \dots, X_m)$ un sistema di riferimento ortonormale su un aperto U di M . Siano $\alpha \in \mathcal{Q}^k(M)$ e $\beta \in \mathcal{Q}^{k+1}(M)$, con $\text{supp } \alpha \subseteq U$. Otteniamo allora

$$\begin{aligned} &\int_M g(d\alpha, \beta) d\mu_g \\ &= \sum_{i_0 < \dots < i_k} \sum_j (-1)^j \int_M (\nabla_{X_{i_j}} \alpha)(X_{i_0}, \dots, \widehat{X}_{i_j}, \dots, X_{i_k}) \cdot \beta(X_{i_0}, \dots, X_{i_j}, \dots, X_{i_k}) d\mu_g \\ &= \sum_{i_0 < \dots < i_k} \sum_j \int_M (\nabla_{X_{i_j}} \alpha)(X_{i_0}, \dots, \widehat{X}_{i_j}, \dots, X_{i_k}) \cdot X_{i_j} \lrcorner \beta(X_{i_0}, \dots, \widehat{X}_{i_j}, \dots, X_{i_k}) d\mu_g \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=0}^m \int_M g(\nabla_{X_j} \alpha, X_j \lrcorner \beta) d\mu_g$$

Osserviamo che, se $X, Y, X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$, è

$$\begin{aligned} (\nabla_X(Y \lrcorner \beta))(X_1, \dots, X_k) &= X\beta(Y, X_1, \dots, X_k) - \sum \beta(Y, \dots, \nabla_X X_j, \dots) \\ &= (\nabla_X \beta)(Y, X_1, \dots, X_k) + \beta(\nabla_X Y, X_1, \dots, X_k), \end{aligned}$$

abbiamo cioè

$$(13.8.3) \quad \nabla_X(Y \lrcorner \beta) = Y \lrcorner \nabla_X \beta + (\nabla_X Y) \lrcorner \beta.$$

Supponiamo ora di aver fissato un'orientazione su U , ed indichiamo con ω_g la corrispondente forma di volume. Abbiamo

$$\begin{aligned} \int_M g(\nabla_X \alpha, Y \lrcorner \beta) \omega_g &= \int_M (Xg(\alpha, Y \lrcorner \beta)) \omega_g - \int_M g(\alpha, \nabla_X(Y \lrcorner \beta)) \omega_g \\ &= \int_M L_X(g(\alpha, Y \lrcorner \beta) \omega_g) - \int_M g(\alpha, Y \lrcorner \beta) L_X \omega_g \\ &\quad - \int_M g(\alpha, Y \lrcorner \nabla_X \beta) \omega_g - \int_M g(\alpha, \nabla_X Y \lrcorner \beta) \omega_g \\ &= - \int_M g(\alpha, Y \lrcorner \nabla_X \beta) \omega_g - \int_M g(\alpha, (\nabla_X Y + (\operatorname{div} X)Y) \lrcorner \beta) \omega_g. \end{aligned}$$

Otteniamo quindi, per l'aggiunto formale del differenziale, l'espressione

$$d^* \beta = - \sum_i X_i \lrcorner \nabla_{X_i} \beta - \left(\sum_i (\nabla_{X_i} X_i + (\operatorname{div} X_i) X_i) \right) \lrcorner \beta.$$

Poiché

$$\sum_i (\operatorname{div} X_i) X_i = \sum_{i,j} g(\nabla_{X_j} X_i, X_j) X_i = - \sum_{i,j} g(X_i, \nabla_{X_j} X_j) X_i = - \sum_j \nabla_{X_j} X_j,$$

l'ultima sommatoria al secondo membro dell'espressione che abbiamo ottenuto per $d^* \beta$ si annulla ed otteniamo perciò

PROPOSIZIONE XIII.8.2. *Se $\sigma = (X_1, \dots, X_m)$ è un riferimento ortogonale su un aperto U di M e $\beta \in \Omega^{k+1}(M)$, allora*

$$(13.8.4) \quad d^* \beta = \sum_{i=0}^m X_i \lrcorner \nabla_{X_i} \beta \quad \text{in } U. \quad \square$$

XIII.8.3. Aggiunti formali della derivazione covariante e del prodotto esterno. Raccogliamo in questo breve paragrafo alcune formule che ci saranno utili nel seguito.

LEMMA XIII.8.3. *Se (M, g) è una varietà Riemanniana orientata, allora*

$$(13.8.5) \quad \nabla_X^* \alpha = -\nabla_X \alpha - (\operatorname{div} X) \cdot \alpha, \quad \forall \alpha \in \Omega^k(M), \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

DIMOSTRAZIONE. Se $\beta \in \Omega^k(M)$ e $\operatorname{supp} \alpha \cap \operatorname{supp} \beta \Subset M$, abbiamo

$$\begin{aligned} \int_M g(\alpha, \nabla_X \beta) \omega_g &= \int_M (Xg(\alpha, \beta)) \omega_g - \int_M g(\nabla_X \alpha, \beta) \omega_g \\ &= - \int_M g(\alpha, \beta) (\operatorname{div} X) \omega_g - \int_M g(\nabla_X \alpha, \beta) \omega_g, \end{aligned}$$

da cui segue la (13.8.5). □

LEMMA XIII.8.4. Sia $X \in \mathfrak{X}(M)$. L'applicazione

$$(13.8.6) \quad \mathcal{Q}^k(M) \ni \alpha \longrightarrow X^\flat \wedge \alpha \in \mathcal{Q}^{k+1}(M)$$

è l'aggiunta formale del prodotto interno

$$(13.8.7) \quad \mathcal{Q}^{k+1}(M) \ni \beta \longrightarrow X \lrcorner \beta \in \mathcal{Q}^k(M).$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $\sigma = (X_1, \dots, X_m)$ un riferimento ortonormale su un aperto U di M . Abbiamo in U , per $\alpha \in \mathcal{Q}^k(M)$, $\beta \in \mathcal{Q}^{k+1}(M)$,

$$\begin{aligned} g(\alpha, X \lrcorner \beta) &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} \alpha(X_{i_1}, \dots, X_{i_k}) \beta(X, X_{i_1}, \dots, X_{i_k}) \\ &= \sum_{i_0} \sum_{i_1 < \dots < i_k} g(X, X_{i_0}) \alpha(X_{i_1}, \dots, X_{i_k}) \beta(X_{i_0}, X_{i_1}, \dots, X_{i_k}) \\ &= \sum_{i_0 < i_1 < \dots < i_k} \sum_{h=0}^k (-1)^h g(X, X_{i_h}) \alpha(\dots, \widehat{X_{i_h}}, \dots) \beta(X_{i_0}, X_{i_1}, \dots, X_{i_k}) \\ &= g(X^\flat \wedge \alpha, \beta). \end{aligned}$$

Questa uguaglianza dimostra il Lemma. \square

XIII.8.4. La formula di Weitzenböck. Dalla (13.8.2) della Proposizione XIII.8.1 abbiamo:

PROPOSIZIONE XIII.8.5. Sia $\sigma = (X_1, \dots, X_m)$ un riferimento ortonormale su un aperto U di M . Se $\alpha \in \mathcal{Q}^k(M)$, abbiamo

$$(13.8.8) \quad d\alpha = \sum_{i=1}^m X_i^\flat \wedge \nabla_{X_i} \alpha \quad \text{in } U.$$

Ricordiamo che la derivazione covariante è una derivazione dell'algebra esterna. È cioè

$$(13.8.9) \quad \nabla_X(\alpha \wedge \beta) = (\nabla_X \alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge \nabla_X \beta, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M), \forall \alpha, \beta \in \mathcal{Q}^*(M).$$

Metriche invarianti

XIV.1. Metriche pseudo-Riemanniane su spazi omogenei

Siano \mathbf{K} un gruppo di Lie connesso, \mathbf{H} un suo sottogruppo chiuso, $M = \mathbf{K}/\mathbf{H}$. Indichiamo con \mathfrak{o} il punto base $\pi(\mathbf{H})$ ed identifichiamo $T_{\mathfrak{o}}M$ al quoziente $\mathfrak{k}/\mathfrak{h}$ delle algebre di Lie \mathfrak{k} di \mathbf{K} ed \mathfrak{h} di \mathbf{H} . Ricordiamo che, per $X \in \mathfrak{k}$, $X^M \in \mathfrak{X}(M)$ è il generatore infinitesimale del gruppo a un parametro $(t, p) \rightarrow \exp(tX) \cdot p$.

Indichiamo con $\overline{\text{Ad}}(h)$ la rappresentazione aggiunta di \mathbf{H} sul quoziente $\mathfrak{k}/\mathfrak{h}$, e con \bar{X} l'elemento di $\mathfrak{k}/\mathfrak{h}$ corrispondente ad $X \in \mathfrak{k}$.

Supponiamo che \mathbf{K} operi effettivamente su M .

PROPOSIZIONE XIV.1.1. *Vi è una corrispondenza biunivoca tra le metriche pseudo-Riemanniane g , \mathbf{K} -invarianti su M , e le forme bilineari simmetriche non degeneri b su $\mathfrak{k}/\mathfrak{h}$, invarianti rispetto ad $\overline{\text{Ad}}(\mathbf{H})$, data da*

$$(14.1.1) \quad g_{\mathfrak{o}}(X^M, Y^M) = b(\bar{X}, \bar{Y}), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{k}.$$

La g è definita positiva se e soltanto se lo è la b .

DIMOSTRAZIONE. La condizione necessaria e sufficiente affinché g sia una metrica pseudo-Riemanniana \mathbf{K} -invariante è che, per ogni $a \in \mathbf{K}$, risulti

$$g_{\pi(a)}(a_*X^M, a_*Y^M) = g_{\mathfrak{o}}(X^M, Y^M), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{k}.$$

Se $b \in \mathbf{K}$ e $\pi(b) = \pi(a)$, allora $a^{-1}b = h \in \mathbf{H}$ ed abbiamo allora

$$\begin{aligned} g_{\mathfrak{o}}(X^M, Y^M) &= g_{\pi(b)}(b_*X^M, b_*Y^M) = g_{\pi(a)}(b_*X^M, b_*Y^M) \\ &= g_{\mathfrak{o}}(a_*^{-1}b_*X^M, a_*^{-1}b_*Y^M) = g_{\mathfrak{o}}(h_*X^M, h_*Y^M). \end{aligned}$$

Questo dimostra che possiamo definire una forma bilineare $\overline{\text{Ad}}(\mathbf{H})$ -invariante ponendo:

$$b(\bar{X}, \bar{Y}) = g_{\mathfrak{o}}(X^M, Y^M).$$

Vice versa, poiché $h_*X^M = (\overline{\text{Ad}}(h)(X))^M$ per ogni $X \in \mathfrak{k}$, la (14.1.1) definisce una metrica \mathbf{K} -invariante, purché la b sia $\overline{\text{Ad}}(\mathbf{H})$ -invariante. \square

COROLLARIO XIV.1.2. *Supponiamo che M sia riduttiva, con decomposizione*

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}, \quad \overline{\text{Ad}}(\mathbf{H})(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}.$$

Allora la

$$(14.1.2) \quad g_{\mathfrak{o}}(X^M, Y^M) = b(X, Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{m}$$

definisce una corrispondenza biunivoca tra le metriche pseudo-Riemanniane g , \mathbf{K} -invarianti su M , e le forme bilineari simmetriche non degeneri $\text{Ad}(\mathbf{H})$ -invarianti su \mathfrak{m} . Abbiamo

$$(14.1.3) \quad b([Z, X], Y) + b(X, [Z, Y]) = 0, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{m}, \forall Z \in \mathfrak{h},$$

e la condizione (14.1.3) è equivalente all'invarianza di b rispetto ad $\text{Ad}(\mathbf{H})$ se \mathbf{H} è connesso.

XIV.2. La connessione di Levi-Civita sugli spazi omogenei

Data una connessione affine Γ su M , associamo ad ogni $X \in \mathfrak{X}(M)$ il tensore 1-covariante ed 1-contravariante A_X , definito da

$$(14.2.1) \quad A_X Y = [X, Y] - \nabla_X Y = -\nabla_Y X - T(X, Y), \quad \forall Y \in \mathfrak{X}(M).$$

LEMMA XIV.2.1. Se g è una metrica pseudo-Riemanniana \mathbf{K} -invariante su $M = \mathbf{K}/\mathbf{H}$, allora per ogni $X \in \mathfrak{K}$, il tensore A_{X^M} è g -antisimmetrico.

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $X \in \mathfrak{K}$, il gruppo a un parametro $\exp(tX)$ definisce un gruppo a un parametro di isometrie di (M, g) . Quindi la derivata di Lie $L_{X^M} g$ della metrica è nulla. Otteniamo quindi, per ogni $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$:

$$\begin{aligned} X^M g(Y, Z) &= (L_{X^M} g)(Y, Z) + g([X^M, Y], Z) + g(Y, [X^M, Z]) \\ &= g([X^M, Y], Z) + g(Y, [X^M, Z]). \end{aligned}$$

D'altra parte, vale anche la

$$\begin{aligned} X^M g(Y, Z) &= (\nabla_{X^M} g)(Y, Z) + g(\nabla_{X^M} Y, Z) + g(Y, \nabla_{X^M} Z) \\ &= g(\nabla_{X^M} Y, Z) + g(Y, \nabla_{X^M} Z). \end{aligned}$$

Sottraendo membro a membro otteniamo

$$(14.2.2) \quad g(A_{X^M} Y, Z) + g(Y, A_{X^M} Z) = 0, \quad \forall Y, Z \in \mathfrak{X}(M),$$

ed il Lemma è dimostrato. \square

TEOREMA XIV.2.2. Supponiamo che M sia riduttiva, con decomposizione

$$(14.2.3) \quad \mathfrak{K} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}, \quad \text{Ad}(\mathbf{H})(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}.$$

Se g è la metrica pseudo-Riemanniana \mathbf{K} -invariante su M , associata alla forma bilineare simmetrica $\text{Ad}(\mathbf{H})$ -invariante b , allora la sua connessione di Levi-Civita è definita da

$$(14.2.4) \quad \Lambda_{\mathfrak{m}}(X)(Y) = \frac{1}{2}[X, Y]_{\mathfrak{m}} + \beta(X, Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{m},$$

ove β è la forma bilineare simmetrica definita da

$$(14.2.5) \quad 2b(\beta(X, Y), Z) = b(X, [Z, Y]_{\mathfrak{m}}) + b([Z, X]_{\mathfrak{m}}, Y), \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{m}.$$

In particolare, la connessione di Levi-Civita coincide con la connessione naturale priva di torsione se e soltanto se il secondo membro della (14.2.5) è uguale a 0 per ogni $X, Y, Z \in \mathfrak{m}$.

DIMOSTRAZIONE. Ricordiamo che $\Lambda_{\mathfrak{m}}(X) = -A_{X_0^M}$ per ogni $X \in \mathfrak{m}$, e quindi $\Lambda_{\mathfrak{m}}(X)$ è antisimmetrica per ogni $X \in \mathfrak{m}$. Per la (7.4.3) del Teorema VII.4.2, abbiamo

$$\Lambda_{\mathfrak{m}}(X)Y - \Lambda_{\mathfrak{m}}(Y)X = [X, Y]_{\mathfrak{m}}, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{m}.$$

Quindi

$$\beta(X, Y) - \beta(Y, X) = [X, Y]_{\mathfrak{m}} - (\Lambda_{\mathfrak{m}}(X)Y - \Lambda_{\mathfrak{m}}(Y)X) = 0$$

e dunque β è simmetrica e soddisfa

$$b(\beta(X, Y), Z) + b(Y, \beta(X, Z)) = \frac{1}{2}(b([Y, X]_{\mathfrak{m}}, Z) + b(Y, [Z, X]_{\mathfrak{m}})).$$

Da questa, dalle uguaglianze che da questa si ottengono mediante le permutazioni cicliche di X, Y, Z e dalla simmetria di β ricaviamo finalmente la (14.2.5). \square

DEFINIZIONE XIV.2.3. Uno spazio omogeneo riduttivo $M = \mathbf{K}/\mathbf{H}$, con (14.2.3) ed una metrica pseudo-Riemanniana associata ad una forma bilineare simmetrica non degenera b su \mathfrak{m} si dice *naturalmente riduttivo* se

$$(14.2.6) \quad b(X, [Z, Y]_{\mathfrak{m}}) + b([Z, X]_{\mathfrak{m}}, Y) = 0, \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{m}.$$

PROPOSIZIONE XIV.2.4. Supponiamo che M sia *naturalmente riduttivo*, con una metrica pseudo-Riemanniana invariante associata alla forma bilineare b . Allora la sua curvatura soddisfa

$$(14.2.7) \quad g_0(R(X^M, Y^M)Y^M, X^M) = \frac{1}{4}b([X, Y]_{\mathfrak{m}}, [X, Y]_{\mathfrak{m}}) - b([[X, Y]_{\mathfrak{h}}, Y], X], \\ \forall X, Y \in \mathfrak{m}.$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo infatti

$$R_0(X, Y)Z = \frac{1}{4}[X, [Y, Z]_{\mathfrak{m}}]_{\mathfrak{m}} - \frac{1}{4}[Y, [X, Z]_{\mathfrak{m}}]_{\mathfrak{m}} \\ - \frac{1}{2}[[X, Y]_{\mathfrak{m}}, Z]_{\mathfrak{m}} - [[X, Y]_{\mathfrak{h}}, Z], \\ \forall X, Y, Z \in \mathfrak{m}.$$

La tesi segue allora dal Teorema XIV.2.2. \square

Un caso importante in cui si applicano i risultati precedenti è il seguente:

TEOREMA XIV.2.5. Sia $M = \mathbf{K}/\mathbf{H}$ e supponiamo che vi sia una forma bilineare simmetrica non degenera $\text{Ad}(\mathbf{K})$ -invariante \mathbf{f} su \mathfrak{k} la cui restrizione ad \mathfrak{h} sia non degenera.

Poniamo

$$(14.2.8) \quad \mathfrak{m} = \{X \in \mathfrak{k} \mid \mathbf{f}(X, Y) = 0, \forall Y \in \mathfrak{h}\}.$$

Allora vale la decomposizione (14.2.3) ed inoltre la

$$(14.2.9) \quad b(X, Y) = \mathbf{f}(X, Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{m},$$

è una forma bilineare simmetrica non degenera ed $\text{Ad}(\mathbf{H})$ -invariante su \mathfrak{m} .

Rispetto a questa decomposizione ed alla metrica pseudo-Riemanniana \mathbf{K} -invariante associata a questa scelta di b lo spazio omogeneo M è *naturalmente riduttivo*.

Il tensore di curvatura rispetto a questa metrica soddisfa

$$(14.2.10) \quad g_0(R(X^M, Y^M)Y^M, X^M) = \frac{1}{4}\mathbf{f}([X, Y]_{\mathfrak{m}}, [X, Y]_{\mathfrak{m}}) + \mathbf{f}([X, Y]_{\mathfrak{h}}, [X, Y]_{\mathfrak{h}}), \\ \forall X, Y \in \mathfrak{m}.$$

OSSERVAZIONE XIV.2.6. Se possiamo scegliere la \mathbf{f} definita positiva, allora la metrica g definita nel teorema precedente è Riemanniana, con curvatura sezionale non negativa.

ESEMPIO XIV.2.7. Supponiamo che \mathbf{K} ammetta una forma bilineare simmetrica $\text{Ad}(\mathbf{K})$ -invariante e definita positiva e poniamo $\mathbf{H} = \{e\}$. Allora la connessione di Levi-Civita associata alla metrica descritta nel teorema precedente coincide con la 0-connessione ed ha curvatura $R_e(X^*, Y^*) = -\frac{1}{4}\text{ad}([X, Y])$.

Metriche di Einstein

XV.1. Proprietà del tensore di curvatura

Sia (M, g) una varietà pseudo-Riemanniana di dimensione reale m . Sia D la differenziazione covariante su M associata alla sua connessione di Levi-Civita ed indichiamo con R la sua curvatura. Ricordiamo che

$$T(X, Y) = D_X Y - D_Y X - [X, Y] = 0, \quad R(X, Y)Z = D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X, Y]} Z.$$

La curvatura R è un tensore di tipo $(3, 1)$ che, per ogni $X, Y, Z, U \in \mathfrak{X}(M)$, soddisfa le condizioni di simmetria

$$(15.1.1) \quad \begin{cases} R(X, Y) = -R(Y, X), & \text{(antisimmetrico in } X, Y), \\ R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0 & \text{(I identità di Bianchi),} \\ g(R(X, Y)Z, U) + g(Z, R(X, Y)U) = 0, & \text{(} g\text{-antisimmetrico in } Z), \\ g(R(X, Y)Z, U) = g(R(Z, U)X, Y) & \text{(} g\text{-simmetria).} \end{cases}$$

La g -simmetria è conseguenza delle proprietà di antisimmetria e della prima identità di Bianchi. Abbiamo infatti, utilizzando le prime tre delle (15.1.1),

$$\begin{aligned} g(R(X, Y)Z, U) &= -g(R(Y, Z)X, U) - g(R(Z, X)Y, U) \\ &= g(R(Y, Z)U, X) + g(R(Z, X)U, Y) \\ &= -g(R(Z, U)Y, X) - g(R(U, Y)Z, X) \\ &\quad - g(R(X, U)Z, Y) - g(R(U, Z)X, Y) \\ &= 2g(R(Z, U)X, Y) + g(R(U, Y)X, Z) + g(R(X, U)Y, Z) \\ &= 2g(R(Z, U)X, Y) - g(R(X, Y)Z, U), \end{aligned}$$

da cui segue la quarta.

Il tensore di curvatura soddisfa inoltre l'identità differenziale

$$(15.1.2) \quad (D_X R)(Y, Z) + (D_Y R)(Z, X) + (D_Z R)(X, Y) = 0, \quad (\text{II identità di Bianchi}).$$

Utilizzando il tensore della metrica g possiamo considerare la curvatura anche come un tensore di tipo $(4, 0)$, ponendo

$$R(X, Y, Z, U) = g(R(X, Y)U, Z).$$

Le simmetrie fondamentali del tensore di curvatura di tipo $(4, 0)$ sono allora

$$(15.1.3) \quad \begin{cases} R(X, Y, Z, U) = -R(Y, X, Z, U), \\ R(X, Y, Z, U) = -R(X, Y, U, Z), \\ R(X, Y, Z, U) + R(Y, Z, X, U) + R(Z, X, Y, U) = 0, \\ R(X, Y, Z, U) = R(Z, U, X, Y), \\ \forall X, Y, Z, U \in \mathfrak{X}(M). \end{cases}$$

XV.2. Curvatura sezionale

Per le simmetrie (15.1.1), o, in modo equivalente, (15.1.3), del tensore di curvatura, esso definisce un'applicazione

$$\mathcal{R} : \Lambda^2 M \longrightarrow \Lambda^2 M,$$

che sui tensori alternati di rango due si può descrivere mediante

$$g(\mathcal{R}(X \wedge Y), Z \wedge U) = R(X, Y, Z, U) = g(R(X, Y)U, Z).$$

DEFINIZIONE XV.2.1. Se σ è un due-piano anisotropo di $T_p M$, la *curvatura sezionale* in σ è data da

$$K(\sigma) = \frac{R(X, Y, X, Y)}{g(X, X)g(Y, Y) - [g(X, Y)]^2}, \quad \text{se } X, Y \in \sigma, X \wedge Y \neq 0.$$

OSSERVAZIONE XV.2.2. Poiché la forma quadratica associata ad una forma bilineare simmetrica la determina completamente, la curvatura sezionale determina completamente la curvatura Riemanniana.

In particolare, se in un punto $p \in M$ la curvatura sezionale è costante, non dipende cioè dal due piano σ che si considera, dalla

$$R(X, Y, X, Y) = k\{g(X, X)g(Y, Y) - g^2(X, Y)\} \quad \text{in } p$$

ricaviamo che

$$R(X, Y, Z, U) = k\{g(X, Z)g(Y, U) - g(X, U)g(Y, Z)\}, \quad \text{in } p$$

cioè

$$g(R(X, Y)U, Z) = k\{g(X, Z)g(Y, U) - g(X, U)g(Y, Z)\} \quad \text{in } p$$

e quindi

$$R(X, Y)U = k\{g(Y, U)X - g(X, U)Y\} \quad \text{in } p.$$

TEOREMA XV.2.3 (F.Schur). *Supponiamo che M sia connessa. Se $m \geq 3$ e, per ogni $p \in M$ la curvatura sezionale dei due piani in $T_p M$ è costante, allora (M, g) ha curvatura costante, esiste cioè una costante reale k tale che*

$$(15.2.1) \quad R(X, Y)Z = k(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y), \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

DIMOSTRAZIONE. Per ipotesi, la (15.2.1) vale per una funzione $k \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Consideriamo il tensore $\alpha(X, Y, Z) = g(Y, Z)X - g(X, Z)Y$ e consideriamone la derivata covariante rispetto a un campo di vettori $U \in \mathfrak{X}(M)$. Otteniamo

$$\begin{aligned} (\nabla_U \alpha)(X, Y, Z) &= \nabla_U(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y) - g(\nabla_U Y, Z)X - g(Y, \nabla_U Z)X \\ &\quad - g(Y, Z)\nabla_U X + g(\nabla_U X, Z)Y + g(X, \nabla_U Z)Y + g(X, Z)\nabla_U Y = 0, \end{aligned}$$

perché $\nabla_U g = 0$. Utilizzando quindi la seconda identità di Bianchi otteniamo che, per ogni scelta di $X_0, X_1, X_2, X_3 \in \mathfrak{X}(M)$, è (l'apice sul simbolo di sommatoria significa che essa è estesa alle terne (i, j, k) che formano una permutazione con segnatura positiva di $\{0, 1, 2\}$):

$$\begin{aligned} 0 &= \sum'_{i,j,k=0,1,2} \nabla_{X_i} R(X_j, X_k) X_3 \\ &= \sum'_{i,j,k=0,1,2} (X_i k) \{g(X_j, X_3) X_k - g(X_k, X_3) X_j\} \\ &= \{(X_1 k)g(X_2, X_3) - (X_2 k)g(X_1, X_3)\} X_0 \\ &\quad + \{(X_2 k)g(X_0, X_3) - (X_1 k)g(X_2, X_3)\} X_1 \\ &\quad + \{(X_0 k)g(X_1, X_3) - (X_1 k)g(X_0, X_3)\} X_2. \end{aligned}$$

Poiché la dimensione m di M è maggiore o uguale a tre, fissato un qualsiasi punto p di M , possiamo scegliere i campi X_0, X_1, X_2 in modo che siano ortonormali in un intorno di p e prendere poi $X_3 = X_2$. I tre addendi all'ultimo membro dell'uguaglianza scritta sopra sono allora linearmente indipendenti in un intorno di p ed abbiamo quindi, in particolare, poiché il coefficiente di X_0 è nullo in un intorno di p , che $X_1 k = 0$ in p . Poiché sia il punto p che il valore di X_1 in p , possono essere scelti arbitrariamente, con l'unico vincolo che $g(X_1, X_1) = 1$ in p , ne ricaviamo che $dk = 0$ e quindi k è costante su M . \square

ESEMPIO XV.2.4. Sia g_p una forma quadratica in \mathbb{R}^{m+1} con segnatura $(p, m+1-p)$ e definiamo le sottovarietà

$$\begin{aligned} S_p^m &= \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid g(x, x) = 1\}, \\ H_p^m &= \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid g(x, x) = -1\}. \end{aligned}$$

Se $1 \leq p \leq m+1$, la restrizione ad S_p^m di g_p definisce una metrica pseudo-Riemanniana di segnatura $(p, m-p)$ e curvatura sezionale costante 1. Se $0 \leq p \leq m$, la restrizione di g_{p+1} definisce su H_p^m una metrica pseudo-Riemanniana di segnatura $(p, m-p)$ e curvatura sezionale costante -1 .

Per ogni $0 \leq p \leq m+1$, la g_p definisce su \mathbb{R}^{m+1} una metrica pseudo-Riemanniana di segnatura $(p, m+1-p)$ e curvatura sezionale costante nulla.

XV.3. Il tensore di Ricci

Si possono ottenere nuovi tensori a partire dal tensore di curvatura utilizzando le contrazioni. Per le simmetrie del tensore di curvatura, vi è essenzialmente un solo tensore interessante che si possa ottenere in questo modo.

DEFINIZIONE XV.3.1. La *curvatura di Ricci* di (M, g) è il tensore di tipo $(2, 0)$

$$r(X, Y) = \text{tr}(Z \rightarrow R(X, Z)Y).$$

Se Z_1, \dots, Z_m è una base ortonormale per g in un punto $p \in M$, se cioè

$$g(Z_i, Z_j) = \epsilon_i \delta_{i,j}, \quad \text{con } \epsilon_i^2 = 1,$$

allora

$$r(X, Y)(p) = \sum_{i=1}^m \epsilon_i R(X, Z_i, Y, Z_i).$$

Il tensore di Ricci può essere anche considerato come un tensore di tipo $(1, 1)$, $\mathcal{R}ic : TM \rightarrow TM$, mediante:

$$r(X, Y) = g(\mathcal{R}ic(X), Y).$$

OSSERVAZIONE XV.3.2. Il tensore di Ricci è simmetrico: abbiamo cioè $r(X, Y) = r(Y, X)$, ovvero $g(\mathcal{R}ic(X), Y) = g(X, \mathcal{R}ic(Y))$. Ciò è conseguenza del fatto che la connessione di Levi-Civita è simmetrica (cioè priva di torsione). In particolare, quando g sia una metrica Riemanniana, $\mathcal{R}ic$ ha in ogni punto autovalori reali ed è diagonalizzabile.

OSSERVAZIONE XV.3.3. Se la dimensione m di M è due, il tensore di Ricci determina completamente il tensore della metrica. Infatti, se X_1, X_2 è un sistema di riferimento ortonormale, abbiamo nell'intorno di un punto di M , otteniamo

$$\begin{aligned} r(X_1, X_1) &= R(X_1, X_1, X_1, X_1) + R(X_1, X_2, X_1, X_2) = R(X_1, X_2, X_1, X_2), \\ r(X_1, X_2) &= R(X_1, X_1, X_2, X_1) + R(X_1, X_2, X_2, X_2) = 0, \\ r(X_2, X_2) &= R(X_2, X_1, X_2, X_1) + R(X_2, X_2, X_2, X_2) = R(X_1, X_2, X_1, X_2). \end{aligned}$$

Notiamo che, per $m = 2$, il fibrato $\Lambda^2 M$ ha rango 1 e quindi il tensore di curvatura R è completamente determinato dal valore $R(X_1, X_2, X_1, X_2)$ che assume su un qualsiasi sistema di riferimento ortonormale.

Supponiamo sia $m = 3$. Fissiamo un riferimento ortonormale X_1, X_2, X_3 su un aperto di M e consideriamo le componenti del tensore di Ricci:

$$\begin{aligned} r(X_1, X_1) &= R(X_1, X_2, X_1, X_2) + R(X_1, X_3, X_1, X_3), \\ r(X_1, X_2) &= R(X_1, X_3, X_2, X_3), \\ r(X_1, X_3) &= -R(X_1, X_2, X_2, X_3), \\ r(X_2, X_2) &= R(X_1, X_2, X_1, X_2) + R(X_2, X_3, X_2, X_3), \\ r(X_2, X_3) &= R(X_1, X_2, X_1, X_3), \\ r(X_3, X_3) &= R(X_1, X_3, X_1, X_3) + R(X_2, X_3, X_2, X_3). \end{aligned}$$

Possiamo quindi ricavare dai coefficienti del tensore di Ricci quelli del tensore di Riemann. Abbiamo infatti

$$\begin{aligned} R(X_1, X_2, X_1, X_2) &= \frac{1}{2}(r(X_1, X_1) + R(X_2, X_2) - R(X_3, X_3)), \\ R(X_1, X_2, X_1, X_3) &= r(X_2, X_3), \\ R(X_1, X_2, X_2, X_3) &= -r(X_1, X_3), \\ R(X_1, X_3, X_1, X_3) &= \frac{1}{2}(r(X_1, X_1) + r(X_3, X_3) - r(X_2, X_2)), \\ R(X_1, X_3, X_2, X_3) &= r(X_1, X_2), \\ R(X_2, X_3, X_2, X_3) &= \frac{1}{2}(r(X_2, X_2) + R(X_3, X_3) - R(X_1, X_1)). \end{aligned}$$

Quindi in dimensione tre il tensore di Ricci determina completamente il tensore di Riemann.

Possiamo riscrivere le formule che legano il tensore di Riemann ed il tensore di Ricci in dimensione due e tre mediante

$$(15.3.1) \quad \begin{cases} 2R(X_1, X_2, X_3, X_4) = r(X_1, X_3)g(X_2, X_4) + r(X_2, X_4)g(X_1, X_3) \\ \quad - r(X_1, X_4)g(X_2, X_3) - r(X_2, X_3)g(X_1, X_4), \\ \forall X_1, X_2, X_3, X_4 \in \mathfrak{X}(M), \text{ se } m = \dim M = 2, 3. \end{cases}$$

Infatti, i due membri dell'uguaglianza definiscono tensori di tipo $(0, 4)$ e basta dunque verificare l'uguaglianza quando X_1, X_2, X_3, X_4 siano campi di un sistema di riferimento locale.

XV.4. Un Teorema di Myers

Supponiamo che la metrica g sia Riemanniana.

Fissiamo un punto $p \in M$ e un sistema di riferimento ortonormale $\sigma_p = (v_1, \dots, v_m)$ in T_pM . Ad esso associamo coordinate normali $x = (x^1, \dots, x^m)$ definite in un intorno U di p da

$$p(x) = \exp_p(x^1 v_1 + \dots + x^m v_m).$$

Il tensore della metrica ha in queste coordinate componenti

$$g_{i,j} = g(\partial/\partial x^i, \partial/\partial x^j), \quad 1 \leq i, j \leq m.$$

LEMMA XV.4.1. *La funzione*

$$(15.4.1) \quad F_p(q) = \sqrt{|\det(g_{i,j}(x))|}, \quad p(x) = q,$$

non dipende dalla scelta della base ortonormale σ_p .

DIMOSTRAZIONE. Se $\sigma'_p = (w_1, \dots, w_m)$ è un'altra base ortonormale di T_pM , ed $y = (y^1, \dots, y^m)$ le corrispondenti coordinate normali, abbiamo che $x = ay$, con $a = \sigma_p^{-1} \sigma'_p \in \mathbf{O}_b(m)$. Le componenti $g'_{i,j}$ della metrica nelle coordinate y sono allora

$$g'_{i,j} = \sum_{h,k=1}^m a_i^h a_j^k g_{h,k}.$$

Quindi,

$$\sqrt{|\det(g'_{i,j})|} = \sqrt{|\det a|^2 |\det(g_{i,j})|} = F_p,$$

perché $|\det a| = 1$. □

Sia N_p un intorno normale di 0 in T_pM . Ricordiamo che N_p è stellato rispetto all'origine ed $\text{Exp}_p : N_p \rightarrow U_p = \text{Exp}_p(N_p)$ un diffeomorfismo di N_p su un intorno aperto U_p di p in M .

Fissato un vettore non nullo $w \in N_p$, indichiamo con $\gamma_w \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], M)$ la geodetica uscente da p con velocità w . Fissiamo un riferimento ortonormale $\sigma_p = (v_1, \dots, v_m)$ in T_pM con $v_m = w/|w|$ ed indichiamo con J_1^w, \dots, J_m^w i campi di Jacobi che soddisfano il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{D^2 J_h^w}{dt^2} + R(J_h^w(t), \dot{\gamma}_w(t)) \dot{\gamma}_w(t) = 0, \\ J_h^w(0) = 0, \quad \frac{DJ_h^w(0)}{dt} = v_h, \end{cases} \quad 1 \leq h \leq m.$$

Nota che $J_m^w(t) = t|w|^{-1}\dot{\gamma}_w(t)$ per $0 \leq t \leq 1$.

Ricordiamo che i valori $J_h^w(1) \in T_{\text{Exp}(w)}M$ sono le immagini dei vettori v_h mediante il differenziale dell'applicazione esponenziale nel punto w . Con queste notazioni, abbiamo

LEMMA XV.4.2. *Con le notazioni introdotte sopra, abbiamo*

$$(15.4.2) \quad F_p(\text{Exp}_p(w)) = \sqrt{|\det(J_1, \dots, J_{m-1})(1)|}.$$

DIMOSTRAZIONE. L'affermazione segue dal fatto che i campi J_h^w sono ortogonali alla velocità $\dot{\gamma}_w$ lungo la geodetica e $g_{i,j}(\text{Exp}_p(w)) = g_{i,j}(J_i^w(1), J_j^w(1))$ per $1 \leq i, j \leq m$. \square

La funzione introdotta nel Lemma XV.4.1 soddisfa una disuguaglianza relativa alla curvatura di Ricci. Vale infatti la

PROPOSIZIONE XV.4.3. *Sia $\gamma \in \mathcal{C}^\infty([0, t_0], M)$ una geodetica uscente dal punto $p \in M$, con supporto contenuto in un suo intorno normale, ed F_p la funzione definita nel Lemma XV.4.1. Posto*

$$\phi(q) = \frac{1}{t} \sqrt{m-1} \sqrt{\gamma(t)},$$

vale la disuguaglianza

$$(15.4.3) \quad \frac{D^2\phi}{dt^2} + \frac{1}{m-1} r(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})\phi \leq 0.$$

COROLLARIO XV.4.4. *Supponiamo che (M, g) sia completa e che esista una costante $a > 0$ tale che*

$$(15.4.4) \quad r(X, X) \geq (m-1)a^2 g(X, X), \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

Allora ogni geodetica $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, M)$, con $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 1$ ha un punto coniugato $\gamma(t_0)$ di $\gamma(0)$ con $0 < t_0 \leq \pi/a$.

Da questa ricaviamo il ¹

TEOREMA XV.4.5 (Myers). *Sia (M, g) una varietà Riemanniana completa, la cui curvatura di Ricci soddisfi, per una costante $c > 0$, la disuguaglianza*

$$(15.4.5) \quad r(X, X) \geq cg(X, X), \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

Allora M è compatta, con diametro $\leq \pi/c$, ed il suo gruppo fondamentale è finito.

XV.5. Curvatura scalare

DEFINIZIONE XV.5.1. La *curvatura scalare* di una varietà Riemanniana (M, g) è la traccia del suo tensore di Ricci, cioè la funzione

$$(15.5.1) \quad s(p) = \text{tr Ric}_p = \sum_{i=1}^m r(X_i, X_i), \quad \text{con } (X_1, \dots, X_p) \in \mathbf{O}_p(M).$$

OSSERVAZIONE XV.5.2. Su ogni varietà M è possibile definire una metrica con curvatura scalare costante.

¹S.B. Myers: *Riemannian manifolds in the large*, Duke Math.J. **1**, 39-49, (1935).

PROPOSIZIONE XV.5.3. *Il tensore di Ricci e la curvatura scalare sono legati dalla relazione*

$$(15.5.2) \quad \delta r = -\frac{1}{2}ds.$$

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo un riferimento ortonormale $\sigma = (X_1, \dots, X_m)$, definito in un intorno aperto U di un punto $p_0 \in M$. La curvatura scalare si può allora scrivere nella forma

$$s = \sum_{i,j=1}^m R(X_i, X_j, X_i, X_j).$$

Il suo differenziale è

$$\begin{aligned} ds(X) &= \sum (\nabla_X R)(X_i, X_j, X_i, X_j) \\ &\quad - 2 \sum R(\nabla_X X_i, X_j, X_i, X_j) - 2 \sum R(X_i, \nabla_X X_j, X_i, X_j) \\ &= - \sum (\nabla_{X_i} R)(X_j, X, X_i, X_j) - \sum (\nabla_{X_j} R)(X, X_i, X_i, X_j) \\ &\quad - 2 \sum R(\nabla_X X_i, X_j, X_i, X_j) - 2 \sum R(X_i, \nabla_X X_j, X_i, X_j) \\ &= 2 \sum (\nabla_{X_i} R)(X, X_j, X_i, X_j) - 2R(\nabla_X X_i, X_j, X_i, X_j) \end{aligned}$$

□

XV.6. Metriche di Einstein

DEFINIZIONE XV.6.1. Una metrica pseudo-Riemanniana g su M si dice *di Einstein* il suo tensore di Ricci è un multiplo costante della metrica, se cioè esiste una costante λ tale che

$$(15.6.1) \quad r = \lambda g.$$

OSSERVAZIONE XV.6.2. La nozione di metrica di Einstein è interessante quando la dimensione m di M è maggiore o uguale a quattro. Infatti la curvatura è sempre nulla se $m = 1$ e, nei casi $m = 2, 3$ la nozione di metrica di Einstein coincide con quella di curvatura sezionale costante. Abbiamo infatti, per le (15.3.1) ed (15.6.1),

$$R(X_1, X_2, X_1, X_2) = \lambda(g(X_1, X_1)g(X_2, X_2) - |g(X_1, X_2)|^2).$$

OSSERVAZIONE XV.6.3. Se c è una costante positiva, il tensore di Ricci della metrica $c \cdot g$ è lo stesso di quello della metrica g . La costante λ si cambia quindi in λ/c . A meno di un cambiamento conforme della metrica, potremo quindi supporre sempre, se vogliamo, che la costante λ in (15.6.1) sia uguale ad 1, o -1 , o 0.

Spazi simmetrici

XVI.1. Spazi affini localmente simmetrici

Sia M una varietà differenziabile di dimensione m , con una connessione affine definita dalla derivazione covariante ∇ . Fissiamo un punto p di M ed intorno $V_0(p)$ di 0 in T_pM , ed U_p di p in M tali che l'esponenziale in p sia definito su $V_0(p)$ e sia un diffeomorfismo di $V_0(p)$ su U_p . Ricordiamo che l'esponenziale $\exp_p : V_0(p) \rightarrow U_p$ è definito da $\exp_p(X) = \phi_{p,X}(1)$, se $\phi_{p,X}(t)$ è la geodetica di punto iniziale p e velocità iniziale $X \in T_pM$. Possiamo supporre che $V_0(p)$ sia simmetrico rispetto all'origine e definire quindi la *simmetria geodetica rispetto al punto p* mediante la corrispondenza:

$$(16.1.1) \quad U_p \ni q = \exp_p(X) \xrightarrow{s_p} q' = \exp_p(-X) \in U_p.$$

Osserviamo che s_p è un diffeomorfismo di U_p , con $ds_p(p) = -I$ (I è qui l'identità su T_pM) ed $s_p^2 = s_p \circ s_p = \text{id}_{U_p}$.

DEFINIZIONE XVI.1.1. Diciamo che (M, ∇) è una *varietà affine localmente simmetrica* se per ogni punto p di M esiste un intorno aperto U_p di p in M su cui la simmetria affine sia definita e sia una trasformazione affine.

Ricordiamo brevemente la definizione di trasformazione affine. Consideriamo in primo luogo il concetto di trasporto parallelo. Se (M, ∇) è uno spazio affine ed $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$, con $\alpha(0) = p_0$ e $\alpha(1) = p_1$, una curva differenziabile, per ogni vettore $X_0 \in T_{p_0}M$ indichiamo con $[\alpha]_*(X_0)$ il vettore $X_1 \in T_{p_1}M$, definito dal valore $X_1 = X(1)$ del campo di vettori $[0, 1] \ni t \rightarrow X(t) \in TM$ lungo α , con valore iniziale $X(0) = X_0$, definito dal problema di Cauchy per il sistema lineare di equazioni differenziali ordinarie:

$$\begin{cases} \frac{DX(t)}{dt} = \nabla_{\dot{\alpha}(t)}X(t) = 0, \\ X(0) = X_0. \end{cases}$$

Se ora (N, ∇') è un'altra varietà affine, un'applicazione differenziabile $f : M \rightarrow N$ si dice *affine* se preserva il trasporto parallelo, se cioè, per ogni coppia di punti p_0, p_1 di M che siano estremi di un cammino differenziabile $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$, per ogni $X_0 \in T_{p_0}M$ risulta:

$$df(p_1)([\alpha]_*(X_0)) = [f \circ \alpha]_*(df(p_0)(X_0)).$$

Se $f : M \rightarrow N$ è un diffeomorfismo, esso definisce un'applicazione bigettiva $\mathfrak{X}(M) \ni X \rightarrow f_*(X) \in \mathfrak{X}(N)$. In questo caso, la f è una trasformazione affine se e soltanto se preserva la derivazione covariante, cioè se e soltanto se $f_*(\nabla_X Y) = \nabla'_{f_*(X)} f_*(Y)$ per ogni coppia X, Y di campi di vettori di M .

TEOREMA XVI.1.2. *Uno spazio affine (M, ∇) è localmente simmetrico se e soltanto se il suo tensore di torsione T e il suo tensore di curvatura R soddisfano le*

equazioni:

$$(16.1.2) \quad T = 0, \quad \nabla_X R = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che (M, ∇) sia localmente simmetrica. In particolare, per ogni punto $p \in M$, il differenziale in p della simmetria rispetto al punto p è il differenziale di un'affinità. Preserva quindi torsione e curvatura. Ricordiamo che la torsione T è definita da: $T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$ per ogni $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. In un qualsiasi punto p avremo, applicando il differenziale $ds_p = -I$:

$$T(X_p, Y_p) = -(T(-X_p, -Y_p)) = -T(X_p, Y_p)$$

e quindi $T(X_p, Y_p) = 0$ per ogni $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ ed ogni $p \in M$. Ciò dimostra che la torsione è nulla. Analogamente, se $X, Y, Z, T \in \mathfrak{X}(M)$ e $p \in M$, otteniamo:

$$[(\nabla_X R)(Y, Z)T]_p = -[(\nabla_{-X} R)(-Y, -Z)(-T)]_p = -[(\nabla_X R)(Y, Z)T]_p$$

e quindi anche $\nabla_X R = 0$. □

Per concludere la dimostrazione, proveremo più in generale il:

LEMMA XVI.1.3. *Siano (M, ∇) ed (M', ∇') due spazi affini. Supponiamo che, dette T ed R torsione e curvatura di (M, ∇) e T' ed R' quelle di (M', ∇') , risulti:*

$$\nabla_X T = 0, \quad \nabla_{X'} T' = 0, \quad \nabla_X R = 0, \quad \nabla_{X'} R' = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M), \quad \forall X' \in \mathfrak{X}(N).$$

Siano $p \in M, q \in N$ due punti per cui esista un isomorfismo lineare $L: T_p M \rightarrow T_q N$ tale che:

$$\begin{cases} L(T(v_1, v_2)) = T'(L(v_1), L(v_2)), \\ L(R(v_1, v_2)v_3) = R'(L(v_1), L(v_2))L(v_3) \\ \forall v_1, v_2, v_3 \in T_p M. \end{cases}$$

Allora esistono intorno aperti U_p di p in M, U_q di q in N ed un diffeomorfismo affine $f: U_p \rightarrow U_q$ con $df(p) = L$. Tale f è essenzialmente unica, è cioè univocamente determinata da L nella componente connessa di p dell'intorno aperto di p in M su cui è definita.

DIMOSTRAZIONE. Sia $U_p = \exp_p(V_0(p))$ un intorno normale di p in M . Siano X_1, \dots, X_m campi di vettori in U_p ottenuti mediante il trasporto parallelo, lungo le geodetiche uscenti da p , di una base $X_1(p), \dots, X_m(p)$ di $T_p M$. L'ipotesi che curvatura e torsione abbiano differenziale covariante nullo ci dice che le componenti della torsione T e della curvatura R , calcolate rispetto ai campi X_1, \dots, X_m , sono costanti in U_p .

Siano ora X'_1, \dots, X'_m i campi di vettori, definiti in un intorno normale $U_{p'} = \exp_{p'}(V'_0(p'))$, paralleli lungo le geodetiche uscenti da p' , con $X'_j(p') = L(X_j(p))$. Per l'ipotesi che torsione e curvatura abbiano differenziale covariante nullo, le componenti della torsione T' e della curvatura R' , calcolate rispetto ai campi X'_1, \dots, X'_m , sono costanti. Poiché tali componenti coincidono con quelle di T e di R in p' , esse coincidono, essendo costanti, su tutto $U_{p'}$. Siano Φ_p e $\Phi_{p'}$ le applicazioni $\Phi_p(t_1, \dots, t_m) = \exp_p(t_1 X_1(p) + \dots + t_m X_m(p))$ e $\Phi_{p'}(t_1, \dots, t_m) = \exp_{p'}(t_1 X'_1(p') + \dots + t_m X'_m(p'))$. A meno di restringere gli intorni normali U_p e $U_{p'}$, posto $A =$

$\{\sum_{i=1}^m t_i^2 < r^2\} \subset \mathbb{R}^m$, l'affinità locale cercata si può definire mediante il diagramma commutativo :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\Phi_p} & U_p \\ \Phi_{p'} \downarrow & \nearrow f & \\ U'_{p'} & & \end{array}$$

Il fatto che la f così costruita sia un'affinità, segue dall'unicità della soluzione delle equazioni di struttura¹. □

DEFINIZIONE XVI.1.4. Diciamo che una varietà Riemanniana (M, g) è localmente simmetrica se ogni punto p di M ammette un intorno normale in cui la simmetria geodetica (rispetto alla connessione di Levi-Civita) sia un'isometria locale.

TEOREMA XVI.1.5. Una varietà Riemanniana (M, g) è localmente simmetrica se e soltanto se la sua curvatura sezionale è invariante rispetto al trasporto parallelo.

DIMOSTRAZIONE. Se (M, g) è localmente simmetrica, allora il suo tensore di curvatura, e quindi a maggior ragione la sua curvatura sezionale, è invariante per trasporto parallelo. Il viceversa segue dalle proprietà algebriche del tensore di curvatura: se s_p è la simmetria geodetica rispetto al punto p , consideriamo il tensore $B(X, Y, Z, T) = R(X, Y, Z, T) - R(s_p(X), s_p(Y), s_p(Z), s_p(T))$, definito quando $X, Y, Z, T \in \mathfrak{X}(U_p)$ per un intorno normale simmetrico U_p di $p \in M$. Esso è antisimmetrico rispetto alla prima e alla seconda coppia di indici e simmetrico per lo scambio della prima con la seconda coppia di indici. Quindi esso si annulla identicamente perché, per l'ipotesi dell'invarianza rispetto alla simmetria geodetica della curvatura sezionale, abbiamo $B(X, Y, X, Y) = 0$ per ogni $X, Y \in \mathfrak{X}(U_p)$. Da questo si deduce l'invarianza di R rispetto al trasporto parallelo. Resta da verificare che le simmetrie geodetiche di una varietà Riemanniana, quando siano trasformazioni affini, sono anche isometrie. Questo è il contenuto del lemma seguente. □

LEMMA XVI.1.6. Sia (M, g) una varietà Riemanniana connessa e sia $\phi : M \rightarrow M$ un'affinità per la connessione di Levi-Civita. Se, per un punto p_0 di M , il differenziale $d\phi(p_0) : T_{p_0}M \rightarrow T_{\phi(p_0)}M$ è un'isometria di spazi Euclidei, allora $\phi : M \rightarrow M$ è un'isometria.

DIMOSTRAZIONE. Sia q un qualsiasi punto di M e sia $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ una curva differenziabile con $\gamma(0) = q, \gamma(1) = p_0$. Sia $\tau : T_qM \rightarrow T_{p_0}M$ il trasporto parallelo lungo la curva γ . Se $X, Y \in T_qM$, abbiamo:

$$g_q(X, Y) = g_{p_0}(\tau(X), \tau(Y))$$

¹Ricordiamo che le equazioni di struttura sono le :

$$\begin{cases} d\omega^i = -\omega_h^i \wedge \omega^h + \frac{1}{2} T_{j,h}^i \omega^j \wedge \omega^h \\ d\omega_j^i = -\omega_h^i \wedge \omega_j^h + \frac{1}{2} R_{j,h,k}^i \omega^h \wedge \omega^k \end{cases}$$

con $\nabla_{X_i} X_j = \Gamma_{i,j}^h X_h, T(X_i, X_j) = T_{i,j}^h X_h, R(X_h, X_k) X_j = R_{j,h,k}^i X_i, \omega^i(X_j) = \delta_j^i, \omega_j^i = \Gamma_{h,j}^i \omega^h$. Le forme ω^i ci consentono di calcolare le coordinate normali nell'intorno del punto p , quando i campi di vettori X_i siano scelti come nella dimostrazione del lemma.

$$\begin{aligned}
& \text{perché il trasporto parallelo preserva il prodotto scalare,} \\
& = g_{\phi(p_0)}(d\phi(p_0)(\tau(X)), d\phi(p_0)(\tau(Y))) \\
& \quad \text{per l'ipotesi che } d\phi(p_0) \text{ sia un'isometria,} \\
& = g_{\phi(q)}(d\phi(q)(X), d\phi(q)(Y))
\end{aligned}$$

perché, essendo una trasformazione affine, la $d\phi$ commuta con l'operazione di trasporto parallelo, trasporta cioè vettori paralleli lungo la curva γ in vettori paralleli lungo la curva $\phi \circ \gamma$. \square

XVI.2. Alcuni risultati sui gruppi di trasformazioni

Premettiamo allo studio del gruppo $\mathbf{I}(M, g)$ delle isometrie di una varietà Riemanniana (M, g) alcuni risultati generali sui gruppi di trasformazioni di una varietà differenziabile. Vale il:

TEOREMA XVI.2.1. *Siano M una varietà differenziabile numerabile all'infinito e \mathbf{G} un gruppo di diffeomorfismi di M in sé. Denotiamo con \mathfrak{G} l'insieme dei campi di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$ che generano sottogruppi a un parametro di \mathbf{G} .*

Se la sottoalgebra di Lie reale di $\mathfrak{X}(M)$ generata da \mathfrak{G} ha dimensione finita, allora \mathfrak{G} è un'algebra di Lie e possiamo definire su \mathbf{G} una struttura di gruppo di Lie di trasformazioni di M , con algebra di Lie (isomorfa a) \mathfrak{G} .

DIMOSTRAZIONE. Se $X \in \mathfrak{G}$, indichiamo con $\mathbb{R} \ni t \rightarrow \text{Exp}(tX) \in \mathbf{G}$ il gruppo a un parametro di diffeomorfismi generato da X . Siano $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ la sottoalgebra di Lie reale di $\mathfrak{X}(M)$ generata da \mathfrak{G} , $\tilde{\mathbf{G}}$ un gruppo di Lie connesso e semplicemente connesso con algebra di Lie $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$, ed $\exp : \mathfrak{G} \rightarrow \tilde{\mathbf{G}}$ la corrispondente applicazione esponenziale. Ogni $X \in \mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ è generatore infinitesimale di un gruppo locale a un parametro di diffeomorfismi di M , che denoteremo ancora con $\text{Exp}(tX)$:

$$\begin{aligned}
V_X \ni (t, p) & \longrightarrow \text{Exp}(tX)p \in M, \quad \{0\} \times M \subset V_X^{\text{aperto}} \subset \mathbb{R} \times M, \\
\text{Exp}(0X)p & = p, \quad \frac{d}{dt} \text{Exp}(tX)p = X_{\text{Exp}(tX)p}, \quad \forall p \in M, \quad \forall (t, p) \in V_X.
\end{aligned}$$

I campi X di \mathfrak{G} sono completi e quindi porremo $V_X = (\mathbb{R} \times M)$, se $X \in \mathfrak{G}$.

Poiché abbiamo supposto che $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ sia di dimensione finita, per i teoremi di esistenza e unicità e dipendenza \mathcal{C}^∞ dai dati iniziali per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie, possiamo trovare un intorno aperto \mathcal{U} di $(\{e\} \times M)$ in $(\tilde{\mathbf{G}} \times M)$ tale che, se $(g, p) \in \mathcal{U}$, allora vi sono $X \in \mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ e $t \in \mathbb{R}$ tali che $(t, p) \in V_X$ e $g = \exp(tX)$.

Per completare la dimostrazione, proviamo ora alcuni lemmi. \square

LEMMA XVI.2.2. *Siano $X, Y \in \mathfrak{G}$. Allora $Z = \text{Ad}(\exp(X))(Y) \in \mathfrak{G}$.*

DIMOSTRAZIONE. Dobbiamo verificare che Z genera un sottogruppo a un parametro di \mathbf{G} . Poiché

$$M \ni p \rightarrow \text{Exp}(tZ)p = \text{Exp}(X) \circ \text{Exp}(tY) \circ \text{Exp}(-X)p \in M$$

definisce per ogni $t \in \mathbb{R}$ una trasformazione di \mathbf{G} , il campo Z è completo ed appartiene a \mathfrak{G} . \square

LEMMA XVI.2.3. \mathfrak{G} genera $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ come spazio vettoriale su \mathbb{R} .

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con W il sottospazio vettoriale di $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ generato da \mathfrak{G} . Per il lemma precedente, abbiamo $\text{Ad}(\exp(\mathfrak{G}))(\mathfrak{G}) \subset \mathfrak{G}$ e quindi, per linearità, abbiamo anche $\text{Ad}(\exp(\mathfrak{G}))(W) \subset W$. Poiché \mathfrak{G} genera $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ come algebra di Lie, $\exp(\mathfrak{G})$ genera $\tilde{\mathbf{G}}$ come gruppo. L'insieme degli elementi $g \in \tilde{\mathbf{G}}$ per cui $\text{Ad}(g)(W) \subset W$ è un sottogruppo di $\tilde{\mathbf{G}}$. Ne segue che $\text{Ad}(\tilde{\mathbf{G}})(W) \subset W$. Otteniamo in particolare che $\text{Ad}(\exp(W))(W) \subset W$, che ci dà, differenziando, $[W, W] \subset W$. Quindi W è un'algebra di Lie e perciò coincide con $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$. \square

LEMMA XVI.2.4. $\mathfrak{L}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}$.

DIMOSTRAZIONE. Siano $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{G}$ una base di $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ come spazio vettoriale. Allora l'applicazione

$$t_1 X_1 + \dots + t_n X_n \rightarrow \exp(t_1 X_1) \cdots \exp(t_n X_n)$$

è un diffeomorfismo di un intorno N_0 di 0 in $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ su un intorno U_e dell'identità e di $\tilde{\mathbf{G}}$. Quindi, se $Y \in \mathfrak{L}(\mathfrak{G})$, possiamo trovare un $\epsilon > 0$ e funzioni $a_i : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $\sum_{i=1}^n a_i(t) X_i \in N_0$ ed

$$\exp(tY) = \exp(a_1(t)X_1) \cdots \exp(a_n(t)X_n) \quad \text{in } \tilde{\mathbf{G}} \text{ se } |t| < \epsilon.$$

Questa uguaglianza ci dà la

$$\text{Exp}(tY) = \text{Exp}(a_1(t)X_1) \circ \cdots \circ \text{Exp}(a_n(t)X_n) \quad \text{su } M \text{ se } |t| < \epsilon.$$

Definendo $\text{Exp}(tY) = (\text{Exp}[(t/\nu)Y])^\nu$ se $|t| < \nu\epsilon$, otteniamo che $Y \in \mathfrak{G}$. Questo completa la dimostrazione del lemma. \square

Proseguiamo nella dimostrazione del Teorema XVI.2.1.

Sia \mathbf{G}^* il gruppo di diffeomorfismi di M generato da $\exp(\mathfrak{G})$. Poiché \mathbf{G}^* è generato dai sottogruppi a un parametro contenuti in \mathbf{G} , abbiamo $\mathbf{G}^* \subset \mathbf{G}$. Poiché per ogni $g \in \mathbf{G}$ ed ogni sottogruppo a un parametro $\mathbb{R} \ni t \rightarrow a_t \in \mathbf{G}$ anche $\mathbb{R} \ni t \rightarrow \text{ad}(g)(a_t) \in \mathbf{G}$ è ancora un sottogruppo a un parametro di \mathbf{G} , il sottogruppo \mathbf{G}^* è normale in \mathbf{G} . Inoltre, l'applicazione $\text{ad}(g) : \mathbf{G}^* \rightarrow \mathbf{G}^*$ è continua² per la topologia di gruppo di Lie di \mathbf{G}^* , perché trasforma sottogruppi a un parametro in sottogruppi a un parametro.

Il Teorema XVI.2.1 è conseguenza del lemma seguente.

LEMMA XVI.2.5. Sia \mathbf{G}^* un sottogruppo normale di un gruppo \mathbf{G} . Se \mathbf{G}^* è un gruppo topologico e le applicazioni $\text{ad}(g) : \mathbf{G}^* \rightarrow \mathbf{G}^*$ sono continue per ogni $g \in \mathbf{G}$, allora vi è un'unica topologia di gruppo topologico su \mathbf{G} per cui \mathbf{G}^* sia aperto in \mathbf{G} .

DIMOSTRAZIONE. Definiamo su \mathbf{G} la topologia meno fine per cui sono aperti tutti gli insiemi $L_g(A)$ con A aperto di \mathbf{G}^* . Si verifica facilmente che questa topologia è l'unica con le proprietà richieste nell'enunciato del lemma. \square

² Un teorema di Chevalley ([Theory of Lie groups. Princeton Univ. Press, 1946], p.128) ci dice che, se \mathbf{G} e \mathbf{G}' sono due gruppi di Lie, un omomorfismo algebrico $\phi : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}'$ è un omomorfismo di gruppi di Lie se e soltanto se trasforma sottogruppi a un parametro di \mathbf{G} in sottogruppi a un parametro di \mathbf{G}' .

OSSERVAZIONE XVI.2.6. In generale la topologia su \mathbf{G} è più fine della topologia compatta-aperta. Inoltre, non è detto che le componenti connesse di \mathbf{G} , con la topologia che abbiamo definito, formino un insieme di cardinalità al più numerabile. Possiamo ad esempio considerare l'azione sul gruppo additivo \mathbb{R} , che identifichiamo alla varietà M , di un qualsiasi suo sottogruppo \mathbf{G} totalmente sconnesso: in questo caso $\mathfrak{G} = \{0\}$ e la costruzione che abbiamo fatto ci dà su \mathbf{G} la topologia discreta.

Ricordiamo che un *parallelismo assoluto* su una varietà differenziabile M è una sezione $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathfrak{F}(M))$ del fibrato dei suoi sistemi di riferimento. In modo equivalente, è il dato di m campi di vettori X_1, \dots, X_m che definiscono in ogni punto $p \in M$ una base $(X_1(p), \dots, X_m(p))$ di $T_p M$. Un diffeomorfismo $f : M \rightarrow M$ definisce un diffeomorfismo di fibrati principali $\hat{f} : \mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$.

DEFINIZIONE XVI.2.7. Se (M, σ) è la coppia formata da una varietà differenziabile M e da un parallelismo assoluto σ assegnato su M , chiameremo *automorfismi* di (M, σ) i diffeomorfismi $f : M \rightarrow M$ tali che $\hat{f} \circ \sigma = \sigma \circ f$.

Gli automorfismi di (M, σ) formano un gruppo, che denoteremo $\mathbf{Aut}(M, \sigma)$.

TEOREMA XVI.2.8. Sia (M, σ) la coppia formata da una varietà differenziabile connessa M numerabile all'infinito e da un parallelismo assoluto σ su M . Allora $\mathbf{Aut}(M, \sigma)$ è un gruppo di Lie di trasformazioni con $\dim_{\mathbb{R}} \mathbf{Aut}(M, \sigma) \leq \dim_{\mathbb{R}} M$. Più precisamente, per ogni $p \in M$, l'applicazione

$$(*) \quad \mathbf{Aut}(M, \sigma) \ni g \rightarrow g(p) \in M$$

è iniettiva e la sua immagine è una sottovarietà chiusa di M . Vi è un'unica struttura di gruppo di Lie su $\mathbf{Aut}(M, \sigma)$ per cui la (*) sia un diffeomorfismo.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\sigma(p) = (X_1(p), \dots, X_m(p))$ e sia \mathfrak{B} il sottospazio vettoriale reale di $\mathfrak{X}(M)$ generato da X_1, \dots, X_m . Per definizione, le trasformazioni di $\mathbf{Aut}(M, \sigma)$ lasciano \mathfrak{B} invariante. In particolare gli elementi di $\mathbf{Aut}(M, \sigma)$ commutano con gli elementi dei sottogruppi a un parametro $\phi_v(t)$ di diffeomorfismi di M generati dagli elementi v di \mathfrak{B} . Poniamo $\tau_v = \phi_v(1)$. Osserviamo che, per ogni punto $p \in M$, $\tau_v(q)$ è definita per v in un intorno di 0 in \mathfrak{B} e q in un intorno di p in M .

LEMMA XVI.2.9. Per ogni $p \in M$ l'applicazione $\mathbf{Aut}(M, \sigma) \ni g \rightarrow g(p) \in M$ è iniettiva.

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $g \in \mathbf{Aut}(M, \sigma)$ l'insieme $F_g = \{q \in M \mid g(q) = q\}$ dei punti fissi di g è un sottoinsieme chiuso di M . Fissato un punto $q \in M$, al variare di v in un intorno di 0 in \mathfrak{B} , gli elementi $\tau_v(q)$ sono definiti e formano un intorno di q in M . Poiché, come abbiamo osservato, $g \circ \tau_v = \tau_v \circ g$, otteniamo che F_g contiene un intorno di q . Dunque F_g risulta aperto e chiuso in M e quindi o è vuoto, o coincide con M per l'ipotesi che M sia connesso. \square

Sia $\gamma : [0, T] \rightarrow M$ ($T > 0$) una curva differenziabile. Risultano allora determinate m funzioni scalari $a_\gamma^i : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $\dot{\gamma}(t) = \sum_{i=1}^m a_\gamma^i(t) X_i(\gamma(t))$ per ogni

$t \in [0, T]$. Due curve differenziabili $\gamma_1, \gamma_2 : [0, T] \rightarrow M$ si diranno *parallele nel parallelismo completo* σ se $a_{\gamma_1}^i(t) = a_{\gamma_2}^i(t)$ per ogni $t \in [0, T]$. Osserviamo che, data una curva differenziabile $\gamma : [0, T] \rightarrow M$ ed un punto q_0 , vi è al più una curva differenziabile γ' parallela a γ ed uscente dal punto q_0 ; esisterà poi comunque, per qualche $0 < \epsilon \leq T$ sufficientemente piccolo, una $\gamma' : [0, \epsilon] \rightarrow M$ uscente da p_0 e parallela alla restrizione di γ a $[0, \epsilon]$.

LEMMA XVI.2.10. *Per ogni $p_0 \in M$, l'insieme $\mathbf{Aut}(M, \sigma)(p_0)$ è chiuso in M .*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\{a_k\}$ una successione di elementi di $\mathbf{Aut}(M, \sigma)$ tali che $\{a_k(p_0)\}$ converga a un elemento $q_0 \in M$.

Dimostriamo che ogni curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ uscente dal punto p_0 ammette una parallela $\gamma' : [0, 1] \rightarrow M$ uscente da q_0 .

A questo scopo, indichiamo con T l'estremo superiore dei numeri reali $a > 0$ per cui la restrizione di γ a $[0, a]$ ammette una parallela γ'_a con punto iniziale q_0 . Vogliamo dimostrare che esiste la parallela γ'_T . A questo scopo, osserviamo che esistono le parallele $\gamma'_{T'}$ per ogni $0 < T' < T$ e che per ogni t con $0 \leq t < T$, abbiamo $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k(\gamma(t)) = \gamma'_{T'}(t)$ per $0 \leq t \leq T' < T$.

Fissiamo poi un intorno \mathfrak{B}_0 di 0 in \mathfrak{B} e un intorno U di $\gamma(T)$ in M tali che $\tau_v(p)$ sia definita per $v \in \mathfrak{B}_0$ e $p \in U$. Allora τ_v è anche definita, per $v \in \mathfrak{B}_0$, su tutti gli insiemi $a_k(U)$. Sia $t_0 < T$ tale che $a_k(\gamma(t_0)) \in U$ per ogni $k \gg 1$ e $\gamma(T) = \tau_{v_0}(\gamma(t_0))$ per qualche $v_0 \in \mathfrak{B}_0$.

Possiamo allora definire γ'_T ponendo $\gamma'_T(t) = \gamma'_{T'}(t)$ se $0 \leq t \leq T' < T$ e $\gamma'_T(T) = \tau_{v_0}(\gamma'_{T'}(t_0))$ se $t_0 \leq T' < T$.

Se fosse $T < 1$, potremmo prolungare γ'_T con una parallela a $\gamma(t - T)$ uscente dal punto $\gamma'_T(T)$, contraddicendo la definizione di T . Quindi $T = 1$ e questo dimostra l'esistenza della parallela. Poiché $\gamma'(1) = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k(\gamma(1))$, l'estremo $\gamma'(1)$ non dipende dalla scelta del cammino γ , ma soltanto dal suo punto finale $\gamma(1)$.

Dimostriamo in questo modo che $\{a_k(q)\}$ converge per ogni $q \in M$ e otteniamo quindi un'applicazione $a : M \rightarrow M$ mediante $a(q) = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k(q)$ per ogni $q \in M$. Poiché $\tau_v(a(q)) = a(\tau_v(q))$ per ogni $q \in M$, la a è chiaramente differenziabile. Si può dimostrare che è invertibile, ripetendo i raginamenti appena svolti per la successione delle applicazioni inverse $\{a_k^{-1}\}$. \square

Abbiamo facilmente:

LEMMA XVI.2.11. *Sia \mathfrak{l} l'algebra di Lie dei campi di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$ tali che $[X, \mathfrak{B}] = \{0\}$. Per ogni $p \in M$, l'applicazione $\mathfrak{l} \ni X \rightarrow X(p) \in T_p M$ è iniettiva.*

DIMOSTRAZIONE. I generatori di sottogruppi a un parametro di $\mathbf{Aut}(M, \sigma)$ sono gli elementi di \mathfrak{l} che generano sottogruppi a un parametro di diffeomorfismi di M . Quindi, per il Teorema XVI.2.1, il gruppo $\mathbf{Aut}(M, \sigma)$ è un gruppo di Lie, e l'applicazione $\mathbf{Aut}(M, \sigma) \ni a \rightarrow a(p) \in M$ definisce per ogni $p \in M$ un diffeomorfismo di $\mathbf{Aut}(M, \sigma)$ con una sottovarietà differenziabile chiusa di M . \square

Completiamo ora la dimostrazione del Teorema XVI.2.8. L'insieme \mathfrak{G} dei campi di vettori $X \in \mathfrak{l}$ che generano sottogruppi a un parametro di trasformazioni di M è una sottoalgebra di Lie di \mathfrak{l} , e quindi ha dimensione finita. Possiamo perciò

applicare il Teorema XVI.2.1 al gruppo $\mathbf{G} = \mathbf{Aut}(M, \sigma)$ e a \mathfrak{G} , e concludere che \mathbf{G} ha una struttura di gruppo di Lie con algebra di Lie \mathfrak{G} . Poiché l'azione $\mathbf{G} \times M \rightarrow M$ è differenziabile, fissato un qualsiasi punto $p_0 \in M$, l'immersione differenziabile $\mathbf{G} \ni g \rightarrow g(p_0) \in M$ è un diffeomorfismo di \mathbf{G} con una sottovarietà differenziabile chiusa di M . \square

Ricordiamo che vale il teorema³:

TEOREMA XVI.2.12 (Bochner-Montgomery). *Sia \mathbf{G} un gruppo topologico localmente compatto e numerabile all'infinito di trasformazioni differenziabili di una varietà differenziabile paracompatta M . Allora \mathbf{G} è un gruppo di Lie.*

Ricordiamo ancora⁴ il:

TEOREMA XVI.2.13 (Dantzig-van der Waerden). *Sia (E, d) uno spazio metrico localmente compatto. Sia $\mathbf{Isom}(E, d)$ il gruppo delle isometrie di (M, E) e, per $x \in E$, indichiamo con $\mathbf{Isom}_x(E, d)$ lo stabilizzatore di x in $\mathbf{Isom}(E, d)$. Consideriamo su $\mathbf{Isom}(E, d)$ la topologia compatta-aperta. Allora $\mathbf{Isom}(E, d)$ è localmente compatto e $\mathbf{Isom}_x(E, d)$ è compatto per ogni $x \in M$. Se M è compatto, anche $\mathbf{Isom}(E, d)$ è compatto.*

OSSERVAZIONE XVI.2.14. Ricordiamo ancora che, se (M, g) è una varietà Riemanniana e d è la distanza nella metrica corrispondente, allora le isometrie $f : M \rightarrow M$ per la metrica d sono applicazioni differenziabili che preservano il tensore g della metrica. Indicheremo nel seguito con $\mathbf{O}(M, g)$ il gruppo delle isometrie della varietà Riemanniana (M, g) , cioè:

$$\mathbf{O}(M, g) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(M, M) \mid f^*g = g\}.$$

Se d è la distanza su M definita dalla metrica g , allora $\mathbf{Isom}(M, d) = \mathbf{O}(M, g)$.

XVI.3. Automorfismi affini e isometrie

Per utilizzare i risultati del §XVI.2 nella discussione del gruppo delle affinità di una varietà affine (M, ∇) e delle isometrie di una varietà Riemanniana (M, g) , è conveniente riformulare le nozioni di varietà affini e riemanniane nel contesto della teoria delle \mathbf{G} -strutture.

Sia M una varietà differenziabile di dimensione m . Indichiamo con:

$$\mathfrak{F}(M) \xrightarrow[\mathbf{GL}(m, \mathbb{R})]{\pi} M$$

il fibrato principale dei sistemi di riferimento su M .

³S.Bochner, D.Montgomery *Locally compact groups of differentiable transformations*, Ann. of Math. **47** (1946), pp.639-657.

⁴D.Dantzig, B.L.van der Waerden *Über metrisch homogene Räume*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **6** (1928) pp.374-376. Una dimostrazione completa si può trovare anche in: Kobayashi-Nomizu *Foundations of Differential Geometry*, New York: John Wiley & Sons, vol.1, 1963, alle pagine 46-50.

Gli elementi della fibra $\mathfrak{F}_p(M) = \pi^{-1}(p)$ sono le basi (v_1, \dots, v_m) di T_pM . Il gruppo $\mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$ opera a destra su $\mathfrak{F}(M)$ mediante:

$$(v_1, \dots, v_m) \cdot a = \left(\sum_{i=1}^m a_1^i v_i, \dots, \sum_{i=1}^m a_m^i v_i \right) \quad \text{se } a = (a_j^i)_{1 \leq i, j \leq m} \in \mathbf{GL}(m, \mathbb{R}).$$

Se $\sigma = (X_1, \dots, X_m)$ è una m -upla di campi di vettori che definiscono una base di T_pM in ogni punto p di un aperto U di M , allora l'applicazione:

$$U \times \mathbf{GL}(m, \mathbb{R}) \ni (p, a) \rightarrow \sigma(p) \cdot a \in \pi^{-1}(U)$$

è un diffeomorfismo per la struttura differenziabile di $\mathfrak{F}(M)$.

In modo equivalente, possiamo definire la fibra $\mathfrak{F}_p(M)$ sopra il punto $p \in M$ come l'insieme di tutte le applicazioni lineari invertibili $\xi: \mathbb{R}^m \rightarrow T_pM$, identificando una base (v_1, \dots, v_m) di T_pM all'isomorfismo lineare $\xi: \mathbb{R}^m \rightarrow T_pM$ che associa al vettore $e_i = (0, \dots, 0, \underset{i}{\rightarrow} 1, 0, \dots, 0)$ della base canonica di \mathbb{R}^m il vettore v_i di T_pM .

Definiamo allora in modo affatto naturale la *forma canonica* $\theta \in \Omega^1(\mathfrak{F}(M), \mathbb{R}^m)$ mediante:

$$\theta(v) = \xi^{-1}(d\pi(v)) \quad \forall \xi \in \mathfrak{F}(M), \quad \forall v \in T_\xi \mathfrak{F}(M).$$

Osserviamo che:

$$(R_a)^* \theta = a^{-1} \circ \theta \quad \forall a \in \mathbf{GL}(m, \mathbb{R}).$$

Infatti, se $v \in T_\xi \mathfrak{F}(M)$, allora $dR_a(v) \in T_{\xi \cdot a} \mathfrak{F}(M)$ e $d\pi(dR_a(v)) = d\pi(v)$. Quindi:

$$(R_a)^* \theta(v) = \theta(dR_a(v)) = (\xi \cdot a)^{-1}(d\pi(dR_a(v))) = a^{-1} \circ \xi^{-1}(d\pi(v)) = a^{-1} \circ \theta(v).$$

PROPOSIZIONE XVI.3.1. *Ogni diffeomorfismo $f: M \rightarrow M$ si solleva in modo unico ad un diffeomorfismo $\hat{f}: \mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$ che lascia θ invariante. Viceversa, ogni automorfismo di $\mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$ -fibrato principale $F: \mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$ che lasci θ invariante è il sollevamento di un diffeomorfismo $f: M \rightarrow M$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $f: M \rightarrow M$ un diffeomorfismo. Definiamo allora il suo sollevamento \hat{f} mediante:

$$\hat{f}: \mathfrak{F}(M) \ni \xi \rightarrow df(\pi(\xi)) \circ \xi \in \mathfrak{F}(M).$$

Abbiamo allora, se $\xi \in \mathfrak{F}(M)$ e $v \in T_\xi \mathfrak{F}(M)$:

$$\begin{aligned} \theta(d\hat{f}(v)) &= (df(\pi(\xi)) \circ \xi)^{-1} (d\pi(d\hat{f}(\xi)(v))) \\ &= (\xi^{-1} \circ (df(\pi(\xi)))^{-1}) (df(\pi(\xi)) \circ d\pi(v)) = \theta(v). \end{aligned}$$

Infatti, poiché \hat{f} preserva le fibre, abbiamo $f \circ \pi = \pi \circ \hat{f}$ e quindi $df \circ d\pi = d\pi \circ d\hat{f}$.

Viceversa, se $F: \mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$ preserva le fibre e lascia θ invariante, detto $f: M \rightarrow M$ il diffeomorfismo definito da $\pi \circ F = f \circ \pi$, osserviamo che $\Phi = \hat{f}^{-1} \circ F$ è un automorfismo differenziabile di $\mathfrak{F}(M)$ che preserva la fibra, lascia θ invariante e induce l'identità su M . Perciò abbiamo:

$$\begin{aligned} \xi^{-1}(d\pi(v)) &= \theta(v) = \Phi^*(\theta(v)) = \theta(d\Phi(v)) \\ &= (\Phi(\xi))^{-1} (d\pi(d\Phi(v))) = (\Phi(\xi))^{-1} (d\pi(v)) \\ &\quad \forall \xi \in \mathfrak{F}(M), \quad \forall v \in T_\xi \mathfrak{F}(M). \end{aligned}$$

Otteniamo dunque $(\Phi(\xi))^{-1}(w) = \xi^{-1}(w)$ per ogni $w \in T_{\pi(\xi)}M$, e questo dimostra che Φ è l'identità su $\mathfrak{F}(M)$. \square

DEFINIZIONE XVI.3.2. Per ogni $A \in \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})$, definiamo il *campo di vettori fondamentale* $A^* \in \mathfrak{X}(\mathfrak{F}(M))$ associato ad A come il generatore infinitesimale del gruppo a un parametro di diffeomorfismi $\mathfrak{F}(M) \times \mathbb{R} \ni (\xi, t) \rightarrow \xi \cdot \exp(tA) \in \mathfrak{F}(M)$.

Una *connessione affine* su M si può definire, oltre che per mezzo della derivazione covariante, mediante l'assegnazione di una *forma di connessione*, cioè di una forma differenziale $\omega \in \Omega^1(M, \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}))$ che goda delle proprietà:

- (1) $\omega(A^*) = A \quad \forall A \in \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})$
- (2) $R_a^* \omega = \text{Ad}(a^{-1}) \circ \omega \quad \forall a \in \mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$.

Un vettore $v \in T_\xi \mathfrak{F}(M)$ con $\omega(v) = 0$ si dice *orizzontale*. Poiché $\omega(\xi) : T_\xi \mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})$ ha rango m^2 e $\ker d\pi(\xi) \cap \ker \omega(\xi) = \{0\}$ per la proprietà (1), la forma di connessione ω ci permette di decomporre lo spazio tangente a $\mathfrak{F}(M)$ in un punto ξ nella somma diretta dei due sottospazi $\mathfrak{V}_\xi(M) = \ker d\pi(\xi)$ dei *vettori verticali in ξ* e $\mathfrak{H}_\xi(M)$ dei⁵ *vettori orizzontali in ξ* .

Poiché $d\pi(\xi) : \mathfrak{H}_\xi(M) \rightarrow T_{\pi(\xi)}M$ è per ogni $\xi \in \mathfrak{F}(M)$ un isomorfismo lineare, possiamo associare ad ogni campo di vettori X definito su un aperto U di M un campo di vettori orizzontale \tilde{X} su $\pi^{-1}(U)$, caratterizzato dalle:

$$\begin{cases} \omega(\tilde{X}) = 0 \\ d\pi(\tilde{X}) = X. \end{cases}$$

La derivazione covariante associata alla connessione affine è definita dalla formula:

$$(\dagger) \quad \nabla_X Y(\pi(\xi)) = \xi \circ \tilde{X}_\xi(\xi^{-1}(Y)) = \xi \circ \tilde{X}(\theta(\tilde{Y})) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M), \forall \xi \in \mathfrak{F}(M),$$

dove osserviamo che, fissato $Y \in \mathfrak{X}(M)$, la $\xi \rightarrow \Psi_Y(\xi) = \xi^{-1}(Y(\pi(\xi)))$ è una funzione differenziabile su $\mathfrak{F}(M)$ a valori in \mathbb{R}^m . Chiaramente:

$$\begin{cases} R_a^* \Psi_Y(\xi) = \Psi_Y(\xi \cdot a) = (\xi \cdot a)^{-1} Y(\pi(\xi \cdot a)) = a^{-1} \xi^{-1} Y(\pi(\xi)) = a^{-1} \Psi_Y(\xi) \\ \forall Y \in \mathfrak{X}(M), \forall \xi \in \mathfrak{F}(M), \forall a \in \mathbf{GL}(m, \mathbb{R}), \end{cases}$$

e quindi:

$$\begin{aligned} R_a^*(\xi \circ \tilde{X}(\Psi_Y)) &= (\xi \circ a) \circ (R_{a^{-1}} \tilde{X})(\Psi_Y) = (\xi \circ a) \circ \tilde{X}(R_a^* \Psi_Y) \\ &= \xi \circ a \circ \tilde{X}(a^{-1} \Psi_Y) = \xi \circ a \circ a^{-1} \circ \tilde{X}(\Psi_Y) = \xi \circ \tilde{X}(\Psi_Y) \end{aligned}$$

mostra che la derivata covariante $\nabla_X Y$ è ben definita dalla (\dagger), perché il valore del secondo membro è costante quando ξ varia sulla fibra $\mathfrak{F}_p(M)$ del punto $p \in M$.

Viceversa, si può dimostrare che, data di una derivazione covariante ∇ , vi è un'unica forma di connessione ω per cui vale la (\dagger).

Abbiamo infatti:

$$\xi \circ (X - [\omega(X)]^*)(\theta(\tilde{Y})) = \nabla_{d\pi(X)} Y \quad \forall X \in \mathfrak{X}(\mathfrak{F}(M)), \forall Y \in \mathfrak{X}(M).$$

⁵ Un modo equivalente di definire una connessione affine è quello di assegnare una distribuzione vettoriale \mathfrak{H} su $\mathfrak{F}(M)$, complementare della distribuzione verticale.

Quindi:

$$(\ddagger) \quad [\omega(X)]^*(\theta(\tilde{Y})) = X(\theta(\tilde{Y})) - \xi^{-1} \nabla_{d\pi(X)} Y \quad \forall X \in \mathfrak{X}(\mathfrak{F}(M)), \forall Y \in \mathfrak{X}(M)$$

ci permette di calcolare ω utilizzando la forma canonica θ e la derivazione covariante.

TEOREMA XVI.3.3. *Sia M una varietà differenziabile, dotata di una connessione affine definita dalla forma di connessione $\omega \in \Omega^1(\mathfrak{F}(M), \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}))$. Un diffeomorfismo $f : M \rightarrow M$ è un'affinità se e soltanto se il suo sollevamento \hat{f} lascia invariante la forma di connessione ω .*

Viceversa, un diffeomorfismo di fibrati principali $F : \mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$ è il sollevamento di un'affinità se e soltanto se lascia invarianti la forma canonica θ e la forma di connessione ω .

DIMOSTRAZIONE. Le (\dagger) e (\ddagger) ci dicono che le trasformazioni affini di M sono tutte e sole quelle il cui sollevamento lascia ω invariante. L'ultima affermazione segue dal fatto che un diffeomorfismo di $\mathfrak{F}(M)$ in sé è un sollevamento di un diffeomorfismo di M in sé se e soltanto se preserva le fibre e lascia invariante la forma canonica θ . \square

TEOREMA XVI.3.4. *Il gruppo delle affinità di una varietà differenziabile M , dotata di una connessione affine, è un gruppo di Lie di dimensione minore o uguale a $m(m+1)$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\omega \in \Omega^1(\mathfrak{F}(M), \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}))$ la forma della connessione. Allora la forma

$$\theta \oplus \omega \in \Omega^1(\mathfrak{F}(M), \mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}))$$

definisce un parallelismo completo su $\mathfrak{F}(M)$. La tesi è allora conseguenza del Teorema XVI.2.8. \square

Sia \mathbf{G} un sottogruppo chiuso del gruppo lineare $\mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$. Una \mathbf{G} -struttura su M è il dato di un fibrato principale $\mathbf{P} \xrightarrow[\mathbf{G}]{\varpi} M$ e di un'immersione differenziabile $\iota : \mathbf{P} \hookrightarrow \mathfrak{F}(M)$, in modo che sia commutativo il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P} \times \mathbf{G} & \longrightarrow & \mathfrak{F}(M) \times \mathbf{GL}(m, \mathbb{R}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{P} & \longrightarrow & \mathfrak{F}(M) \\ \varpi \downarrow & & \downarrow \pi \\ M & \xlongequal{\quad} & M \end{array}$$

in cui la prime due frecce orizzontali sono definite dalle inclusioni $\iota : \mathbf{P} \hookrightarrow \mathfrak{F}(M)$ e $\mathbf{G} \hookrightarrow \mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$.

Osserviamo che \mathbf{P} è una sottovarietà chiusa di $\mathfrak{F}(M)$. Infatti, fissata una sezione differenziabile σ di \mathbf{P} , definita in un aperto U di M , abbiamo $\mathbf{P} \cap \pi^{-1}(U) = \{\xi \in \pi^{-1}(U) \mid \xi^{-1} \circ \sigma(\pi(\xi)) \in \mathbf{G}\}$ e l'applicazione $\pi^{-1}(U) \ni \xi \rightarrow \xi^{-1} \circ \sigma(\pi(\xi)) \in \mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$ è continua. Quindi $\mathbf{P} \cap \pi^{-1}(U)$ è chiuso in $\pi^{-1}(U)$ per l'ipotesi che \mathbf{G} fosse chiuso

in $\mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$. Poiché gli insiemi $\pi^{-1}(U)$, al variare di U tra gli aperti di trivializzazione di \mathbf{P} , formano un ricoprimento aperto di $\mathfrak{F}(M)$, otteniamo che \mathbf{P} è chiuso in $\mathfrak{F}(M)$.

Gli elementi X dell'algebra di Lie \mathfrak{g} di \mathbf{G} definiscono campi di vettori su \mathbf{P} che sono la restrizione dei corrispondenti campi di vettori verticali X^* definiti su $\mathfrak{F}(M)$, e che indicheremo ancora con X^* .

Una \mathbf{G} -connessione affine su M è il dato di una \mathbf{G} -struttura $\mathbf{P} \xrightarrow{\varpi} M$ su M , e di una forma differenziale $\omega' \in \Omega^1(\mathbf{P}, \mathfrak{g})$ con le proprietà:

$$(1) \quad \omega'(A^*) = A \quad \forall A \in \mathfrak{g}$$

$$(2) \quad R_a^* \omega' = \text{Ad}(a^{-1}) \circ \omega' \quad \forall a \in \mathbf{G}.$$

Indichiamo con $\mathfrak{H}' = \ker \omega' \subset \mathfrak{X}(\mathbf{P})$ la distribuzione orizzontale associata alla \mathbf{G} -connessione affine. Abbiamo:

$$dR_a(\mathfrak{H}'_\xi) = \mathfrak{H}'_{\xi \cdot a} \quad \forall \xi \in \mathbf{P}, \forall a \in \mathbf{G}.$$

Possiamo quindi estendere la distribuzione orizzontale \mathfrak{H}' su \mathbf{P} a una distribuzione orizzontale \mathfrak{H} su $\mathfrak{F}(M)$ ponendo

$$\mathfrak{H}_{\xi \cdot a} = dR_a(\mathfrak{H}'_\xi) \quad \text{se } \xi \in \mathbf{P}, a \in \mathbf{GL}(m, \mathbb{R}).$$

Estendiamo così la $\omega' \in \Omega^1(\mathbf{P}, \mathfrak{g})$ a una forma di connessione affine di Cartan $\omega \in \Omega^1(\mathfrak{F}(M), \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}))$, ponendo:

$$\omega(X) = A \quad \text{se } X \in T_\xi \mathfrak{F}(M) \text{ e } X = A_\xi^* + Y \text{ con } A \in \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}) \text{ e } Y \in \mathfrak{H}'_\xi.$$

Possiamo quindi definire in modo equivalente una \mathbf{G} -connessione affine mediante il dato di una forma di connessione affine ω su $\mathfrak{F}(M)$ tale che, per una \mathbf{G} -struttura $\mathbf{P} @ > \varpi > \mathbf{G} > M$, detta $\iota : \mathbf{P} \rightarrow \mathfrak{F}(M)$ l'inclusione, risulti $\iota^* \omega \in \Omega^1(\mathbf{P}, \mathfrak{g})$, tale cioè che la sua restrizione a \mathbf{P} sia una forma a valori nell'algebra di Lie \mathfrak{g} di \mathbf{G} .

LEMMA XVI.3.5. *Siano $\mathbf{P} \xrightarrow{\varpi} M$ una \mathbf{G} -struttura, $\omega' \in \Omega^1(\mathbf{P}, \mathfrak{g})$ una \mathbf{G} -connessione affine e $\omega \in \Omega^1(\mathfrak{F}(M), \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}))$ la sua estensione a $\mathfrak{F}(M)$. Sia $f : M \rightarrow M$ un diffeomorfismo. Supponiamo che M sia connessa. Sono equivalenti:*

(a) $\hat{f}^* \omega = \omega$ ed esiste $\xi_0 \in \mathbf{P}$ tale che $\hat{f}(\xi_0) \in \mathbf{P}$.

(b) $\hat{f}(\mathbf{P}) = \mathbf{P}$ e, detta $\hat{f}^{\mathbf{G}} : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}$ la restrizione di \hat{f} a \mathbf{P} , abbiamo

$$(\hat{f}^{\mathbf{G}})^* \omega' = \omega'.$$

DIMOSTRAZIONE. (a) \implies (b). Sia $\text{pr} : \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}) \rightarrow V = \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})/\mathfrak{g}$ la proiezione nel quoziente. Consideriamo la forma differenziale $\text{pr} \circ \omega \in \Omega^1(\mathfrak{F}(M), V)$ e la corrispondente distribuzione vettoriale $\mathfrak{D} = \ker(\text{pr} \circ \omega)$ in $\mathfrak{F}(M)$. Ricordiamo che una *varietà integrale* di \mathfrak{D} è una sottovarietà differenziabile N di $\mathfrak{F}(M)$ con $T_\xi N \subset \mathfrak{D}_\xi$ per ogni $\xi \in N$. Poiché \hat{f} lascia fissa la forma ω , essa lascia fissa a maggior ragione la forma $\text{pr} \circ \omega$ e trasforma quindi varietà integrali di \mathfrak{D} in varietà integrali di \mathfrak{D} . La tesi segue allora dal fatto che \mathbf{P} è una sottovarietà integrale massimale di \mathfrak{D} .

(b) \implies (a). Segue dal fatto che $\hat{f}(\xi \cdot a) = \hat{f}^{\mathbf{G}}(\xi) \cdot a$ e $\omega(\xi \cdot a) = R_a^* \omega'(\xi)$ se $\xi \in \mathbf{P}$ e $a \in \mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$. \square

DEFINIZIONE XVI.3.6. Un diffeomorfismo $f : M \rightarrow M$ che soddisfi le condizioni equivalenti (a) e (b) del Lemma XVI.3.5 si dice una trasformazione \mathbf{G} -affine, o una \mathbf{G} -affinità, di M .

Sia $\mathbf{P} \xrightarrow[\mathbf{G}]{\varpi} M$ una \mathbf{G} struttura su M . Indichiamo ancora con θ la restrizione a \mathbf{P} della forma canonica di $\mathfrak{F}(M)$. La forma di connessione ω' di una \mathbf{G} -connessione affine definisce un parallelismo completo, mediante la forma $\theta \oplus \omega \in \Omega^1(\mathbf{P}, \mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{g})$.

Per il Teorema XVI.2.8 abbiamo :

COROLLARIO XVI.3.7. *Il gruppo delle trasformazioni \mathbf{G} -affini di M , per un'assegnata connessione affine $\omega' \in \Omega^1(\mathbf{P}, \mathfrak{g})$ reattiva a una \mathbf{G} -struttura $\mathbf{P} \xrightarrow[\mathbf{G}]{\varpi} M$ è un gruppo di Lie di dimensione $\leq \dim_{\mathbb{R}} M + \dim_{\mathbb{R}} \mathbf{G}$.* \square

COROLLARIO XVI.3.8. *Due trasformazioni \mathbf{G} -affini f, g di M , per un'assegnata connessione affine $\omega' \in \Omega^1(\mathbf{P}, \mathfrak{g})$ reattiva a una \mathbf{G} -struttura $\mathbf{P} \xrightarrow[\mathbf{G}]{\varpi} M$, coincidono se sono uguali con i loro differenziali in un punto $p_0 \in M$.*

Una metrica Riemanniana g su M definisce una $\mathbf{O}(m)$ -struttura $\mathfrak{D}(M)$ su M , in cui gli elementi della fibra $\mathfrak{D}_p(M)$ sono le basi ortonormali di $T_p M$ rispetto al prodotto scalare g_p . Viceversa, una $\mathbf{O}(m)$ -struttura su M definisce univocamente una metrica Riemanniana g su M .

Il Lemma XVI.1.6 ci dice che le isometrie di (M, g) sono tutte e sole le trasformazioni affini f rispetto alla connessione di Levi-Civita per cui $df(p_0) : T_{p_0} M \rightarrow T_{f(p_0)} M$ è un'isometria in qualche punto $p_0 \in M$.

La restrizione ω' della forma ω della connessione di Levi-Civita è una $\mathbf{O}(m)$ -connessione affine.

Otteniamo perciò:

TEOREMA XVI.3.9. *Sia (M, g) una varietà Riemanniana. Un'isometria di M è un automorfismo differenziabile $f : M \rightarrow M$ il cui sollevamento è un'affinità per la connessione di Levi-Civita e per cui $\hat{f}(\mathfrak{D}(M)) = \mathfrak{D}(M)$.*

Il gruppo delle isometrie $\mathbf{O}(M, g)$ è un gruppo di Lie di dimensione minore o uguale di $m(m+1)/2$.

Lo stabilizzatore $\mathbf{O}_p(M, g)$ di un punto $p \in M$ nel gruppo $\mathbf{O}(M, g)$ delle isometrie di (M, g) è un gruppo compatto.

DIMOSTRAZIONE. Il teorema è una conseguenza delle osservazioni precedenti e del Corollario XVI.3.7. Infatti $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{o}(m) = m(m-1)/2$ e quindi $\mathfrak{D}(M)$ è una varietà differenziabile di dimensione $[m(m-1)/2] + m = m(m+1)/2$. \square

Citiamo a questo punto, senza dimostrazione⁶, il seguente :

⁶Vedi ad esempio: [S.Kobayashi Transformation groups in Differential Geometry, New York, Springer 1972] a pag.46.

TEOREMA XVI.3.10. *Sia (M, g) una varietà Riemanniana di dimensione m . Se il suo gruppo delle isometrie $\mathbf{O}(M, g)$ ha dimensione massima $m(m+1)/2$, allora (M, g) è isometrico a uno dei seguenti spazi a curvatura costante :*

- (a) *Lo spazio Euclideo \mathbb{R}^m ;*
- (b) *La sfera m -dimensionale S^m ;*
- (c) *Lo spazio proiettivo m -dimensionale $\mathbb{R}P^m$;*
- (d) *Lo spazio iperbolico semplicemente connesso m -dimensionale H^m .*

Descriviamo brevemente un modello dello spazio iperbolico m -dimensionale H^m . Consideriamo l'ipersuperficie regolare di \mathbb{R}^{m+1} :

$$H^m = \left\{ x = (x_0, x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid x_0^2 = 1 + \sum_{i=1}^m x_i^2 \right\}$$

Abbiamo :

$$T_x H^m = \left\{ v = (v_0, v_1, \dots, v_m) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid x_0 v_0 = \sum_{i=1}^m x_i v_i \right\}$$

e definiamo la metrica iperbolica g su H^m ponendo :

$$g_x(v, v) = c \cdot \left(-v_0^2 + \sum_{i=1}^m v_i^2 \right) \quad \forall x \in H^m, \forall v \in T_x H^m$$

per una costante $c > 0$. Osserviamo che H^m è l'orbita del punto $(1, 0, \dots, 0)$ rispetto al gruppo $\mathbf{O}(1, m)$ delle trasformazioni lineari di \mathbb{R}^{m+1} che preservano la forma bilineare simmetrica definita dalla matrice $\text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$. Il gruppo $\mathbf{O}(1, m)$ è il gruppo delle isometrie di H^m , che si identifica allo spazio omogeneo $\mathbf{O}(1, m)/(\mathbf{O}(1) \times \mathbf{O}(m))$, dove :

$$\mathbf{O}(1) \times \mathbf{O}(m) \simeq \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & \\ & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbf{O}(m) \right\}$$

è lo stabilizzatore in $\mathbf{O}(1, m)$ del punto $(1, 0, \dots, 0)$.

XVI.4. Spazi Riemanniani globalmente simmetrici

Sia (M, g) uno spazio Riemanniano. Diciamo che (M, g) è *uno spazio Riemanniano globalmente simmetrico* se, per ogni punto $p \in M$ esiste un'isometria involutiva $s_p \in \mathbf{O}(M, g)$ che abbia p come punto fisso isolato.

Osserviamo che vale il seguente :

LEMMA XVI.4.1. *Sia (M, g) uno spazio Riemanniano e $p \in M$. Allora esiste al più un'isometria involutiva s_p che abbia p come punto fisso isolato. Se una tale s_p esiste, allora $ds_p(p) = -\text{Id}$ su $T_p M$ ed s_p coincide, in un intorno di p , con la simmetria geodetica rispetto alla connessione di Levi-Civita.*

DIMOSTRAZIONE. Sia s_p un'isometria involutiva di (M, g) con p come punto fisso isolato. Abbiamo $(ds_p(p))^2 = \text{Id}$ su $T_p M$ e quindi $T_p M$ si decompone nella somma diretta dei sottospazi corrispondenti agli autovalori 1 e -1 di $(ds_p(p))$. Se ci fosse un $v \in T_p M \setminus \{0\}$ con $ds_p(p)(v) = v$, allora s_p lascerebbe fissi tutti i punti

della geodetica uscente da p con vettore tangente v e quindi p non sarebbe punto fisso isolato. Perciò $ds_p(p) = -\text{Id}$. Poiché, essendo un'isometria, s_p trasforma geodetiche in geodetiche, essa è allora, in un intorno di p , la simmetria geodetica rispetto a p . \square

LEMMA XVI.4.2. *Ogni spazio Riemanniano globalmente simmetrico è completo.*

DIMOSTRAZIONE. Sia (M, g) uno spazio Riemanniano globalmente simmetrico. Sia $\gamma : (a, b) \rightarrow M$ una geodetica massimale. Se fosse ad esempio $b < +\infty$, fissato ϵ con $0 < 2\epsilon < b - a$, posto $p = \gamma(b - \epsilon)$, la simmetria s_p ci permette di prolungare la geodetica γ a una geodetica $\tilde{\gamma}$ definita su $(a, 2b - a - 2\epsilon)$:

$$\tilde{\gamma}(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{se } a < t < b \\ s_p(\gamma(2b - 2\epsilon - t)) & \text{se } b \leq t < 2b - a - 2\epsilon, \end{cases}$$

contraddicendone la massimalità. Deve quindi essere $b = +\infty$, e con ragionamento analogo si dimostra che $a = -\infty$. \square

Osserviamo che, se $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ è una geodetica massimale con $\gamma(0) = p$, allora $s_p \circ \gamma(t) = \gamma(-t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Da questo fatto ricaviamo subito che:

TEOREMA XVI.4.3. *Il gruppo delle isometrie di uno spazio Riemanniano globalmente simmetrico connesso è un gruppo transitivo di trasformazioni.*

DIMOSTRAZIONE. Sia (M, g) uno spazio Riemanniano connesso globalmente simmetrico. Indichiamo con d_g la distanza definita dalla metrica g . Siano p_0, p_1 due qualsiasi punti di M . Poiché (M, g) è completo, esiste una geodetica $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$, di lunghezza $\ell(\gamma) = d_g(p_0, p_1)$. Abbiamo allora $p_1 = s_{\gamma(\frac{1}{2})}(p_0)$. Infatti $s_{\gamma(\frac{1}{2})}$ è la simmetria geodetica rispetto al punto $\gamma(\frac{1}{2})$ e quindi trasforma la geodetica $\gamma(t)$ nella geodetica $\gamma(1 - t)$. \square

TEOREMA XVI.4.4. *Sia (M, g) uno spazio Riemanniano globalmente simmetrico, connesso. Indichiamo con \mathbf{G} la componente connessa dell'identità nel gruppo di Lie $\mathbf{O}(M, g)$ delle isometrie di (M, g) . Fissiamo un punto $p_0 \in M$ e sia \mathbf{K} lo stabilizzatore di p_0 in \mathbf{G} .*

(i) *Lo stabilizzatore \mathbf{K} di p_0 in \mathbf{G} è un sottogruppo di Lie compatto di \mathbf{G} e il diagramma commutativo:*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{G} & \longrightarrow & M \\ \downarrow & & \nearrow f \\ \mathbf{G}/\mathbf{K} & & \end{array}$$

in cui la freccia orizzontale è l'applicazione $\pi : \mathbf{G} \ni a \rightarrow a(p_0) \in M$ e la freccia verticale la proiezione nel quoziente, definisce un diffeomorfismo f dello spazio omogeneo \mathbf{G}/\mathbf{K} su M .

(ii) *L'applicazione $\sigma = \text{ad}(s_{p_0}) : \mathbf{G} \ni a \rightarrow s_{p_0} \circ a \circ s_{p_0} \in \mathbf{G}$ è un automorfismo involutivo di \mathbf{G} tale che, detto \mathbf{K}_σ l'insieme dei punti fissi di σ e \mathbf{K}_σ^0 la componente*

connessa dell'identità in \mathbf{K}_σ , risulta :

$$\mathbf{K}_\sigma^0 \subset \mathbf{K} \subset \mathbf{K}_\sigma .$$

Il gruppo \mathbf{K} non contiene sottogruppi normali non banali di \mathbf{G} .

(iii) Siano \mathfrak{g} e \mathfrak{k} le algebre di Lie di \mathbf{G} e \mathbf{K} , rispettivamente. Allora

$$\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} \mid d\sigma(p_0)(X) = X\}$$

e, posto

$$\mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g} \mid d\sigma(p_0)(X) = -X\}$$

abbiamo

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p} .$$

Abbiamo poi $d\pi(e)(\mathfrak{k}) = \{0\}$ e $d\pi(e) : \mathfrak{p} \rightarrow T_{p_0}M$ è un isomorfismo. Se $X \in \mathfrak{p}$, allora :

$$\mathbb{R} \ni t \rightarrow \exp(tX)(p_0) \in M$$

è la geodetica uscente da p_0 con velocità $d\pi(e)(X)$. Per ogni $v \in T_{p_0}M$, il vettore $[d\exp(tX)](p_0)(v)$ è il traslato di v parallelamente lungo la geodetica.

DIMOSTRAZIONE. L'affermazione (i) è conseguenza del Teorema XVI.3.9.

(ii) Per ogni $k \in \mathbf{K}$, le due isometrie k e $\sigma(k) = \text{ad}(s_{p_0})(k) = (s_{p_0} \circ k \circ s_{p_0})$ di (M, g) coincidono con il loro differenziale in p_0 . È quindi, per il Corollario XVI.3.8, $\sigma(k) = \text{ad}(s_{p_0})(k) = k$ per ogni $k \in \mathbf{K}$. In particolare, $d\sigma(e)(\mathfrak{k}) = \text{Ad}(s_{p_0})(\mathfrak{k}) = \mathfrak{k}$, e $d\sigma(e)$ è l'identità su \mathfrak{k} . D'altra parte, se $X \in \mathfrak{g}$ è un punto fisso di $d\sigma(e)$, avremo anche :

$$s_{p_0} \circ \exp_{\mathbf{G}}(tX) \circ s_{p_0} = \text{ad}(s_{p_0})(\exp_{\mathbf{G}}(tX)) = \exp_{\mathbf{G}}(\text{ad}_{\mathfrak{g}}(s_{p_0})(X)) = \exp_{\mathbf{G}}(tX),$$

onde $s_{p_0}(\exp_{\mathbf{G}}(tX)(p_0)) = \exp_{\mathbf{G}}(tX)(p_0)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e quindi $\exp_{\mathbf{G}}(tX)(p_0) = p_0$, perché p_0 è un punto fisso isolato di s_{p_0} . Quindi \mathfrak{k} è proprio l'insieme dei punti fissi di $d\sigma(e)$. Poiché il gruppo delle isometrie $\mathbf{O}(M, g)$ e \mathbf{G} operano su \mathbf{G}/\mathbf{K} in modo effettivo, \mathbf{K} non contiene sottogruppi normali non banali di \mathbf{G} .

(iii) Poiché $d\sigma(e)$ è un'involuzione e \mathfrak{k} è il sottospazio dei suoi punti fissi, abbiamo la decomposizione $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$.

Poiché $d\pi(e)$ ha nucleo uguale a \mathfrak{k} , ne segue che la sua restrizione a \mathfrak{p} è un isomorfismo su $T_{p_0}M$.

Sia ora $X \in \mathfrak{p}$ e sia $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ la geodetica uscente da p_0 con velocità $d\pi(e)(X)$. Consideriamo, per ogni numero reale t , l'isometria $u_t = s_{\gamma(t/2)} \circ s_{p_0}$. Dico che $\mathbb{R} \ni t \rightarrow u_t \in \mathbf{O}(M, g)$ è un sottogruppo a un parametro di $\mathbf{O}(M, g)$. Infatti, se $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, abbiamo :

$$\begin{aligned} u_{t_1} \circ u_{t_2}(p_0) &= u_{t_1} \circ s_{\gamma(t_2/2)}(p_0) = s_{\gamma(t_1/2)} \circ s_{p_0}(\gamma(t_2)) \\ &= s_{\gamma(t_1/2)}(\gamma(-t_2)) = \gamma(t_1 + t_2) \\ &= s_{\gamma[(t_1+t_2)/2]}(p_0) = u_{t_1+t_2}(p_0) . \end{aligned}$$

Inoltre, $du_t : T_{\gamma(s)} \rightarrow T_{\gamma(t+s)}$ definisce, per ogni coppia di numeri reali t, s , il trasporto parallelo lungo la geodetica γ .

Per verificare questo fatto, osserviamo in primo luogo che, per ogni numero reale s , la $-ds_{p_0}(\gamma(s))$ definisce il trasporto parallelo da $T_{\gamma(s)}$ a $T_{\gamma(-s)}$ lungo la geodetica γ . A questo scopo, indichiamo con $\tau_{s_1, s_2}^\gamma : T_{\gamma(s_1)}M \rightarrow T_{\gamma(s_2)}M$ il trasporto parallelo da $\gamma(s_1)$ a $\gamma(s_2)$ lungo γ . Abbiamo allora un diagramma commutativo :

$$\begin{array}{ccc} T_{p_0}M & \xrightarrow{\tau_{0,s}^\gamma} & T_{\gamma(s)}M \\ ds_{p_0}(p_0) \downarrow & & \downarrow ds_{p_0}(\gamma(s)) \\ T_{p_0}M & \xrightarrow{\tau_{0,-s}^\gamma} & T_{\gamma(-s)}M \end{array}$$

Da questa ricaviamo che

$$\begin{aligned} \tau_{0,-s} \circ ds_{p_0}(p_0) &= ds_{p_0}(\gamma(s)) \circ \tau_{s,0}^\gamma \quad \text{e, poich\`e } -ds_{p_0}(p_0) = I, \\ \tau_{0,-s}^\gamma &= -ds_{p_0}(\gamma(s)) \circ \tau_{s,0}^\gamma, \quad \text{da cui otteniamo :} \\ -ds_{p_0}(\gamma(s)) &= \tau_{0,-s}^\gamma \circ [\tau_{0,s}^\gamma]^{-1} = \tau_{0,-s}^\gamma \circ \tau_{s,0}^\gamma = \tau_{s,-s}^\gamma. \end{aligned}$$

Analogamente, $-ds_{\gamma(s)}$ definisce, per ogni coppia di numeri reali s, t , il trasporto parallelo da $T_{\gamma(t)}M$ a $T_{\gamma(2s-t)}M$ lungo la geodetica γ . Quindi, per composizione, $du_t = (-ds_{\gamma(t/2)} \circ (-ds_{p_0}))$ definisce il trasporto parallelo lungo γ da $\gamma(s)$ a $\gamma(t+s)$. È perciò $du_{t_1} \circ du_{t_2} = du_{t_1+t_2}$, perché il trasporto parallelo da $\gamma(s)$ a $\gamma(s+t_1+t_2)$ si può ottenere componendo il trasporto parallelo da $\gamma(s)$ a $\gamma(s+t_2)$ con quello da $\gamma(s+t_2)$ a $\gamma(s+t_1+t_2)$.

In particolare $(u_{t_1} \circ u_{t_2})$ ed $u_{t_1+t_2}$ coincidono con i loro differenziali in p_0 ed, essendo isometrie, coincidono dappertutto : $u_{t_1} \circ u_{t_2} = u_{t_1+t_2}$ e $\mathbb{R} \ni t \rightarrow u_t \in \mathbf{O}(M, g)$ è un gruppo a un parametro di isometrie. Possiamo quindi trovare $Y \in \mathfrak{g}$ tale che $u_t = \exp_{\mathbf{G}}(tY)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Risulta poi

$$\sigma \circ u_t = s_{p_0} \circ s_{\gamma(t/2)} = s_{\gamma(-t/2)} \circ s_{p_0} = u_{-t}.$$

Da questa ricaviamo che $d\sigma(e)(Y) = -Y$, quindi $Y \in \mathfrak{p}$ e perciò $Y = X$. \square

XVI.5. Coppie simmetriche e simmetriche Riemanniane

Sia \mathbf{G} un gruppo di Lie connesso ed \mathbf{H} un suo sottogruppo chiuso. La coppia (\mathbf{G}, \mathbf{H}) si dice una *coppia simmetrica* se esiste un automorfismo analitico involutivo $\sigma : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$ con

$$\mathbf{G}_\sigma^0 \subset \mathbf{H} \subset \mathbf{G}_\sigma,$$

ove $\mathbf{G}_\sigma = \{a \in \mathbf{G} \mid \sigma(a) = a\}$ e \mathbf{G}_σ^0 è la componente connessa dell'identità di \mathbf{G}_σ .

Se $\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(\mathbf{H})$ è compatto⁷ in $\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(\mathbf{G})$, la coppia (\mathbf{G}, \mathbf{H}) si dice *simmetrica Riemanniana*.

TEOREMA XVI.5.1. *Sia (\mathbf{G}, \mathbf{K}) una coppia simmetrica Riemanniana e sia M lo spazio omogeneo $M = \mathbf{G}/\mathbf{K}$. Siano $\pi : \mathbf{G} \rightarrow M$ la proiezione naturale nel quoziente*

⁷ Questo è vero in particolare se \mathbf{H} è un sottogruppo compatto di \mathbf{G} .

e $\tau : \mathbf{G} \rightarrow \text{Aut}(M)$ la rappresentazione di \mathbf{G} come gruppo di diffeomorfismi di M , indotta dalla traslazione a sinistra su M :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{G} \times \mathbf{G} & \xrightarrow{(a,b) \rightarrow (a,\pi(b))} & \mathbf{G} \times M \\ (a,b) \rightarrow ab \downarrow & & \downarrow (a,p) \rightarrow \tau(a)(p) \\ \mathbf{G} & \xrightarrow{a \rightarrow \pi(a)} & M. \end{array}$$

Sia σ un automorfismo analitico involutivo di \mathbf{G} tale che $\mathbf{K}_\sigma^0 \subset \mathbf{K} \subset \mathbf{K}_\sigma$ (ove \mathbf{K}_σ è il sottogruppo dei punti fissi di σ e \mathbf{K}_σ^0 la sua componente dell'identità). Allora esistono metriche Riemanniane \mathbf{G} -invarianti g su M . Rispetto a una qualsiasi metrica \mathbf{G} -invariante g , lo spazio (M, g) è globalmente simmetrico Riemanniano. Sia $\mathbf{o} = \pi(e)$ e sia $s_{\mathbf{o}}$ la corrispondente simmetria geodetica. Essa soddisfa:

$$\begin{aligned} s_{\mathbf{o}} \circ \pi &= \pi \circ \sigma \\ \tau(\sigma(a)) &= s_{\mathbf{o}} \circ \tau(a) \circ s_{\mathbf{o}} \quad \forall a \in \mathbf{G}. \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE XVI.5.2. Osserviamo che, in particolare, la simmetria geodetica $s_{\mathbf{o}}$ è indipendente dalla scelta della metrica Riemanniana \mathbf{G} -invariante. In effetti, la connessione di Levi-Civita su M risulta indipendente dalla particolare scelta della metrica \mathbf{G} -invariante su M .

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con \mathfrak{g} e \mathfrak{k} le algebre di Lie di \mathbf{G} e \mathbf{K} , rispettivamente e poniamo $\mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g} \mid d\sigma(e)(X) = -X\}$. Allora $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$. Se $X \in \mathfrak{p}$ e $k \in \mathbf{K}$, abbiamo:

$$\begin{aligned} \sigma(\exp_{\mathbf{G}}(t\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(k)(X))) &= \sigma(\text{ad}(k)(\exp_{\mathbf{G}}(tX))) = \text{ad}(k)(\exp_{\mathbf{G}}(-tX)) \\ &= \exp_{\mathbf{G}}(-t\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(k)(X)), \end{aligned}$$

da cui otteniamo subito che $d\sigma(e)(\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(k)(X)) = -\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(k)(X)$. Quindi \mathfrak{p} è invariante rispetto ad $\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(\mathbf{K})$. L'applicazione $d\pi(e)$ manda \mathfrak{g} su $T_{\mathbf{o}}M$ ed ha come nucleo \mathfrak{k} . Se $X \in \mathfrak{p}$, abbiamo:

$$\pi(\exp_{\mathbf{G}}(\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(k)(tX))) = \pi(\text{ad}(k)(\exp(tX))) = \tau(k)(\exp(tX)).$$

Differenziando quest'espressione per $t = 0$, otteniamo:

$$d\pi(e) \circ \text{Ad}_{\mathfrak{g}}(X) = d\tau(k) \circ d\pi(e)(X) \quad \forall k \in \mathbf{K} \quad \forall X \in \mathfrak{p}.$$

Poiché $\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(\mathbf{K})$ è compatto il $\mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$, esiste un prodotto scalare \mathbf{b} su \mathfrak{p} , invariante rispetto alla restrizione a \mathfrak{p} di $\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(\mathbf{K})$. Allora $g_{\mathbf{o}} = \mathbf{b} \circ (d\pi(e)|_{\mathfrak{p}})^{-1}$ è un prodotto scalare su $T_{\mathbf{o}}M$, invariante rispetto a $\tau(k)$ per ogni $k \in \mathbf{K}$. Definiamo allora una metrica Riemanniana su M ponendo:

$$g_{\tau(g)(\mathbf{o})}(d\tau(g)(v), d\tau(g)(w)) = g_{\mathbf{o}}(v, w) \quad \forall g \in \mathbf{G}, \quad \forall v, w \in T_{\mathbf{o}}M.$$

Questa definizione è consistente perché \mathbf{b} è invariante rispetto ad $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathbf{K})$.

Viceversa, ogni metrica Riemanniana \mathbf{G} -invariante su $M = \mathbf{G}/\mathbf{K}$ è di questa forma per qualche prodotto scalare invariante \mathbf{b} su \mathfrak{p} .

Definiamo ora la simmetria $s_{\mathbf{o}}$ di M mediante la condizione:

$$s_{\mathbf{o}} \circ \pi = \pi \circ \sigma.$$

Chiaramente $s_{\mathbf{o}}$ è un diffeomorfismo involutivo di M in sé, con $ds_{\mathbf{o}}(\mathbf{o}) = -\text{Id}$ su $T_{\mathbf{o}}M$.

Dimostriamo che $s_{\mathbf{o}}$ è un'isometria. Sia $p = \pi(a) = \tau(a)(\mathbf{o}) \in M$. Se $X, Y \in T_pM$, allora $X_0 = d\tau(a^{-1})(p)(X), Y_0 = d\tau(a^{-1})(p)(Y) \in T_{\mathbf{o}}M$. Per ogni $x \in \mathbf{G}$ abbiamo:

$$s_{\mathbf{o}} \circ \tau(a)(\pi(x)) = s_{\mathbf{o}}(\pi(ax)) = \pi(\sigma(ax)) = \pi(\sigma(a)\sigma(x)) = (\tau(\sigma(a)) \circ s_{\mathbf{o}})(\pi(x)).$$

Quindi $s_{\mathbf{o}} \circ \tau(a) = \tau(\sigma(a)) \circ s_{\mathbf{o}}$. Ricaviamo:

$$\begin{aligned} g(ds_{\mathbf{o}}(X), ds_{\mathbf{o}}(Y)) &= g(ds_{\mathbf{o}} \circ d\tau(a)(X_0), ds_{\mathbf{o}} \circ d\tau(a)(Y_0)) \\ &= g(d\tau(\sigma(a)) \circ ds_{\mathbf{o}}(X_0), d\tau(\sigma(a)) \circ ds_{\mathbf{o}}(Y_0)) \\ &= g(ds_{\mathbf{o}}(X_0), ds_{\mathbf{o}}(Y_0)) = g(X_0, Y_0) = g(X, Y). \end{aligned}$$

Quindi $s_{\mathbf{o}}$ è un'isometria e, poiché $s_{\mathbf{o}}(\mathbf{o}) = \mathbf{o}$ e $ds_{\mathbf{o}}(\mathbf{o}) = -\text{Id}$ su $T_{\mathbf{o}}M$, coincide con la simmetria geodetica rispetto a \mathbf{o} . Per un qualsiasi punto $p = \pi(a)$, la simmetria geodetica rispetto a p è l'isometria $s_p = \tau(a) \circ s_{\mathbf{o}} \circ \tau(a^{-1})$. Questo dimostra che $M = \mathbf{G}/\mathbf{K}$ è globalmente simmetrico. \square

La $\mathbf{G} \ni a \rightarrow \tau(a) \in \mathbf{O}(M, g)$ è un omomorfismo di gruppi di Lie. Il suo nucleo \mathbf{N} è un sottogruppo chiuso normale di \mathbf{G} , contenuto in \mathbf{K} . Se \mathbf{Z} è il centro di \mathbf{G} , i gruppi $\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(\mathbf{K})$ e $\mathbf{K}/(\mathbf{K} \cap \mathbf{Z})$ sono isomorfi. Poiché $\mathbf{K} \cap \mathbf{Z} \subset \mathbf{N}$, ne segue che $\mathbf{K}/(\mathbf{K} \cap \mathbf{N})$ è compatto. Chiaramente la $(\mathbf{G}/\mathbf{N}, \mathbf{K}/(\mathbf{K} \cap \mathbf{N}))$ è un'altra coppia simmetrica Riemanniana, che definisce lo stesso spazio simmetrico della coppia (\mathbf{G}, \mathbf{K}) .

TEOREMA XVI.5.3. *Sia (\mathbf{G}, \mathbf{K}) una coppia simmetrica Riemanniana. Sia \mathfrak{k} l'algebra di Lie di \mathbf{K} e \mathfrak{z} quella del centro \mathbf{Z} di \mathbf{G} . Se $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{z} = \{0\}$, allora esiste un unico automorfismo involutivo $\sigma : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$ tale che $\mathbf{K}_{\sigma}^0 \subset \mathbf{K} \subset \mathbf{K}_{\sigma}$ (dove \mathbf{K}_{σ} è il sottogruppo dei punti fissi di σ e \mathbf{K}_{σ}^0 la sua componente connessa dell'identità).*

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che il differenziale in e dell'involuzione σ cercata è l'identità su \mathfrak{k} , e l'opposto dell'identità su un sottospazio di \mathfrak{g} complementare di \mathfrak{k} in \mathfrak{g} , e trasforma in sé l'ortogonale \mathfrak{k}^{\perp} di \mathfrak{k} rispetto alla forma di Killing $\kappa_{\mathfrak{g}}$ di \mathfrak{g} .

Poiché $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{z} = \{0\}$, la forma di Killing $\kappa_{\mathfrak{g}}$ è definita negativa su \mathfrak{k} . Infatti, poiché $\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(\mathbf{K})$ è un sottogruppo compatto, gli elementi $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)$, per $X \in \mathfrak{k}$, si esprimono come matrici antisimmetriche $(a_{i,j}(X))$, in una opportuna base⁸ di \mathfrak{g} . Quindi, se $X \in \mathfrak{k}$:

$$\kappa_{\mathfrak{g}}(X, X) = - \sum_{i,j} [a_{i,j}]^2 \leq 0$$

e vale l'uguaglianza se e soltanto se $a_{i,j}(X) = 0$ per ogni i, j , cioè se $X \in \mathfrak{k} \cap \mathfrak{z}$. Quindi $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{k}^{\perp}$, dove \mathfrak{k}^{\perp} è l'ortogonale di \mathfrak{k} rispetto alla forma di Killing e $d\sigma(e)$ è completamente determinato perché è l'identità su \mathfrak{k} e $-\text{Id}$ su \mathfrak{k}^{\perp} . A sua volta $d\sigma(e)$ determina completamente σ . \square

⁸È sufficiente considerare una base ortonormale di \mathfrak{g} rispetto a un prodotto scalare invariante per $\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(\mathbf{K})$.

Un'algebra di Lie ortogonale simmetrica è una coppia $(\mathfrak{g}, \varsigma)$, formata da :

- (i) un'algebra di Lie reale di dimensione finita \mathfrak{g} ,
- (ii) un automorfismo involutivo $\varsigma : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, tale che :
l'insieme $\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \varsigma(X) = X\}$ dei punti fissi
- (iii) di ς sia una sottoalgebra immersa in \mathfrak{g} in modo compatto.
Diciamo che la coppia $(\mathfrak{g}, \varsigma)$ è *effettiva* se, detto \mathfrak{z} il centro di \mathfrak{g} , è :
- (iv) $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{z} = \{0\}$.

Ricordiamo che il fatto che \mathfrak{k} sia immersa in modo compatto in \mathfrak{g} significa che la sottoalgebra $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k})$ di $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ genera un sottogruppo compatto del gruppo $\text{Int}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ degli automorfismi interni di \mathfrak{g} . Nel caso in cui la coppia $(\mathfrak{g}, \varsigma)$ sia effettiva, la condizione è equivalente al fatto che la forma di Killing $\kappa_{\mathfrak{g}}$ di \mathfrak{g} sia definita negativa su \mathfrak{k} .

Abbiamo osservato che, ad una coppia simmetrica Riemanniana (\mathbf{G}, \mathbf{K}) , a cui sia associato un automorfismo involutivo σ di \mathbf{G} , è associata l'algebra di Lie ortogonale simmetrica $(\mathfrak{g}, \varsigma)$, ove \mathfrak{g} è l'algebra di Lie di \mathbf{G} e $\varsigma = d\sigma(e)$.

Sia $(\mathfrak{g}, \varsigma)$ un'algebra di Lie simmetrica ortogonale e sia \mathfrak{k} il luogo dei punti fissi di ς .

Una coppia (\mathbf{G}, \mathbf{K}) di gruppi di Lie associata a $(\mathfrak{g}, \varsigma)$ è una coppia formata da un gruppo di Lie connesso \mathbf{G} ed un suo sottogruppo chiuso \mathbf{K} con algebre di Lie uguali a \mathfrak{g} e a \mathfrak{k} , rispettivamente.

Abbiamo:

TEOREMA XVI.5.4. *Sia $(\mathfrak{g}, \varsigma)$ un'algebra di Lie ortogonale simmetrica e sia \mathfrak{k} la sottoalgebra di Lie dei punti fissi di ς .*

(a) *Sia $\tilde{\mathbf{G}}$ un gruppo di Lie connesso e semplicemente connesso con algebra di Lie \mathfrak{g} e sia $\tilde{\mathbf{K}}$ il suo sottogruppo analitico con algebra di Lie \mathfrak{k} . Allora $\tilde{\mathbf{K}}$ è un sottogruppo chiuso di $\tilde{\mathbf{G}}$ e $(\tilde{\mathbf{G}}, \tilde{\mathbf{K}})$ è una coppia simmetrica Riemanniana. Lo spazio simmetrico $\tilde{M} = \tilde{\mathbf{G}}/\tilde{\mathbf{K}}$ è semplicemente connesso.*

(b) *Se (\mathbf{G}, \mathbf{K}) è una qualsiasi coppia di gruppi di Lie associata a $(\mathfrak{g}, \varsigma)$, allora $M = \mathbf{G}/\mathbf{K}$ è uno spazio Riemanniano localmente simmetrico rispetto a qualsiasi metrica \mathbf{G} -invariante.*

(c) *\tilde{M} è il rivestimento universale di M .*

DIMOSTRAZIONE. Poiché $\tilde{\mathbf{G}}$ è semplicemente connesso, l'involuzione ς di \mathfrak{g} definisce univocamente un automorfismo $\tilde{\sigma}$ di $\tilde{\mathbf{G}}$ con $d\tilde{\sigma}(e) = \varsigma$. Il luogo $\tilde{\mathbf{K}}_{\tilde{\sigma}}$ dei punti fissi di $\tilde{\sigma}$ è chiuso in $\tilde{\mathbf{G}}$ e quindi è tale anche la sua componente connessa dell'identità $\tilde{\mathbf{K}}$. Poiché $\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(\tilde{\mathbf{K}})$ è il sottogruppo analitico di $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ generato da $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k})$, è compatto e quindi $(\tilde{\mathbf{G}}, \tilde{\mathbf{K}})$ è una coppia Riemanniana simmetrica e $\tilde{M} = \tilde{\mathbf{G}}/\tilde{\mathbf{K}}$ è uno spazio globalmente simmetrico Riemanniano rispetto a qualsiasi metrica $\tilde{\mathbf{G}}$ -invariante su \tilde{M} , definita a partire da un prodotto scalare $\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(\mathbf{K})$ -invariante su $T_0\tilde{M}$.

Se \mathbf{G} è un gruppo di Lie con algebra di Lie \mathfrak{g} e \mathbf{K} un suo sottogruppo chiuso con algebra di Lie \mathfrak{k} , il rivestimento $\tilde{\mathbf{G}} \rightarrow \mathbf{G}$ definisce per passaggio al quoziente il

rivestimento universale $\tilde{M} \rightarrow M = \mathbf{G}/\mathbf{K}$. Le simmetrie geodetiche globali di \tilde{M} definiscono, per diffeomorfismi locali, simmetrie Riemanniane locali di M , rispetto a qualsiasi metrica \mathbf{G} -invariante di M . \square

Algebre di Clifford e Spinori

XVII.1. Algebre di Clifford

Indichiamo con \mathbb{k} o il campo dei numeri reali, o quello dei numeri complessi.

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita m su \mathbb{k} ed indichiamo con $\mathbf{T}(V) = \bigoplus_{h=0}^{\infty} \mathbf{T}^h(V)$ la sua algebra tensoriale, con $\mathbf{T}^0(V) = \mathbb{k}$, $\mathbf{T}^1(V) = V$ e $\mathbf{T}^{h+1}(V) = V \otimes \mathbf{T}^h(V)$ per $h \geq 1$. Ricordiamo che $\mathbf{T}(V)$ è \mathbb{Z}_+ -graduata ed è caratterizzata dalla proprietà universale:

PROPOSIZIONE XVII.1.1. *È $V \subset \mathbf{T}(V)$ ed ogni applicazione lineare $\phi : V \rightarrow \mathbf{A}$ di V in un'algebra associativa unitaria si estende in modo unico ad un omomorfismo di algebre $\tilde{\phi} : \mathbf{T}(V) \rightarrow \mathbf{A}$.*

Fissiamo una forma bilineare simmetrica

$$(17.1.1) \quad \mathbf{b} : V \times V \ni (v, w) \longrightarrow \mathbf{b}(v, w) \in \mathbb{k}.$$

Sia $\mathbf{J}_{\mathbf{b}}$ l'ideale bilatero di $\mathbf{T}(V)$ generato dagli elementi della forma $v \otimes v + \mathbf{b}(v, v) \cdot 1$, al variare di v in V .

DEFINIZIONE XVII.1.2. L'algebra di Clifford $\mathcal{C}\ell_{\mathbf{b}}(V)$ associata alla forma \mathbf{b} è il quoziente $\mathbf{T}(V)/\mathbf{J}_{\mathbf{b}}$ dell'algebra tensoriale $\mathbf{T}(V)$, rispetto all'ideale bilatero $\mathbf{J}_{\mathbf{b}}$.

Poiché $\mathbf{T}(V)$ è associativa e unitaria, anche $\mathcal{C}\ell_{\mathbf{b}}(V)$ è associativa e unitaria. Indichiamo con

$$\pi : \mathbf{T}(V) \longrightarrow \mathcal{C}\ell_{\mathbf{b}}(V) = \mathbf{T}(V)/\mathbf{J}_{\mathbf{b}}$$

la proiezione nel quoziente.

La composizione

$$V \hookrightarrow \mathbf{T}(V) \xrightarrow{\pi} \mathcal{C}\ell_{\mathbf{b}}(V)$$

è iniettiva e ci permette di considerare V un sottospazio di $\mathcal{C}\ell_{\mathbf{b}}(V)$.

L'algebra di Clifford si può caratterizzare con la proprietà universale:

PROPOSIZIONE XVII.1.3. *È $V \subset \mathcal{C}\ell_{\mathbf{b}}(V)$ ed ogni applicazione lineare $\phi : V \rightarrow \mathbf{A}$ di V in un'algebra associativa unitaria tale che $\phi(v)^2 = \mathbf{b}(v, v) \cdot 1_{\mathbf{A}}$ si estende in modo unico ad un omomorfismo $\tilde{\phi} : \mathcal{C}\ell_{\mathbf{b}}(V) \rightarrow \mathbf{A}$.*

NOTAZIONE XVII.1.4. Se $v_1, \dots, v_k \in V$, indichiamo con $v_1 \cdots v_k$ l'elemento $\pi(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k)$ di $\mathcal{C}\ell_{\mathbf{b}}(V)$. In generale, indichiamo con $x \cdot y$, o semplicemente con xy , il prodotto di $x, y \in \mathcal{C}\ell_{\mathbf{b}}(V)$.

OSSERVAZIONE XVII.1.5. Se $v_1, v_2 \in V$, vale la formula di anticommutazione

$$v_1 v_2 + v_2 v_1 + 2\mathbf{b}(v_1, v_2) = 0.$$

Questa è infatti conseguenza della $(v_1 + v_2)(v_1 + v) + \mathbf{b}(v_1 + v_2, v_1 + v_2) = 0$.

In particolare, $v_1 v_2 = -v_2 v_1$ se v_1 e v_2 sono \mathbf{b} -ortogonali.

ESEMPIO XVII.1.6. L'algebra di Clifford $\mathcal{C}\ell_0(V)$, corrispondente alla forma nulla, coincide con l'algebra di Grassmann $\Lambda(V)$ dei tensori alternati di V .

PROPOSIZIONE XVII.1.7. L'algebra di Clifford $\mathcal{C}\ell_{\mathbf{b}}(V)$ è \mathbb{Z}_2 graduata, mediante (17.1.2)

$$\mathcal{C}\ell_{\mathbf{b}}(V) = \mathcal{C}\ell_{\mathbf{b}}(V)_0 \oplus \mathcal{C}\ell_{\mathbf{b}}(V)_1, \text{ con } \mathcal{C}\ell_{\mathbf{b}}(V)_i = \pi \left(\bigoplus_{h=0}^{\infty} \mathbf{T}^{2h+i}(V) \right), i = 1, 2.$$

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo su $\mathbf{T}(V)$ la \mathbb{Z}_2 -gradazione indotta dalla \mathbb{Z}_+ -gradazione. L'ideale $\mathbf{J}_{\mathbf{b}}$ è \mathbb{Z}_2 -graduato, perché ammette un sistema di generatori di grado pari. Il quoziente $\mathcal{C}\ell_{\mathbf{b}}(V)$ risulta allora anch'esso \mathbb{Z}_+ -graduato. \square

NOTAZIONE XVII.1.8. Se $V = \mathbb{k}^m$ e $\mathbf{b}(v, w) = \sum_{i=1}^m v_i w_i$, indichiamo la corrispondente algebra di Clifford con $\mathcal{C}\ell(\mathbb{k}^m)$.

OSSERVAZIONE XVII.1.9. Se $\dim V = 1$, allora $\mathcal{C}\ell_{\mathbf{b}}(V) = \mathbb{k} \oplus V$ ha dimensione due. Fissata un vettore non nullo $e \in V$ e posto $\beta(e, e) = \lambda$, la tabella di moltiplicazione di $\mathcal{C}\ell_{\mathbf{b}}(V)$ è data da

	1	e
1	1	e
e	e	λ

PROPOSIZIONE XVII.1.10. Sia $W \subset V$ un sottospazio vettoriale di V . L'inclusione naturale $\mathbf{T}(W) \hookrightarrow \mathbf{T}(V)$ induce, per passaggio al quoziente, un'inclusione $\mathcal{C}\ell_{\mathbf{b}_W}(W) \hookrightarrow \mathcal{C}\ell_{\mathbf{b}}(V)$.

Siano V_1, V_2 due sottospazi \mathbf{b} -ortogonali di V ed indichiamo con \mathbf{b}_i la restrizione di \mathbf{b} a V_i . Allora l'applicazione lineare

$$\mathcal{C}\ell_{\mathbf{b}_1}(V_1) \otimes \mathcal{C}\ell_{\mathbf{b}_2}(V_2) \longrightarrow \mathcal{C}\ell_{\beta}(V),$$

definita da

$$(17.1.3) \quad x \otimes y \longrightarrow x \cdot y, \quad \forall x \in \mathcal{C}\ell_{\mathbf{b}_1}(V_1), y \in \mathcal{C}\ell_{\mathbf{b}_2}(V_2)$$

è un isomorfismo di algebre.

NOTAZIONE XVII.1.11. Se e_1, \dots, e_m è una base di V ed $I = (i_1, i_2, \dots, i_k)$ una k -upla di interi con $1 \leq i_h \leq m$, indicheremo con e_I l'elemento $e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k}$ di $\mathcal{C}\ell_{\mathbf{b}}(V)$. Porremo ancora $e_{\emptyset} = 1$.

COROLLARIO XVII.1.12. Se $\dim V = m$, allora $\dim \mathcal{C}\ell_{\mathbf{b}}(V) = 2^m$.

Se e_1, \dots, e_m è una base di V , allora gli e_I con $I = \emptyset$, ed $I = (i_1, \dots, i_k)$ con $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m$ formano una base di $\mathcal{C}\ell_{\mathbf{b}}(V)$.

DIMOSTRAZIONE. Si consideri una base \mathbf{b} -ortogonale e_1, \dots, e_m di V e si proceda per ricorrenza, applicando la proposizione precedente. \square

ESEMPIO XVII.1.13. Consideriamo $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R})$. Indichiamo con i un generatore di \mathbb{R} come spazio vettoriale. Allora $i^2 = -1$. Gli elementi di $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R})$ sono della forma $a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$ ed $(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1)$. Quindi $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{C}$.

ESEMPIO XVII.1.14. Consideriamo ora $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^2)$. Indichiamo con i, j una base ortonormale di \mathbb{R}^2 . Abbiamo $i^2 = j^2 = -1$, $ij = -ji$. La dimensione di $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^2)$ è quattro ed una sua base consiste degli elementi $1, i, j, ij = k$. La tabella di moltiplicazione è

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

e quindi $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^2)$ è l'algebra \mathbb{H} dei quaternioni di Hamilton.

XVII.2. Involuzioni dell'algebra di Clifford

Definiamo in questo paragrafo alcune involuzioni canoniche delle algebre di Clifford. Per la proprietà universale, ogni involuzione di V che sia anche una trasformazione \mathfrak{b} -ortogonale si estende in modo unico ad un'involuzione dell'algebra $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{b}}(V)$. In particolare, la $V \ni v \rightarrow -v \in V$ si estende in modo unico ad un'involuzione di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{b}}(V)$.

DEFINIZIONE XVII.2.1. Indichiamo con α l'involuzione di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{b}}(V)$ definita da

$$(17.2.1) \quad \alpha(x) = (-1)^i x, \quad \forall x \in \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{b}}(V)_i, \quad i = 0, 1.$$

LEMMA XVII.2.2. *Supponiamo che \mathfrak{b} sia non degenere. Condizione necessaria e sufficiente affinché $x \in \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{b}}(V)$ soddisfi*

$$(17.2.2) \quad xv = v\alpha(x), \quad \forall v \in V$$

è che x sia uno scalare, cioè che $x \in \mathbb{k}$.

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che, se \mathfrak{b} è non degenere, gli elementi non nulli di V sono invertibili, e $v^{-1} = \mathfrak{b}(v, v)^{-1}v$. Possiamo allora riscrivere la (17.2.2) nella forma

$$v^{-1}xv = x, \quad \forall v \in V.$$

Fissiamo una base ortogonale e_1, \dots, e_m di V . Abbiamo allora

$$e_i^{-1}e_j e_i = \begin{cases} -e_j & \text{se } i = j, \\ e_j & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Scriviamo $x = \sum_I x_I e_I$, con $x_I \in \mathbb{k}$ e con la sommatoria estesa alle k -uple crescenti di indici in $\{1, \dots, m\}$. Allora

$$e_i^{-1}x e_i = \sum_{i \notin I} x_I e_I - \sum_{i \in I} x_I e_I \quad \text{per } i = 1, \dots, m,$$

perché $e_i^{-1}e_Ie_i = (-1)^r e_I$ se r è il numero di indici uguali ad i in $I = (i_1, \dots, i_k)$.
Infatti

$$e_i^{-1}e_Ie_i = e_i^{-1}e_{i_1}e_i \cdots e_i^{-1}e_{i_k}e_i = (-1)^r e_I.$$

Se vale la (17.2.2) abbiamo allora

$$\sum_{i \notin I} x_I e_I - \sum_{i \in I} x_I e_I = \sum'_{|I| \in 2\mathbb{N}} x_I e_I - \sum'_{|I| \notin 2\mathbb{N}} x_I e_I \quad \text{per } i = 1, \dots, m$$

e da questa segue la tesi. \square

OSSERVAZIONE XVII.2.3. Se $\mathfrak{b} = 0$, allora $xv = v\alpha(x)$ per ogni $x \in \mathcal{C}\ell_0(V) = \Lambda(V)$.

L'applicazione lineare $\tilde{\beta} : \mathbf{T}(V) \rightarrow \mathbf{T}(V)$, definita da

$$\tilde{\beta}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = v_k \otimes \cdots \otimes v_1, \quad \forall k = 0, 1, \dots, \infty \quad \forall v_1, \dots, v_k \in V$$

è un'anti-involuzione di $\mathbf{T}(V)$, che lascia invariante l'ideale $\mathbf{J}_{\mathfrak{b}}$.

DEFINIZIONE XVII.2.4. Indichiamo con $\beta : \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{b}}(V) \rightarrow \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{b}}(V)$ l'anti-involuzione di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{b}}(V)$ ottenuta da $\tilde{\beta}$ per passaggio al quoziente.

Indichiamo con γ la composizione $\gamma = \alpha \circ \beta$.

LEMMA XVII.2.5. L'involuzione α e le anti-involuzioni β e γ commutano tutte tra loro.

ESEMPIO XVII.2.6. Le α , β e γ sono descritte, per $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R})$ e $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^2)$, dalle tabelle

$$\begin{array}{c|c|c} & 1 & i \\ \hline \alpha & 1 & -i \\ \hline \beta & 1 & i \\ \hline \gamma & 1 & -i \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c|c} & 1 & i & j & k \\ \hline \alpha & 1 & -i & -j & k \\ \hline \beta & 1 & i & j & -k \\ \hline \gamma & 1 & -i & -j & -k \end{array} .$$

XVII.3. I gruppi spinoriali

In questo paragrafo V è uno spazio vettoriale di dimensione finita m sul campo \mathbb{k} ($= \mathbb{R}$ o \mathbb{C}) e \mathfrak{b} una forma bilineare simmetrica non degenera che, nel caso $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, supponiamo essere un prodotto scalare. Scriveremo per semplicità $\mathcal{C}\ell(V)$ invece che $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{b}}(V)$.

Consideriamo innanzi tutto il gruppo degli elementi invertibili di $\mathcal{C}\ell(V)$.

LEMMA XVII.3.1. Se $x \in \mathcal{C}\ell(V)$ sono equivalenti:

- (1) $\exists y \in \mathcal{C}\ell(V)$ tale che $x \cdot y = 1$;
- (2) $\exists z \in \mathcal{C}\ell(V)$ tale che $z \cdot x = 1$;
- (3) $\exists! u \in \mathcal{C}\ell(V)$ tale che $x \cdot u = u \cdot x = 1$.

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con L_x ed R_x le moltiplicazioni per x a sinistra e a destra in $\mathcal{C}\ell(V)$:

$$L_x : \mathcal{C}\ell(V) \ni q \rightarrow x \cdot q \in \mathcal{C}\ell(V), \quad R_x : \mathcal{C}\ell(V) \ni q \rightarrow q \cdot x \in \mathcal{C}\ell(V).$$

Le L_x ed R_x sono applicazioni lineari. Se x ammette un'inversa destra y in $\mathcal{C}\ell(V)$, allora R_x è iniettiva. Infatti, se $R_x(q) = 0$, è

$$q = q \cdot 1 = q \cdot (x \cdot y) = (q \cdot x) \cdot y = R_x(q) \cdot y = 0 \cdot y = 0.$$

Poiché $\mathcal{E}\ell(V)$ ha dimensione finita 2^m , la R_x , essendo lineare e iniettiva è anche bigettiva ed, in particolare, esiste uno ed un solo elemento $z \in \mathcal{E}\ell(V)$ per cui $R_x(z) = 1$, cioè $z \cdot x = 1$. Questo dimostra che (1) \Rightarrow (2). In modo analogo, se supponiamo che x ammetta un'inversa sinistra, possiamo dimostrare che L_x è lineare e iniettiva, e quindi bigettiva e che perciò esiste un unico elemento $y \in \mathcal{E}\ell(V)$ tale che $L_x(y) = 1$, cioè $x \cdot y = 1$. È quindi valida anche l'implicazione (2) \Rightarrow (1). L'equivalenza (1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (2) segue allora dall'identità dell'inversa destra e sinistra: se $x \cdot y = 1 = z \cdot x$ abbiamo

$$z = z \cdot 1 = z \cdot (x \cdot y) = (z \cdot x) \cdot y = 1 \cdot y = y.$$

□

DEFINIZIONE XVII.3.2. Un elemento x di $\mathcal{E}\ell(V)$ che soddisfi le condizioni equivalenti del Lemma XVII.3.1 si dice *invertibile*.

LEMMA XVII.3.3. L'insieme $\mathcal{E}\ell_*(V)$ degli elementi invertibili di $\mathcal{E}\ell(V)$ è un gruppo di Lie di dimensione 2^m .

DIMOSTRAZIONE. Chiaramente, $\mathcal{E}\ell_*(V)$ è un gruppo con identità 1. Dimostriamo che $\mathcal{E}\ell_*(V)$ è un aperto di $\mathcal{E}\ell(V)$. A questo scopo possiamo considerare l'applicazione lineare $L : \mathcal{E}\ell(V) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E}\ell(V))$ che fa corrispondere ad $x \in \mathcal{E}\ell(V)$ la moltiplicazione a sinistra $L_x : \mathcal{E}\ell(V) \ni q \rightarrow x \cdot q \in \mathcal{E}\ell(V)$. Allora $\mathcal{E}\ell_*(V) = L^{-1}(\mathbf{GL}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E}\ell(V)))$ è aperto perché immagine inversa di un aperto mediante un'applicazione continua. La moltiplicazione di due elementi e l'inversa di un elemento sono applicazioni differenziabili perché il prodotto in $\mathcal{E}\ell(V)$ è un'applicazione differenziabile e l'inversa si può esprimere, nell'intorno di un elemento $x \in \mathcal{E}\ell_*(V)$, mediante

$$(x + q)^{-1} = x \cdot (1 + x^{-1}q) = x \cdot \sum_{h=0}^{\infty} (-x^{-1}q)^h.$$

□

LEMMA XVII.3.4. L'insieme $\mathbf{G}_\gamma = \{x \in \mathcal{E}\ell(V) \mid x \cdot \gamma(x) = 1\}$ è un sottogruppo chiuso di $\mathcal{E}\ell_*(V)$.

DIMOSTRAZIONE. L'affermazione è conseguenza del fatto che γ sia una anti-involuzione di $\mathcal{E}\ell(V)$. Abbiamo infatti

$$\begin{aligned} 1 \cdot \gamma(1) &= 1 \cdot 1 = 1 \implies 1 \in \mathbf{G}_\gamma, \\ x \in \mathbf{G}_\gamma &\implies x \in \mathcal{E}\ell_*(V), \gamma(x) = x^{-1}, \gamma(x) \cdot \gamma(\gamma(x)) = \gamma(x) \cdot x = 1 \implies x^{-1} \in \mathbf{G}_\gamma, \\ x, y \in \mathbf{G}_\gamma &\implies \left. \begin{aligned} (x \cdot y) \cdot \gamma(x \cdot y) &= x \cdot y \cdot \gamma(y) \cdot \gamma(x) \\ &= x \cdot (y \cdot \gamma(y)) \cdot \gamma(x) = x \cdot \gamma(x) = 1 \end{aligned} \right\} \implies x \cdot y \in \mathbf{G}_\gamma, \end{aligned}$$

e quindi gli assiomi della definizione di gruppo sono soddisfatti. Poiché γ è continua, \mathbf{G}_γ è chiuso in $\mathcal{E}\ell(V)$ e quindi a maggior ragione in $\mathcal{E}\ell_*(V)$. □

LEMMA XVII.3.5. L'insieme

$$(17.3.1) \quad \mathbf{G}_V = \{x \in \mathcal{E}\ell_*(V) \mid x \cdot v \cdot \beta(x) \in V, \forall v \in V\}$$

è un sottogruppo chiuso di $\mathcal{E}\ell_*(V)$.

DIMOSTRAZIONE. Se $x \in \mathcal{C}\ell(V)$, indichiamo con B_x l'endomorfismo lineare

$$B_x : \mathcal{C}\ell(V) \ni q \longrightarrow x \cdot q \cdot \beta(x) \in \mathcal{C}\ell(V).$$

Osserviamo che B_x è invertibile se e soltanto se $x \in \mathcal{C}\ell_*(V)$, ed in questo caso $(B_x)^{-1} = B_{x^{-1}}$. Certamente \mathbf{G}_V è chiuso in $\mathcal{C}\ell_*(V)$, contiene 1 e, dalla considerazione precedente, segue che contiene l'inverso di ogni suo elemento. Basta verificare che è un gruppo, basta verificare che contiene anche il prodotto di ogni coppia di suoi elementi. Se $x, y \in \mathbf{G}_V$ e $v \in V$, abbiamo

$$(x \cdot y) \cdot v \cdot \beta(x \cdot y) = x \cdot (y \cdot v \cdot \beta(y)) \cdot \beta(x) \in V \text{ perché } y \cdot v \cdot \beta(y) \in V.$$

Questo completa la dimostrazione. \square

LEMMA XVII.3.6. Se $v \in V$ è un vettore **b**-anisotropo, allora $v \in \mathbf{G}_V$ ed

$$(17.3.2) \quad A_v : V \ni \xi \longrightarrow v \cdot \xi \cdot v \in V$$

è la **b**-simmetria di vettore v , composta con la dilatazione lineare di ragione $\mathbf{b}(v, v)$.

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo infatti

$$\begin{aligned} v \cdot \xi \cdot \beta(v) &= v \cdot \xi \cdot v = v \cdot (-v \cdot \xi - 2\mathbf{b}(v, \xi)) \\ &= \mathbf{b}(v, v) \xi - 2\mathbf{b}(v, \xi) v \in V, \quad \forall \xi \in V. \end{aligned}$$

\square

OSSERVAZIONE XVII.3.7. Se v è **b**-isotropo, allora A_v è un endomorfismo lineare di V che ha per immagine il sottospazio $\langle v \rangle$.

DEFINIZIONE XVII.3.8. Denotiamo con $\mathbf{Pin}(V)$ il gruppo $\mathbf{G}_V \cap \mathbf{G}_V$ e con $\mathbf{Spin}(V)$ il suo sottogruppo $\mathbf{Pin}(V) \cap \mathcal{C}\ell(V)_0$.

Il gruppo $\mathbf{Spin}(V)$ si dice il *gruppo Spin* di V , rispetto alla forma **b**.

Per la discussione precedente, $\mathbf{Pin}(V)$ e $\mathbf{Spin}(V)$ sono sottogruppi di Lie di $\mathcal{C}\ell_*(V)$. Vedremo in seguito che $\mathbf{Spin}(V)$ è un sottogruppo di indice due di $\mathbf{Pin}(V)$, e che coincide con la sua componente connessa dell'identità. In particolare, le loro algebre di Lie coincidono.

NOTAZIONE XVII.3.9. È conveniente distinguere l'esponenziale nell'algebra di Clifford e nello spazio degli endomorfismi dell'algebra di Clifford. Scriveremo quindi

$$\exp(x) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} x^h, \quad \text{con } x^{h+1} = x \cdot x^h \text{ per } h \geq 0$$

per l'esponenziale in $\mathcal{C}\ell(V)$ ed

$$\text{Exp}_{\mathcal{C}\ell V}(A) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} A^h, \quad \text{con } A^{h+1} = A \circ A^h \text{ per } h \geq 0$$

per l'esponenziale in $\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(\mathcal{C}\ell(V))$.

L'algebra associativa $\mathcal{C}\ell(V)$ ha una struttura naturale di algebra di Lie con il commutatore

$$(17.3.3) \quad [x, y] = xy - yx, \quad \forall x, y \in \mathcal{C}\ell(V).$$

Identificando $\mathcal{C}\ell_*(V)$ al gruppo delle trasformazioni lineari di $\mathcal{C}\ell(V)$ definiti dalla moltiplicazione a sinistra per gli elementi di $\mathcal{C}\ell_*(V)$, otteniamo una identificazione naturale di $\mathcal{C}\ell(V)$ con l'algebra di Lie di $\mathcal{C}\ell_*(V)$. L'applicazione esponenziale coincide allora con l'esponenziale nell'algebra di Clifford definito sopra.

Possiamo quindi identificare le algebre di Lie \mathfrak{g}_γ di \mathbf{G}_γ , \mathfrak{g}_V di \mathbf{G}_V , $\mathfrak{spin}(V)$ di $\mathbf{Spin}(V)$ a sottoalgebre di Lie di $\mathcal{C}\ell(V)$.

LEMMA XVII.3.10. *Le algebre di Lie di \mathbf{G}_γ e di \mathbf{G}_V sono descritte, rispettivamente, da*

$$(17.3.4) \quad \mathfrak{g}_\gamma = \{x \in \mathcal{C}\ell(V) \mid x + \gamma(x) = 0\},$$

$$(17.3.5) \quad \mathfrak{g}_V = \{x \in \mathcal{C}\ell(V) \mid x \cdot \xi + \xi \cdot \beta(x) \in V, \forall \xi \in V\}.$$

DIMOSTRAZIONE. Poiché β e γ sono anti-involuzioni di $\mathcal{C}\ell(V)$, abbiamo

$$\beta(\exp(x)) = \exp(\beta(x)) \text{ e } \gamma(\exp(x)) = \exp(\gamma(x)) \text{ per ogni } x \in \mathcal{C}\ell(V).$$

Ricordiamo che $x \in \mathcal{C}\ell(V)$ appartiene a \mathfrak{g}_γ se, e soltanto se, $\exp(tx) \in \mathbf{G}_\gamma$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, se cioè $\exp(tx)\gamma(\exp(tx)) = \exp(tx)\exp(t\gamma(x)) = 1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Derivando rispetto a t questa uguaglianza, e calcolandola per $t = 0$, troviamo subito che la condizione $x + \gamma(x) = 0$ è necessaria. Quando essa è verificata, $\gamma(x) = -x$ e quindi x e $\gamma(x)$ commutano. Allora $\exp(tx)\exp(t\gamma(x)) = \exp(t[x + \gamma(x)]) = 1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Analogamente, $x \in \mathcal{C}\ell(V)$ appartiene a \mathfrak{g}_V se, e soltanto se $\exp(tx) \in \mathbf{G}_V$ per tutti i $t \in \mathbb{R}$. Differenziando la condizione

$$\exp(tx) \cdot \xi \cdot \beta(\exp(tx)) = \exp(tx) \cdot \xi \cdot \exp(t\beta(x)) \in V \text{ per ogni } t \in \mathbb{R} \text{ e } \forall \xi \in V,$$

troviamo che la condizione $x \cdot \xi + \xi \cdot \beta(x) \in V$ per ogni $\xi \in V$ è necessaria affinché $x \in \mathfrak{g}_V$. La sufficienza segue dal fatto che

$$\exp(x) \cdot y \cdot \exp(\beta(x)) = \text{Exp}_{\mathcal{C}\ell(V)}(A_x)(y), \quad \forall x, y \in \mathcal{C}\ell(V),$$

per l'endomorfismo lineare

$$A_x : \mathcal{C}\ell(V) \ni y \longrightarrow A_x(y) = x \cdot y + y \cdot \beta(x) \in \mathcal{C}\ell(V).$$

Abbiamo infatti

$$L_x : \mathcal{C}\ell(V) \ni y \longrightarrow x \cdot y \in \mathcal{C}\ell(V) \longrightarrow \text{Exp}_{\mathcal{C}\ell(V)}(L_x)(y) = \exp(x) \cdot y,$$

$$R_z : \mathcal{C}\ell(V) \ni y \longrightarrow y \cdot z \in \mathcal{C}\ell(V) \longrightarrow \text{Exp}_{\mathcal{C}\ell(V)}(R_z)(y) = y \cdot \exp(z),$$

$$\begin{aligned} [L_x, R_z] = 0 &\implies \text{Exp}_{\mathcal{C}\ell(V)}(L_x + R_z)(y) = \text{Exp}_{\mathcal{C}\ell(V)}(L_x)\text{Exp}_{\mathcal{C}\ell(V)}(R_z)(y) \\ &= \exp(x) \cdot y \cdot \exp(z). \end{aligned}$$

□

PROPOSIZIONE XVII.3.11 (Rappresentazione ortogonale). *Per ogni $x \in \mathbf{Pin}(V)$ l'applicazione*

$$(17.3.6) \quad A_x : V \ni v \longrightarrow x \cdot v \cdot \beta(x) \in V$$

è una trasformazione ortogonale di V . La

$$(17.3.7) \quad A : \mathbf{Pin}(V) \ni x \longrightarrow A_x \in \mathbf{O}_b(V)$$

è un omomorfismo di gruppi e $\ker A = \{\pm 1\}$.

DIMOSTRAZIONE. Siano $x \in \mathbf{Pin}(V)$ e $v \in V$. Poiché

$$-x \cdot v \cdot \beta(x) = \alpha(x \cdot v \cdot \beta(x)) = \alpha(x) \cdot \alpha(v) \cdot \gamma(v), \quad \alpha(x)\beta(x) = \alpha(x \cdot \gamma(x)) = \alpha(1) = 1,$$

abbiamo

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(A_x v, A_x v) &= -(A_x v)^2 = -(x \cdot v \cdot \beta(x)) \cdot (x \cdot v \cdot \beta(x)) = x \cdot v \cdot \beta(x) \cdot \alpha(x) \cdot \alpha(v) \cdot \gamma(v) \\ &= x \cdot v \cdot \alpha(v) \cdot \gamma(v) = -x \cdot v^2 \cdot \gamma(v) = \beta(v, v) x \cdot \gamma(v) = \beta(v, v). \end{aligned}$$

Questo dimostra che $A_x \in \mathbf{O}_{\mathbf{b}}(V)$. Abbiamo poi

$$A_x \circ A_y(v) = x \cdot (y \cdot v \cdot \beta(y)) \cdot \beta(x) = (x \cdot y) \cdot v \cdot (\beta(y) \cdot \beta(x)) = (x \cdot y) \cdot v \cdot \beta(x \cdot y) = A_{x \cdot y}(v),$$

e quindi A è una rappresentazione di $\mathbf{Pin}(V)$ nel gruppo ortogonale $\mathbf{O}_{\mathbf{b}}(V)$.

Supponiamo ora che $x \in \mathbf{Pin}(V)$ soddisfi $A_x = \text{id}_V$. Allora anche $A_{x^{-1}} = A_{\gamma(x)} = \text{id}_V$ e quindi, se $v \in V$,

$$x \cdot v = x \cdot \gamma(x) \cdot v \cdot \beta(\gamma(x)) = x \cdot \gamma(x) \cdot v \cdot \alpha(x) = v \cdot \alpha(x).$$

Per il Lemma XVII.2.2 questo implica che $x = k \in \mathbb{k}$. Da $k^2 = 1$ troviamo allora che $k = \pm 1$ \square

LEMMA XVII.3.12. *Il sottospazio vettoriale \mathfrak{g} di $\mathcal{L}(V)$ generato dagli elementi della forma $vw - wv$, al variare di v, w in V è una sotto-algebra di Lie di $\mathcal{L}(V)$ di dimensione $\frac{m(m-1)}{2}$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia e_1, \dots, e_m una base ortonormale di V . Poiché $e_i e_j = -e_j e_i$ per $1 \leq i \neq j \leq m$, gli elementi $e_i e_j$ con $1 \leq i < j \leq m$ appartengono a \mathfrak{g} e ne formano una base.

Per dimostrare che \mathfrak{g} è una sottoalgebra di Lie di $\mathcal{L}(V)$, è sufficiente verificare che \mathfrak{g} contiene i commutatori degli elementi di una sua base.

Abbiamo $[e_i e_j, e_h e_k] = 0$ se $i \neq j, h \neq k$ e $\#\{i, j\} \cap \{h, k\} = 0, 2$. Se $\#\{i, j\} \cap \{h, k\} = 1$, possiamo supporre, a meno di cambiare i segni, che i, j, h siano distinti e che $k = i$. Allora

$$[e_i e_j, e_h e_i] = e_i e_j e_h e_i - e_h e_i e_i e_j = e_j e_i e_i e_h + e_h e_j = 2e_h e_j.$$

Questo dimostra che \mathfrak{g} è una sottoalgebra di Lie di $\mathcal{L}(V)$ e completa la dimostrazione della proposizione. \square

LEMMA XVII.3.13. *L'algebra di Lie \mathfrak{g} definita nel Lemma XVII.3.12 è una sottoalgebra di Lie di $\text{spin}(V)$.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $v, w \in V$.

Se sono linearmente dipendenti, allora $v \cdot w - w \cdot v = 0$. Quindi, se $v \cdot w - w \cdot v \neq 0$, i due vettori sono linearmente dipendenti. Scegliamo una base \mathbf{b} -ortogonale u, z del piano $\langle v, w \rangle$. Se $v = au + bz, w = cu + dz$, poiché $u \cdot z = -z \cdot u$, otteniamo

$$\begin{aligned} v \cdot w &= ac \mathbf{b}(u, u) + bd \mathbf{b}(z, z) + (ac - bd)u \cdot z, \\ w \cdot v &= ac \mathbf{b}(u, u) + bd \mathbf{b}(z, z) - (ac - bd)u \cdot z, \\ v \cdot w - w \cdot v &= 2(ac - bd)u \cdot z. \end{aligned}$$

Possiamo riscaldare u e z in modo che $2(ac - bd) = 1$. Osserviamo a questo punto che

$$(u \cdot z)^2 = u \cdot z \cdot u \cdot z = -u \cdot u \cdot z \cdot z = -\mathbf{b}(u, u) \cdot \mathbf{b}(z, z) = -\lambda^2 \in \mathbb{k},$$

con $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda^2 = \mathbf{b}(u, u) \cdot \mathbf{b}(z, z)$. Otteniamo allora

$$\begin{aligned} \exp(t(v \cdot w - w \cdot v)) &= \exp(tu \cdot z) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(i\lambda)^{2h} t^{2h}}{2h!} + (u \cdot z) \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(i\lambda)^{2h} t^{2h+1}}{(2h+1)!} \\ &= \begin{cases} 1 + tu \cdot z & \text{se } \lambda = 0, \\ \cos(\lambda t) + (u \cdot z)\lambda^{-1} \sin(\lambda t) & \text{se } \lambda \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Consideriamo i due casi. Se $\lambda = 0$, abbiamo

$$\begin{aligned} (1 + tu \cdot z) \cdot \gamma(1 + tu \cdot z) &= (1 + tu \cdot z) \cdot (1 + tz \cdot u) \\ &= 1 + t(u \cdot z + z \cdot u) + t^2 u \cdot z \cdot z \cdot u = 1, \end{aligned}$$

perché $u \cdot z + z \cdot u + u \cdot z = 0$ in quanto u e z sono \mathbf{b} -ortogonali e $u \cdot z \cdot z \cdot u = \mathbf{b}(u, u)\mathbf{b}(z, z) = \lambda^2 = 0$. Se $\xi \in V$, abbiamo

$$\begin{aligned} (1 + tu \cdot z) \cdot \xi \cdot \beta(1 + tu \cdot z) &= (1 + tu \cdot z) \cdot \xi \cdot (1 + tz \cdot u) \\ &= (\xi + tu \cdot z \cdot \xi) \cdot (1 + tz \cdot u) \\ &= \xi + t(u \cdot z \cdot \xi + \xi \cdot z \cdot u) + t^2 u \cdot z \cdot \xi \cdot z \cdot u \end{aligned}$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} u \cdot z \cdot \xi + \xi \cdot z \cdot u &= u \cdot z \cdot \xi - \xi \cdot u \cdot z \\ &= 2\mathbf{b}(z, \xi)u - u \cdot \xi \cdot z - 2\mathbf{b}(u, \xi)z + u \cdot \xi \cdot z \\ &= 2\mathbf{b}(z, \xi)u - 2\mathbf{b}(u, \xi)z \in V, \\ u \cdot z \cdot \xi \cdot z \cdot u &= u \cdot z \cdot \xi \cdot \beta(z) \cdot \beta(u) \in V, \end{aligned}$$

perché $\beta(z) = z$, $\beta(u) = u$.

Se $\lambda \neq 0$ abbiamo invece

$$\begin{aligned} &(\cos(\lambda t) + (u \cdot z)\lambda^{-1} \sin(\lambda t)) \cdot \gamma(\cos(\lambda t) + (u \cdot z)\lambda^{-1} \sin(\lambda t)) \\ &= (\cos(\lambda t) + (u \cdot z)\lambda^{-1} \sin(\lambda t))(\cos(\lambda t) + (z \cdot u)\lambda^{-1} \sin(\lambda t)) \\ &= \cos^2(\lambda t) + (u \cdot z \cdot z \cdot u)\lambda^{-2} \sin^2(\lambda t) + \sin(\lambda t) \cos(\lambda t)\lambda^{-1}(u \cdot z + z \cdot u) \\ &= \cos^2(\lambda t) + \sin^2(\lambda t) = 1. \end{aligned}$$

Se $\xi \in V$, abbiamo

$$\begin{aligned} &(\cos(\lambda t) + (u \cdot z)\lambda^{-1} \sin(\lambda t)) \cdot \xi \cdot \beta(\cos(\lambda t) + (u \cdot z)\lambda^{-1} \sin(\lambda t)) \\ &= (\cos(\lambda t) + (u \cdot z)\lambda^{-1} \sin(\lambda t)) \cdot \xi \cdot (\cos(\lambda t) + (z \cdot u)\lambda^{-1} \sin(\lambda t)) \\ &= \cos^2(\lambda t) \xi + \lambda^{-1} \sin(\lambda t) \cos(\lambda t)(u \cdot z \cdot \xi + \xi \cdot u \cdot z) \\ &\quad + \lambda^{-2} \sin^2(\lambda t) u \cdot z \cdot \xi \cdot z \cdot u \\ &= \cos^2(\lambda t) \xi \in V \\ &+ \lambda^{-1} \sin(\lambda t) \cos(\lambda t)(2\mathbf{b}(z, \xi)u - 2\mathbf{b}(u, \xi)z) \in V \end{aligned}$$

$$+ \lambda^{-2} \sin^2(\lambda t)$$

□

Appendice: Varietà, forme differenziali

Varietà topologiche e varietà differenziabili

XVIII.1. Paracompattezza e partizione dell'unità

Sia X uno spazio topologico.

DEFINIZIONE XVIII.1.1. Se $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ e $\mathcal{V} = \{V_\alpha \mid \alpha \in A\}$ sono due ricoprimenti di X , diciamo che \mathcal{V} è un *raffinamento* di \mathcal{U} se per ogni $i \in I$ esiste un indice $\alpha_i \in A$ tale che $V_{\alpha_i} \subset U_i$. Una funzione $i \rightarrow \alpha_i$ con $V_{\alpha_i} \subset U_i$ per ogni $i \in I$ si dice una *funzione di raffinamento*.

Una famiglia $\mathcal{F} = \{A_i \mid i \in I\}$ di sottoinsiemi di X si dice *localmente finita* se per ogni punto x di X esiste un intorno aperto U_x di x in X tale che $\{i \in I \mid A_i \cap U_x \neq \emptyset\}$ sia finito.

DEFINIZIONE XVIII.1.2. Lo spazio topologico X si dice *paracompatto*¹ se verifica l'assioma di separazione di Hausdorff, e se ogni suo ricoprimento aperto ammette un raffinamento aperto localmente finito.

Ricordiamo, senza darne la dimostrazione², le principali proprietà degli spazi paracompatti:

TEOREMA XVIII.1.3. *Ogni spazio paracompatto è normale.*

Su uno spazio paracompatto X valgono cioè le due proprietà di separazione:

- (1) Se $x \neq y$ sono due punti distinti di X , allora esistono due intorni aperti, U_x di x e U_y di y , tali che $U_x \cap U_y = \emptyset$;
- (2) Se A, B sono due chiusi di X con $A \cap B = \emptyset$, allora esistono due aperti U, V di X tali che $A \subset U, B \subset V$ e $U \cap V = \emptyset$.

TEOREMA XVIII.1.4. *Ogni sottospazio chiuso di uno spazio paracompatto è paracompatto.*

DEFINIZIONE XVIII.1.5. Sia X uno spazio topologico ed $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ un suo ricoprimento aperto. Una *partizione continua dell'unità su X subordinata ad \mathcal{U}* è una famiglia $\{\phi_i \mid i \in I\} \subset \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ di funzioni reali continue su X che godano delle seguenti proprietà:

$$(i) \quad \phi_i(x) \geq 0, \quad \forall x \in X, \quad \forall i \in I,$$

¹Questo concetto fu introdotto nel 1944 da J. Dieudonné (*Une généralization des espaces compacts, J. Math. Pures Appl.* **23**, pp. 65-76).

²cf. Cap. 2-§11 di J.G.Hocking, G.S.Joung *Topology*, Addison-Wesley Publishing Company Inc., Reading, Massachusetts, 1961, oppure Cap IX-§4.3,4.4 di N.Bourbaki *General Topology* Hermann, Paris, 1966.

- (ii) $\text{supp } \phi_i = \overline{\{x \in X \mid \phi_i(x) \neq 0\}} \subset U_i, \quad \forall i \in I,$
- (iii) $\{\text{supp } \phi_i \mid i \in I\}$ è localmente finita,
- (iv) $\sum_{i \in I} \phi_i(x) = 1, \quad \forall x \in X.$

Osserviamo che la somma in (iv) è ben definita perché per la (iii) per ciascun punto $x \in X$ vi è un intorno aperto U_x in cui solo un numero finito di addendi siano non nulli.

TEOREMA XVIII.1.6. *Sia X uno spazio di Hausdorff. Sono equivalenti:*

- (A) X è paracompatto.
 (B) Per ogni ricoprimento aperto \mathcal{U} di X esiste una partizione continua dell'unità su X subordinata ad \mathcal{U} .

TEOREMA XVIII.1.7. *Sia X uno spazio di Hausdorff, localmente compatto.*

- (a) Se X è unione numerabile di compatti, allora X è paracompatto.
 (b) Se X è connesso e paracompatto, allora X è unione numerabile di compatti.

TEOREMA XVIII.1.8. *Ogni spazio di Hausdorff, localmente compatto e a base numerabile, è paracompatto.*

TEOREMA XVIII.1.9 (Stone³). *Ogni spazio topologico metrizzabile è paracompatto.*

XVIII.2. Varietà topologiche

DEFINIZIONE XVIII.2.1. Uno spazio topologico X si dice *localmente euclideo di dimensione n* se ogni punto p di X ammette un intorno U omeomorfo ad \mathbb{R}^n .

Poiché ogni punto di \mathbb{R}^n ha un sistema fondamentale di intorni aperti che sono omeomorfi ad \mathbb{R}^n , dire che un punto p di X ammette un intorno omeomorfo ad \mathbb{R}^n è equivalente a dire che esso ammette un intorno omeomorfo ad un qualsiasi aperto di \mathbb{R}^n .

DEFINIZIONE XVIII.2.2. Una *carta locale di dimensione n* di X è il dato di un aperto U di X , di un aperto V di \mathbb{R}^n , e di un omeomorfismo $\phi : U \rightarrow V$. Se $0 \in V$ e $p_0 \in U$ è il punto per cui $\phi(p_0) = 0$, chiameremo p_0 il suo *centro*.

DEFINIZIONE XVIII.2.3. Una *varietà topologica di dimensione n* è uno spazio topologico X paracompatto e localmente Euclideo di dimensione n .

Per il Teorema XVIII.1.8 la paracompattatezza si può descrivere in modo equivalente richiedendo che X sia di Hausdorff e che ogni sua componente connessa sia *numerabile all'infinito*. Ciò significa che, per ogni componente connessa Y di X , si può trovare una successione $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di sottoinsiemi compatti di Y tali che $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$ per ogni intero $n \geq 0$ ed $Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$.

³Paracompactness and product spaces in Bull. A.M.S. **54** (1948), pp. 977-982. Osserviamo che il prodotto di due spazi paracompatti può non essere paracompatto.

DEFINIZIONE XVIII.2.4. Sia M una varietà topologica di dimensione n ed $U_i \xrightarrow{\phi_i} V_i \subset \mathbb{R}^n$, per $i = 1, 2$, due carte locali in M . Se $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, allora $\phi_1(U_1 \cap U_2)$ e $\phi_2(U_1 \cap U_2)$ sono aperti di \mathbb{R}^n e

$$(18.2.1) \quad \phi_{2,1} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \ni x \rightarrow \phi_2 \circ \phi_1^{-1}(x) \in \phi_2(U_1 \cap U_2)$$

è un omeomorfismo tra aperti di \mathbb{R}^n , che si dice la *funzione di transizione* dalla carta $U_1 \xrightarrow{\phi_1} V_1$ alla carta $U_2 \xrightarrow{\phi_2} V_2$.

DEFINIZIONE XVIII.2.5. Un *atlante* di M è una famiglia $\mathcal{A} = \{U_i \xrightarrow{\phi_i} V_i \subset \mathbb{R}^n\}_{i \in I}$ di carte locali in M tale che $\bigcup_{i \in I} U_i = M$. Poniamo:

$$(18.2.2) \quad V_{i,j} = \phi_j(U_i \cap U_j) \subset V_j \quad \text{e}$$

$$(18.2.3) \quad \phi_{i,j} : V_{i,j} \ni x \rightarrow \phi_i \circ \phi_j^{-1}(x) \in V_{j,i}.$$

Le $(\phi_{i,j})$ così definite si dicono *le funzioni di transizione* dell'atlante \mathcal{A} .

Le funzioni di transizione soddisfano le relazioni di compatibilità

$$(18.2.4) \quad \phi_{i,i} = \text{id}_{U_i}, \quad \phi_{i,j} \circ \phi_{j,k}(x) = \phi_{i,k}(x), \quad \forall x \in \phi_k(U_i \cap U_j \cap U_k).$$

TEOREMA XVIII.2.6. *Ogni varietà topologica è localmente compatta e metrizzabile.*

DIMOSTRAZIONE. La prima affermazione segue dal fatto che gli spazi Euclidei \mathbb{R}^n sono localmente compatti. Per quanto riguarda la seconda, basta osservare che ogni componente connessa di una varietà topologica è a base numerabile ed ogni spazio regolare a base numerabile è metrizzabile; se indichiamo con X_i , $i \in I$ le componenti connesse di X e con $d_i : X_i \times X_i \rightarrow \mathbb{R}$ una distanza che definisce la topologia di X_i , possiamo definire la distanza in X ponendo

$$x, y \in X, \quad x \in X_i, y \in X_j \implies d(x, y) = \begin{cases} d_i(x, y) & \text{se } i = j, \\ 1 + d_i(x, y) & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

□

XVIII.3. Alcuni esempi

ESEMPIO XVIII.3.1. Ogni sottoinsieme aperto X di \mathbb{R}^n è una varietà topologica di dimensione n .

ESEMPIO XVIII.3.2. Sia A un aperto di \mathbb{R}^n ($n \geq 1$), con $\emptyset \neq A \neq \mathbb{R}^n$ e sia X il quoziente di $\mathbb{R}^n \times \{0, 1\}$ che si ottiene identificando i punti $(x, 0)$ ed $(x, 1)$ se $x \in A$. Lo spazio topologico X è localmente Euclideo di dimensione n , ma non è una varietà topologica perché non è di Hausdorff: i punti $(x, 0)$ ed $(x, 1)$, per x sulla frontiera ∂A di A , definiscono nel quoziente X elementi distinti che non ammettono intorni disgiunti.

ESEMPIO XVIII.3.3. Su $\mathbb{R} \times \{0, 1\}$ consideriamo la relazione di equivalenza che identifica due punti $(x, 0)$ ed $(x, 1)$ se $x \leq 0$. Il quoziente X è uno spazio di Hausdorff, ma non è localmente Euclideo, perché il punto x_0 di X corrispondente a $\{(0, 0), (0, 1)\}$ non ha un intorno omeomorfo ad \mathbb{R} . Infatti, se U è un intorno aperto di x_0 in X , allora $U \setminus \{x_0\}$ ha almeno tre componenti connesse.

ESEMPIO XVIII.3.4. Sia X lo spazio topologico ottenuto considerando su \mathbb{R}^2 la topologia definita dall'ordine lessicografico:

$$(x_1, y_1) < (x_2, y_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 < x_2, & \text{oppure} \\ x_1 = x_2 & \text{e } y_1 < y_2. \end{cases}$$

Ogni componente connessa di X è omeomorfa ad \mathbb{R} e quindi X è uno spazio localmente Euclideo di dimensione 1. La topologia dell'ordine lessicografico è indotta dalla distanza:

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_1 \neq x_2 \\ \frac{|y_1 - y_2|}{1 + |y_1 - y_2|} & \text{se } x_1 = x_2. \end{cases}$$

Quindi X , essendo metrizzabile, è paracompatto e dunque una varietà topologica di dimensione 1.

ESEMPIO XVIII.3.5. Sia $X =]0, 1[\times]0, 1[$, ed “<” un buon ordinamento su $]0, 1[$, rispetto al quale $]0, 1[$ non ammetta massimo: in particolare per ogni $t \in]0, 1[$ vi è un elemento $t' \in]0, 1[$ (successivo di t) con $t < t'$ tale che $\{s \in]0, 1[\mid t < s < t'\} = \emptyset$.

Consideriamo su X la topologia dell'ordine relativa all'ordinamento totale:

$$(x, t) < (y, s) \Leftrightarrow \begin{cases} t < s & \text{oppure} \\ t = s & \text{e } x < y. \end{cases}$$

Chiaramente X è localmente euclideo di dimensione 1, è connesso e di Hausdorff, ma non è una varietà topologica perché non è paracompatto.

ESEMPIO XVIII.3.6. La sfera S^n è una varietà topologica di dimensione n . Siano x_0, \dots, x_n le coordinate cartesiane di \mathbb{R}^{n+1} e scriviamo

$$S^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n x_i^2 = 1 \right\}.$$

Indichiamo poi con $p : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ la proiezione sulle ultime n coordinate

$$\mathbb{R}^{n+1} \ni x = (x_0, x_1, \dots, x_n) \xrightarrow{p} x' = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

e siano

$$\phi_+ : U_+ = S^n \setminus \{-e_0\} \ni x \longrightarrow \frac{1}{1+x_0} x' \in \mathbb{R}^n,$$

$$\phi_- : U_- = S^n \setminus \{e_0\} \ni x \longrightarrow \frac{1}{1-x_0} x' \in \mathbb{R}^n.$$

le proiezioni stereografiche rispetto al polo sud $-e_0$ ed al polo nord e_0 , rispettivamente. Allora $\mathcal{A} = \{(U_+, \phi_+), (U_-, \phi_-)\}$ è un atlante di S^n , formato da due carte locali di dimensione n . Le sue funzioni di transizione sono $\phi_{+-} = \phi_+ \circ \phi_-^{-1} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \ni y \rightarrow y/|y|^2 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

ESEMPIO XVIII.3.7. Lo spazio proiettivo reale di dimensione n

$$\mathbb{RP}^n = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim, \quad \text{ove } x \sim y \Leftrightarrow y \in \mathbb{R}x,$$

è una varietà topologica di dimensione n . Indichiamo con $[x_0, x_1, \dots, x_n]$ il punto di \mathbb{RP}^n che corrisponde al punto (x_0, x_1, \dots, x_n) di $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Le x_0, \dots, x_n sono sue *coordinate omogenee*. Un atlante \mathcal{A} di \mathbb{RP}^n è descritto nelle coordinate omogenee dagli aperti

$$U_i = \{[x_0, x_1, \dots, x_n] \mid x_i \neq 0\} \quad \text{per } i = 0, 1, \dots, n$$

e dagli omeomorfismi

$$\phi_i : U_i \ni [x_0, x_1, \dots, x_n] \longrightarrow (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$$\text{ove } y_j = \begin{cases} x_{j-1}/x_i & \text{se } 1 \leq j \leq i, \\ x_j/x_i & \text{se } i < j \leq n. \end{cases}$$

ESEMPIO XVIII.3.8. Lo spazio proiettivo complesso di dimensione n

$$\mathbb{CP}^n = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim, \quad \text{ove } z \sim w \Leftrightarrow w \in \mathbb{C}z,$$

è una varietà topologica di dimensione $2n$. Indichiamo con $[z_0, z_1, \dots, z_n]$ il punto di \mathbb{CP}^n che corrisponde al punto (z_0, z_1, \dots, z_n) di $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$. Le z_0, \dots, z_n sono sue *coordinate omogenee*. Un atlante \mathcal{A} di \mathbb{CP}^n è descritto nelle coordinate omogenee dagli aperti

$$U_i = \{[z_0, z_1, \dots, z_n] \mid z_i \neq 0\} \quad \text{per } i = 0, 1, \dots, n$$

e dagli omeomorfismi

$$\phi_i : U_i \ni [z_0, z_1, \dots, z_n] \longrightarrow (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n},$$

$$\text{ove } w_j = \begin{cases} z_{j-1}/z_i & \text{se } 1 \leq j \leq i, \\ z_j/z_i & \text{se } i < j \leq n. \end{cases}$$

XVIII.4. Varietà topologiche con bordo

DEFINIZIONE XVIII.4.1. Una varietà topologica di dimensione n con bordo è uno spazio topologico paracompatto M in cui ogni punto ha un intorno aperto omeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$.

La parte interna $\overset{\circ}{M}$ di M è l'insieme dei punti di M che hanno un intorno omeomorfo ad \mathbb{R}^n . $\overset{\circ}{M}$ è una varietà topologica di dimensione n ed un aperto denso di M .

L'insieme $\partial M = M \setminus \overset{\circ}{M}$ è una varietà differenziabile di dimensione $(n-1)$ che si dice il *bordo* di M .

Un omeomorfismo $\phi : U \rightarrow \phi(U) \subset \mathbb{R}_+^n$ di un aperto U di M su un aperto $\phi(U)$ di \mathbb{R}_+^n si dice una *carta locale* in M .

Una collezione $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i) \mid i \in I\}$ di carte locali in M tali che $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ si dice un *atlante* di M .

Le varietà topologiche definite in §XVIII.2 sono varietà a bordo con il bordo vuoto. Per questo le chiameremo anche *varietà senza bordo*.

XVIII.5. Definizione di varietà differenziabile

DEFINIZIONE XVIII.5.1. Sia M una varietà topologica di dimensione n . Un atlante \mathcal{A} di M si dice di classe \mathcal{C}^k (ove k è un intero non negativo, oppure ∞ od ω) se le sue funzioni di transizione sono diffeomorfismi di classe \mathcal{C}^k .

Due atlanti \mathcal{A} ed \mathcal{A}' di classe \mathcal{C}^k di M si dicono \mathcal{C}^k -compatibili se $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ è ancora un atlante di classe \mathcal{C}^k .

Un atlante di classe \mathcal{C}^0 è semplicemente un atlante e tutti gli atlanti di classe \mathcal{C}^0 su M sono tra loro compatibili.

La relazione di compatibilità \mathcal{C}^k è una relazione di equivalenza nella famiglia degli atlanti di M .

Se \mathcal{A} è un atlante di classe \mathcal{C}^k su M , l'unione di tutti gli atlanti \mathcal{C}^k -compatibili con \mathcal{A} è ancora un atlante \mathcal{C}^k compatibile con \mathcal{A} ; esso è *massimale* nel senso che non è propriamente contenuto in nessun atlante di classe \mathcal{C}^k con esso compatibile.

ESEMPIO XVIII.5.2. Un atlante formato da una sola carta è sempre di classe \mathcal{C}^ω . Quindi i due atlanti $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}, x)\}$ e $\mathcal{A}' = \{(\mathbb{R}, x^3)\}$ su \mathbb{R} sono atlanti di classe \mathcal{C}^ω sulla varietà topologica \mathbb{R} . Essi sono compatibili di classe \mathcal{C}^0 , ma non di classe \mathcal{C}^k per $k \geq 1$, perché la funzione di transizione $x \rightarrow \sqrt[3]{x}$ non è differenziabile in 0.

DEFINIZIONE XVIII.5.3. Una *varietà differenziabile di dimensione n* è il dato di una varietà topologica M di dimensione n e di un suo atlante massimale \mathcal{A} di classe \mathcal{C}^k .

OSSERVAZIONE XVIII.5.4. Una varietà differenziabile di classe \mathcal{C}^0 è semplicemente una varietà topologica.

OSSERVAZIONE XVIII.5.5. Non tutte le varietà topologiche (anche se di Hausdorff e paracompatte) ammettono un atlante differenziabile di classe \mathcal{C}^k con k positivo. Un esempio di varietà topologica su cui non può essere definita una struttura differenziale è stato dato da MICHEL A. KERVAIRE⁴ nel 1959.

HASSLER WHITNEY⁵ ha dimostrato che ogni varietà differenziabile di classe \mathcal{C}^1 paracompatta ammette un atlante di classe \mathcal{C}^ω . Quando studiamo le proprietà *topologiche* di una varietà differenziabile M di classe \mathcal{C}^k con $k \geq 1$, potremo quindi supporre, senza perdere in generalità, che essa sia di classe \mathcal{C}^ω , o di una qualsiasi classe \mathcal{C}^h con $h \geq 1$ che sia utile nella discussione (vedi il §XVIII.12).

Tutte le varietà differenziabili sono triangolabili, come è stato dimostrato da STEWART S. CAIRNS⁶, ma non tutte le varietà topologiche lo sono, come mostrato da LAURENCE C. SIEBENMANN⁷. Abbiamo quindi delle inclusioni proprie

Varietà topologiche \subsetneq Varietà triangolabili \subsetneq Varietà differenziabili.

⁴ A *Manifold which does not admit any Differentiable Structure*, Commentarii Mathematici Helvetici, **34** (1960), pp. 257-270.

⁵ *Differentiable Manifolds*, Annals of Mathematics **37** (3) (1936), pp. 645-680

⁶ *On the triangulation of regular loci*, Ann. of Math. (2) **35** (1934), no. 3, 579-587.

⁷ *Topological manifolds*. Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), Tome 2, pp. 133-163. Gauthier-Villars, Paris, 1971

Infine, una varietà topologica triangolabile può avere due triangolazioni non equivalenti⁸.

Un atlante \mathcal{A} di classe \mathcal{C}^k su una varietà topologica M di dimensione n determina su M un'unica struttura di varietà differenziabile di classe \mathcal{C}^k . L'atlante massimale $\tilde{\mathcal{A}}$ corrispondente è formato da tutti e soli gli omeomorfismi $\varphi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ di un aperto U di M su un aperto V di \mathbb{R}^n tali che $\{(U, \varphi)\} \cup \mathcal{A}$ sia ancora un atlante di classe \mathcal{C}^k (equivalente ad \mathcal{A}). Ogni carta di tale atlante massimale si dice un *sistema di coordinate* (o *carta locale*) di classe \mathcal{C}^k di M .

Se (U, ϕ) è una carta locale di classe \mathcal{C}^k con centro in p e $\Psi : V \rightarrow V'$ è un diffeomorfismo di classe \mathcal{C}^k tra due intorni aperti di 0 in \mathbb{R}^n , con $\Psi(0) = 0$, allora anche $(U \cap \phi^{-1}(V), \Psi \circ \phi)$ è una carta locale di classe \mathcal{C}^k con centro in p .

Un atlante di classe \mathcal{C}^k è anche di classe \mathcal{C}^h per ogni $0 \leq h < k$. Definisce quindi su M un'unica struttura di *varietà differenziabile di classe \mathcal{C}^h* . In particolare, possiamo considerare una varietà differenziabile di classe \mathcal{C}^k come varietà differenziabile di classe \mathcal{C}^h per ogni $h \leq k$.

ESEMPIO XVIII.5.6. Gli atlanti definiti nel paragrafo §XVIII.2 per le varietà topologiche S^n , $\mathbb{R}P^n$, $\mathbb{C}P^n$ sono tutti di classe \mathcal{C}^ω .

LEMMA XVIII.5.7. *Sia M una varietà differenziabile di classe \mathcal{C}^k (con $0 \leq k \leq \omega$) ed A un aperto di M . Se $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i) \mid i \in I\}$ è un atlante di classe \mathcal{C}^k su M , allora*

$$\mathcal{A}_A = \{(U_i \cap A, \phi_i|_{U_i \cap A}) \mid i \in I, U_i \cap A \neq \emptyset\}$$

è un atlante di classe \mathcal{C}^k su A .

Quindi, su ogni aperto A di una varietà differenziabile M risulta definita un'unica struttura di varietà differenziabile di classe \mathcal{C}^k tale che ogni carta locale di classe \mathcal{C}^k di A sia anche una carta locale di classe \mathcal{C}^k di M . Con la struttura differenziale così definita, diciamo che A è una *sottovarietà aperta* di M .

In modo del tutto analogo si possono definire le varietà differenziabili con bordo.

DEFINIZIONE XVIII.5.8. Sia M una varietà topologica con bordo. Un atlante \mathcal{A} di M è di classe \mathcal{C}^k se le sue funzioni di transizione sono di classe \mathcal{C}^k . Due atlanti di classe \mathcal{C}^k sono equivalenti se la loro unione è ancora un atlante di classe \mathcal{C}^k . Una struttura differenziale di classe \mathcal{C}^k su M è il dato di una classe di equivalenza di atlanti \mathcal{C}^k su M .

XVIII.6. Applicazioni differenziabili

In questo paragrafo introduciamo la nozione di applicazione differenziabile tra varietà.

⁸ ROBION C. KIRBY, LAURENCE C. SIEBENMANN: *Foundational essays on topological manifolds, smoothings, and triangulations. With notes by John Milnor and Michael Atiyah*, Annals of Mathematics Studies, No. 88. Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1977. vii+355 pp.

LEMMA XVIII.6.1. Sia $f : M \rightarrow N$ un'applicazione continua tra due varietà differenziabili di classe \mathcal{C}^k e sia $p \in M$. Sono equivalenti:

- (i) Possiamo trovare una carta locale (U, φ) in p ed una carta locale (V, ψ) in $f(p)$ tali che

$$f(U) \subset V \quad e \quad \psi \circ f \circ \varphi^{-1} \in \mathcal{C}^k(\varphi(U), \psi(V)).$$

- (ii) Per ogni carta locale (U, φ) in p e per ogni carta locale (V, ψ) in $f(p)$

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \in \mathcal{C}^k(\varphi(U \cap f^{-1}(V)), \psi(V)).$$

DIMOSTRAZIONE. Chiaramente (ii) \implies (i). L'implicazione opposta segue dal fatto che i cambiamenti di carte locali sono applicazioni di classe \mathcal{C}^k e la composizione di applicazioni di classe \mathcal{C}^k sono ancora applicazioni di classe \mathcal{C}^k . \square

DEFINIZIONE XVIII.6.2. Un'applicazione continua $f : M \rightarrow N$ che soddisfi le condizioni equivalenti del lemma, si dice *differenziabile di classe \mathcal{C}^k in p* . Un'applicazione f si dice *differenziabile di classe \mathcal{C}^k in M* se è tale in ogni punto di M .

L'insieme di tutte le applicazioni differenziabili di classe \mathcal{C}^k definite sulla varietà differenziabile M , a valori nella varietà differenziabile N , si indica con $\mathcal{C}^k(M, N)$.

Vale il seguente:

LEMMA XVIII.6.3. Siano M, N varietà differenziabili di classe \mathcal{C}^k ($0 \leq k \leq \omega$) ed $f : M \rightarrow N$ un'applicazione. Sia \mathcal{U} un ricoprimento aperto di M . Condizione necessaria e sufficiente affinché f sia differenziabile di classe \mathcal{C}^k su M è che per ogni aperto $U \in \mathcal{U}$ la restrizione $f|_U : U \rightarrow N$ di f alla sottovarietà aperta U sia differenziabile di classe \mathcal{C}^k .

XVIII.7. Funzioni reali differenziabili e partizione dell'unità

Consideriamo sulla retta reale \mathbb{R} la struttura di varietà differenziabile di dimensione 1 definita dall'unica carta coordinata (\mathbb{R}, id) . L'insieme $\mathcal{C}^k(M, \mathbb{R})$ delle applicazioni differenziabili di classe \mathcal{C}^k , definite su una varietà differenziabile M di classe \mathcal{C}^k e a valori in \mathbb{R} , si indica semplicemente con $\mathcal{C}^k(M)$. Se $k = \infty$, scriveremo a volte $\mathcal{E}(M)$ invece di $\mathcal{C}^\infty(M)$ e se $k = \omega$ (funzioni analitiche–reali), scriveremo a volte $\mathcal{A}(M)$ invece di $\mathcal{C}^\omega(M)$.

TEOREMA XVIII.7.1. Sia M una varietà differenziabile di classe \mathcal{C}^k , ($0 \leq k \leq \omega$). L'insieme $\mathcal{C}^k(M)$ delle funzioni reali di classe \mathcal{C}^k su M è un anello commutativo e unitario e un'algebra reale rispetto alle operazioni

- (1) di somma:

$$(f + g)(p) = f(p) + g(p) \quad \forall f, g \in \mathcal{C}^k(M), \quad \forall p \in M;$$

- (2) di prodotto:

$$(fg)(p) = f(p)g(p) \quad \forall f, g \in \mathcal{C}^k(M), \quad \forall p \in M;$$

(3) di prodotto per scalare:

$$(kf)(p) = kf(p) \quad \forall f \in \mathcal{C}^k(M), \quad \forall k \in \mathbb{R}, \quad \forall p \in M.$$

TEOREMA XVIII.7.2 (di partizione dell'unità). *Sia M una varietà differenziabile di classe \mathcal{C}^k , ($0 \leq k \leq \infty$), paracompatta. Sia $\mathcal{U} = \{U_j \mid j \in J\}$ un ricoprimento aperto di M . Allora esiste una partizione dell'unità $\{\phi_j\}_{j \in J}$, subordinata⁹ ad \mathcal{U} , mediante funzioni ϕ_j di $\mathcal{C}^k(M)$.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $\mathcal{V} = \{V_i \mid i \in I\}$ un raffinamento aperto localmente finito di \mathcal{U} mediante aperti coordinati (V_i, x_i) di M , con \bar{V}_i compatto, e sia $\mathcal{W} = \{W_i \mid i \in I\}$ un raffinamento di \mathcal{V} , con

$$W_i \subset \bar{W}_i \Subset V_i \Subset U_{j_i}$$

per un'opportuna funzione di raffinamento $i \rightarrow j_i$.

Per ogni $i \in I$ fissiamo un aperto G_i con $W_i \Subset G_i \Subset V_i$. Per la Proposizione ?? del Capitolo ??, esiste per ogni $i \in I$ una funzione $g_i \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ tale che

$$\begin{cases} 0 \leq g_i(y) \leq 1 & \forall y \in \mathbb{R}^n, \\ g_i(y) = 1 & \forall y \in x_i(\bar{W}_i), \\ g_i(y) = 0 & \forall y \notin x_i(G_i). \end{cases}$$

Le funzioni

$$h_i(p) = \begin{cases} g_i(x_i(p)) & \text{se } p \in V_i, \\ 0 & \text{se } p \notin G_i \end{cases}$$

sono allora di classe \mathcal{C}^k su M ; i loro supporti formano un ricoprimento localmente finito di M ed inoltre anche $\{h_i^{-1}(1) \mid i \in I\}$ è un ricoprimento chiuso localmente finito di M . Ne segue che

$$h(p) = \sum_{i \in I} h_i(p), \quad p \in M$$

è una funzione reale di classe \mathcal{C}^k , che assume valori ≥ 1 su M . Quindi le

$$\psi_i(p) = \frac{h_i(p)}{h(p)}, \quad p \in M, \quad i \in I,$$

formano una partizione dell'unità di classe \mathcal{C}^k su M . Per ogni $j \in J$ sia I_j l'insieme degli indici $i \in I$ tali che $j_i = j$. Allora le

$$\phi_j(p) = \sum_{i \in I_j} \psi_i(p)$$

sono funzioni di classe \mathcal{C}^k che definiscono una partizione dell'unità su M subordinata ad \mathcal{U} . \square

Come conseguenza dell'esistenza di partizioni dell'unità, otteniamo:

⁹Ricordiamo che questo significa che $\{\text{supp } \phi_j\}_{j \in J}$ è un ricoprimento chiuso localmente finito di M , con $\text{supp } \phi_j \subset U_j$ per ogni $j \in J$ e che $\sum_{i \in I} \phi_j(p) = 1$ per ogni $p \in M$.

PROPOSIZIONE XVIII.7.3. *Sia F un chiuso di una varietà differenziabile M , di classe \mathcal{C}^k con $0 \leq k \leq \infty$, paracompatta. Se U è un intorno aperto di F in M , esiste una funzione $f \in \mathcal{C}^k(M)$ tale che*

$$0 \leq f(p) \leq 1, \quad \forall p \in M, \quad f(p) = \begin{cases} 1 & \text{se } p \in F, \\ 0 & \text{se } p \notin U. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Poiché M è normale, possiamo fissare un intorno aperto V di F in U la cui chiusura \bar{V} sia ancora contenuta in U . Consideriamo il ricoprimento aperto $\{U, \bar{V}\}$. Per il Teorema XVIII.7.2 esiste una partizione dell'unità $\{f, g\}$, con $f, g \in \mathcal{C}^k(M)$, $\text{supp } f \subset U$, $\text{supp } g \cap \bar{V} = \emptyset$. La f è uguale ad 1 su V e quindi su F ed è nulla fuori da U e perciò soddisfa la tesi. \square

LEMMA XVIII.7.4. *Sia M una varietà differenziabile, paracompatta e a base numerabile, di classe \mathcal{C}^k con $0 \leq k \leq \infty$. Se $\{f_\nu \mid \nu \in \mathbb{N}\}$ è una successione di funzioni di classe \mathcal{C}^k in M , possiamo trovare una successione $\{\epsilon_\nu\}$ di numeri positivi tali che la serie*

$$(18.7.1) \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \epsilon_\nu f_\nu$$

converga uniformemente sui compatti di M ad una funzione di classe \mathcal{C}^k .

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo un atlante $\mathcal{A} = \{(U_i, x_i) \mid i \in I \subset \mathbb{N}\}$ di M con $U_i \Subset M$ ed $\{U_i\}_{i \in I}$ localmente finito, e sia $\{\bar{V}_i\}_{i \in I}$ un raffinamento di $\{U_i\}$ con $\bar{V}_i \Subset U_i$. Scegliamo poi le $\epsilon_\nu > 0$ in modo tale che

$$\sum_{j \leq \nu} \sum_{|\beta| \leq \min\{k, \nu\}} \sum_{i \in I, i \leq \nu} \sup_{x_i(\bar{V}_i)} \left| \frac{\partial^{|\beta|} f_j}{\partial x_\alpha^\beta} \right| < \frac{2^{-\nu}}{\epsilon_\nu}.$$

La scelta è possibile perché per ogni ν il primo membro è una somma finita di estremi superiori di funzioni continue su sottoinsiemi compatti. Con questa scelta degli ϵ_ν , per ogni $i \in I$ la serie $\sum_{\nu} \epsilon_\nu f_\nu \circ x_i^{-1}$ di funzioni di $\mathcal{C}^k(x_i(U_i))$ converge uniformemente con tutte le derivate fino all'ordine k (con tutte le derivate se $k = \infty$) su tutti i compatti di $x_i(U_i) \subset \mathbb{R}^m$. Questo implica che la serie (18.7.1) converge, uniformemente sui compatti di M , a una funzione di classe \mathcal{C}^k su M . \square

OSSERVAZIONE XVIII.7.5. L'enunciato del Lemma XVIII.7.4 non è valido se $k = \omega$. Siano ad esempio $M = \mathbb{R}$ ed $\{f_\nu = (1 + \nu^2 x^2)^{-1}\}$. Sia $f = \sum_{\nu \geq 0} \epsilon_\nu (1 + \nu^2 x^2)^{-1}$ per una serie convergente con $\epsilon_\nu > 0$ per ogni $\nu \in \mathbb{N}$. In particolare, la serie $\sum_{\nu \geq 0} \epsilon_\nu$ è convergente e quindi la f definisce una funzione analitica su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, che si estende a una funzione olomorfa nell'intorno $U = \{z \in \mathbb{C} \mid iz \notin \mathbb{Z}\}$ di $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ in \mathbb{C} , ed in esso coincide con la funzione $F = \sum_{\nu \geq 0} \epsilon_\nu (1 + \nu^2 z^2)$, meromorfa su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ e con poli semplici nei punti $\pm i/\nu$ per $\nu \in \mathbb{Z}_+$. Se f fosse analitica in 0, la sua serie di potenze con centro in 0 convergerebbe in un intorno V di 0 in \mathbb{C} ad una funzione olomorfa G . Poiché $F = G$ su $U \cap V$ per l'unicità della continuazione analitica, abbiamo ottenuto una contraddizione perché F ha una singolarità essenziale in 0.

PROPOSIZIONE XVIII.7.6. *Se F è un chiuso di una varietà differenziabile M , paracompatta e a base numerabile, di classe \mathcal{C}^k con $0 \leq k \leq \infty$, allora esiste un'applicazione $f \in \mathcal{C}^k(M)$ tale che $0 \leq f(p) \leq 1$ per ogni $p \in M$ ed $f^{-1}(0) = F$.*

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che M , essendo normale e a base numerabile è metrizzabile. Sia $\text{dist} : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ una distanza su M e consideriamo gli intorni $U_\nu = \{p \in M \mid \text{dist}(p, F) < 2^{-\nu}\}$, al variare di ν in \mathbb{N} , di F in M . Per la Proposizione XVIII.7.3 esiste una funzione $f_\nu \in \mathcal{C}^k(M)$ tale che

$$0 \leq f_\nu(p) \leq 1 \quad \forall p \in M, \quad K \subset f^{-1}(0), \quad \complement U_\nu \subset f_\nu^{-1}(1).$$

Per il Lemma XVIII.7.4 Possiamo allora scegliere una successione ϵ_ν di numeri reali positivi tale che

$$f(p) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \epsilon_\nu f_\nu(p)$$

converga ad una funzione di classe $\mathcal{C}^k(M)$. La $f \in \mathcal{C}^k(M)$ così ottenuta ha allora le proprietà richieste. \square

In modo analogo si può dimostrare la:

PROPOSIZIONE XVIII.7.7. *Sia M una varietà differenziabile, paracompatta e a base numerabile, di classe \mathcal{C}^k , con $0 \leq k \leq \infty$. Se F_0 ed F_1 sono due chiusi disgiunti di M , allora esiste una $f \in \mathcal{C}^k(M)$ tale che $0 \leq f(p) \leq 1$ per ogni $p \in M$ ed $f^{-1}(0) = F_0$, $f^{-1}(1) = F_1$.* \square

OSSERVAZIONE XVIII.7.8. Il teorema di partizione dell'unità non vale nella classe \mathcal{C}^ω : infatti una funzione analitica–reale che si annulli su un aperto di una varietà M si annulla sull'unione delle componenti connesse di M che lo intersecano. Per questo motivo, nonostante per il teorema di Whitney ogni varietà M , differenziabile di classe \mathcal{C}^1 e paracompatta, ammetta un atlante compatibile di classe \mathcal{C}^ω , è conveniente considerare strutture di classe \mathcal{C}^k con $1 \leq k \leq \infty$.

DEFINIZIONE XVIII.7.9. Siano M ed N varietà differenziabili ed F un sottoinsieme chiuso di M . Sia $0 \leq k \leq \omega$. Un'applicazione continua $f : F \rightarrow N$ si dice *differenziabile di classe \mathcal{C}^k su F* se per ogni punto $p \in F$ esiste un intorno aperto U_p di p in M ed una funzione $\tilde{f} \in \mathcal{C}^k(U_p, N)$ tale che $\tilde{f}|_{U_p \cap F} = f|_{U_p \cap F}$.

Indichiamo con $\mathcal{C}^k(F, N)$ l'insieme delle funzioni differenziabili di classe \mathcal{C}^k di F in N . Se $N = \mathbb{R}$, scriveremo $\mathcal{C}^k(F)$ invece di $\mathcal{C}^k(F, \mathbb{R})$.

PROPOSIZIONE XVIII.7.10. *Sia M una varietà differenziabile paracompatta ed F un chiuso di M . Allora, per ogni $f \in \mathcal{C}^k(F)$, con $0 \leq k \leq \infty$, esiste una funzione $\tilde{f} \in \mathcal{C}^k(M)$ tale che $\tilde{f}|_F = f$.*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo un ricoprimento $\{U_i\}_{i \in I}$ di F con aperti tali che per ogni $i \in I$ esista una $f_i \in \mathcal{C}^k(U_i)$ tale che $f_i(p) = f(p)$ su $U_i \cap F$. Consideriamo una partizione dell'unità $\{\phi_i\} \cup \{\psi\}$ subordinata al ricoprimento aperto $\{U_i\} \cup \{\complement F\}$ di M . Per ogni i poniamo

$$\tilde{f}_i(p) = \begin{cases} \phi_i(p)f_i(p) & \text{se } p \in U_i, \\ 0 & \text{se } p \in \complement U_i. \end{cases}$$

Allora $\tilde{f}_i \in \mathcal{C}^k(U_i)$ ed $\tilde{f} = \sum_{i \in I} \tilde{f}_i \in \mathcal{C}^k(M)$ è il prolungamento di f cercato. \square

TEOREMA XVIII.7.11 (di approssimazione). *Sia M una varietà differenziabile paracompatta, F un suo sottoinsieme chiuso ed $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ un'applicazione continua, la cui restrizione ad F sia di classe \mathcal{C}^k , con $0 \leq k \leq \infty$. Allora per ogni $\epsilon > 0$ esiste un'applicazione $g \in \mathcal{C}^k(M, \mathbb{R}^n)$ tale che*

$$(18.7.2) \quad g(p) = f(p), \quad \forall p \in F,$$

$$(18.7.3) \quad |g(p) - f(p)| < \epsilon, \quad \forall p \in M.$$

DIMOSTRAZIONE. Per la proposizione XVIII.7.10, applicata ad ogni componente di f , esiste una $\tilde{f} \in \mathcal{C}^k(M, \mathbb{R}^n)$ con $\tilde{f}|_F = f|_F$. Costruiamo un ricoprimento aperto di M nel modo seguente. Poniamo

$$U_0 = \{p \in M \mid |\tilde{f}(p) - f(p)| < \epsilon\}.$$

U_0 è un intorno aperto di F in M . Poi, per ogni punto $p \in \mathbb{C}F$, sia

$$U_p = \{q \in M \mid |f(p) - f(q)| < \epsilon\}.$$

Allora $\mathcal{U} = \{U_0\} \cup \{U_p \mid p \in \mathbb{C}F\}$ è un ricoprimento di M . Sia $\{\phi_0\} \cup \{\phi_p\}$ una partizione dell'unità di classe \mathcal{C}^k subordinata ad \mathcal{U} . Poniamo

$$\psi_0 = \begin{cases} \phi_0 \cdot \tilde{f} & \text{su } U_0, \\ 0 & \text{su } \mathbb{C}U_0, \end{cases} \quad \psi_p = \begin{cases} \phi_p \cdot f(p) & \text{su } U_p, \\ 0 & \text{su } \mathbb{C}U_p. \end{cases}$$

Allora $\psi_0, \psi_p \in \mathcal{C}^k(M, \mathbb{R}^n)$ e

$$g(p) = \psi_0(p) + \sum_{q \in \mathbb{C}F} \psi_q(p)$$

è un'applicazione in $\mathcal{C}^k(M, \mathbb{R}^n)$ che soddisfa le (18.7.2), (18.7.3). \square

COROLLARIO XVIII.7.12. *Sia M una varietà differenziabile connessa di classe \mathcal{C}^k , con $1 \leq k \leq \infty$. Allora ogni coppia di punti di M può essere congiunta da una curva di classe \mathcal{C}^k .*

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo un qualsiasi punto p_0 e sia N il sottoinsieme dei punti di M che possono essere congiunti a p_0 da una curva di classe \mathcal{C}^k . Chiaramente $p_0 \in N$ e quindi N è non vuoto. Per dimostrare che $N = M$, dobbiamo dimostrare che è aperto e chiuso. A questo scopo, basterà dimostrare che, dato un qualsiasi punto $p_1 \in M$, esiste un intorno U di p_1 in M tale che, per ogni curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$, di classe \mathcal{C}^k , con $\gamma(1) = p_1$ ed ogni punto p_2 di U , possiamo trovare una $\tilde{\gamma} : [0, 2] \rightarrow U$ con $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t)$ per $0 \leq t \leq 1$ e $\tilde{\gamma}(2) = p_2$.

Infatti, da questo segue che, se $p_1 \in N$, tutto l'intorno U è contenuto in N e dunque N è aperto. Se $p_1 \in \bar{N}$, l'intorno U di p_1 contiene qualche punto di N e quindi $p_1 \in N$ e ciò mostra che N è chiuso.

Scegliamo una carta locale (U, x) , con centro in p_1 ed $x(U) = \mathbb{R}^m$. Sia $\gamma \in \mathcal{C}^k([0, 1], U)$, con $\gamma(1) = p_1$. Utilizzando la Proposizione XVIII.7.10, possiamo supporre che $x \circ \gamma$ sia la restrizione a $[0, 1]$ di una funzione $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$. Se p_2 è un altro punto di U , sia $x_2 = x(p_2)$ e $g(t) = x_2(t - 1)$. Sia poi $\{\phi_1, \phi_2\}$ una partizione dell'unità su \mathbb{R} , subordinata al ricoprimento $\{V_1 = \{t < 2\}, V_2 = \{t > 1\}\}$. Allora

$\eta(t) = \phi_1(t)f(t) + \phi_2(t)g(t)$ definisce una funzione $\eta \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, con $\eta(t) = f(t)$ se $t \leq 1$ ed $\eta(2) = x_2$. Definiamo $\tilde{\gamma} \in \mathcal{C}^k([0, 2], U)$ ponendo

$$\tilde{\gamma}(t) = x^{-1}(\eta(t)), \quad \text{per } 0 \leq t \leq 2.$$

È $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t)$ per $0 \leq t \leq 1$ e $\tilde{\gamma}(2) = p_2$. La dimostrazione è completa. \square

TEOREMA XVIII.7.13 (interpolazione). *Sia M una varietà differenziabile paracompatta di classe \mathcal{C}^k , con $1 \leq k \leq \infty$, ed $f_1, f_2 : M \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni reali, con f_1 semicontinua superiormente, f_2 semicontinua inferiormente ed $f_1(p) < f_2(p)$ per ogni $p \in M$. Allora esiste una funzione $f \in \mathcal{C}^k(M)$ tale che $f_1(p) < f(p) < f_2(p)$ per ogni $p \in M$.*

DIMOSTRAZIONE. Per ogni punto $q \in M$, l'insieme

$$A_q = \{p \in M \mid f_1(p) < f_2(q), f_2(p) > f_1(q)\}$$

è un intorno aperto di q in M . Fissiamo un intorno aperto relativamente compatto U_q di q in M con $U_q \Subset A_q$. Abbiamo

$$(18.7.4) \quad \mu_q = \sup_{p \in U_q} f_1(p) < \inf_{p \in U_q} f_2(p) = M_q.$$

Consideriamo il ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_q \mid q \in M\}$ di M e sia $\{\phi_q\}$ una partizione dell'unità di classe \mathcal{C}^k subordinata ad \mathcal{U} . Poniamo

$$(18.7.5) \quad f(p) = \sum_{q \in M} \frac{\mu_q + M_q}{2} \phi_q(p).$$

La f è una funzione di classe $\mathcal{C}^k(M)$ che soddisfa le condizioni richieste. Infatti, per la (18.7.4), abbiamo

$$f_1(p)\phi_q(p) < \frac{\mu_q + M_q}{2}\phi_q(p) < f_2(p)\phi_q(p), \quad \text{se } p, q \in M \text{ e } \phi_q(p) > 0.$$

Da questo, sommando su $q \in M$, segue che la f definita da (18.7.5) soddisfa $f_1(p) < f(p) < f_2(p)$ per ogni $p \in M$. \square

XVIII.8. Immersioni, sommersioni, diffeomorfismi

Siano M ed N due varietà differenziabili, di dimensione m ed n rispettivamente, entrambe di classe \mathcal{C}^k con $k \geq 1$, ed $f : M \rightarrow N$ un'applicazione differenziabile di classe \mathcal{C}^k . Fissiamo un punto $p_0 \in M$ e sia $q_0 = f(p_0)$ il punto corrispondente di N . Fissiamo un intorno coordinato (V, y) di N con centro in q_0 e sia (U, x) un intorno coordinato in M con centro in p_0 tale che $f(U) \subset V$. La funzione

$$(18.8.1) \quad \mathbb{R}^m \supset x(U) \ni x \rightarrow y(f(x^{-1})) \in y(V)$$

è di classe \mathcal{C}^k ed in particolare, essendo $k \geq 1$, possiamo considerare il suo Jacobiano in 0

$$(18.8.2) \quad \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x=0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y^1(f(x^{-1}))}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^1(f(x^{-1}))}{\partial x^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y^n(f(x^{-1}))}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^n(f(x^{-1}))}{\partial x^m} \end{pmatrix}_{x=0}.$$

La scelta di una diversa coppia di carte coordinate in p_0 e q_0 definisce uno Jacobiano che differisce da quello in (18.8.2) per la moltiplicazione a destra per una matrice di $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$ ed a sinistra per una matrice di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$. In particolare

LEMMA XVIII.8.1. *Il rango della matrice Jacobiana (18.8.2) non dipende dalla scelta delle carte coordinate (U, x) in p_0 e (V, y) in q_0 .*

Possiamo dare quindi la seguente

DEFINIZIONE XVIII.8.2. L'applicazione differenziabile $f : M \rightarrow N$ di classe \mathcal{C}^k in $p_0 \in M$ è in p_0

- un'immersione differenziabile se la matrice Jacobiana (18.8.2) definisce una trasformazione lineare iniettiva, se cioè ha rango m uguale alla dimensione di M ;
- una sommersione differenziabile se la matrice Jacobiana (18.8.2) definisce un'applicazione lineare surgettiva, se cioè ha rango n uguale alla dimensione di N ;
- un diffeomorfismo locale se la matrice Jacobiana (18.8.2) definisce un isomorfismo lineare, se cioè $n = m$ ed il determinante della matrice Jacobiana è diverso da zero.

Per il teorema delle funzioni implicite vale la

PROPOSIZIONE XVIII.8.3. *Sia $f : M \rightarrow N$ un'applicazione differenziabile di classe \mathcal{C}^k , con $k \geq 1$, tra due varietà differenziabili M ed N di classe \mathcal{C}^k e di dimensioni m, n , rispettivamente. Sia $p_0 \in M$ e $q_0 = f(p_0)$.*

- (1) *Se f è un'immersione differenziabile in p_0 , allora $m \leq n$ ed esiste un intorno aperto U di p_0 in M tale che la f sia un'immersione differenziabile in ogni punto di U e che la restrizione $f|_U : U \rightarrow N$ sia iniettiva. Esiste poi un intorno V di q_0 in N ed un'applicazione $g \in \mathcal{C}^k(V, U)$ tale che $g \circ f(p) = p$ per ogni $p \in U$.*
- (2) *Se f è una sommersione differenziabile in p_0 , allora $m \geq n$, e possiamo trovare intorni aperti U di p_0 in M e V di q_0 in N tali che $f(U) = V$, che la f sia una sommersione differenziabile in tutti i punti di U , che la sua restrizione ad U definisca un'applicazione aperta di U su V e che, inoltre, esista una $g \in \mathcal{C}^k(V, U)$ tale che $f \circ g(q) = q$ per ogni $q \in V$.*
- (3) *Se f è un diffeomorfismo locale in p_0 , allora $m = n$ ed f definisce un omeomorfismo di un intorno aperto U di p_0 su un intorno aperto V di q_0 , con omeomorfismo inverso $(f|_V)^{-1} : V \rightarrow U$ di classe \mathcal{C}^k .*

XVIII.9. Prodotto cartesiano di varietà differenziabili

Se M ed N sono due varietà differenziabili di classe \mathcal{C}^k ($0 \leq k \leq \omega$) di dimensione m ed n rispettivamente, possiamo definire sul prodotto cartesiano $M \times N$ una ed una sola struttura di varietà differenziabile di dimensione $m + n$, che renda le

proiezioni sui singoli fattori

$$\begin{array}{ccc} & M \times N & \\ \pi_M \swarrow & & \searrow \pi_N \\ M & & N \end{array}$$

sommersioni differenziabili di classe \mathcal{C}^k . Un atlante per questa struttura si ottiene da atlanti $\mathcal{A}_M = \{(U_i, x_i) \mid i \in I\}$ ed $\mathcal{A}_N = \{(V_j, y_j) \mid j \in J\}$ di classe \mathcal{C}^k di M ed N rispettivamente, ponendo $\mathcal{A}_{M \times N} = \{(U_i \times V_j, x_i \oplus y_j) \mid (i, j) \in I \times J\}$, ove

$$x_i \oplus y_j : U_i \times V_j \ni (p, q) \longrightarrow (x_i(p), y_j(q)) \in x_i(U_i) \times y_j(V_j) \subset \mathbb{R}^{m+n}.$$

XVIII.10. Sottovarietà differenziabili

Supportremo in questo paragrafo che M sia un'assegnata varietà differenziabile, paracompatta, di dimensione m e di classe \mathcal{C}^k , con $1 \leq k \leq \omega$.

DEFINIZIONE XVIII.10.1. Diciamo che N è una sottovarietà di dimensione n e di classe \mathcal{C}^ℓ di M se:

- (i) N è una varietà differenziabile di dimensione n e di classe \mathcal{C}^ℓ ;
- (ii) $N \subset M$ come insieme;
- (iii) $\ell \leq k$ e l'inclusione $\iota : N \hookrightarrow M$ è un'immersione differenziabile di classe \mathcal{C}^ℓ .

LEMMA XVIII.10.2. La topologia di una sottovarietà differenziabile è più fine della topologia di sottospazio topologico.

DIMOSTRAZIONE. Infatti la topologia di sottospazio su N è la meno fine tra quelle che rendono l'inclusione $\iota : N \rightarrow M$ continua; poiché ogni applicazione differenziabile di classe \mathcal{C}^ℓ , con $k \geq 0$, è in particolare continua, ne segue la tesi. \square

ESEMPIO XVIII.10.3. Consideriamo in \mathbb{R}^2 il sottoinsieme N definito da

$$N = \left\{ \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} (\cos t, \sin t) \mid t \in \mathbb{R} \right\} \cup S^1.$$

Esso è una sottovarietà differenziabile di dimensione 1 di \mathbb{R}^2 . La sua topologia di sottovarietà differenziabile è *strettamente più fine* della topologia di sottospazio: infatti $\left\{ \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} (\cos t, \sin t) \mid t \in \mathbb{R} \right\}$ è chiuso nella topologia di sottovarietà differenziabile (essendo una componente connessa), mentre è denso e quindi non chiuso in N per la topologia di sottospazio.

ESEMPIO XVIII.10.4. Consideriamo il toro $\mathbf{T}^2 = S^1 \times S^1$. Esso è una varietà differenziabile di classe \mathcal{C}^ω , con l'atlante definito dalle applicazioni inverse delle immersioni topologiche:

$$(-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)(s, t) \longrightarrow (\exp[i(s + \alpha)], \exp[i(t + \beta)]) \in S^1 \times S^1$$

al variare di α, β in \mathbb{R} . Sia r un numero reale e siano

$$N_r = \left\{ (e^{it}, e^{irt}) \mid t \in \mathbb{R} \right\}, \quad f_r : \mathbb{R} \ni t \rightarrow (e^{it}, e^{irt}) \in N_r.$$

Vi è un'unica struttura di varietà differenziabile su N_f per cui f_r sia un diffeomorfismo locale di classe \mathcal{C}^ω . Con questa struttura differenziabile, N_f è una sottovarietà differenziabile di classe \mathcal{C}^ω del toro T^2 . Se $r \in \mathbb{Q}$, la N_r è compatta e la sua topologia di sottovarietà coincide con quella di sottospazio. Se $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ è irrazionale, allora f_r è bigettiva, N_r è un sottospazio denso di T^2 e la sua topologia di sottovarietà è strettamente più fine di quella di sottospazio topologico: in particolare come sottospazio topologico N_r non è localmente connesso.

Nel seguito, utilizzando il teorema di Whitney (vedi l'Osservazione XVIII.5.5), supporremo per semplicità che M sia di classe \mathcal{C}^ω .

PROPOSIZIONE XVIII.10.5. *Sia N una sottovarietà differenziabile di dimensione n e classe \mathcal{C}^k , con $k \geq 1$, di M . Per ogni punto $p \in N$ esiste un intorno aperto V di p in N ed un aperto coordinato (U, z) di classe \mathcal{C}^k di p in M tali che:*

- (i) $V = \{q \in U \mid z^i(q) = 0, \text{ per } i = n+1, \dots, m\}$;
- (ii) $(V, (z^i)_{1 \leq i \leq n})$ sia una carta locale di classe \mathcal{C}^k di N .

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo carte coordinate (V, y) in N ed (U, x) in M , con centro in p . Per ipotesi, l'inclusione di N in M definisce un'applicazione differenziabile di classe \mathcal{C}^k

$$y(V) \ni y \rightarrow x = f(y) \in x(U), \quad \text{con } f(0) = 0,$$

la cui matrice Jacobiana $\partial x / \partial y$ ha rango n in 0 . A meno di riordinare gli indici, possiamo supporre che

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}_{y=0} \neq 0.$$

Per il teorema dell'applicazione inversa, a meno di restringere l'intorno V di p , (V, x') , con $x' = (x_1, \dots, x_n)|_V$, è ancora una carta locale su N con centro in p . Possiamo supporre che $V \subset U$. Le restrizioni di x_{n+1}, \dots, x_m a V sono funzioni di classe \mathcal{C}^k su V e si possono quindi esprimere come funzioni delle coordinate locali:

$$x_j = f_j(x_1, \dots, x_n), \quad n < j \leq m \text{ su } V.$$

Poniamo

$$\begin{cases} z_i = x_i, & 1 \leq i \leq n, \\ z_i = x_i - f_i(x_1, \dots, x_n), & n < i \leq m. \end{cases}$$

Allora

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -\frac{\partial f_i}{\partial x_j} & I_{m-n} \end{pmatrix}$$

è invertibile e quindi le z_i definiscono una carta locale in un intorno $U' \subset U$ di p in M , che verifica le (i) ed (ii). \square

COROLLARIO XVIII.10.6. *Sia N un sottoinsieme di M e k, n interi non negativi. Esiste al più, su N , una struttura di varietà differenziabile di classe \mathcal{C}^k e di dimensione n per cui N sia una sottovarietà di classe \mathcal{C}^k di M .*

DIMOSTRAZIONE. Infatti, se esiste, la struttura differenziabile di classe \mathcal{C}^k di N è definita da un atlante le cui carte coordinate sono della forma $(U \cap N, (x^i)_{1 \leq i \leq n})$ al variare di $(U, (x^i)_{1 \leq i \leq m})$ tra le carte locali di classe \mathcal{C}^k di M per cui x^{n+1}, \dots, x^m sono nulle su $U \cap N$. \square

DEFINIZIONE XVIII.10.7. Una sottovarietà differenziabile N di M si dice¹⁰ *propria* se è un chiuso di M , *localmente chiusa* se è un sottospazio localmente chiuso di M .

Chiaramente

sottovarietà propria \implies sottovarietà localmente chiusa \implies sottovarietà.

Usando il teorema delle funzioni implicite, si dimostra la

PROPOSIZIONE XVIII.10.8. Sia $1 \leq k \leq \omega$.

Un sottospazio topologico N di M è una sottovarietà propria di classe \mathcal{C}^k di M e di dimensione n se è verificata una delle due condizioni equivalenti:

- (a) Per ogni $p \in M$ esiste una carta locale (U, x) di classe \mathcal{C}^k in M , con centro in p , tale che $M \cap U$ sia connesso ed $(U \cap M, x')$, con $x' = (x^1, \dots, x^n)$, sia una carta locale in N ;
- (b) Per ogni $p \in M$ esiste una carta locale (U, x) di classe \mathcal{C}^k in M , con centro in p , tale che $M \cap U = \{p \in U \mid x^{n+1} = 0, \dots, x^m = 0\}$.

Un sottospazio topologico N di M è una sottovarietà localmente chiusa di classe \mathcal{C}^k di M e di dimensione n se è verificata una delle due condizioni equivalenti:

- (a') Per ogni $p \in N$ esiste una carta locale (U, x) di classe \mathcal{C}^k in M , con centro in p , tale che $M \cap U$ sia connesso ed $(U \cap M, x')$, con $x' = (x^1, \dots, x^n)$, sia una carta locale in N ;
- (b') Per ogni $p \in N$ esiste una carta locale (U, x) di classe \mathcal{C}^k in M , con centro in p , tale che $M \cap U = \{p \in U \mid x^{n+1} = 0, \dots, x^m = 0\}$.

Abbiamo poi:

PROPOSIZIONE XVIII.10.9. Siano M, N due varietà differenziabili di classe \mathcal{C}^k , con $1 \leq k \leq \omega$, ed $f \in \mathcal{C}^k(M, N)$. Se q è un valore regolare di f , se cioè $q \in f(M)$ ed f è una sommersione in tutti i punti di $f^{-1}(q)$, allora $f^{-1}(q)$ è una sottovarietà propria di M .

PROPOSIZIONE XVIII.10.10. Siano M, N due varietà differenziabili di classe \mathcal{C}^k , con $1 \leq k \leq \omega$, ed $f \in \mathcal{C}^k(M, N)$. Siano r un intero con $0 \leq r \leq \min\{m, n\}$, $q \in f(M)$ e supponiamo che, per ogni $p \in f^{-1}(q)$ ed ogni coppia di carte locali (U, x) con centro in p e (V, y) con centro in q , per cui $f(U) \subset V$, lo Jacobiano in 0 di $y \circ f \circ x^{-1}$ abbia rango r . Allora $f^{-1}(q)$ è una sottovarietà propria di M , di classe \mathcal{C}^k e di dimensione $m - r$.

¹⁰In inglese neat.

XVIII.11. Diffeomorfismi

DEFINIZIONE XVIII.11.1. Un *diffeomorfismo* tra due varietà differenziabili M, N è un'applicazione bigettiva $f : M \rightarrow N$ tale che sia f che la sua inversa f^{-1} siano differenziabili.

Osserviamo che l'insieme $\mathbf{Diff}(M)$ dei diffeomorfismi di una varietà differenziabile M in sé è un gruppo rispetto al prodotto di composizione.

Premettiamo il seguente:

LEMMA XVIII.11.2. Siano $p, q \in \mathbb{R}^n$. Fissato un numero reale $R > \max\{|p|, |q|\}$, possiamo trovare un diffeomorfismo $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale che:

$$(18.11.1) \quad \begin{cases} f(x) = x & \text{per } |x| > R \\ f(p) = q. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $v = (v^1, \dots, v^n) = q - p \in \mathbb{R}^n$ e indichiamo con \vec{v} il corrispondente campo di vettori a coefficienti costanti:

$$(18.11.2) \quad \vec{v} = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Esso definisce il gruppo a un parametro di diffeomorfismi di \mathbb{R}^n delle traslazioni parallele a v : $\tau_v(t)(x) = x + tv$.

Fissiamo due numeri reali r_1, r_2 con $\max\{|p|, |q|\} < r_1 < r_2 < R$ ed una funzione $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, con

$$\begin{cases} \chi(x) = 1 & \text{se } |x| \leq r_1, \\ 0 < \chi(x) < 1 & \text{se } r_1 < |x| < r_2, \\ \chi(x) = 0 & \text{se } |x| \geq r_2 \end{cases}$$

e consideriamo il campo di vettori:

$$(18.11.3) \quad X = \chi(x)\vec{v} = \chi(x) \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Per il Teorema ?? del Capitolo ??, esso definisce un gruppo a un parametro di diffeomorfismi:

$$(18.11.4) \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \ni (t, x) \rightarrow \phi_t(x) \in \mathbb{R}^n$$

con:

$$(18.11.5) \quad \begin{cases} \frac{\partial \phi_t(x)}{\partial t} = \chi(\phi_t(x))\vec{v} & \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \\ \phi_0(x) = x & \forall x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Abbiamo $\phi_t(x) = x$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ se $|x| \geq r_2$ e $\phi_1(p) = p + v = q$. \square

Dimostriamo ora:

TEOREMA XVIII.11.3. Se M è una varietà differenziabile connessa, allora il gruppo $\mathbf{Diff}(M)$ dei diffeomorfismi di M opera transitivamente su M .

DIMOSTRAZIONE. Dobbiamo dimostrare che, per ogni coppia di punti $p, q \in M$, esiste un diffeomorfismo $\phi \in \mathbf{Diff}(M)$ che trasforma il punto p nel punto q .

Fissiamo $p \in M$ ed indichiamo con N l'insieme dei punti q di M per cui esiste un diffeomorfismo di M che trasforma p in q .

N è aperto. Sia $q = \gamma(p) \in N$, con $\gamma \in \mathbf{Diff}(M)$ e sia (U, x) una carta coordinata con centro in q ed $x(U) = \mathbb{R}^m$. Se $q' \in U$ ed R un numero reale con $0 \leq |x(q')| < R$, per il Lemma XVIII.11.2 possiamo trovare un diffeomorfismo $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ tale che $F(0) = x(q')$ ed $F(x) = x$ per $|x| > R$. Definiamo $\phi \in \mathbf{Diff}(M)$ ponendo:

$$\phi(y) = \begin{cases} y & \text{se } y \notin U \\ x^{-1} \circ F(x(y)) & \text{se } y \in U. \end{cases}$$

Questa formula definisce un diffeomorfismo di M che trasforma q in q' . Allora $\phi \circ \gamma \in \mathbf{Diff}(M)$ e trasforma p in q' . Quindi $U \subset N$ e questo dimostra che N è aperto.

N è chiuso. Sia q un punto della chiusura di N . Scegliamo una carta coordinata (U, x) con centro in q come nella prima parte della dimostrazione. Se $q' \in U \cap N$, costruiamo F e ϕ come nella prima parte della dimostrazione. Poiché $q' \in N$, possiamo trovare $\gamma' \in \mathbf{Diff}(M)$ con $\gamma'(p) = q'$. Allora $\phi^{-1} \circ \gamma' \in \mathbf{Diff}(M)$ e $\phi^{-1} \circ \gamma'(p) = q$. Ciò dimostra che N è anche chiuso.

Poiché N è sia aperto che chiuso ed M è connesso, ed inoltre $p \in N \neq \emptyset$, ne segue che $N = M$. La dimostrazione è completa. \square

XVIII.12. Esistenza e unicità di strutture differenziali

Sia M una varietà topologica ed indichiamo con M', M'' due varietà differenziabili di classi $\mathcal{C}^{k'}$ e $\mathcal{C}^{k''}$ rispettivamente, corrispondenti a due distinte strutture differenziali su M , definite da atlanti \mathcal{A}' ed \mathcal{A}'' . Diremo che le due strutture differenziali sono equivalenti di classe \mathcal{C}^k se $k \leq \min\{k', k''\}$ ed esiste un diffeomorfismo $f : M' \rightarrow M''$ di classe \mathcal{C}^k .

Ad esempio, le M' ed M'' ottenute considerando sulla retta reale \mathbb{R} le strutture \mathcal{C}^ω definite dagli atlanti $\mathcal{A}' = \{(\mathbb{R}, x)\}$ ed $\mathcal{A}'' = \{(\mathbb{R}, x^3)\}$ sono \mathcal{C}^ω -equivalenti, perché $f(x) = x^3$ è un diffeomorfismo di M' su M'' .

Su ogni varietà M di classe \mathcal{C}^1 , per un teorema di Whitney¹¹ si può definire una struttura di classe \mathcal{C}^ω compatibile. Inoltre le strutture compatibili di classe \mathcal{C}^k , per ogni $k \geq 1$, sono tutte tra loro equivalenti.

È stato dimostrato¹² che esistono delle varietà topologiche che non ammettono una struttura differenziale di classe \mathcal{C}^1 .

¹¹Hassler Whitney *Differentiable Manifolds*, The Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 37, No. 3 (Jul., 1936), pp. 645-680.

¹²Michel A. Kervaire, *A manifold which does not admit any differentiable structure* Comment. Math. Helv. 34 (1960), pp. 257-270.

L'esempio di Kervaire è una varietà topologica di dimensione dieci. Le varietà topologiche di dimensione due e tre ammettono una ed una sola struttura differenziale. Questo fatto è stato dimostrato da Johann Radon¹³ per dimensione 1 e 2 e da Edwin E. Moise¹⁴ in dimensione 3.

Per dimensioni superiori, la struttura differenziale, quando esista, non è univocamente determinata e si pone quindi il problema di determinare le diverse strutture differenziali su una varietà. Di solito la classificazione è fatta per varietà orientabili e diffeomorfismi che preservano l'orientazione.

Per tutte le varietà compatte di dimensione maggiore di quattro vi è un numero finito di strutture differenziabili non equivalenti. Su \mathbb{R}^n c'è un'unica struttura differenziale se $n \neq 4$, mentre per $n = 4$ ve ne sono infinite¹⁵ (quelle diverse dalla struttura standard sono gli \mathbb{R}^4 esotici).

Per avere un'idea del numero di differenti strutture su una varietà compatta, riportiamo in una tabella il numero ν_n delle strutture differenziabili non equivalenti sulle sfere S^n con $n \leq 18$. Nella prima riga riportiamo il valore di n e nella seconda il corrispondente ν_n .

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	1	1	?	1	1	28	2	8	6	992	1	3	2	16256	2	16	16

Quando ci siano più di una struttura differenziale sulla sfera S^n , le sfere con le strutture non equivalenti a quella standard si dicono *sfere esotiche*. Ci sono 27 sfere esotiche di dimensione sette, mentre non si conoscono sfere esotiche di dimensione inferiore. È aperto il problema delle strutture differenziabili sulla sfera di dimensione quattro. Non si sa se vi siano sfere esotiche, e quindi nemmeno se esse siano in numero finito o infinito. Il fatto che non ci siano sfere esotiche in dimensione quattro è noto come la *congettura di Poincaré generalizzata*.

Utilizzando la teoria dell'ostruzione, Robion Kirby e Laurent Siebenmann¹⁶ hanno dimostrato che il numero di strutture differenziali non equivalenti su una varietà compatta di dimensione maggiore di quattro è finito. John Milnor, Michel Kervaire e Morris Hirsch hanno dimostrato¹⁷ che tale numero è lo stesso per tutte e coincide quindi col numero delle strutture differenziali sulle sfere.

Quindi, se M è una varietà topologica di dimensione diversa da quattro, essa possiede al più un numero finito di strutture differenziali non equivalenti.

¹³Johann Karl August Radon (1887–1956), matematico austriaco.

¹⁴Edwin Evariste Moise (1918–1998), matematico americano. I suoi risultati sulle varietà di dimensione tre, ottenuti nell'articolo: *Affine structures in 3-manifolds. V. The triangulation theorem and Hauptvermutung*. Annals of Mathematics. Second Series, Vol. 56 pg 96-114 (1952), sono descritti nel libro: *Geometric topology in dimensions 2 and 3*. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 47. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. x+262 pp.

¹⁵cf. M.Kreck *Exotische Strukturen auf 4-Mannigfaltigkeiten*. [Exotic structures on 4-manifolds] Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. **88** (1986), no. 3, 124–145. I primi esempi sono di Robion Kirby e Michael Freedman.

¹⁶R.C. Kirby e L.C. Siebenmann, *Foundational Essays on Topological Manifolds. Smoothings, and Triangulations*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press (1977).

¹⁷vedi: T.Asselmeyer-Maluga e C.H. Brans *Exotic Smoothness in Physics*. World Scientific Singapore, 2007.

Campi di vettori e spazio tangente

XIX.1. Campi di vettori e curve integrali sulle varietà

Sia M una varietà differenziabile di dimensione m , di classe \mathcal{C}^∞ , numerabile all'infinito. Denotiamo con $\mathcal{E}(M)$ l'algebra reale ed anello commutativo unitario delle funzioni \mathcal{C}^∞ , a valori reali, definite su M .

DEFINIZIONE XIX.1.1. Un *campo di vettori* su M è una *derivazione* dell'algebra $\mathcal{E}(M)$, cioè un'applicazione \mathbb{R} -lineare

$$X : \mathcal{E}(M) \rightarrow \mathcal{E}(M)$$

che soddisfi l'identità di Leibnitz:

$$(19.1.1) \quad X(fg) = gX(f) + fX(g) \quad \forall f, g \in \mathcal{E}(M).$$

L'insieme $\mathfrak{X}(M)$ dei campi di vettori su M è un $\mathcal{E}(M)$ -modulo unitario a sinistra, con il prodotto definito da

$$(19.1.2) \quad (fX)(g) = f(X(g)), \quad \text{per } f, g \in \mathcal{E}(M), X \in \mathfrak{X}(M),$$

ed un'algebra di Lie reale con il prodotto di commutazione

$$(19.1.3) \quad [X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)) \quad \text{per } X, Y \in \mathfrak{X}(M), f \in \mathcal{E}(M).$$

LEMMA XIX.1.2. I campi di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$ si annullano sulle funzioni costanti.

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con c , per $c \in \mathbb{R}$, la funzione costante che vale c su M . Abbiamo:

$$X(c) = X(c \cdot 1) = c \cdot X(1) + 1 \cdot X(c) = 2 \cdot X(c)$$

e quindi $X(c) = 0$. □

LEMMA XIX.1.3. Sia $X \in \mathfrak{X}(M)$. Se $f \in \mathcal{E}(M)$ ed $f(p) = 0$ per tutti i punti p di un aperto A di M , allora $X(f)(p) = 0$ per ogni $p \in A$. Abbiamo quindi :

$$(19.1.4) \quad \text{supp}(X(f)) \subset \text{supp}(f) \quad \forall f \in \mathcal{E}(M), \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

DIMOSTRAZIONE. Fissato un punto $p \in A$, siano U e V due aperti di M con $p \in U \Subset V \Subset A$, e sia ϕ una funzione di $\mathcal{E}(M)$ uguale a 0 in \overline{U} ed uguale ad 1 su $M \setminus V$. Allora $f = \phi f$ e quindi:

$$X(f)(p) = X(\phi f)(p) = \phi(p)X(f)(p) + f(p)X(\phi)(p) = 0.$$

□

Da questo lemma si ricava immediatamente:

LEMMA XIX.1.4. *Sia X un campo di vettori su M ; se f, g sono due funzioni di $\mathcal{E}(M)$ che assumono gli stessi valori su tutti i punti di un aperto A di M , allora :*

$$X(f)(p) = X(g)(p) \quad \forall p \in A.$$

DIMOSTRAZIONE. Infatti $f - g$ si annulla su A e quindi:

$$X(f)(p) - X(g)(p) = X(f - g)(p) = 0 \quad \forall p \in A.$$

□

COROLLARIO XIX.1.5. *Se A è un aperto di M , per ogni $X \in \mathfrak{X}(M)$ vi è uno ed un solo campo di vettori $X|_A \in \mathfrak{X}(A)$ tale che $X|_A f|_A = (Xf)|_A$ per ogni $f \in \mathcal{E}(M)$.* □

Ad ogni carta locale (U, x) in M possiamo associare campi di vettori $\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^m$ in $\mathfrak{X}(U)$, definiti da :

$$(19.1.5) \quad \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) f = \frac{\partial[f \circ x^{-1}]}{\partial x^i} \circ x, \quad \forall f \in \mathcal{E}(U).$$

In una carta locale, un campo di vettori si rappresenta come un operatore differenziale alle derivate parziali, omogeneo del prim'ordine. Vale infatti il

LEMMA XIX.1.6. *Siano $X \in \mathfrak{X}(M)$ ed (U, x) una carta locale in M . Allora :*

$$(19.1.6) \quad X|_U = \sum_{i=1}^m X(x^i) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right).$$

DIMOSTRAZIONE. Data $f \in \mathcal{E}(U)$, sia $f^* = f \circ x^{-1} \in \mathcal{E}(x(U))$. Se $x_0 \in x(U)$, per ogni punto x di un intorno aperto $V_{x_0} \subset x(U)$ di x_0 , stellato rispetto ad x_0 :

$$\begin{aligned} f^*(x) &= f^*(x_0) + \int_0^1 \frac{df^*(x_0 + t(x - x_0))}{dt} dt \\ &= f^*(x_0) + \sum_{i=1}^m (x^i - x_0^i) f_i^*(x), \quad \text{con} \\ f_i^*(x) &= \int_0^1 \frac{\partial f^*}{\partial x^i}(x_0 + t(x - x_0)) dt \in \mathcal{E}(V_{x_0}). \end{aligned}$$

Con $x_0 = x(p_0)$ abbiamo

$$f_i^*(x_0) = \frac{\partial f^*(x_0)}{\partial x^i} = \left[\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) f \right] (p_0)$$

e quindi :

$$\begin{aligned}
 [X|_U f](p_0) &= [X|_{v_{x_0}} f](p_0) \\
 &= [X|_{v_{x_0}} f(p_0)](p_0) + \left[X|_{v_{x_0}} \sum_{i=1}^m (x^i - x_0^i) f_i^* \circ x \right](p_0) \\
 &= \sum_{i=1}^m f_i^*(x_0) [X|_{v_{x_0}} (x^i - x_0^i)](p_0) \\
 &= \sum_{i=1}^m [X(x^i)](p_0) \left[\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) f \right](p_0). \quad \square
 \end{aligned}$$

DEFINIZIONE XIX.1.7. Dato un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$ ed un punto $p \in M$, indichiamo con X_p la derivazione :

$$(19.1.7) \quad \mathcal{E}(M) \ni f \rightarrow X_p f := (Xf)(p) \in \mathbb{R}$$

dell'algebra reale $\mathcal{E}(M)$. Diciamo anche che X_p è un *vettore tangente ad M nel punto p* .

DEFINIZIONE XIX.1.8. Una curva $\phi : (a, b) \rightarrow M$ di classe \mathcal{C}^1 è una *curva integrale del campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$* se :

$$(19.1.8) \quad \frac{df \circ \phi(t)}{dt} = X_{\phi(t)} f, \quad \forall f \in \mathcal{E}(M), \quad \forall t \in (a, b).$$

Se (U, x) è una carta locale in M ed $X = \sum_{i=1}^m a^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$ in U , allora gli integrali ϕ in U del campo di vettori X sono soluzioni $x(t) = x(\phi(t))$ del sistema autonomo di equazioni differenziali ordinarie del prim'ordine :

$$(19.1.9) \quad \dot{x}^i = a^i(x) \quad \text{per } i = 1, \dots, m.$$

Dai teoremi di esistenza e unicità per sistemi di equazioni differenziali ordinarie abbiamo allora :

TEOREMA XIX.1.9. Siano $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo di vettori in M e p_0 un punto di M . Esiste allora un'unica curva integrale $\phi : (a, b) \rightarrow M$ di X , con $-\infty \leq a < 0 < b \leq +\infty$, con $\phi(0) = p_0$, tale che, se $a > -\infty$, allora $\phi(t)$ non ha limite in M per $t \rightarrow a$; se $b < +\infty$, allora $\phi(t)$ non ha limite in M per $t \rightarrow b$.

XIX.2. Vettori tangenti e fibrato tangente

DEFINIZIONE XIX.2.1. Fissato un punto $p \in M$, chiamiamo *vettore tangente ad M in p* un'applicazione \mathbb{R} -lineare $v : \mathcal{E}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ che soddisfi l'identità di Leibnitz :

$$(19.2.1) \quad v(fg) = v(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot v(g) \quad \forall f, g \in \mathcal{E}(M).$$

I vettori tangenti in un punto $p \in M$ formano uno spazio vettoriale reale, che indicheremo con $T_p M$.

Se $X \in \mathfrak{X}(M)$, o più in generale $X \in \mathfrak{X}(U)$ per un intorno aperto U di p in M , allora X_p è un vettore tangente ad M in p .

TEOREMA XIX.2.2. Per ogni punto $p \in M$ l'applicazione lineare

$$(19.2.2) \quad \mathfrak{X}(M) \ni X \rightarrow X_p \in T_p M$$

è surgettiva.

Se M ha dimensione m ed (U, x) è una carta locale di M in p , allora i vettori tangenti

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^m} \right)_p$$

formano una base di $T_p M$. □

DEFINIZIONE XIX.2.3. Indichiamo con TM l'unione disgiunta degli spazi vettoriali $T_p M$, al variare di p in M e con $\pi : TM \rightarrow M$ l'applicazione che fa corrispondere al vettore tangente $v \in T_p M$ il suo punto d'applicazione p . Possiamo definire su TM una struttura di varietà differenziabile nel modo seguente. Per ogni carta locale (U, x) di M , definiamo una carta locale $(\pi^{-1}(U), x \times dx)$ di TM ponendo :

$$(19.2.3) \quad \begin{cases} \pi^{-1}(U) \ni v \longrightarrow (x(\pi(v)), v(x)) \in x(U) \times \mathbb{R}^m, \\ \text{con } v(x) = (v(x^1), \dots, v(x^m)) \in \mathbb{R}^m. \end{cases}$$

Se (V, y) è un'altra carta locale di M , per $p \in U \cap V$ abbiamo :

$$(19.2.4) \quad v(y^i) = \sum_{h=1}^m v(x^h) \frac{\partial y^i}{\partial x^h},$$

cioè $v(y) = (\partial y / \partial x)v(x)$, ove $\partial y / \partial x$ è la matrice Jacobiana del cambiamento di coordinate. Questa relazione si esprime anche dicendo che *le componenti di un vettore tangente sono covarianti rispetto ai cambiamenti di coordinate*.

Quindi, se $y = \phi(x)$, per $x \in x(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n$ è la funzione di transizione delle due carte (U, x) e (V, y) , il cambiamento di coordinate dalla carta $(\pi^{-1}U, x \times dx)$ alla carta $(\pi^{-1}V, y \times dy)$ è $(\phi \times d\phi)$.

Abbiamo perciò :

PROPOSIZIONE XIX.2.4. Dato un atlante $\mathcal{A} = \{(U_i, x_i)\}$ di M , con funzioni di transizione¹ $x_{i,j}$, allora $T\mathcal{A} = \{\pi^{-1}(U_i), x_i \times dx_i\}$ è un atlante di TM , con funzioni di transizione $x_{i,j} \times dx_{i,j}$.

Lo spazio tangente è un esempio di *fibrato differenziabile*.

DEFINIZIONE XIX.2.5. Un fibrato differenziabile è il dato $\xi = (E \xrightarrow{\pi} B)$ di due varietà differenziabili B, E e di una sommersione differenziabile $E \xrightarrow{\pi} B$. La varietà E si dice lo *spazio totale*, B la *base* e π la *proiezione* del fibrato ξ .

Indichiamo con $\Gamma_\pi(B, E)$, od anche con $\Gamma(B, E)$ quando non vi sia pericolo di confusione, lo spazio delle *sezioni differenziabili* di B in E , cioè l'insieme delle applicazioni $s \in \mathcal{C}^\infty(B, E)$ che sono inverse destre della proiezione π :

$$(19.2.5) \quad \Gamma(B, E) = \{s \in \mathcal{C}^\infty(B, E) \mid \pi \circ s(p) = p, \forall p \in B\}.$$

¹abbiamo cioè $x_{i,j} = x_i \circ x_j^{-1}$ su $x_j(U_j \cap U_i)$.

XIX.3. Differenziale di un'applicazione differenziabile

DEFINIZIONE XIX.3.1. Siano M ed N due varietà differenziabili ed $f : M \rightarrow N$ un'applicazione di classe \mathcal{C}^∞ . Essa induce un'applicazione (il *pullback di funzioni*):

$$(19.3.1) \quad f^* : \mathcal{E}(N) \ni \phi \rightarrow f^*(\phi) = \phi \circ f \in \mathcal{E}(M).$$

Il *differenziale* di f in un punto $p \in M$, che indicheremo con $f_*(p)$ o con $df(p)$, è l'applicazione

$$(19.3.2) \quad \begin{aligned} f_*(p) &= df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N \quad \text{definita da:} \\ f_*(p)(v)(\phi) &= df_p(v)(\phi) = v(f^*(\phi)) = v(f \circ \phi) \quad \forall \phi \in \mathcal{E}(N). \end{aligned}$$

Se (U, x) e (V, y) sono carte locali in M ed N rispettivamente, con $p \in U$ ed $f(p) \in V$, abbiamo:

$$(19.3.3) \quad f_*(p) \left(\sum_{i=1}^m v^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m v^i \frac{\partial f^j}{\partial x^i}(p) \right) \left(\frac{\partial}{\partial y^j} \right)_{f(p)}.$$

Possiamo definire in questo modo un'applicazione differenziabile:

$$(19.3.4) \quad f_* = df : TM \ni v \rightarrow df_{\pi(v)}(v) \in TN,$$

ove abbiamo indicato con $\pi : TM \rightarrow M$ la proiezione canonica. La f_* (o df) si dice il *differenziale* dell'applicazione f , o il suo *sollevamento* allo spazio tangente.

XIX.4. Alcune osservazioni sul teorema d'immersione di Whitney

Diamo qui una dimostrazione del teorema d'immersione di Whitney utilizzando la nozione di varietà tangente di una varietà differenziabile.

Per semplicità svolgeremo l'argomento per il caso di varietà compatte.

Sia M una varietà differenziabile compatta, di dimensione m e sia $\mathcal{A} = \{(U_a, x_a) \mid 1 \leq a \leq k\}$ un suo atlante finito, con $x_a(U_a) = \mathbb{R}^m$ e tale che, posto $U'_a = \{p \in U_a \mid |x_a(p)| < 1\}$, la famiglia $\{U'_a \mid 1 \leq a \leq k\}$ sia ancora un ricoprimento di M .

Per ogni a , sia $\psi_a \in \mathcal{C}_0^\infty(M)$ una funzione uguale ad 1 su U'_a e nulla in un intorno di $\complement U_a$. Definiamo quindi le funzioni $\tilde{x}_a : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ ponendo

$$\tilde{x}_a = \begin{cases} \psi_a x_a & \text{su } U_a, \\ 0 & \text{su } \complement U_a. \end{cases}$$

Allora

$$\psi : M \ni p \rightarrow ((\tilde{x}_a^i(p))_{\substack{1 \leq a \leq k \\ 1 \leq i \leq m}}, (\psi_a(p))_{1 \leq a \leq k}) \in \mathbb{R}^{k(m+1)}$$

è un diffeomorfismo di M su una sottovarietà compatta di \mathbb{R}^{km} . Abbiamo ottenuto così un'immersione di M in uno spazio Euclideo \mathbb{R}^ℓ che è anche un diffeomorfismo con una sottovarietà differenziabile M_0 di \mathbb{R}^ℓ .

Identifichiamo lo spazio tangente TM_0 ad un sottospazio del prodotto cartesiano $M_0 \times \mathbb{R}^\ell$ ed indichiamo con $\text{pr}_2 : TM_0 \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ l'applicazione che fa corrispondere alla coppia $(p, v) \in TM_0 \subset M_0 \times \mathbb{R}^\ell$ il vettore v .

Sia $v \in \mathbb{R}^\ell$ un vettore non nullo e $\langle v \rangle$ il sottospazio vettoriale di dimensione 1 generato da v . Sia $\pi_v : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}^\ell / \langle v \rangle \cong \mathbb{R}^{\ell-1}$ la proiezione nel quoziente. La condizione necessaria e sufficiente affinché $\pi_v|_{M_0} : M_0 \rightarrow \mathbb{R}^{\ell-1}$ sia un'immersione differenziabile è che $v \notin \text{pr}_2(TM_0)$. Se $2m < \ell$, per il Lemma di Sard l'immagine di pr_2 è di prima categoria e quindi la $\pi_v \circ \psi$ è un'immersione differenziabile in uno spazio Euclideo di dimensione $\ell - 1$. Per ricorrenza, otteniamo un'immersione differenziabile di M in uno spazio Euclideo di dimensione $\leq 2m$.

Osserviamo poi che $\pi_v : M_0 \rightarrow \mathbb{R}^\ell / \langle v \rangle$ è iniettiva se e soltanto se non vi sono due punti distinti $p_1, p_2 \in M_0$ con $p_2 - p_1 \in \langle v \rangle$. Ciò equivale al fatto che v non appartenga all'immagine dell'applicazione

$$\{(p_1, p_2) \in M_0 \times M_0 \mid p_1 \neq p_2\} \times \mathbb{R} \ni (p_1, p_2, t) \rightarrow p_1 + t(p_2 - p_1) \in \mathbb{R}^\ell.$$

Questa è un'applicazione differenziabile di una varietà differenziabile di dimensione $2m + 1$ in \mathbb{R}^ℓ . Quindi, se $2m + 1 < \ell$, per il Lemma di Sard ha immagine di prima categoria e dunque potremo scegliere $v \in \mathbb{R}^\ell \setminus \{0\}$ in modo che la $\pi_v \circ \psi$ sia ancora un'immersione differenziabile iniettiva e quindi un diffeomorfismo di M con una sottovarietà di $\mathbb{R}^{2\ell-1}$. Per ricorrenza otteniamo un'immersione topologica iniettiva di M su una sottovarietà differenziabile di uno spazio Euclideo di dimensione $\leq 2m + 1$.

Nel caso in cui M non sia compatta, ma numerabile all'infinito, utilizziamo il ragionamento precedente per dimostrare che l'insieme \mathcal{F}_v delle applicazioni $\psi \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^{2m+1})$ la cui restrizione ad $\text{int } K_v$ siano delle immersioni differenziabili iniettive è un aperto denso di seconda categoria. Allora $\psi \in \bigcap_v \mathcal{F}_v$ dà un'immersione differenziabile iniettiva di M nello spazio Euclideo \mathbb{R}^{2m+1} . Per ottenere un'immersione propria, sarà sufficiente considerare una $h \in \mathcal{C}^\infty(M)$ con $h(p) > v$ se $p \in \bigcup K_v$ e la $(\psi, h) \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^{2m+2})$. Potremo poi comporre quest'immersione con un'opportuna proiezione π_v rispetto a un vettore non nullo $v \notin \langle e_{2m+2} \rangle$, per ottenere un'immersione differenziabile di M in \mathbb{R}^{2m+1} che sia un diffeomorfismo con una sottovarietà propria di \mathbb{R}^{2m+1} .

XIX.5. Gruppi a un parametro di diffeomorfismi

DEFINIZIONE XIX.5.1. Un *gruppo a un parametro di diffeomorfismi di M* è un'applicazione differenziabile

$$(19.5.1) \quad \Phi : M \times \mathbb{R} \ni (p, t) \rightarrow \Phi(p, t) \in M$$

che goda delle proprietà:

- (i) $\Phi(p, 0) = p \quad \forall p \in M$
- (ii) $\Phi(p, t + s) = \Phi(\Phi(p, t), s) \quad \forall p \in M, \forall t, s \in \mathbb{R}$.

DEFINIZIONE XIX.5.2. Chiamiamo *gruppo locale a un parametro di diffeomorfismi di M* il dato di un intorno U^* di $M \times \{0\}$ in $M \times \mathbb{R}$ e di un'applicazione

$$(19.5.2) \quad \Phi : U^* \subset M \times \mathbb{R} \ni (p, t) \rightarrow \Phi(p, t) \in M$$

che goda delle proprietà :

- (i) $\Phi(p, 0) = p \quad \forall p \in M$
- (ii) $\Phi(p, t + s) = \Phi(\Phi(p, t), s) \quad \text{se } (p, t + s) \text{ e } (\Phi(p, t), s) \in U^* .$

Vale il :

TEOREMA XIX.5.3. *Ad un gruppo locale a un parametro $\Phi : U^* \rightarrow M$ di diffeomorfismi di M corrisponde un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$ tale che*

$$(19.5.3) \quad (Xf)(p) = \left. \frac{df(\Phi(p, t))}{dt} \right|_{t=0} \quad \forall f \in \mathcal{E}(M), \quad \forall p \in M .$$

Viceversa, dato un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$ esiste un gruppo locale a un parametro di diffeomorfismi di $\Phi : U^ \rightarrow M$ di M per cui sia verificata la (19.5.3). Due gruppi a un parametro $\Phi_1 : U_1^* \rightarrow M$ e $\Phi_2 : U_2^* \rightarrow M$ per cui sia verificata (19.5.3) per lo stesso campo X coincidono su tutte le componenti connesse di $U_1^* \cap U_2^*$ che intersecano $M \times \{0\}$.*

DIMOSTRAZIONE. L'esistenza e unicità di un gruppo locale a un parametro di diffeomorfismi associato ad un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$ è conseguenza del teorema d'esistenza locale, unicità e dipendenza \mathcal{C}^∞ dai dati iniziali per il sistema di equazioni differenziali ordinarie (19.1.9). Il fatto che la soluzione generale del problema di Cauchy definisca un gruppo locale a un parametro è conseguenza del fatto che il sistema (19.1.9) è *autonomo*, che cioè le funzioni a secondo membro in (19.1.9) non dipendono dalla variabile t e quindi che, se $t \rightarrow \Phi(p, t)$ è soluzione in un intervallo $t \in (a, b)$, con $a < 0 < b$, con dato iniziale $\Phi(p, 0) = p$, allora, per ogni $t_0 \in (a, b)$ fissato, $t \rightarrow \Phi(p, t + t_0)$ è soluzione nell'intervallo $(a - t_0, b - t_0)$, con dato iniziale $\Phi(p, t_0)$, e coincide quindi con $\Phi(\Phi(p, t_0), t)$.

Si verifica poi facilmente, utilizzando la formula di Leibnitz per la derivata del prodotto di funzioni reali di una variabile reale, che la (19.5.3) definisce un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$. □

Il caso delle varietà con bordo. Possiamo estendere senza difficoltà la definizione dei campi di vettori anche al caso delle varietà a bordo.

DEFINIZIONE XIX.5.4. Sia M una varietà differenziabile di dimensione m , con bordo, $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $p_0 \in \partial M$. Fissiamo una carta locale (U, x) con centro in p_0

$$U \ni p \rightarrow x \in X(U) \subset \{x \in \mathbb{R}^m \mid x^m \geq 0\}, \quad x(p_0) = 0.$$

Diciamo che X nel punto p_0 è

diretto verso l'esterno se $X_p x^m|_{x=0} < 0$,

tangente se $X_p x^m|_{x=0} = 0$,

diretto verso l'interno se $X_p x^m|_{x=0} > 0$.

La definizione non dipende dalla scelta della carta locale, perché la componente $\partial y^m / \partial x^m$ dello Jacobiano della funzione di transizione è positiva su $U \cap V \cap \partial M$ per ogni coppia di carte locali (U, x) e (V, y) di M .

Abbiamo allora

PROPOSIZIONE XIX.5.5. Sia M una varietà differenziabile con bordo ed $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo di vettori che non è tangente a ∂M in nessun punto. Esistono allora due funzioni continue non negative $\delta, \varepsilon : M \rightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} \delta(p) > 0, \varepsilon(p) > 0 & \text{se } p \in \text{int}(M), \\ \delta(p) > 0, \varepsilon(p) = 0 & \text{se } p \in \partial M \text{ ed } X_p \text{ è diretto all'esterno,} \\ \delta(p) = 0, \varepsilon(p) > 0 & \text{se } p \in \partial M \text{ ed } X_p \text{ è diretto all'interno,} \end{cases}$$

ed un'applicazione continua ed infinitamente differenziabile fino al bordo di U^* tale che

$$\Phi : U^* = \{(p, t) \in M \times \mathbb{R} \mid -\delta(p) \leq t \leq \varepsilon(p)\}$$

tale che

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(p, t)}{\partial t} &= X_{\Phi(p, t)}, \quad \forall (p, t) \in U^*, \\ \Phi(p, t + s) &= \Phi(\Phi(p, s), t), \quad \text{se } (p, s), (p, t + s), (\Phi(p, s), t) \in U^*. \quad \square \end{aligned}$$

XIX.6. Inclusioni isotope

Definiamo in questo paragrafo una nozione di equivalenza di inclusioni differenziabili.

DEFINIZIONE XIX.6.1. Siano $f_0, f_1 : M \rightarrow N$ due inclusioni differenziabili. Una isotopia tra f_0 ed f_1 è un'applicazione $F \in \mathcal{C}^\infty(M \times [0, 1], N)$ tale che

- (a) $F(x, 0) = f_0(x), F(x, 1) = f_1(x)$ per ogni $x \in M$;
- (b) $f_t = F(\cdot, t) \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ è un'inclusione differenziabile per ogni $t \in [0, 1]$.

La relazione di isotopia tra inclusioni differenziabili è una relazione d'equivalenza.

LEMMA XIX.6.2. Per ogni isotopia $F \in \mathcal{C}^\infty(M \times [0, 1], N)$ di inclusioni differenziabili l'applicazione

$$(19.6.1) \quad \tilde{F} : M \times [0, 1] \ni (x, t) \longrightarrow (F(x, t), t) \in N \times [0, 1]$$

è un'inclusione differenziabile che preserva i livelli.

Viceversa, se $\tilde{F} \in \mathcal{C}^\infty(M \times [0, 1], N \times [0, 1])$ è un'inclusione differenziabile che preserva i livelli, allora $F(x, t) = \pi_N(\tilde{F}(x, t))$ è un'isotopia di inclusioni differenziabili.

DIMOSTRAZIONE. Fissando un'inclusione differenziabile propria $\psi : N \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ e considerando le applicazioni $\psi \circ F$ e $\psi \circ G$ possiamo ricondurci al caso in cui $N = \mathbb{R}^\ell$. Fissata una carta locale (U, x) in M , poiché $G(p, t) = (F(p, t), t)$, lo Jacobiano di G è dato da

$$\frac{\partial G}{\partial(x, t)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial t} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

È chiaro quindi che G è un'immersione differenziabile se e soltanto se F_t è un'immersione differenziabile per ogni $t \in [0, 1]$. Inoltre, G è iniettiva se e soltanto se ciascuna delle F_t , per $t \in [0, 1]$, è iniettiva. \square

OSSERVAZIONE XIX.6.3. Sia $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ una funzione reale con

$$\begin{cases} \chi(t) = 0 & \text{se } t \leq 0, \\ 0 < \chi(t) < 1 & \text{se } 0 < t < 1, \\ \chi(t) = 1 & \text{se } t \geq 1. \end{cases}$$

Possiamo prendere ad esempio

$$\chi(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0, \\ \exp\left(-\frac{1}{t} \exp\left(\frac{1}{t-1}\right)\right) & \text{se } 0 < t < 1, \\ 1 & \text{se } t \geq 1. \end{cases}$$

Se $F \in \mathcal{C}^\infty(M \times [0, 1], N)$, allora $G(p, t) = F(p, \chi(t)) \in \mathcal{C}^\infty(M \times \mathbb{R}, N)$ e $G_t = F_0$ per $t \leq 0$, $G_t = F_1$ per $t \geq 1$. Potremo quindi nel seguito supporre che le isotopie siano definite per tutti i valori di $t \in \mathbb{R}$, e localmente costanti fuori dall'intervallo $[0, 1]$.

NOTAZIONE XIX.6.4. Se $F \in \mathcal{C}^\infty(M \times \mathbb{R}, N)$ indicheremo nel seguito con $\tilde{F} \in \mathcal{C}^\infty(M \times \mathbb{R}, N \times \mathbb{R})$ l'applicazione

$$M \times \mathbb{R} \ni (p, t) \longrightarrow \tilde{F}(p, t) = (F(p, t), t) \in N \times \mathbb{R}.$$

XIX.7. Campi completi

Sia M una varietà differenziabile di dimensione m .

DEFINIZIONE XIX.7.1. Un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$ si dice *completo* se per ogni $x_0 \in M$ la soluzione del problema di Cauchy

$$(19.7.1) \quad \begin{cases} \dot{x} = X_x, \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

è definita per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Vale il criterio

PROPOSIZIONE XIX.7.2. *Ogni campo di vettori a supporto compatto è completo.*

TEOREMA XIX.7.3. *Indichiamo con $\text{pr} : M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la proiezione sulla seconda coordinata. Ogni campo di vettori completo X su $M \times \mathbb{R}$, con $\text{dpr}(X) = \partial/\partial t$ induce un'isotopia dell'identità su M .*

Viceversa, se $F \in \mathcal{C}^\infty(M \times \mathbb{R}, M)$ è un'isotopia dell'identità, allora $d\tilde{F}(\partial/\partial t)$ è un campo di vettori completo su $M \times \mathbb{R}$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $X \in \mathfrak{X}(M \times \mathbb{R})$ un campo completo e denotiamo con $\Phi \in \mathcal{C}^\infty((M \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}, M \times \mathbb{R})$ il flusso in $M \times \mathbb{R}$ da esso definito. Scriviamo

$$\Phi(p, s; t) = (\phi(p, s; t), \tau(p, s; t)), \quad \text{con } \phi \in \mathcal{C}^\infty(M \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, M), \quad \tau \in \mathcal{C}^\infty(M \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

Abbiamo

$$\phi(p, s; 0) = p, \quad \tau(p, s; 0) = s, \quad \forall p \in M, \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Poiché $X = (Y, \partial/\partial s)$ con $Y \in \Gamma(M \times \mathbb{R}, TM)$, è

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = 1,$$

che, tenuto conto dei dati iniziali, ci dà $\tau(p, s; t) = s + t$.

Posto

$$\tilde{F}(p, t) = \Phi(p, 0; t),$$

abbiamo

$$\tilde{F}(p, 0) = \Phi(p, 0; 0) = (p, 0).$$

La \tilde{F} è della forma

$$\tilde{F}(p, t) = (F(p, t), t), \quad \text{con } F(p, t) = \phi(p, 0; t)$$

e quindi preserva i livelli. Osserviamo che l'applicazione

$$M \ni p \rightarrow \pi_M \circ \Phi(p, t; -t) \in M$$

inverte $F_t : M \ni p \rightarrow F(p, t) \in M$. Infatti

$$\Phi(F(p, t), t; -t) = \Phi(\Phi(p, 0; t), -t) = (p, 0), \quad \forall p \in M, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Quindi, per ogni $t \in \mathbb{R}$, $F_t : p \rightarrow F(p, t)$ è un automorfismo di M .

Viceversa, ad un'isotopia $F \in \mathcal{C}^\infty(M \times \mathbb{R}, M)$ dell'identità possiamo associare il campo di vettori completo $X = d\tilde{F}(\partial/\partial t)$ su $M \times \mathbb{R}$. \square

OSSERVAZIONE XIX.7.4. Se $X \in \mathfrak{X}(M)$ è completo, allora $(X, \partial/\partial t)$ è un campo completo in $M \times \mathbb{R}$.

OSSERVAZIONE XIX.7.5. Se $X \in \Gamma(M \times \mathbb{R}, TM)$ ha supporto compatto, allora $(X, \partial/\partial t)$ è un campo di vettori completo su $M \times \mathbb{R}$.

ESEMPIO XIX.7.6. Sia $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ un diffeomorfismo, con $f(0) = 0$. Possiamo scrivere f nella forma

$$f^i(x) = \sum_{j=1}^n a_j^i(x) x^j \quad \text{per } i = 1, \dots, n, \quad \text{con } a_j^i \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n),$$

con

$$a_j^i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(tx) dt \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n).$$

La $F(x, t) = t^{-1} f(tx)$ è un'isotopia tra il diffeomorfismo lineare

$$f_0(x) = \frac{\partial f(0)}{\partial x} x$$

ed f . Quindi ogni diffeomorfismo di \mathbb{R}^n è isotopo ad un diffeomorfismo lineare. Infine, poiché $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ ha esattamente due componenti connesse per archi, possiamo concludere che ogni diffeomorfismo di \mathbb{R}^n è isotopo o all'identità o alla simmetria rispetto ad un iperpiano.

Nel suo lavoro del 1936, H. Whitney dimostrò anche il

TEOREMA XIX.7.7 (isotopia delle immersioni). *Se $f_0, f_1 : M \rightarrow N$ sono due inclusioni differenziabili omotope di una varietà compatta m -dimensionale M in una varietà differenziabile N di dimensione $n \geq 2m + 2$, allora f_0 ed f_1 sono isotope come inclusioni differenziabili.*

TRACCIA DELLA DIMOSTRAZIONE. Consideriamo un'omotopia $F : M \times I \rightarrow N$ tra f_0 ed f_1 . Per il Teorema ?? del Capitolo ??, possiamo supporre che l'omotopia sia restrizione di una $F \in \mathcal{C}^\infty(M \times \mathbb{R}, N)$. Consideriamo allora la $\tilde{F}(p, t) = (F(p, t), t)$. Questa è un'applicazione in $\mathcal{C}^\infty(M \times \mathbb{R}, N \times \mathbb{R})$. Poiché $\dim(M \times \mathbb{R}) = m + 1$ e $\dim(N \times \mathbb{R}) = n + 1 \geq 2m + 3 = 2(m + 1) + 1$, possiamo approssimare \tilde{F} con un'inclusione differenziabile $\tilde{G} \in \mathcal{C}^\infty(M \times \mathbb{R}, N \times \mathbb{R})$. Poiché $M \times [0, 1]$ è compatto, se \tilde{G} è sufficientemente vicina ad \tilde{F} in $\mathcal{C}^\infty(M \times \mathbb{R}, N \times \mathbb{R})$, possiamo, con un cambiamento di variabili, ottenere che $\tilde{G}(p, t) = (G(p, t), t)$ per t in un intorno di $[0, 1]$. Inoltre, poiché inclusioni differenziabili di una varietà compatta che siano vicine sono isotope, G_0 sarà isotopa ad f_0 e G_1 ad f_1 . Poiché l'isotopia è una relazione d'equivalenza, anche f_0 ed f_1 sono isotope. \square

OSSERVAZIONE XIX.7.8. Chiamiamo *nodo* in \mathbb{R}^n un'inclusione differenziabile di S^1 in \mathbb{R}^n ($n \geq 3$). Sciogliere un nodo $\nu : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ significa trovare un'isotopia di ν con il nodo banale

$$S^1 \ni e^{i\theta} \longrightarrow (\cos \theta, \sin \theta, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n.$$

Sappiamo che ci sono in \mathbb{R}^3 nodi chiusi non scioglibili. Per il Teorema XIX.7.7 tutti i nodi chiusi in \mathbb{R}^n con $n \geq 4$ sono scioglibili.

In generale, possiamo considerare delle *catene di m nodi*, o *m-link*, cioè inclusioni differenziabili

$$\lambda : \underbrace{S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1}_{m \text{ volte}} \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

Sciogliere una catena λ di m nodi vuol dire trovare un'isotopia di λ con la catena banale

$$\underbrace{S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1}_{m \text{ volte}} \ni (e^{it})_j \longrightarrow (\cos \theta, \sin \theta, j, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n.$$

Per il Teorema XIX.7.7 tutte le catene di m nodi in uno spazio Euclideo \mathbb{R}^n , con $n \geq 4$, si possono sciogliere.

XIX.8. Isotopie dello spazio ambiente

Due inclusioni differenziabili $f_0, f_1 \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ possono essere isotope senza che i complementi $N \setminus f_0(M)$ ed $N \setminus f_1(M)$ siano omeomorfi. Un semplice esempio è l'inclusione in \mathbb{R}^2 di un segmento aperto e di una circonferenza privata di un punto. Introduciamo una nozione più restrittiva di isotopia:

DEFINIZIONE XIX.8.1. Un'*isotopia ambientale* tra due inclusioni differenziabili $f_0, f_1 \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ è una isotopia $F \in \mathcal{C}^\infty(N \times [0, 1], N)$ di diffeomorfismi di N tale che

$$\begin{cases} F_0(q) = q, & \forall q \in N, \\ F_1(f_0(p), 1) = f_1(p), & \forall p \in M. \end{cases}$$

Diremo allora che f_0 ed f_1 sono *isotope nello spazio ambiente* o *ambientalmente isotope*.

In generale l'isotopia ambientale, che implica l'omeomorfismo dei complementi delle immagini, è più restrittiva dell'isotopia. Le due relazioni coincidono per le inclusioni differenziabili di varietà compatte. Vale infatti il seguente²:

TEOREMA XIX.8.2 (R. Thom). *Sia $F \in \mathcal{C}^\infty(M \times [0, 1], N)$ un'isotopia di inclusioni differenziabili di una varietà M in una varietà N . Per ogni compatto K contenuto in M esiste un'isotopia dell'identità $G \in \mathcal{C}^\infty(N \times I, N)$ su N tale che*

$$G(f_0(p), 1) = f_1(p), \quad \forall p \in K.$$

DIMOSTRAZIONE. Possiamo supporre che $F \in \mathcal{C}^\infty(M \times \mathbb{R}, N)$ con $F_t = f_0$ per $t \leq 0$ ed $F_t = f_1$ per $t \geq 1$. Definiamo $\tilde{F} \in \mathcal{C}^\infty(M \times \mathbb{R}, N \times \mathbb{R})$ mediante

$$\tilde{F}(p, t) = (F(p, t), t) \in N \times \mathbb{R}, \quad \text{per } p \in M, \quad t \in \mathbb{R}.$$

L'immagine $\tilde{M} = \tilde{F}(M \times \mathbb{R})$ è una sottovarietà differenziabile di $N \times \mathbb{R}$. Consideriamo il campo di vettori $(X, \partial/\partial t) = d\tilde{F}(\partial/\partial t)$, con $X \in \Gamma(\tilde{M}, TN)$, su \tilde{M} . Il supporto di X è contenuto nel compatto $\tilde{F}(M \times [0, 1])$. Possiamo trovare allora un campo di vettori $(Y, \partial/\partial t) \in \mathfrak{X}(N \times \mathbb{R})$, con

$$Y \in \Gamma(N \times \mathbb{R}, TN), \quad \text{supp } Y \subseteq N \times \mathbb{R},$$

$$Y = X \quad \text{su } \tilde{F}(K \times [0, 1]).$$

Il campo $(Y, \partial/\partial t)$ è completo e quindi genera un gruppo a un parametro di diffeomorfismi di $N \times \mathbb{R}$ che preservano i livelli. Ad esso corrisponde quindi un'isotopia dello spazio ambiente che trasforma f_0 in f_1 . \square

OSSERVAZIONE XIX.8.3. Il teorema XIX.8.2 ci dice che inclusioni isotope di una varietà compatta sono ambientalmente isotope. Questo non è vero in generale per inclusioni di una varietà M non compatta.

Consideriamo ad esempio due nodi $\nu_0, \nu_1 : S^1 \rightarrow S^3$ con $\nu_0(-1) = \nu_1(-1) = (0, 0, 1)$. Le loro restrizioni $f_0, f_1 : S^1 \setminus \{-1\} \rightarrow S^3 \setminus \{(0, 0, 1)\}$ sono isotope, ma possono non essere ambientalmente isotope.

COROLLARIO XIX.8.4. *Se M è una varietà connessa, per ogni coppia di punti $p_0, p_1 \in M$ esiste un'isotopia $F \in \mathcal{C}^\infty(M \times [0, 1], M)$ dell'identità su M con $F(p_0, 1) = p_1$.*

COROLLARIO XIX.8.5. *Ogni inclusione differenziabile $f \in \mathcal{C}^\infty(S^m, S^n)$, con $n \geq 2m+2$, si estende ad una inclusione differenziabile $\tilde{f} \in \mathcal{C}^\infty(D^{m+1}, S^n)$.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché $n > m$, f è omotopa all'inclusione differenziabile standard

$$\iota : S^m \ni (x^0, \dots, x^m) \longrightarrow (x^0, \dots, x^m, 0, \dots, 0) \in S^n.$$

Questa si estende all'inclusione differenziabile

$$D^{m+1} \ni (x^0, \dots, x^m) \longrightarrow (x^0, \dots, x^m, \sqrt{1 - |x^0|^2 - \dots - |x^m|^2}, 0, \dots, 0) \in S^n.$$

Per il Teorema XIX.7.7, f e ι sono isotope e per il Teorema XIX.8.2 lo sono con un'isotopia dello spazio ambiente. Ne segue che anche f si estende ad un'inclusione differenziabile di D^{m+1} . \square

²RÉNÉ THOM: *La classification des immersions*, Sémin. Bourbaki **157**, 1957-58

XIX.9. k -celle differenziabili

In questo paragrafo esponiamo alcuni risultati³ relativi alle applicazioni differenziabili di dischi.

Premettiamo un'osservazione sulle applicazioni differenziabili.

LEMMA XIX.9.1. *Siano M, N due varietà differenziabili, di dimensione m, n , rispettivamente, e sia $\phi \in \mathcal{C}^\infty(N, M)$ un'applicazione differenziabile. Se K è un compatto di N tale che*

- (1) $f|_K$ sia iniettiva;
- (2) $df(q) : T_qN \rightarrow T_{\phi(q)}M$ sia iniettiva per ogni $q \in K$,

allora esiste un intorno aperto U di K in N tale che $\phi|_U$ sia un'inclusione differenziabile.

DIMOSTRAZIONE. Utilizzando il teorema d'immersione di Whitney, possiamo ridurci al caso in cui $M = \mathbb{R}^m$ ed N sia una sottovarietà propria di uno spazio Euclideo \mathbb{R}^ℓ . In particolare, possiamo considerare l'aggiunta $d\phi^*(q)$ dell'applicazione $d\phi(q) : T_qN \rightarrow T_{\phi(q)}\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^\ell$, rispetto al prodotto scalare canonico di \mathbb{R}^m e a quello indotto su T_qN dalla restrizione del prodotto scalare canonico di \mathbb{R}^ℓ . La composta $d\phi^*(p) \circ d\phi(q)$ è un endomorfismo iniettivo di T_qN ed abbiamo perciò, nella norma degli operatori, $\inf_K \|d\phi^*(q) \circ d\phi(q)\|^2 = \mu > 0$. Per continuità otteniamo che esiste un intorno relativamente compatto W di K in N tale che $\|d\phi^*(q) \circ d\phi(q)\|^2 \geq (\mu/2) > 0$ per ogni $q \in \bar{W}$. Allora, applicando l'argomento del Lemma ?? del Capitolo ?? ad un numero finito di carte coordinate che ricoprono \bar{W} , otteniamo che esistono costanti positive δ, c tali che

$$|\phi(q_1) - \phi(q_2)| \geq c|q_1 - q_2|, \quad \forall q_1, q_2 \in \bar{W} \quad \text{con } |q_1 - q_2| \leq \delta.$$

Questo segue dal fatto che la distanza Euclidea su ciascun sottoinsieme compatto di una carta coordinata è equivalente alla restrizione della distanza Euclidea su \mathbb{R}^ℓ .

Consideriamo ora il compatto $F = \{(q_1, q_2) \in \bar{W} \times \bar{W} \mid |q_1 - q_2| \geq \delta\}$. La funzione reale

$$\gamma(q_1, q_2) = \frac{|\phi(q_1) - \phi(q_2)|}{|q_1 - q_2|}$$

è definita e continua su F ed è positiva nei punti di $F \cap (K \times K)$. Essa sarà allora ancora positiva in tutti i punti di un intorno A di $F \cap (K \times K)$ in F . L'insieme

$U = K \cup \overset{\circ}{(\pi_1(A) \cap \pi_2(A))}$ è un intorno aperto di K in N , tale che la restrizione ad U di ϕ sia un'inclusione differenziabile. □

NOTAZIONE XIX.9.2. Se A è un qualsiasi sottoinsieme della varietà differenziabile N , indicheremo con $\mathcal{C}^\infty(A, M)$ l'insieme di tutte le funzioni continue $f : A \rightarrow M$ per cui esista un intorno aperto U di A in N ed un'applicazione differenziabile $\tilde{f} \in \mathcal{C}^\infty(U, M)$ tale che $\tilde{f}|_A = f$.

DEFINIZIONE XIX.9.3. Sia M una varietà differenziabile di dimensione m e k un intero con $0 \leq k \leq m$. Una k -cella differenziabile di M è un'inclusione differenziabile $\phi \in \mathcal{C}^\infty(D^k, M)$.

³Richard S.Palais, *Extending diffeomorphisms*. Proc. Amer. Math. Soc. **11**, 1960 pp. 274-277

L'applicazione ϕ è cioè un'inclusione topologica ed è la restrizione a $D^k = \{x \in \mathbb{R}^k \mid |x| \leq 1\}$ di un'applicazione di classe \mathcal{C}^∞ , definita su un intorno aperto U di D^k in \mathbb{R}^k , ed a valori in M , con differenziale iniettivo in ogni punto di D^k .

Per il Lemma XIX.9.1 la ϕ è la restrizione dell'inclusione differenziabile di un disco aperto $B(r)$, con $r > 1$, in M .

Vale il

TEOREMA XIX.9.4 (estensione ad un' n -cella). *Se $\phi \in \mathcal{C}^\infty(D^k, M)$ è una k -cella di M , con $0 \leq k < m$, ed U un intorno aperto di $\phi(D^k)$ in M , allora esiste una n -cella $\psi \in \mathcal{C}^\infty(D^m, M)$, con $\psi|_{D^k} = \phi$ e $\psi((D^m) \subset U)$.*

Se M è orientata, possiamo scegliere ψ in modo che mantenga l'orientazione.

DIMOSTRAZIONE. Il teorema è una conseguenza del Corollario XX.6.4 del Capitolo XX. □

Vale allora il

TEOREMA XIX.9.5 (Transitività). *Se $\phi, \psi \in \mathcal{C}^\infty(D^k, M)$ sono due k -celle differenziabili di M , allora esiste un diffeomorfismo $F \in \mathcal{C}^\infty(M, M)$ tale che $\psi = F \circ \phi$.*

Se M è orientata, e o $k < m$, oppure $k = m$ e le due celle sono equi-orientate, allora possiamo scegliere il diffeomorfismo F in modo che mantenga l'orientazione.

OSSERVAZIONE XIX.9.6. Il diffeomorfismo F del Teorema XIX.9.5 può essere scelto isotopo all'identità, in un'isotopia costante al di fuori di un compatto di M .

TEOREMA XIX.9.7 (di estensione). *Se $\phi \in \mathcal{C}^\infty(D^k, M)$ è una k -cella differenziabile in M ed f un'inclusione differenziabile di un intorno di $\phi(D^k)$ in M , allora esiste un diffeomorfismo F di M in sé, uguale ad f in un intorno di $\phi(D^k)$.*

Se M è orientabile e ϕ ed f preservano l'orientazione, allora si può ottenere una F che preservi l'orientazione e sia isotopa all'identità in un'isotopia costante al di fuori di un sottoinsieme compatto.

Fibrati vettoriali

XX.1. Fibrati differenziabili

Il *fibrato tangente* è un esempio della struttura più generale di *fibrato vettoriale* che definiamo ed esaminiamo in questo paragrafo. A loro volta, i fibrati vettoriali sono particolari fibrati differenziabili localmente banali:

DEFINIZIONE XX.1.1. Un fibrato differenziabile ξ è il dato di una varietà differenziabile $E = E(\xi)$, che si dice il suo *spazio totale*, di una varietà differenziabile $B = B(\xi)$, che si dice la sua *base*, e di una sommersione differenziabile $\pi = \pi(\xi) : E \rightarrow B$, che si dice la sua *proiezione sulla base*.

Per ogni punto $p \in B$, l'insieme $E_p = E_p(\xi) = \pi^{-1}(p)$ è una sottovarietà differenziabile di E , che si dice la *fibra* di ξ su p .

DEFINIZIONE XX.1.2. Diciamo che un fibrato differenziabile ξ è *localmente banale con fibra tipica* F se

- (a) F è una varietà differenziabile;
- (b) per ogni $p \in B$ esistono un intorno aperto U di p in B ed una $\phi_U \in \mathcal{C}^\infty(U, F)$ che renda commutativo il diagramma

$$(20.1.1) \quad \begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\pi \times \phi_U} & U \times F \\ & \searrow \pi & \swarrow \text{pr}_U \\ & U & \end{array}$$

Un diffeomorfismo ϕ_U che renda commutativo il diagramma (20.1.1) si dice una *trivializzazione* di ξ su U .

Un *atlante di trivializzazione* di ξ è una collezione $\mathcal{A} = \{(U_a, \phi_a) \mid a \in A\}$ formata da aperti U_a di B e da trivializzazioni locali

$$E|_{U_a} = \pi^{-1}(U_a) \ni q \longrightarrow (\pi(q), \phi_U(q)) \in U_a \times F,$$

con $B = \bigcup_{a \in A} U_a$.

A volte scriveremo $E \xrightarrow{\pi} B$ per il fibrato differenziabile ξ con $E(\xi) = E$, $B(\xi) = B$ e $\pi(\xi) = \pi$. La notazione $E \xrightarrow[F]{\pi} B$ significherà che, inoltre, il fibrato differenziabile ξ è localmente banale, con fibra tipica F .

DEFINIZIONE XX.1.3. Una *sezione differenziabile* di ξ su un aperto U di $B(\xi)$ è un'applicazione $s \in \mathcal{C}^\infty(U, E(\xi))$ tale che $\pi(\xi) \circ s(x) = x$ per ogni $x \in U$. L'insieme

di tutte le sezioni differenziabili di ξ su U si indica con

$$(20.1.2) \quad \Gamma_\xi(U, E) = \{s \in \mathcal{C}^\infty(U, E(\xi)) \mid \pi(\xi) \circ s(p) = p, \forall p \in U\}.$$

LEMMA XX.1.4. *Sia ξ un fibrato differenziabile, $\tau_0 \in E(\xi)$ e $p_0 = \pi(\xi)(\tau_0)$. Allora esistono un intorno aperto U di p_0 in $B(\xi)$ ed una sezione $s \in \Gamma_\xi(U, E(\xi))$ con $s(p_0) = \tau_0$.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché $\pi(\xi)$ è una sommersione differenziabile in tutti i punti di $E(\xi)$, la tesi segue dal teorema delle funzioni implicite (vedi la Proposizione XVIII.8.3 del Capitolo XVIII). \square

PROPOSIZIONE XX.1.5 (un criterio di banalità locale). *Siano E e B varietà differenziabili, con B connessa. Allora ogni sommersione differenziabile propria $\pi : E \rightarrow B$ definisce un fibrato differenziabile localmente banale.*

DIMOSTRAZIONE. Ricordiamo che il fatto che π sia propria significa che π è continua, chiusa, e che $\pi^{-1}(K)$ è compatto in E per ogni compatto K di B .

Fissiamo un punto $p_0 \in B$. L'insieme $E_{p_0} = \pi^{-1}(p_0)$ è una sottovarietà compatta di E . Essa è un retratto differenziabile d'intorno. Possiamo trovare cioè un intorno aperto W di E_{p_0} in E ed un'applicazione differenziabile $r : W \rightarrow E_{p_0}$ con $r(v) = v$ per ogni $v \in E_{p_0}$. Poiché $\pi(E \setminus W)$ è un chiuso di B che non contiene p_0 , possiamo supporre che W sia un aperto della forma $W = \pi^{-1}(U_0)$, per un intorno aperto U_0 di p_0 in B . Possiamo allora definire

$$\Phi : E_{U_0} = \pi^{-1}(U_0) \ni v \rightarrow (\pi(v), r(v)) \in U_0 \times E_{p_0}.$$

Poiché π è una sommersione differenziabile, la Φ è un diffeomorfismo locale in tutti i punti $v \in E_{p_0}$. L'insieme dei punti di E_{U_0} in cui Φ è un diffeomorfismo locale è un aperto. Quindi, a meno di sostituire ad U_0 un intorno più piccolo di p_0 in B , possiamo supporre che la Φ sia un diffeomorfismo locale in tutti i punti di E_{U_0} .

Dico che esiste un intorno aperto U di p_0 in U_0 tale che

$$\Phi_U : \pi^{-1}(U) \ni v \rightarrow \Phi(v) = (\pi(v), r(v)) \in U \times E_{p_0}$$

sia un diffeomorfismo.

Indichiamo con $\text{pr}_2 : U_0 \times E_{p_0} \rightarrow E_{p_0}$ la proiezione sul secondo fattore. L'insieme dei punti $p \in U_0$ tali che $\text{pr}_2(\Phi(E_p)) = E_{p_0}$ è un intorno aperto di p_0 . Possiamo quindi supporre, a meno di sostituire ad U_0 un intorno più piccolo di p_0 , che la Φ sia un diffeomorfismo locale surgettivo.

Ci resta da verificare che, se U è sufficientemente piccolo, la ϕ_U è anche iniettiva. A questo scopo osserviamo che, poiché Φ è un diffeomorfismo locale, l'insieme $Q = \{(v, w) \in E_{U_0} \times E_{U_0} \mid v \neq w, \Phi(v) = \Phi(w)\}$ è in $E_{U_0} \times E_{U_0}$ un chiuso disgiunto da $E_{p_0} \times E_{p_0}$. Sia infatti $\{U_\nu \mid \nu \in \mathbb{N}\}$ un sistema fondamentale di intorni relativamente compatti di p_0 in U_0 , con $U_{\nu+1} \Subset U_\nu$ per ogni intero $\nu \geq 0$. Per la proprietà dell'intersezione finita, esisterà un indice ν_1 tale che $\pi^{-1}(\bar{U}_{\nu_1}) \times \pi^{-1}(\bar{U}_{\nu_1})$ non intersechi Q .

Per completare la dimostrazione, basterà osservare che le fibre $E_p = \pi^{-1}(p)$ sono tutte diffeomorfe tra loro. Ciò segue dalla connessione di B e dal fatto che dalla

prima parte della dimostrazione si ricava che, fissato un punto $p_0 \in B$, l'insieme dei $p \in B$ per cui la fibra E_p è diffeomorfa ad E_{p_0} è aperto e chiuso in B . \square

PROPOSIZIONE XX.1.6. *Sia ξ un fibrato differenziabile ed M una sottovarietà differenziabile di $B(\xi)$. Definiamo*

$$(20.1.3) \quad E|_M = \pi(\xi)^{-1}(M), \quad \pi|_M : E|_M \ni \tau \rightarrow \pi(\xi)(\tau) \in M.$$

Allora $\xi|_M = (E|_M \xrightarrow{\pi|_M} M)$ è un fibrato differenziabile con base M . \square

DEFINIZIONE XX.1.7. Il fibrato $\xi|_M$ descritto nella Proposizione XX.1.6 si dice la *restrizione ad M* del fibrato ξ .

PROPOSIZIONE XX.1.8. *Se ξ e ζ sono fibrati differenziabili, allora, posto*

$$E(\xi \times \zeta) = E(\xi) \times E(\zeta),$$

$$B(\xi \times \zeta) = B(\xi) \times B(\zeta),$$

$$\pi(\xi \times \zeta) : E(\xi \times \zeta) \ni (\alpha, \beta) \rightarrow (\pi(\xi)(\alpha), \pi(\zeta)(\beta)) \in B(\xi \times \zeta),$$

$\xi \times \zeta = (E(\xi \times \zeta) \xrightarrow{\pi(\xi \times \zeta)} B(\xi \times \zeta))$ è un fibrato differenziabile.

Se ξ e ζ sono localmente banali con fibre tipiche $F(\xi)$ ed $F(\zeta)$ rispettivamente, allora anche $\xi \times \zeta$ è localmente banale, con fibra tipica $F(\xi) \times F(\zeta)$.

DEFINIZIONE XX.1.9. Il fibrato differenziabile $\xi \times \zeta$ descritto nella Proposizione XX.1.8 si dice *prodotto cartesiano* dei fibrati ξ e ζ .

PROPOSIZIONE XX.1.10 (pullback). *Sia ξ un fibrato differenziabile, M una varietà differenziabile ed $f : M \rightarrow B(\xi)$ un'applicazione differenziabile. Poniamo*

$$E(f^*\xi) = \{(p, \tau) \in M \times E(\xi) \mid f(p) = \pi(\xi)(\tau)\},$$

$$\pi(f^*\xi) : E \ni (p, \tau) \longrightarrow p \in M.$$

Allora $f^*\xi = (E(f^*\xi) \xrightarrow{\pi(f^*\xi)} M)$ è un fibrato differenziabile con base M .

Se ξ è localmente banale con fibra tipica F , anche $f^*\xi$ è localmente banale con fibra tipica F .

DEFINIZIONE XX.1.11. Il fibrato $f^*\xi$ descritto nella Proposizione XX.1.10 si dice l'*immagine inversa*, o *pullback*, di ξ mediante l'applicazione f .

DEFINIZIONE XX.1.12. Siano ξ_1 e ξ_2 due fibrati differenziabili sulla stessa base $B(\xi_1) = B(\xi_2) = M$. Chiamiamo *somma di Whitney* dei fibrati ξ_1 e ξ_2 , ed indichiamo con $\xi_1 \oplus_M \xi_2$, l'immagine inversa del fibrato $\xi_1 \times \xi_2$ mediante l'immersione canonica $\iota : M \ni p \rightarrow (p, p) \in M \times M$ di M nella diagonale di $M \times M$.

Abbiamo, in modo canonico,

$$E(\xi_1 \oplus_M \xi_2) \simeq \{(\tau_1, \tau_2) \in E(\xi_1) \times E(\xi_2) \mid \pi(\xi_1)(\tau_1) = \pi(\xi_2)(\tau_2)\},$$

$$\pi(\xi_1 \oplus_M \xi_2)(\tau_1, \tau_2) = \pi(\xi_1)(\tau_1) = \pi(\xi_2)(\tau_2), \quad \forall (\tau_1, \tau_2) \in E(\xi_1 \oplus_M \xi_2).$$

Osserviamo che, per le Proposizioni XX.1.6, XX.1.8, XX.1.10, se ξ_1 e ξ_2 sono localmente banali con fibre tipiche F_1 ed F_2 rispettivamente, la loro somma di Whitney $\xi_1 \oplus_M \xi_2$ è ancora localmente banale, con fibra tipica $F_1 \times F_2$.

DEFINIZIONE XX.1.13. Siano ξ_1 e ξ_2 due fibrati differenziabili. Un morfismo di fibrati differenziabili $(f, \phi) : \xi_1 \rightarrow \xi_2$ è il dato di una coppia di applicazioni differenziabili $f : E(\xi_1) \rightarrow E(\xi_2)$ e $\phi : B(\xi_1) \rightarrow B(\xi_2)$ che rendano commutativo il diagramma

$$(20.1.4) \quad \begin{array}{ccc} E(\xi_1) & \xrightarrow{f} & E(\xi_2) \\ \pi(\xi_1) \downarrow & & \downarrow \pi(\xi_2) \\ B(\xi_1) & \xrightarrow{\phi} & B(\xi_2). \end{array}$$

Abbiamo

LEMMA XX.1.14. *Siano ξ_1 e ξ_2 due fibrati differenziabili. Se $f : E(\xi_1) \rightarrow E(\xi_2)$ è un'applicazione differenziabile ed*

$$f(E(\xi_1)_p) \subset E(\xi_2)_{f(p)}, \quad \forall p \in B(\xi_1),$$

allora esiste un unico morfismo di fibrati differenziabili $(f, \phi) : \xi_1 \rightarrow \xi_2$ che induca f sugli spazi totali.

DIMOSTRAZIONE. L'unicità è ovvia, in quanto la ϕ si ottiene per passaggio al quoziente rispetto alle proiezioni sulle basi. Per dimostrare che ϕ è differenziabile, basta osservare che, se $s \in \Gamma_{\xi_1}(U, E(\xi_1))$ per un aperto U di $B(\xi_1)$, allora $\phi|_U = \pi(\xi_2) \circ s$, onde ϕ è differenziabile su U . \square

PROPOSIZIONE XX.1.15. *Sia $(f, \phi) : \xi_1 \rightarrow \xi_2$ un morfismo di fibrati differenziabili. Se $f : E(\xi_1) \rightarrow E(\xi_2)$ è un diffeomorfismo, anche $\phi : B(\xi_1) \rightarrow B(\xi_2)$ è un diffeomorfismo, e la $(f^{-1}, \phi^{-1}) : \xi_2 \rightarrow \xi_1$ è un morfismo di fibrati differenziabili.*

DIMOSTRAZIONE. Chiaramente ϕ è bigettiva. Se W è un aperto di $B(\xi_2)$ ed $s_2 \in \Gamma_{\xi_2}(W, E(\xi_2))$, allora $\phi^{-1}|_W = f^{-1} \circ s_2$ dimostra che ϕ^{-1} è anche differenziabile. \square

DEFINIZIONE XX.1.16. Un *isomorfismo* di fibrati differenziabili è un morfismo $(f, \phi) : \xi_1 \rightarrow \xi_2$ per cui $f : E(\xi_1) \rightarrow E(\xi_2)$ sia un diffeomorfismo.

Un isomorfismo di fibrati differenziabili $(f, \phi) : \xi_1 \rightarrow \xi_2$ con $B(\xi_1) = B(\xi_2) = M$ e $\phi = \text{id}_M$ si dice un'equivalenza.

XX.2. Fibrati vettoriali differenziabili

DEFINIZIONE XX.2.1. Un *fibrato vettoriale differenziabile di rango n* è il dato di un fibrato differenziabile $\xi = E \xrightarrow{\pi} B$ di rango n e di una struttura di spazio vettoriale reale di dimensione n su ogni fibra $E_x := \pi^{-1}(x)$, compatibile con la struttura differenziabile. Ciò significa che le applicazioni

$$\begin{cases} E \oplus_M E \ni (v, w) \rightarrow v + w \in E, \\ \mathbb{R} \times E \ni (k, v) \rightarrow k \cdot v \in E \end{cases}$$

sono differenziabili.

PROPOSIZIONE XX.2.2. *Ogni fibrato vettoriale differenziabile di rango n è localmente banale con fibra tipica \mathbb{R}^n .*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\xi = E \xrightarrow{\pi} B$ un fibrato differenziabile vettoriale di rango n . Dato un punto $p_0 \in B$, fissiamo una \mathbb{R} -base e_1, \dots, e_n di E_{p_0} . Per il Lemma XX.1.4 possiamo trovare un intorno aperto U di p_0 in B e sezioni $\eta_i \in \Gamma_\xi(U, E)$ con $\eta_i(p_0) = e_i$ per $i = 1, \dots, n$. Per continuità, l'insieme U_0 dei punti p di U in cui $\eta_1(p), \dots, \eta_n(p)$ sono ancora linearmente indipendenti è un intorno aperto di p_0 in B . Allora la

$$U_0 \times \mathbb{R}^n \ni (p; v^1, \dots, v^n) \longrightarrow \sum_{i=1}^n v^i \eta_i(p) \in \pi^{-1}(U_0)$$

è una trivializzazione locale differenziabile di ξ in un intorno aperto del punto p_0 . \square

Se V, W sono spazi vettoriali reali della stessa dimensione n , indichiamo con $\text{Iso}_{\mathbb{R}}(V, W)$ l'insieme degli isomorfismi \mathbb{R} -lineari di V in W .

DEFINIZIONE XX.2.3. Una *trivializzazione locale di un fibrato vettoriale differenziabile* $\xi = (E \xrightarrow{\pi} B)$ è una trivializzazione locale

$$(20.2.1) \quad \phi : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow E|_U$$

di ξ compatibile con la struttura lineare, che sia cioè lineare sulle fibre.

Potremo quindi scrivere¹

$$(20.2.2) \quad \phi(p, v) = \phi(p)v, \quad \text{con } \sigma(p) \in \text{Iso}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, E_p) \quad \forall p \in U.$$

Un *atlante di trivializzazione* di un fibrato vettoriale differenziabile ξ è un atlante di trivializzazione di ξ in cui tutte le trivializzazioni locali siano compatibili con la struttura lineare.

Chiameremo *funzioni di transizione* dell'atlante di trivializzazione $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ del fibrato vettoriale differenziabile $\xi = (E \xrightarrow{\pi} B)$, le applicazioni² $g_{\alpha, \beta} \in \mathcal{C}^\infty(U_\alpha \cap U_\beta, \mathbf{GL}(n, \mathbb{R}))$, definite da

$$(20.2.3) \quad g_{\alpha, \beta}(p) = \phi_\alpha(p)^{-1} \circ \phi_\beta(p), \quad \forall p \in U_\alpha \cap U_\beta$$

si dicono le *funzioni di transizione* dell'atlante \mathcal{A} .

XX.3. Morfismi e operazioni di fibrati vettoriali

Siano ξ_1 e ξ_2 due fibrati vettoriali differenziabili.

DEFINIZIONE XX.3.1. Un morfismo di fibrati differenziabili $(f, \phi) : \xi_1 \rightarrow \xi_2$ si dice un *morfismo di fibrati vettoriali reali differenziabili* se è lineare sulle fibre, se cioè per ogni $p \in B(\xi_1)$ l'applicazione $E(\xi_1)_p \ni v \rightarrow f(v) \in E(\xi_2)_{\phi(p)}$ è lineare.

Se inoltre la $f : E(\xi_1) \rightarrow E(\xi_2)$ è un diffeomorfismo, allora anche $(f^{-1}, \phi^{-1}) : \xi_2 \rightarrow \xi_1$ è un morfismo di fibrati vettoriali differenziabili.

In questo caso diremo che $(f, \phi) : \xi_1 \rightarrow \xi_2$ è un *isomorfismo di fibrati vettoriali reali differenziabili*.

¹Le $p \rightarrow \phi(p)$ sono *sezioni* del fibrato vettoriale $\xi \otimes_B \xi^*$, che sarà definito nel paragrafo successivo.

²Osserviamo che $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ è un aperto di \mathbb{R}^{n^2} , e quindi una varietà differenziabile di dimensione n^2 .

Se, ancora, $B(\xi_1) = B(\xi_2) = M$ e $\phi = \text{id}_M$, diremo che la $(f, \text{id}_M) : \xi_1 \rightarrow \xi_2$ è un'equivalenza di fibrati vettoriali reali.

Dire che un fibrato differenziabile ξ di rango n è trivializzabile equivale dunque a dire che è isomorfo al fibrato differenziale triviale $B(\xi) \times V$, con V spazio vettoriale reale di dimensione n .

Le costruzioni dell'algebra lineare si estendono in modo naturale ai fibrati vettoriali.

Fibrato duale. Sia $\xi = E \xrightarrow{\pi} B$ un fibrato vettoriale reale di rango n . Sia

$$E^* = \bigsqcup_{p \in B} E_p^*$$

l'unione disgiunta dei duali degli spazi vettoriali E_p , al variare di p nella base B .

Indichiamo ancora con $\pi : E^* \rightarrow B$ l'applicazione che associa il punto $p \in B$ ad $\eta \in E_p^* \subset E^*$.

Se $\mathcal{A} = \{(U_a, \psi_a) \mid a \in A\}$ è un atlante di trivializzazione per ξ , per ogni punto $p \in U_a$ la

$$\psi_a(p) : \mathbb{R}^n \ni v \rightarrow \psi_a(p, v) \in E_p$$

è un isomorfismo lineare. La sua trasposta $(\psi(p))^* : E_p^* \rightarrow (\mathbb{R}^n)^* \simeq \mathbb{R}^n$ è ancora un isomorfismo lineare.

Possiamo così definire su $\xi^* = E^* \xrightarrow{\pi} B$ un'unica struttura di fibrato vettoriale differenziabile, per cui $\mathcal{A}^* = \{(U_a, \psi_a^*) \mid a \in A\}$, ove

$$\psi_a^* : U_a \times \mathbb{R}^n \ni (p, v^*) \rightarrow [(\psi_a(p))^*]^{-1} v^* \in E^*|_{U_a},$$

sia un atlante di trivializzazione.

DEFINIZIONE XX.3.2. Dato un fibrato vettoriale differenziabile ξ , il fibrato vettoriale differenziabile ξ^* definito sopra si dice il *fibrato duale* di ξ .

PROPOSIZIONE XX.3.3. Ogni fibrato vettoriale è equivalente al suo fibrato duale.

DIMOSTRAZIONE. Sia ξ un fibrato vettoriale di rango n ed $\mathcal{A} = \{(U_a, \psi_a) \mid a \in A\}$ un suo atlante di trivializzazione. Sia $\{\phi_a\}$ una partizione dell'unità subordinata ad $\{U_a \mid a \in A\}$ con $\phi_a \in \mathcal{C}^\infty(B(\xi))$ e $\phi_a \geq 0$ su $B(\xi)$. Definiamo un prodotto scalare sulle fibre di ξ mediante

$$(v_1 | v_2) = \sum_{p \in U_a} \phi_a(p) \cdot (\text{pr}_{\mathbb{R}^n}(\psi_a(v_1)) | \text{pr}_{\mathbb{R}^n}(\psi_a(v_2)))_{\mathbb{R}^n},$$

$$\forall p \in B(\xi), \forall v_1, v_2 \in E(\xi)_p.$$

Il prodotto scalare definisce un isomorfismo (di Riesz) $\rho_p : E_p \rightarrow E_p^*$ per ogni $p \in M$, che ci dà un'equivalenza $(\rho, \text{id}_B) : \xi \rightarrow \xi^*$. \square

DEFINIZIONE XX.3.4. Sia M una varietà differenziabile e $TM \xrightarrow{\pi} M$ il suo fibrato tangente. Il fibrato duale $T^*M \xrightarrow{\pi} M$ del fibrato tangente si dice il *fibrato cotangente* su M .

Somma diretta. Se ξ_1, ξ_2 sono fibrati vettoriali, di ranghi n_1 ed n_2 rispettivamente, allora il prodotto $\xi_1 \times \xi_2$ ha una struttura naturale di fibrato vettoriale di rango $n_1 + n_2$, con fibra sopra il punto $(p_1, p_2) \in B(\xi_1) \times B(\xi_2)$ uguale allo spazio vettoriale somma diretta $E(\xi_1)_{p_1} \oplus E(\xi_2)_{p_2}$.

Se ξ_1 e ξ_2 hanno la stessa base $B(\xi_1) = B(\xi_2) = M$, allora la somma di Whitney $\xi_1 \oplus_M \xi_2$ è un fibrato vettoriale differenziabile di rango $n_1 + n_2$.

Prodotto tensoriale. Dati due fibrati vettoriali differenziabili ξ_1, ξ_2 , di ranghi n_1 ed n_2 rispettivamente, con basi $B(\xi_1) = B_1$ e $B(\xi_2) = B_2$, definiamo il loro *prodotto tensoriale* $\xi_1 \otimes \xi_2$ come il fibrato vettoriale differenziabile di rango $n_1 n_2$ con base $B_1 \times B_2$ e fibra su $E(\xi_1)_{p_1} \otimes_{\mathbb{R}} E(\xi_2)_{p_2}$ sul punto $(p_1, p_2) \in B_1 \times B_2$. Se $B_1 = B_2 = M$, indichiamo con $\xi \otimes_M \xi_2$ l'immagine inversa di $\xi_1 \otimes \xi_2$ rispetto all'immersione $p \rightarrow (p, p)$ di M nella diagonale di $M \times M$. Esso si dice *prodotto di Whitney* dei fibrati ξ_1 e ξ_2 .

Fibrati tensoriali. Le operazioni di somme dirette, prodotti tensoriali, somme e prodotti di Whitney di fibrati vettoriali differenziabili sono associative e commutative, a meno di equivalenze.

In particolare, fissati due interi non negativi r, s possiamo definire, a partire da un fibrato vettoriale reale $\xi = E \xrightarrow{\pi} B$ di rango n , un fibrato vettoriale differenziabile $\tau^{r,s}(\xi)$ sulla stessa base B , di rango $n(r + s)$, con spazio totale

$$\mathcal{T}^{r,s}(E) = \bigsqcup_{p \in B} \underbrace{E_p \otimes \cdots \otimes E_p}_{r \text{ volte}} \otimes \underbrace{E_p^* \otimes \cdots \otimes E_p^*}_{s \text{ volte}}$$

Possiamo descrivere la sua struttura di fibrato vettoriale differenziabile a partire da un atlante di trivializzazione $\mathcal{A} = \{(U_a, \psi_a) \mid a \in A\}$ di ξ . L'atlante corrispondente $\mathcal{T}^{r,s}\mathcal{A} = \{(U_a, \psi_a^{(r,s)}) \mid a \in A\}$ di $\tau^{r,s}(\xi)$ consiste delle carte

$$U_a \times (\mathbb{R}^n)^{\otimes r} \otimes (\mathbb{R}^n)^{\otimes s} \ni (p, t, \sigma) \rightarrow (\psi_a(p))^{\otimes r} t \otimes ([\psi_a(p)^*]^{-1})^{\otimes s} \sigma \in \mathcal{T}^{r,s}(E)|_{U_a}.$$

Il fibrato vettoriale $\tau^{r,s}(\xi)$ ha rango $n(r + s)$ e si dice la *potenza tensoriale r -covariante ed s -controvariante* di ξ .

DEFINIZIONE XX.3.5. Se M è una varietà differenziabile di dimensione m , il fibrato $\tau^{r,s}(TM \xrightarrow{\pi} M)$ si indica con $T^{r,s}M \xrightarrow{\pi} M$ e si dice il fibrato dei tensori r -covarianti ed s -controvarianti su M .

XX.4. Fibrati vettoriali e fibrato tangente

DEFINIZIONE XX.4.1. Sia $\xi = E \xrightarrow{\pi} M$ un fibrato differenziabile. Il *fibrato verticale* su E è il nucleo del differenziale della proiezione sulla base:

$$(20.4.1) \quad VE = \{v \in TE \mid d\pi(v) = 0\}.$$

Supponiamo ora che $E \xrightarrow{\pi} M$ sia un fibrato vettoriale. Possiamo identificare M alla sezione nulla di E , mediante l'applicazione

$$(20.4.2) \quad \iota : M \ni x \rightarrow 0_x \in E.$$

Abbiamo allora

PROPOSIZIONE XX.4.2. *Ogni fibrato vettoriale $\xi = E \xrightarrow{\pi} M$ è equivalente al pullback su M , mediante l'inclusione (20.4.2), del suo fibrato verticale.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $x \in M$ e $v \in E$. Associamo a v il vettore $\vec{v} \in V_{0,x}E$ definito da

$$\vec{v}f = \frac{d}{dt}f(tv)|_{t=0}.$$

Otteniamo così un'applicazione $E \rightarrow VE|_M = \iota^*(VE)$, che si verifica facilmente essere un'equivalenza di fibrati vettoriali. \square

PROPOSIZIONE XX.4.3. *Se $\xi = E \xrightarrow{\pi} M$ è un fibrato vettoriale differenziabile, allora la restrizione di TE ad M (cioè il suo pullback mediante l'inclusione (20.4.2)) è equivalente alla somma diretta di TM e della restrizione ad M del fibrato verticale:*

$$(20.4.3) \quad TE|_M \simeq TM \oplus_M VE|_M. \quad \square$$

Utilizzando le proposizioni XX.4.2 e XX.4.3 ed il teorema d'immersione di Whitney otteniamo il

TEOREMA XX.4.4. *Sia $\xi_1 = E_1 \xrightarrow{\pi_1} M$ un fibrato vettoriale differenziabile. Possiamo allora trovare un fibrato vettoriale differenziabile $\xi_2 = E_2 \xrightarrow{\pi_2} M$ sulla stessa base M tale che la somma di Whitney $\xi_1 \oplus_M \xi_2$ sia equivalente ad un fibrato banale.*

DIMOSTRAZIONE. Per il teorema d'immersione di Whitney possiamo trovare un diffeomorfismo $\Phi : E_1 \rightarrow Q \subset \mathbb{R}^\ell$ tra E_1 ed una sottovarietà differenziabile propria Q di uno spazio Euclideo \mathbb{R}^ℓ . Per ogni punto $y \in Q$ identifichiamo lo spazio tangente T_yQ ad un sottospazio dello spazio Euclideo \mathbb{R}^ℓ . Definiamo quindi il fibrato vettoriale NQ mediante

$$(20.4.4) \quad NQ = \{(y, w) \in Q \times \mathbb{R}^\ell \mid w \perp T_yQ\}.$$

In ogni punto y di Q abbiamo allora

$$T_y\mathbb{R}^\ell \simeq \mathbb{R}^\ell = T_yQ \oplus N_yQ.$$

D'altra parte, se $x \in M$, nel punto $y = \Phi(x) \in \Phi(M) \subset Q$, abbiamo

$$T_yQ = d\Phi(T_xM) \oplus \Phi(V_xE_1),$$

da cui ricaviamo che

$$\begin{aligned} \Phi^*(T\mathbb{R}^\ell|_{\Phi(M)}) &\simeq VE_1|_M \oplus_M TM \oplus_M (\Phi^*NQ|_{\Phi(M)}) \\ &\simeq E_1 \oplus_M (TM \oplus_M (\Phi^*NQ|_{\Phi(M)})). \end{aligned}$$

Poiché $T\mathbb{R}^\ell \simeq \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^\ell$ è un fibrato banale, ed il pullback di un fibrato banale è ancora banale, questo completa la dimostrazione del teorema. \square

XX.5. Norme differenziabili e strutture Euclidee

Sia $\xi = (E \xrightarrow{\pi} B)$ un fibrato vettoriale. Indichiamo con 0_E la sua sezione nulla.

DEFINIZIONE XX.5.1. Una *norma differenziabile* su ξ è un'applicazione reale continua e non negativa $\|\cdot\|_E \in \mathcal{C}^0(E, \mathbb{R})$ che goda delle proprietà:

$$(20.5.1) \quad \|q\|_E > 0 \quad \text{se} \quad q \notin 0_E,$$

$$(20.5.2) \quad \|kq\|_E = |k| \|q\|_E \quad \forall k \in \mathbb{R}, \forall q \in E,$$

$$(20.5.3) \quad \|q_1 + q_2\|_E \leq \|q_1\|_E + \|q_2\|_E, \quad \forall p \in B, \forall q_1, q_2 \in E_p, \quad \|\cdot\|_E^2 \in \mathcal{C}^\infty(E).$$

DEFINIZIONE XX.5.2. Una *struttura Euclidea* su ξ è un'applicazione differenziabile

$$E \oplus_B E \ni (q_1, q_2) \longrightarrow (q_1|q_2)_E \in \mathbb{R}$$

bilineare simmetrica, definita positiva. Valgono cioè

$$(20.5.4) \quad (q_1, q_2)_E = (q_2|q_1)_E, \quad \forall (q_1, q_2) \in E \oplus_B E,$$

$$(20.5.5) \quad (q_1 + q_2, q_3)_E = (q_1|q_3)_E + (q_2|q_3)_E, \quad \forall p \in B, \forall q_1, q_2, q_3 \in E_p,$$

$$(20.5.6) \quad (kq_1|q_2)_E = k(q_1|q_2)_E, \quad \forall k \in \mathbb{R}, \forall (q_1, q_2) \in E \oplus_B E,$$

$$(20.5.7) \quad (q|q)_E > 0 \quad \forall q \in E \setminus 0_E.$$

Osserviamo che, data una struttura Euclidea $(\cdot|\cdot)_E$ su ξ , la $\|q\|_E = \sqrt{(q|q)_E} \geq 0$ è una norma differenziabile su ξ .

L'esistenza di norme differenziabili è garantita quindi dalla

PROPOSIZIONE XX.5.3. *Ogni fibrato vettoriale ξ ammette una struttura Euclidea.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ un atlante di trivializzazione di ξ . Se ξ ha rango k , per ogni i la

$$\phi_i : \pi^{-1}(U_i) \ni q \longrightarrow (\pi(q), \phi_i(q)) \in U_i \times \mathbb{R}^k$$

è un'equivalenza di fibrati vettoriali. Se $\{\chi_i\} \subset \mathcal{C}^\infty(B)$ è una partizione dell'unità su B subordinata al ricoprimento $\{U_i\}_{i \in I}$, la

$$(q_1|q_2)_E = \sum_{\pi(q_1) \in U_i} \chi_i(\pi(q_1)) (\phi_i(q_1)|\phi_i(q_2))_{\mathbb{R}^k}, \quad \forall (q_1, q_2) \in E \oplus_B E,$$

definisce una struttura Euclidea su ξ . \square

DEFINIZIONE XX.5.4. Una *struttura Euclidea* sul fibrato tangente di una varietà M si dice una *struttura Riemanniana* su M .

XX.6. Classi di isomorfismo di fibrati vettoriali

Ricordiamo che, se $\xi = E \xrightarrow{\pi} M$ è un fibrato vettoriale differenziabile di rango k , con base M , data un'altra varietà differenziabile N ed un'applicazione differenziabile $f : N \rightarrow M$ di N nella base di ξ , il pullback $f^*\xi$ è il fibrato differenziabile di rango k su N , con spazio totale f^*E e proiezione π_f definiti da

$$(20.6.1) \quad \begin{cases} f^*E := E(f^*\xi) = \{(x, v) \in N \times E \mid \pi(v) = f(x)\}, \\ \pi_f := \pi(f^*\xi)(x, v) = x, \quad \forall (x, v) \in E(f^*\xi). \end{cases}$$

Se abbiamo una composizione di applicazioni differenziabili

$$M'' \xrightarrow{g} M' \xrightarrow{f} M$$

ed un fibrato vettoriale $\xi = E \xrightarrow{\pi} M$ su M , allora

$$(f \circ g)^* \xi \equiv g^* f^* \xi$$

sono canonicamente equivalenti: infatti

$$E((f \circ g)^* \xi) = \{(x, v) \in M'' \times E \mid f(g(x)) = \pi(v)\},$$

$$E(g^* f^* \xi) = \{(x, (y, v)) \in M'' \times M' \times E \mid g(x) = y, f(y) = \pi(v)\}$$

e l'equivalenza è definita dall'applicazione $(x, (y, v)) = (x, (f(x), v)) \rightarrow (x, v)$.

Indichiamo con $\text{Vec}_k(M)$ la collezione delle classi di isomorfismo dei fibrati vettoriali di rango k sulla varietà M . Possiamo considerarlo come un insieme puntato, ove il punto base è costituito dalla classe d'equivalenza del fibrato banale $M \times \mathbb{R}^k \xrightarrow{\pi_M} M$. L'osservazione che abbiamo fatto sopra si può esprimere mediante la

PROPOSIZIONE XX.6.1. $\text{Vec}_k(\cdot)$ è un funtore dalla categoria delle varietà ed applicazioni differenziabili alla categoria degli spazi puntati e delle applicazioni che preservano i punti base.

Abbiamo la

PROPOSIZIONE XX.6.2 (proprietà d'omotopia dei fibrati vettoriali). *Siano M ed N varietà differenziabili, con M compatta. Se $f_0, f_1 : M \rightarrow N$ sono due applicazioni differenziabili omotope e $\xi = E \xrightarrow{\pi_N} N$ è un fibrato vettoriale su N , allora i fibrati $f_0^* \xi$ ed $f_1^* \xi$ sono isomorfi.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $F : M \times I \ni (x, t) \rightarrow f_t(x) \in N$ un'omotopia di classe \mathcal{C}^∞ tra f_0 ed f_1 . Indichiamo con $\text{pr}_M : M \times I \ni (x, t) \rightarrow x \in M$ la proiezione sul primo fattore. Per dimostrare il teorema, sarà sufficiente verificare che, se per un $t_0 \in [0, 1]$ il fibrato $f_{t_0}^* \xi$ è isomorfo ad un fibrato vettoriale ζ su M , ciò è ancora vero per tutti i fibrati $f_t^* \xi$ con $t \in [0, 1]$ e $|t - t_0| < \epsilon$ per qualche $\epsilon > 0$.

Consideriamo sulla varietà compatta con bordo³ $M \times I$ i due fibrati vettoriali $F^* \xi$ e $\text{pr}_M^* \zeta$ e il fibrato principale $\text{Iso}(F^* \xi, \text{pr}_M^* \zeta)$, la cui fibra su (x, t) è l'insieme di tutti gli isomorfismi lineari $\lambda_x : E(f_t^* \xi)_x \rightarrow E(\zeta)_x$. Per ipotesi questo fibrato ha una sezione σ su $M \times \{t_0\}$. Il fibrato principale $\text{Iso}(f^* E, p_M^* F)$ è un aperto del fibrato vettoriale

$$\eta = \text{Hom}(F^* \xi, \text{pr}_M^* \zeta) = (\text{pr}_M^* \zeta)^* \otimes_{M \times I} F^* \xi.$$

La sezione σ si estende a una sezione globale $\tilde{\sigma}$ di η su $M \times I$. La $\tilde{\sigma}$ sarà ancora una sezione di $\text{Iso}(F^* \xi, \text{pr}_M^* \zeta)$ su un intorno aperto di $M \times t_0$. Per la compattezza di M , questo intorno conterrà $M \times t$ per tutti i $t \in [0, 1]$ con $|t - t_0| < \epsilon$ per qualche $\epsilon > 0$. \square

³Per evitare di utilizzare nella dimostrazione la varietà compatta a bordo $M \times I$, possiamo osservare che l'omotopia $F = (f_t) : M \times I \rightarrow N$ si estende ad un'applicazione differenziabile $\tilde{F} : M \times \mathbb{R} \rightarrow N$, e ragionare sulla varietà differenziabile senza bordo $M \times \mathbb{R}$.

OSSERVAZIONE XX.6.3. La proposizione vale anche senza l'ipotesi di compattezza su M . Ricordiamo che tutte le varietà che consideriamo supponiamo siano *paracompatte*.

COROLLARIO XX.6.4. *Ogni fibrato vettoriale sopra una varietà contrattile è isomorfo al fibrato banale.*

ESEMPIO XX.6.5. $\text{Vec}_k(S^1)$ si può identificare alle classi di omotopia di applicazioni $f : \{\pm 1\} \rightarrow \mathbf{GL}(k, \mathbb{R})$ che mandano il punto 1 in I_k . Esso consiste quindi di due punti se $k \geq 1$. Nel caso $k = 1$ i due fibrati corrispondono rispettivamente al cilindro (caso orientabile) e al nastro di Möbius (caso non orientabile).

XX.7. Fibrati vettoriali sulle sfere

Decomponiamo la sfera

$$S^n = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \mid \sum_{h=0}^n x_h^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

nell'unione di due celle chiuse:

$$S^n = D_+^n \cup D_-^n, \quad \text{con} \quad D_+^n = \{x \in S^n \mid x_0 \geq 0\}, \quad D_-^n = \{x \in S^n \mid x_0 \leq 0\}.$$

Sia

$$S^{n-1} = D_+^n \cap D_-^n = \{x \in S^n \mid x_0 = 0\}.$$

Data un'applicazione continua $f : S^{n-1} \rightarrow \mathbf{GL}(k, \mathbb{R})$, possiamo definire un fibrato vettoriale di rango r su S^n incollando i fibrati banali $D_+^n \times \mathbb{R}^k$ e $D_-^n \times \mathbb{R}^k$ mediante la funzione d'incollamento che associa ad $(x, v) \in S^{n-1} \times \mathbb{R}^k \subset D_+^n \times \mathbb{R}^k$ l'elemento $(x, f(x)v) \in S^{n-1} \times \mathbb{R}^k \subset D_-^n \times \mathbb{R}^k$. La f è detta la funzione di *clutching*⁴. Si dimostra facilmente che

LEMMA XX.7.1. *Siano $f_0, f_1 : S^{n-1} \rightarrow \mathbf{GL}(k, \mathbb{R})$ due funzioni di clutching. Se f_0 ed f_1 sono omotope, allora i fibrati vettoriali E_{f_1} ed E_{f_2} sono equivalenti. Abbiamo quindi un'applicazione naturale*

$$(20.7.1) \quad \pi(S^{n-1}, \mathbf{GL}(k, \mathbb{R})) \longrightarrow \text{Vec}_k(S^n).$$

Poiché D_+^n e D_-^n sono contrattili, i fibrati vettoriali con basi D_+^n e D_-^n sono banali. Da questa osservazione segue il

LEMMA XX.7.2. *L'applicazione (20.7.1) è surgettiva.*

Lo studio dell'applicazione (20.7.1) è complicato dal fatto che il gruppo $\mathbf{GL}(k, \mathbb{R})$ ha due componenti connesse. È quindi conveniente considerare dapprima i fibrati vettoriali orientati.

Indichiamo con $\text{Vec}_k^+(M)$ le classi di equivalenza di fibrati vettoriali orientati di rango k sulla varietà differenziabile M . Sia $\mathbf{GL}^+(k, \mathbb{R})$ il gruppo degli endomorfismi lineari di \mathbb{R}^k con determinante positivo. Abbiamo allora

PROPOSIZIONE XX.7.3. *L'applicazione $\pi(S^{n-1}, \mathbf{GL}^+(k, \mathbb{R})) \rightarrow \text{Vec}_k^+(S^n)$ è bigettiva.*

⁴“clutch” è in inglese la frizione.

Per analizzare $\text{Vec}_k(S^n)$, introduciamo lo spazio $\text{Vec}_k^0(S^n)$ che consiste delle classi di equivalenza di fibrati vettoriali di rango k su S^n che hanno un'orientazione assegnata sul punto $e_1 \in S^{n-1} \subset S^n$. Scegliendo le trivializzazioni su D_\pm^n che mantengono questa orientazione assegnata, le abbiamo fissate entrambe a meno di omotopia. Otteniamo così

LEMMA XX.7.4. *Vi è una bigezione naturale*

$$\pi(S^{n-1}, e_1; \mathbf{GL}(k, \mathbb{R}), \mathbf{GL}^+(k, \mathbb{R})) \rightarrow \text{Vec}_k^0(S^n).$$

Se $n \geq 2$, S^{n-1} è connesso ed abbiamo quindi:

LEMMA XX.7.5. *Se $n \geq 2$, vi è una bigezione naturale*

$$\pi(S^{n-1}, \mathbf{GL}^+(k, \mathbb{R})) \rightarrow \text{Vec}_k^0(S^n).$$

Quindi l'applicazione naturale $\text{Vec}_k^+(S^n) \rightarrow \text{Vec}_k^0(S^n)$ è una bigezione. Ne segue che

PROPOSIZIONE XX.7.6. *Se $n \geq 2$, ogni fibrato vettoriale reale è orientabile, ed ha esattamente due orientazioni, che dipendono dalla scelta dell'orientazione su una singola fibra. L'applicazione (20.7.1) ha fibre che hanno al più due elementi. Hanno un solo elemento le fibre che corrispondono a fibrati vettoriali che ammettono un automorfismo che inverte l'orientazione delle fibre, due elementi altrimenti.*

OSSERVAZIONE XX.7.7. Poiché $\mathbf{SO}(k)$ è un retratto di deformazione di $\mathbf{GL}^+(k, \mathbb{R})$, abbiamo

$$\pi(S^{n-1}, \mathbf{GL}^+(k, \mathbb{R})) \simeq \pi(S^{n-1}, \mathbf{SO}(k)) \simeq \pi_{n-1}(\mathbf{SO}(k)).$$

Forme differenziali negli spazi Euclidei

XXI.1. Forme differenziali in \mathbb{R}^n

Indichiamo con $\Lambda^q \mathbb{R}^n$ lo spazio vettoriale reale, di dimensione $\binom{n}{q}$, delle forme q -multilineari alternate su \mathbb{R}^n .

DEFINIZIONE XXI.1.1. Sia A un aperto di \mathbb{R}^n . Le applicazioni $\eta \in \mathcal{C}^\infty(A, \Lambda^q \mathbb{R}^n)$ si dicono *forme differenziali alternate, omogenee di grado q e con coefficienti di classe \mathcal{C}^∞ in A* .

Useremo la notazione

$$(21.1.1) \quad \mathcal{Q}^q(A) := \mathcal{C}^\infty(A, \Lambda^q \mathbb{R}^n)$$

Indichiamo con dx^i la forma lineare su \mathbb{R}^n definita da:

$$(21.1.2) \quad dx^i(x) = x^i, \quad \forall x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n.$$

Le forme:

$$(21.1.3) \quad dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q} \quad \text{con} \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq n$$

costituiscono una base di $\Lambda^q \mathbb{R}^n$. Una forma $\eta \in \mathcal{Q}^q(A)$ si scrive in modo unico come:

$$(21.1.4) \quad \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq n} \eta_{i_1 \dots i_q} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q}, \quad \text{con}$$

$$(21.1.5) \quad \eta_{i_1, \dots, i_q}(x) = \eta(x)(e_{i_1}, \dots, e_{i_q}) \in \mathcal{C}^\infty(A),$$

ove abbiamo indicato con e_1, \dots, e_n i vettori della base canonica di \mathbb{R}^n .

DEFINIZIONE XXI.1.2. L'algebra di Grassmann $\Omega^*(A)$ delle forme alternate di classe \mathcal{C}^∞ su A è la somma diretta

$$\Omega^*(A) = \bigoplus_{q=0}^n \mathcal{Q}^q(A),$$

con il prodotto definito sulle forme omogenee da

$$\begin{aligned} & \eta' \wedge \eta''(x)(v_1, \dots, v_q) \\ &= \sum_{\substack{1 \leq \sigma_1 < \dots < \sigma_{q'} \leq q \\ 1 < \sigma_{q'+1} < \dots < \sigma_q \\ \sigma \in \mathcal{S}_q}} \varepsilon(\sigma) \eta'(x)(v_{\sigma_1}, \dots, v_{\sigma_{q'}}) \eta''(x)(v_{\sigma_{q'+1}}, \dots, v_{\sigma_q}) \\ & \forall v_1, \dots, v_q \in \mathbb{R}^n, \quad \eta' \in \mathcal{Q}^{q',(k)}(A), \quad \eta'' \in \mathcal{Q}^{q'',(k)}(A), \quad q' + q'' = q. \end{aligned}$$

XXI.2. Pull-back

Se $f \in \mathcal{C}^\infty(A)$ è una funzione reale di classe \mathcal{C}^∞ , definita sull'aperto A di \mathbb{R}^n , il suo differenziale è l'elemento di $\Omega^1(A)$ definito da:

$$(21.2.1) \quad df(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial x^i} dx^i.$$

Siano B un aperto di \mathbb{R}^m , A un aperto di \mathbb{R}^n e $\phi = (\phi^1, \dots, \phi^n) \in \mathcal{C}^\infty(B, A)$.

DEFINIZIONE XXI.2.1. Il *pullback*, o *immagine inversa* di una forma differenziale $\eta \in \Omega^q(A)$, descritta da (21.1.4), è la forma differenziale $\phi^*\eta \in \Omega^q(B)$ definita da:

$$(21.2.2) \quad \phi^*\eta = \sum_{i_1 \dots i_q} \eta_{i_1 \dots i_q}(\phi) d\phi^{i_1} \wedge \dots \wedge d\phi^{i_q}.$$

Si verifica immediatamente che il pull-back di forme gode delle proprietà:

TEOREMA XXI.2.2. (1) $\phi^* : \Omega^q(A) \rightarrow \Omega^q(B)$ è un'applicazione \mathbb{R} -lineare.

(2) Se $\eta_1 \in \Omega^{q_1}(A)$ ed $\eta_2 \in \Omega^{q_2}(A)$, allora $\eta_1 \wedge \eta_2 \in \Omega^{q_1+q_2}(A)$ e

$$\phi^*(\eta_1 \wedge \eta_2) = (\phi^*\eta_1) \wedge (\phi^*\eta_2).$$

(3) Se $\psi : D \rightarrow B$ è un'applicazione di classe \mathcal{C}^{k+1} , definita su un aperto D di \mathbb{R}^ℓ , allora

$$(\phi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \phi^*.$$

XXI.3. Differenziale di una forma

Estendiamo la definizione del differenziale dal caso delle funzioni a quello delle forme differenziali ponendo, per una $\eta \in \Omega^{q,(k+1)}(A)$ descritta dalla (21.1.4):

$$(21.3.1) \quad \begin{aligned} d\eta(x) &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq n} d\eta_{i_1 \dots i_q}(x) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq n} \frac{\partial \eta_{i_1 \dots i_q}(x)}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q}. \end{aligned}$$

Il differenziale delle forme differenziali è caratterizzato dal:

TEOREMA XXI.3.1. Il differenziale è l'unica applicazione \mathbb{R} -lineare

$$d : \Omega^*(A) \longrightarrow \Omega^*(A)$$

che goda delle seguenti proprietà:

(1) Per ogni intero $q \geq 0$, il differenziale definisce un'applicazione \mathbb{R} -lineare:

$$(21.3.2) \quad d : \Omega^q(A) \rightarrow \Omega^{q+1}(A).$$

(2) d coincide con il differenziale definito sulle funzioni nel caso $q = 0$.

(3) Vale la formula del differenziale del prodotto:

$$\begin{aligned} d(\eta_1 \wedge \eta_2) &= d\eta_1 \wedge \eta_2 + (-1)^{q_1} \eta_1 \wedge d\eta_2 \\ &\quad \forall \eta_1 \in \Omega_{k+1}^{q_1}(A), \quad \forall \eta_2 \in \Omega_{k+1}^{q_2}(A) \end{aligned}$$

(4) $d \circ d : \Omega^q(A) \rightarrow \Omega^{q+2}(A)$ è l'applicazione nulla, cioè

$$(21.3.3) \quad d \circ d = d^2 = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Il differenziale definito dalla (21.3.1) soddisfa la (3) per le proprietà del prodotto esterno e la regola di Leibnitz per la derivazione del prodotto di due funzioni. La (21.3.3) è allora conseguenza della:

$$d^2 f = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j = 0,$$

valida per ogni funzione $f \in \mathcal{C}^2(A, \mathbb{R})$. Viceversa, se valgono le (1), (2), (3), (4) l'espressione del differenziale è data necessariamente dalla (21.3.1). \square

XXI.4. Il complesso di de Rham

Per ogni aperto A di \mathbb{R}^n , otteniamo un *complesso di operatori differenziali*:

$$(21.4.1) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \Omega_{k+n}^0(A) & \xrightarrow{d} & \Omega_{k+n-1}^1(A) & \longrightarrow & \dots \\ \dots & \rightarrow & \Omega_{k+n-h}^h(A) & \xrightarrow{d} & \Omega_{k+n-h-1}^{h+1}(A) & \xrightarrow{d} & \Omega_{k+n-h-2}^{h+2}(A) \rightarrow \\ & & & & \dots & \xrightarrow{d} & \Omega_k^n(A) \rightarrow 0 \end{array}$$

DEFINIZIONE XXI.4.1. Il complesso (21.4.1) si dice il *complesso di de Rham*¹ sull'aperto A di \mathbb{R}^n .

Poniamo:

$$(21.4.2) \quad \mathcal{Z}^q(A) = \{\eta \in \Omega^q(A) \mid d\eta = 0\} \quad (\text{spazio delle } q\text{-forme chiuse}),$$

$$(21.4.3) \quad \mathcal{B}^q(A) = \{d\eta \mid \eta \in \Omega^{q-1}(A)\} \quad (\text{spazio delle } q\text{-forme esatte}),$$

$$(21.4.4) \quad H^q(A) = \mathcal{Z}^q(A) / \mathcal{B}^q(A) \quad (q\text{-esimo gruppo di coomologia di de Rham}).$$

Se $\alpha \in \mathcal{Z}^q(A)$, indicheremo con $[\alpha]$ la corrispondente classe di coomologia in $H^q(A)$,

Se $q < 0$, oppure $q > n$, porremo $\mathcal{Z}^q(A) = 0$, $\mathcal{B}^q(A) = 0$, $H^q(A) = 0$.

Dalla formula dei differenziali, otteniamo immediatamente il:

TEOREMA XXI.4.2. Siano A un aperto di \mathbb{R}^n , B un aperto di \mathbb{R}^m e $\phi \in \mathcal{C}^\infty(B, A)$. Il pullback commuta con i differenziali:

$$(21.4.5) \quad \phi^*(d\eta) = d\phi^*\eta, \quad \forall \eta \in \Omega^*(A)$$

e definisce quindi, per ogni intero q , un omomorfismo

$$(21.4.6) \quad [\phi^*] : H^q(A) \longrightarrow H^q(B).$$

¹ Georges de Rham, Matematico (Roche, Losanna, 1903 - Losanna 1990). Dal 1932 prof. all'univ. di Losanna e successivamente di Parigi (1943) e Ginevra (1953). Le sue ricerche riguardano soprattutto problemi di natura differenziale e topologica sulle varietà differenziabili. Nel 1931 dimostrò il famoso teorema che identifica i gruppi di coomologia ad invarianti topologici. I suoi risultati hanno aperto nuovi ed elevati settori di ricerca. Il suo lavoro è stato particolarmente importante per lo sviluppo della teoria dei fasci.

OSSERVAZIONE XXI.4.3. Il Teorema XXI.4.2 ci dice che la differenziazione è un'operazione invariante rispetto ai cambiamenti di carte locali e ci permetterà perciò di definire le forme differenziali e il differenziale di forme sulle varietà.

Dimostriamo alcuni risultati sui gruppi di coomologia del complesso di de Rham, da cui ricaveremo in particolare il Lemma di Poincaré-Volterra sull'aciclicità locale di (21.4.1).

LEMMA XXI.4.4. *Sia A un aperto di \mathbb{R}^n , I un intervallo aperto di \mathbb{R} e*

$$\pi_A : A \times I \ni (x, t) \rightarrow x \in A$$

la proiezione canonica. Allora il pullback di forme induce un isomorfismo lineare

$$(21.4.7) \quad [\pi_A^*] : H^q(A) \longrightarrow H^q(A \times I).$$

In particolare

$$(21.4.8) \quad H^{n+1}(A \times I) = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo $t_0 \in I$ e consideriamo l'inclusione

$$J_{t_0} : A \ni x \longrightarrow (x, t_0) \in A \times I.$$

Poiché $\pi_A \circ J_{t_0} = \text{id}_A$, abbiamo

$$\text{id}_{H^q(A)} = [(\pi_A \circ J_{t_0})^*] = [J_{t_0}^* \circ \pi_A^*] = [J_{t_0}^*] \circ [\pi_A^*]$$

e quindi $[\pi_A^*]$ è iniettiva.

Resta da dimostrare che $[\pi_A^*]$ è anche surgettiva.

Indichiamo con d_x il differenziale in A e con d quello su $A \times I$. Scriviamo un elemento $\alpha \in \Omega^q(A \times I)$ nella forma

$$\alpha = \alpha' + dt \wedge \alpha'', \quad \text{con } \alpha' \in \mathcal{C}^\infty(A \times I, \Lambda^q \mathbb{R}^n), \quad \alpha'' \in \mathcal{C}^\infty(A \times I, \Lambda^{q-1} \mathbb{R}^n).$$

Abbiamo allora

$$d\alpha = d_x \alpha + dt \wedge \frac{\partial \alpha}{\partial t} = d_x \alpha' + dt \wedge \left(\frac{\partial \alpha'}{\partial t} - d_x \alpha'' \right).$$

Osserviamo che $\alpha \in \pi_A^*(\Omega^q(A))$ se e soltanto se

$$\alpha'' = 0, \quad \frac{\partial \alpha'}{\partial t} = 0.$$

Se $\alpha \in \mathcal{L}^q(A \times I)$, abbiamo

$$d_x \alpha' = 0, \quad \frac{\partial \alpha'}{\partial t} = d_x \alpha''.$$

Poniamo

$$\beta(x, t) = \int_{t_0}^t \alpha'' dt \in \mathcal{C}^\infty(A \times I, \Lambda^{q-1} \mathbb{R}^n) \subset \Omega^{q-1}(A \times I).$$

Allora

$$\alpha - d\beta = (\alpha' + dt \wedge \alpha'') - (d_x \beta + dt \wedge \frac{\partial \beta}{\partial t}) = \alpha' - d_x \beta \in \mathcal{L}^q(A \times I) \cap \mathcal{C}^\infty(A \times I, \Lambda^q \mathbb{R}^n).$$

La forma $\gamma = \alpha' - d_x \beta$ è coomologa ad α e soddisfa le equazioni

$$d_x \gamma = 0, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial t} = 0.$$

In particolare, γ è il pullback mediante π_A^* di un elemento di $\mathcal{L}^q(A)$. La dimostrazione è completa. \square

Ogni elemento $\alpha \in \mathcal{Q}^{n+1}(A \times I) = \mathcal{L}^{n+1}(A \times I)$ è divisibile per dt , risulta cioè

$$\alpha = dt \wedge \alpha'', \quad \text{con } \alpha'' \in \mathcal{C}^\infty(A \times I, \Lambda^n(A)).$$

Allora

$$\beta = \int_{t_0}^t \alpha'' \in \mathcal{C}^\infty(A \times I, \Lambda^n(A)) \subset \mathcal{Q}^n(A \times I)$$

soddisfa l'equazione

$$d\beta = dt \wedge \frac{\partial \beta}{\partial t} = dt \wedge \alpha'' = \alpha.$$

Più in generale abbiamo:

PROPOSIZIONE XXI.4.5. *Siano A un aperto di \mathbb{R}^n e I_1, \dots, I_k intervalli aperti di \mathbb{R} . Allora*

$$H^q(A \times I_1 \times \dots \times I_k) = 0, \quad \forall q > n.$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo infatti, per il Lemma XXI.4.4, $H^q(A \times I_1 \times \dots \times I_k) \simeq H^q(A \times I_1 \times \dots \times I_{k-1}) \simeq \dots \simeq H^q(A \times I_1) \simeq H^q(A) = \{0\}$. \square

Dalla Proposizione XXI.4.5 si ottiene facilmente il

TEOREMA XXI.4.6. *Siano I_1, \dots, I_n intervalli aperti di \mathbb{R} . Allora*

$$(21.4.9) \quad H^q(I_1 \times \dots \times I_n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } q = 0, \\ \{0\} & \text{se } q \neq 0. \end{cases}$$

In particolare, otteniamo il teorema di Poincaré² e Volterra³ sull'aciclicità locale del complesso di de Rham.

² Jules Henri Poincaré (Nancy, 29 aprile 1854 - Parigi, 17 luglio 1912) è stato un matematico, un fisico teorico e un filosofo naturale francese. Poincaré viene considerato un enciclopedico e in matematica l'ultimo universalista, dal momento che eccelse in tutti i campi della disciplina attivi ai suoi giorni.

Come matematico e fisico, diede molti contributi originali alla matematica pura, alla matematica applicata, alla fisica matematica e alla meccanica celeste. A lui si deve la formulazione della congettura di Poincaré, uno dei più famosi problemi in matematica. Nelle sue ricerche sul problema dei tre corpi, Poincaré fu la prima persona a scoprire un sistema caotico deterministico, ponendo in tal modo le basi della moderna teoria del caos. Viene inoltre considerato come uno dei fondatori della topologia.

Poincaré introdusse il moderno principio di relatività e fu il primo a presentare le trasformazioni di Lorentz nella loro moderna forma simmetrica. Poincaré completò le trasformazioni concernenti la velocità relativistica e le trascrisse in una lettera a Lorentz nel 1905. Ottenne così la perfetta invarianza delle equazioni di Maxwell, un passo importante nella formulazione della teoria della relatività ristretta. Il gruppo di Poincaré usato in fisica e matematica deve a lui il suo nome.

³Vito Volterra (Ancona, 3 maggio 1860 - Roma, 11 ottobre 1940), matematico e fisico italiano. Fu uno dei principali fondatori dell'analisi funzionale e della connessa teoria delle equazioni integrali. Il suo nome noto soprattutto per i suoi contributi alla biologia matematica.

TEOREMA XXI.4.7 (Lemma di Poincaré-Volterra). *Sia $\eta \in \Omega^q(A)$ ($k \geq 1$) una forma differenziale definita su un aperto A di \mathbb{R}^n , che soddisfa*

$$(21.4.10) \quad d\eta = 0$$

in un intorno aperto di un punto p di A . Se $q = 0$, allora f è costante in un intorno di p in A . Se $q > 0$, possiamo trovare un intorno aperto U di p in A ed una forma differenziale $u \in \Omega^{(q-1)}(U)$ tale che:

$$(21.4.11) \quad du = \eta \text{ in } U.$$

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA XXI.4.7. La tesi segue dal Teorema XXI.4.6, perché ogni punto $p \in A$ ha in A un intorno aperto della forma $I_1 \times \cdots \times I_n$, con I_1, \dots, I_n intervalli aperti in \mathbb{R} . \square

XXI.5. Coomologia di de Rham a supporti compatti

Sia A un aperto di \mathbb{R}^n . Se B è un aperto di A , possiamo definire la restrizione $r_B^A \eta \in \Omega^q(B)$ di una forma $\eta \in \Omega^*(A)$ come il pullback di η rispetto all'inclusione $B \hookrightarrow A$.

DEFINIZIONE XXI.5.1. Il *supporto* di una forma differenziale $\eta \in \Omega^*(A)$ è il complementare del più grande aperto di A su cui la restrizione di η sia nulla.

Indichiamo con $\Omega_0^q(A)$ il sottospazio delle q -forme differenziali alternate, con coefficienti di classe \mathcal{C}^∞ , che hanno supporto compatto in A .

Poiché

$$(21.5.1) \quad \text{supp } d\eta \subset \text{supp } \eta, \quad \forall \eta \in \Omega^*(A),$$

il differenziale di una forma a supporto compatto ha ancora supporto compatto. Otteniamo perciò un sottocomplesso del complesso (21.4.1) restringendoci ai sottospazi $\Omega_0^q(A)$ delle forme con supporto compatto in A .

$$(21.5.2) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega_0^0(A) & \xrightarrow{d} & \Omega_0^1(A) & \xrightarrow{d} & \Omega_0^2(A) & \longrightarrow & \cdots \\ \cdots & \longrightarrow & \Omega_0^h(A) & \xrightarrow{d} & \Omega_0^{h+1}(A) & \xrightarrow{d} & \Omega_0^{h+2}(A) & \longrightarrow & \\ & & \cdots & \longrightarrow & \Omega_0^{n-1}(A) & \xrightarrow{d} & \Omega_0^n(A) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

DEFINIZIONE XXI.5.2. Poniamo:

$\mathcal{Z}_0^q(A) = \{\alpha \in \Omega_0^q(A) \mid d\alpha = 0\}$, (spazio delle q -forme chiuse a supporto compatto),

$\mathcal{B}_0^q(A) = \{d\alpha \mid \alpha \in \Omega_0^{q-1}(A)\}$, (spazio delle q -forme esatte a supporto compatto),

$H_0^q(A) = \mathcal{Z}_0^q(A) / \mathcal{B}_0^q(A)$, (q -esimo gruppo di coomologia di de Rham a supporti compatti).

Osserviamo che $H_0^0(A) = 0$ se A è un aperto di \mathbb{R}^n con $n > 0$, perché $\mathcal{Z}_0^0(A) = 0$, in quanto i suoi elementi sono funzioni localmente costanti con supporto compatto in A .

Sia A un qualsiasi aperto di \mathbb{R}^n , I un intervallo aperto di \mathbb{R} e $\pi_A : A \times I \ni (x, t) \rightarrow x \in A$ la proiezione su A . Se $\eta \in \Omega_0^q(A \times I)$, scriviamo

$$(21.5.3) \quad \eta = \eta' + dt \wedge \eta'', \quad \text{con } \eta' \in \mathcal{C}_0^\infty(A \times I, \Lambda^q \mathbb{R}^n), \quad \eta'' \in \mathcal{C}_0^\infty(A \times I, \Lambda^{q-1} \mathbb{R}^n).$$

e definiamo

$$(21.5.4) \quad \pi_{A_*}(\eta) = \int_I \eta'' dt.$$

DEFINIZIONE XXI.5.3. La forma $\pi_{A_*}(\eta) \in \Omega_0^{q-1}(A)$ si dice ottenuta da $\eta \in \Omega_0^q(A \times I)$ mediante *integrazione sulla fibra*.

LEMMA XXI.5.4. Siano A un aperto di \mathbb{R}^n ed I un intervallo aperto di \mathbb{R} . L'integrazione sulla fibra anticommute con i differenziali:

$$(21.5.5) \quad d_x(\pi_{A_*}(\eta)) = -\pi_{A_*}(d\eta), \quad \forall \eta \in \Omega_0(A \times I).$$

DIMOSTRAZIONE. Con η definita dalla (21.5.3), abbiamo

$$d\eta = d_x \eta' + dt \wedge \left(\frac{\partial \eta'}{\partial t} - d_x \eta'' \right).$$

Quindi

$$\pi_{A_*}(d\eta) = \int_I \left(\frac{\partial \eta'}{\partial t} - d_x \eta'' \right) dt = - \int_I d_x \eta'' dt = -d_x \int_I \eta'' dt = -d_x \pi_{A_*}(\eta)$$

perché $\int_I (\partial \eta' / \partial t) dt = 0$ per il teorema fondamentale del calcolo integrale. \square

In particolare, per ogni intero non negativo q l'integrazione sulla fibra definisce un omomorfismo

$$(21.5.6) \quad [\pi_{A_*}] : H^{q+1}(A \times I) \longrightarrow H^q(A).$$

Vale il

LEMMA XXI.5.5. Siano A un qualsiasi aperto di \mathbb{R}^n ed I un intervallo aperto di \mathbb{R} . Allora per ogni intero non negativo q , la (21.5.6) è un isomorfismo.

Utilizzeremo, nella dimostrazione, il seguente

LEMMA XXI.5.6. Sia I un intervallo aperto di \mathbb{R} e $t_0 = \inf I$. Se $f(t)dt \in \Omega_0^1(I)$, la

$$(21.5.7) \quad u(t) = \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau$$

è l'unica soluzione dell'equazione $du = f(t)dt$ che si annulli in un intorno destro di t_0 . La u ha supporto compatto se, e soltanto se,

$$(21.5.8) \quad \int_I f(t) dt = 0.$$

La (21.5.8) è condizione necessaria e sufficiente affinché l'equazione $u' = f$ ammetta in I una soluzione a supporto compatto.

OSSERVAZIONE XXI.5.7. Per il Lemma XXI.5.5 l'applicazione

$$\mathcal{Z}_0^1(I) = \Omega_0^1(I) \ni f(t)dt \longrightarrow \int_I f(t)dt \in \mathbb{R}$$

è un funzionale lineare non nullo il cui nucleo è $\mathcal{B}_0^1(I)$. È perciò $H_0^1(I) \simeq \mathbb{R}$.

DIMOSTRAZIONE DEL LEMMA XXI.5.5. Fissiamo una qualsiasi funzione $\chi(t) \in \mathcal{C}_0^\infty(I)$, con

$$\int_I \chi(t)dt = 1,$$

e definiamo, per ogni intero non negativo q , l'applicazione

$$(21.5.9) \quad \chi^\sharp : \Omega_0^q(A) \ni \alpha \rightarrow \chi(t) \cdot dt \wedge \pi_{A^*}^* \alpha \in \Omega_0^{q+1}(A \times \mathbb{R}).$$

Abbiamo

$$(21.5.10) \quad \pi_{A^*}(\chi^\sharp \alpha) = \alpha, \quad d(\chi^\sharp \alpha) = \chi^\sharp(d\alpha), \quad \forall \alpha \in \Omega_0^q(A).$$

Quindi χ^\sharp definisce per passaggio al quoziente un omomorfismo

$$[\chi^\sharp] : H_0^q(A) \longrightarrow H_0^{q+1}(A \times I).$$

Per (21.5.10) abbiamo

$$\text{id}_{H_0^q(A)} = [(\pi_{A^*} \circ \chi^\sharp)] = [\pi_{A^*}] \circ [\chi^\sharp],$$

Da cui segue subito immediatamente che la $[\pi_{A^*}]$ è surgettiva. Resta da dimostrarne l'iniettività.

Sia $q \geq 1$ ed $\eta = \eta' + dt \wedge \eta'' \in \mathcal{Z}_0^q(A \times \mathbb{R})$, con $\eta' \in \mathcal{C}^\infty(A \times I, \Lambda^q \mathbb{R}^n)$, $\eta'' \in \mathcal{C}^\infty(A \times I, \Lambda^{q-1} \mathbb{R}^n)$. È

$$d_x \eta' = 0, \quad \frac{\partial \eta'}{\partial t} = d_x \eta''.$$

Osserviamo, in particolare, che, se $\eta'' = 0$, allora $\eta = 0$. Infatti in questo caso η' , essendo indipendente da t ed a supporto compatto, è nulla.

Supponiamo vi sia una forma $\alpha \in \Omega_0^{q-2}(A)$ tale che

$$d\alpha = \pi_{A^*} \eta = \int_I \eta'' dt.$$

Sia

$$\beta = \eta - \chi^\sharp(d\alpha) = \eta - d(\chi^\sharp \alpha).$$

È $[\beta] = [\eta]$ e, per la (21.5.10),

$$\pi_{A^*} \beta = 0.$$

Questo significa che, per

$$\beta = \beta' + dt \wedge \beta'', \quad \text{con } \beta' \in \mathcal{C}_0^\infty(A \times I, \Lambda^q \mathbb{R}^n), \quad \beta'' \in \mathcal{C}_0^\infty(A \times I, \Lambda^{q-1} \mathbb{R}^n),$$

risulta

$$\int_I \beta'' dt = 0.$$

Perciò, se $t_0 = \inf I$,

$$\gamma(x, t) = \int_{t_0}^t \beta''(x, s) ds$$

definisce una forma in $\mathcal{C}_0^\infty(A \times I, \Lambda^{q-1}\mathbb{R}^n) \subset \Omega_0^{q-1}(A \times I)$ ed abbiamo

$$d\gamma = d_x\gamma + dt \wedge \frac{\partial\gamma}{\partial t} = d_x\gamma + dt \wedge \beta''.$$

Allora

$$\zeta = \beta - d\gamma \in \mathcal{C}_0^\infty(A \times I, \Lambda^q\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{Z}_0^q(A \times I)$$

perciò, per quanto osservato in precedenza, $\zeta = 0$ e quindi $\beta = d\gamma$. È dunque $[\eta] = [\beta] = 0$. La dimostrazione è completa. \square

Otteniamo quindi

PROPOSIZIONE XXI.5.8. *Sia A un aperto di \mathbb{R}^n e siano I_1, \dots, I_k intervalli aperti di \mathbb{R} . Allora, per ogni intero $q \geq 0$,*

$$(21.5.11) \quad H_0^{q+k}(A \times I_1 \times \dots \times I_k) \simeq H_0^q(A).$$

Dalla Proposizione XXI.5.8 e dall'Osservazione XXI.5.7 otteniamo il

TEOREMA XXI.5.9. *Siano I_1, \dots, I_n intervalli aperti di \mathbb{R} . Allora*

$$(21.5.12) \quad H_0^q(I_1 \times \dots \times I_n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } q = n, \\ 0 & \text{se } q \neq n. \end{cases}$$

Se $\alpha \in \Omega_0^n(I_1 \times \dots \times I_n)$, allora $\alpha \in \mathcal{B}_0^n(I_1 \times \dots \times I_n)$ se, e soltanto se,

$$(21.5.13) \quad \int_{I_1 \times \dots \times I_n} \alpha = 0.$$

XXI.6. Il grado di un'applicazione propria di \mathbb{R}^n in sé

Siano A, B aperti di \mathbb{R}^n ed $f : A \rightarrow B$ un'applicazione propria⁴ di classe \mathcal{C}^∞ . Poiché f è propria, il pullback di una forma a supporto compatto in A ha supporto compatto in B ed otteniamo quindi un'applicazione

$$f^* : \Omega_0^q(B) \rightarrow \Omega_0^q(A)$$

che commuta con in differenziale e definisce perciò, per passaggio al quoziente, un'applicazione

$$(21.6.1) \quad [f^*] : H_0^q(B) \rightarrow H_0^q(A).$$

Identifichiamo il gruppo di coomologia $H_0^n(\mathbb{R}^n)$ con \mathbb{R} mediante il quoziente dell'applicazione

$$(21.6.2) \quad \mathcal{Z}_0^n(\mathbb{R}^n) \ni \alpha \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \alpha \in \mathbb{R}.$$

⁴ Un'applicazione continua $\phi : X \rightarrow Y$ tra due spazi topologici X, Y si dice propria se l'immagine inversa $\phi^{-1}(K)$ di ogni compatto K di Y è un compatto di X . Ciò equivale al fatto che f sia continua, chiusa e che $\phi^{-1}(y)$ sia compatto in X per ogni punto y di Y .

Se f è un'applicazione propria differenziabile di \mathbb{R}^n in sé, la $[f^*]$ definisce un'applicazione lineare di \mathbb{R} in sé, quindi della forma $t \rightarrow c \cdot t$ con $c \in \mathbb{R}$.

DEFINIZIONE XXI.6.1. Si dice *grado* di un'applicazione propria differenziabile di \mathbb{R}^n in sé, e si indica con $\deg(f)$, il numero per cui risulta

$$(21.6.3) \quad [f^*][\alpha] = (\deg(f)) \cdot [\alpha], \quad \forall [\alpha] \in H_0^n(\mathbb{R}^n).$$

TEOREMA XXI.6.2. Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un'applicazione differenziabile propria. Se $y \in \mathbb{R}^n$ è un valore regolare di f , definiamo il grado di f in y come l'intero

$$(21.6.4) \quad \deg_y f = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sign}(\det df(x)).$$

Allora

$$(21.6.5) \quad \deg_y f = \deg(f) \in \mathbb{Z}, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \setminus CV(f),$$

$$(21.6.6) \quad \int_{\mathbb{R}^n} f^* \alpha = \deg(f) \int_{\mathbb{R}^n} \alpha, \quad \forall \alpha \in \mathcal{Q}_0^n(\mathbb{R}^n).$$

DIMOSTRAZIONE. È sufficiente dimostrare che, dato un qualsiasi valore regolare $y_0 \in \mathbb{R}^n \setminus CV(f)$, risulta

$$(21.6.7) \quad \int_{\mathbb{R}^n} f^* \alpha = (\deg_{y_0} f) \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \alpha, \quad \forall \alpha \in \mathcal{Q}_0^n(\mathbb{R}^n).$$

L'insieme $f^{-1}(y_0)$ è finito, perché è compatto e consiste di punti isolati. Sia $f^{-1}(y_0) = \{x_1, \dots, x_k\}$. Per il teorema dell'applicazione inversa, possiamo trovare un intorno aperto connesso V di Y tale che $f^{-1}(V)$ sia unione disgiunta di aperti U_1, \dots, U_k , con $x_j \in U_j$ per $j = 1, \dots, k$ e la restrizione di f ad U_j sia un diffeomorfismo di U_j su V . Fissiamo una forma $\alpha_0 \in \mathcal{Q}_0^n(V)$, con

$$\int_{\mathbb{R}^n} \alpha_0 = \int_V \alpha_0 = 1.$$

Se $\alpha \in \mathcal{Q}_0^n(\mathbb{R}^n)$, la forma

$$\beta = \alpha - \left(\int_{\mathbb{R}^n} \alpha \right) \cdot \alpha_0$$

soddisfa

$$\int_{\mathbb{R}^n} \beta = 0,$$

quindi, per il Teorema XXI.5.9, è $\alpha = du$ per qualche $u \in \mathcal{Q}_0^{n-1}(\mathbb{R}^n)$. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f^* \alpha &= \int_{\mathbb{R}^n} \beta + \left(\int_{\mathbb{R}^n} \alpha \right) \cdot \int_{\mathbb{R}^n} f^* \alpha_0 \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} df^* u + \left(\int_{\mathbb{R}^n} \alpha \right) \cdot \int_{\mathbb{R}^n} f^* \alpha_0 \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \alpha \right) \cdot \int_{\mathbb{R}^n} f^* \alpha_0. \end{aligned}$$

Basterà quindi dimostrare che

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^* \alpha_0 = \deg_{y_0} f.$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f^* \alpha_0 &= \sum_{j=1}^k \int_{U_j} f^* \alpha \\ &= \sum_{j=1}^k \text{sign}(\det df(x_j)) \int_{\mathbb{R}^n} \alpha_0 = \deg_{y_0} f, \end{aligned}$$

per le formule di cambiamento di variabile nell'integrale multiplo. \square

ESEMPIO XXI.6.3. Per ogni intero positivo n l'applicazione $f_n : \mathbb{R} \ni t \rightarrow t^n \in \mathbb{R}$ è propria. Osserviamo che 1 è un valore regolare di f_n , che viene assunto nel solo punto 1 se n è dispari, nei punti ± 1 se 1 è pari. Poiché $\frac{d}{dt} f_n(t) = nt^{n-1}$, il grado di f_n è 1 se n è dispari, 0 se n è pari.

Più in generale, si può verificare che una $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ è propria se e soltanto se $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = \pm\infty$. Il grado di f è 0 se f ha segno costante al di fuori di un intervallo limitato, 1 se $tf(t)$ è positiva e -1 se $tf(t)$ è negativa fuori da un intervallo limitato.

ESEMPIO XXI.6.4. Per ogni intero positivo n , l'applicazione

$$f_n : \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C} \ni z \rightarrow z^n \in \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$$

è propria ed 1 è un suo valore regolare, immagine delle n radici n -esime dell'unità. Si verifica facilmente che lo Jacobiano di f_n ha determinante positivo in tutti i punti $z \neq 0$ e quindi il grado di $f_n(z) = z^n$ è n .

Per il Teorema grande di Picard, una funzioni intera $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ è propria se e soltanto se è un polinomio di grado positivo. Se $f \in \mathbb{C}[z]$, il grado dell'applicazione $z \rightarrow f(z)$ da esso definita è uguale al suo grado come polinomio. Infatti i valori regolari w di f sono quelli per cui l'equazione $f(z) = w$ ha un numero di radici distinte uguale al grado di f e in ciascuna di esse il determinante dello Jacobiano della corrispondente applicazione in \mathbb{R}^2 è positivo.

ESEMPIO XXI.6.5. Calcoliamo il grado dell'applicazione $f : \mathbb{C} \ni z \rightarrow z^3 - \bar{z} \in \mathbb{C}$. Si verifica facilmente che f è propria e che 0 è un valore regolare di f . Abbiamo

$$f^{-1}(0) = \{0, \pm 1, \pm i\}.$$

Il differenziale di f è $df = 3z^2 dz - d\bar{z}$. Abbiamo, in forma matriciale

$$df(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad df(\pm 1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad df(\pm i) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Il grado è quindi $(-1) + 1 + 1 + 1 + 1 = 3$. Osserviamo che $df(z)$ ha determinante positivo se z è sufficientemente grande. Come conseguenza, esiste una costante $c > 0$ tale che $f^{-1}(w)$ contenga esattamente tre elementi se $|w| > c$.

XXI.7. Orientazione e sottovarietà di \mathbb{R}^n .

Sia M una varietà differenziabile di classe \mathcal{C}^k , con $k \geq 1$. Un atlante \mathcal{A} di classe \mathcal{C}^k si dice *orientato* se i determinanti degli jacobiani delle sue funzioni di transizione sono positivi. Diremo che due atlanti orientati \mathcal{A}_1 ed \mathcal{A}_2 sono compatibili se la loro unione è ancora un atlante orientato. Una varietà differenziabile che ammetta un atlante orientato si dice *orientabile*. La relazione di compatibilità è allora una relazione di equivalenza tra gli atlanti orientati su M che ne definiscono la struttura differenziabile. Se M è connessa e orientabile, ci sono esattamente due classi di equivalenza di atlanti orientati su M . La scelta di una delle due classi è una *orientazione* della varietà M . Nel caso di una varietà non connessa, un'orientazione di M sarà la scelta di una particolare orientazione su ciascuna delle sue componenti connesse.

OSSERVAZIONE XXI.7.1. Non tutte le varietà sono orientabili. Ad esempio gli spazi proiettivi reali $\mathbb{R}P^n$ sono orientabili se n è dispari, ma non se n è pari.

Consideriamo ora in particolare l'orientabilità di sottovarietà di \mathbb{R}^n . Ricordiamo che una sottovarietà localmente chiusa di \mathbb{R}^n , di classe \mathcal{C}^k ($k \geq 1$) e di dimensione m , è un sottoinsieme S di \mathbb{R}^n tale che, per ogni punto $p \in S$, si possano trovare un intorno aperto U di p in \mathbb{R}^n ed $n - m$ funzioni di classe \mathcal{C}^k

$$f_i : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = m + 1, \dots, n$$

tali che

$$(21.7.1) \quad \begin{cases} S \cap U = \{x \in U \mid f_i(x) = 0 \quad i = m + 1, \dots, n\} \\ df_{m+1}(x) \wedge \dots \wedge df_n(x) \neq 0, \quad \forall x \in U. \end{cases}$$

Una *carta locale* su S è una *parametrizzazione*

$$(21.7.2) \quad \mathbb{R}^m \supset B^{\text{aperto}} \xrightarrow{\mathbf{r}} S \subset \mathbb{R}^n$$

di classe \mathcal{C}^k , cioè un'applicazione differenziabile di classe \mathcal{C}^k , definita su un aperto B di \mathbb{R}^m , a valori in \mathbb{R}^n , *non singolare*, cioè con Jacobiano di rango massimo m in ogni punto di B , e la cui immagine $\mathbf{r}(B)$ sia contenuta in S . L'esistenza di un atlante ottenuto mediante parametrizzazioni è assicurata dal teorema delle funzioni implicite.

La scelta delle funzioni f_{m+1}, \dots, f_n determina un'orientazione su $S \cap U$: una parametrizzazione (21.7.2) con $\mathbf{r}(B) \subset S \cap U$ sarà una carta ammissibile se

$$\det \left(\nabla f_{m+1}(\mathbf{r}), \dots, \nabla f_n(\mathbf{r}), \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^m} \right) > 0.$$

Torniamo al caso generale. Sia M una varietà di classe \mathcal{C}^k con $k \geq 1$ e sia D un aperto di M . È allora possibile definire un'applicazione continua $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ che assuma valori negativi su D e positivi su $M \setminus \bar{D}$. Infatti M è uno spazio topologico regolare e a base numerabile e dunque metrizzabile. Se d è una distanza

che definisce la topologia di M , e bD è la frontiera di D , basterà porre

$$f(x) = \begin{cases} -d(x, bD) & \text{se } x \in \bar{D} \\ d(x, bD) & \text{se } x \in M - D. \end{cases}$$

Diciamo che D è regolare di classe \mathcal{C}^k se è possibile scegliere una tale funzione f in modo che sia di classe \mathcal{C}^k in un intorno U di bD in M e non abbia punti critici su bD ; diciamo allora che la f definisce D . Se M è orientata, possiamo definire sulla frontiera di un suo aperto D di classe \mathcal{C}^k una struttura di varietà orientata di dimensione $n - 1$. Se f è una funzione che definisce D , costruiamo un atlante orientato su bD nel modo seguente: ogni punto p di bD ammette un intorno coordinato (U, ϕ) , compatibile con l'orientazione di M , della forma

$$\phi = (f, \phi^2, \dots, \phi^n).$$

Considereremo allora la

$$(bD \cap U, (\phi^2, \dots, \phi^n))$$

come una carta dell'atlante che definisce l'orientazione di bD . La frontiera di D , pensata come varietà orientata nel modo che abbiamo precisato, si indica con ∂D e si dice il bordo o la frontiera orientata di D .

Questa nozione è molto importante per la teoria dell'integrazione delle forme differenziali.

XXI.8. Integrazione sulle sottovarietà e formule di Stokes

In questo paragrafo, dati un aperto A di \mathbb{R}^n e due interi non negativi h, q , indicheremo con $\Omega^{q,(h)}(A)$ lo spazio $\mathcal{C}^h(A, \Lambda^q \mathbb{R}^n)$ delle forme differenziali alternate di grado q , con coefficienti differenziabili di classe \mathcal{C}^h in A .

Sia A un dominio di \mathbb{R}^n . Una n -forma continua $\eta \in \Omega^{n,(0)}(A)$ si scrive nella forma

$$\eta = \eta_{1,\dots,n} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n,$$

ove $\eta_{1,\dots,n}$ è una funzione reale, continua in A . Se D è un sottoinsieme misurabile di A ed $\eta_{1,\dots,n}$ è integrabile su D , possiamo definire

$$\int_D \eta = \int_D \eta_{1,\dots,n} dx.$$

Siano B un aperto di \mathbb{R}^q , A un aperto di \mathbb{R}^n ed $\mathbf{r} \in \mathcal{C}^1(B, A)$ un'inclusione differenziabile. La $\mathbf{r}(B)$ è una sottovarietà parametrica di $A \subset \mathbb{R}^n$ di dimensione q . Se $\eta \in \Omega^{q,(0)}(A)$, il suo pull-back $\mathbf{r}^* \eta$ è una q -forma continua su B . Se D è un dominio misurabile di B , e $\text{supp}(\mathbf{r}^* \eta) \cap \bar{D}$ un compatto contenuto in B , possiamo integrare su D la forma $\mathbf{r}^* \eta$, e porre:

$$\int_{\mathbf{r}(D)} \eta = \int_D \mathbf{r}^* \eta.$$

La formula di cambiamento di variabili negli integrali multipli ci dice che un cambiamento di parametrizzazione di $\mathbf{r}(D)$ che non ne cambi l'orientazione, ottenuto

cioè mediante un diffeomorfismo

$$z : B \rightarrow B' \quad \text{tra aperti } B', B \subset \mathbb{R}^q \quad \text{con} \quad \det \left(\frac{\partial z^i}{\partial y^j} \right)_{1 \leq i, j \leq q} > 0$$

non cambia il valore dell'integrale :

$$\int_{z(D)} (\mathbf{r} \circ z^{-1})^* \eta = \int_D \mathbf{r}^* \eta.$$

Possiamo quindi integrare una q -forma su sottoinsiemi compatti di sottovarietà orientate di dimensione q , usando l'additività dell'integrale e riducendoci, per partizione dell'unità, a considerare soltanto il caso di varietà parametriche (carte locali).

Riconsideriamo ora il concetto di *bordo* di un dominio di \mathbb{R}^n . Supponiamo che D sia un aperto relativamente compatto di \mathbb{R}^n . Sia d la distanza euclidea in \mathbb{R}^n e consideriamo la funzione continua $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ negativa in D e positiva su $\mathbb{R}^n - \bar{D}$:

$$f(x) = \begin{cases} -d(x, bD) & \text{se } x \in \bar{D} \\ d(x, bD) & \text{se } x \in \mathbb{R}^n - D. \end{cases}$$

Allora bD è di classe \mathcal{C}^k con $k \geq 1$ in un punto $p \in bD$ se e soltanto se la funzione f così definita è di classe \mathcal{C}^k in un intorno di p e $\nabla f(p) \neq 0$.

Se bD è di classe \mathcal{C}^k in un punto p , per il teorema delle funzioni implicite potremo trovare un intorno U di p in \mathbb{R}^n tale che $bD \cap U$ sia una sottovarietà chiusa di classe \mathcal{C}^k e di dimensione $n - 1$ dell'aperto U . L'orientazione di ∂D è definita dalle rappresentazioni parametriche

$$\mathbf{r} : V \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow U$$

con $\mathbf{r}(V) = bD \cap U' \subset U$ che soddisfano la condizione:

$$\det \left(\nabla f(\mathbf{r}), \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^{n-1}} \right) > 0.$$

Se la frontiera di un un aperto relativamente compatto D è differenziabile in tutti i punti, indichiamo con ∂D la sua frontiera come sottovarietà differenziabile orientata di dimensione $n - 1$, con l'orientazione definita nel modo precisato sopra.

TEOREMA XXI.8.1 (Formula di Green). *Sia D un aperto relativamente compatto con frontiera differenziabile e sia $\eta \in \mathcal{Q}_1^{n-1}(A)$ una forma differenziale definita in un intorno aperto A di \bar{D} . Allora*

$$(21.8.1) \quad \int_{\partial D} \eta = \int_D d\eta.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia A un intorno aperto di \bar{D} ed $\{U_i\}$ un ricoprimento aperto di A . Fissiamo una partizione dell'unità $\{\chi_i\}$ di classe \mathcal{C}^∞ , subordinata ad $\{U_i\}$. Se $\eta \in \mathcal{Q}_1^{n-1}(A)$, per l'additività dell'integrale e del differenziale, è sufficiente dimostrare la (21.8.1) per ciascuna delle forme $\eta_i = \chi_i \cdot \eta$.

Basterà quindi dimostrare che, per ogni punto $x_0 \in A$, esiste un intorno aperto U_{x_0} di x_0 in A tale che la (21.8.1) sia verificata se η ha supporto contenuto in U_{x_0} .

Se η ha supporto compatto contenuto in D , entrambi i termini della (21.8.1) sono nulli. In questo caso infatti il secondo membro è un integrale su un compatto $[-R, R]^n \supset D$. Per il teorema di Fubini, la verifica della formula si riduce all'integrazione per parti per funzioni di una variabile reale.

Sia $x_0 \in \partial D$. Per il teorema delle funzioni implicite, esiste un intorno U di x_0 in cui sono definite coordinate $y = y(x)$ con

$$U = \{|y^h| < 1 \mid 1 \leq h \leq n\},$$

$$D \cap U = \{-1 < y^1 < 0, |y^h| < 1 \text{ per } 2 \leq h \leq n\}.$$

Se η ha supporto contenuto in U , Abbiamo allora

$$\int_D d\eta = \int_{y^{-1}(D \cap U)} y^*(d\eta).$$

Scriviamo

$$\eta = \sum_{h=1}^n (-1)^h \eta_h dy^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dy^h} \wedge \cdots \wedge dy^n, \quad \text{con } \eta_h \in \mathcal{C}_0^\infty(y^{-1}(U)).$$

Allora

$$d\eta = \sum_{h=1}^n \frac{\partial \eta_h}{\partial y^h} dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n$$

e quindi

$$\begin{aligned} \int_D d\eta &= \int_{D \cap U} d\eta = \int_{y^{-1}(D \cap U)} y^*(d\eta) = \int_{y^{-1}(D \cap U)} dy^* \eta \\ &= \iint_{[-1,1]^{n-1}} dy^2 \cdots dy^n \int_{-1}^0 \frac{\partial \eta_1}{\partial y^1} dy^1 \\ &\quad + \sum_{h=2}^n \int_{-1}^0 dy^1 \iint_{[-1,1]^{n-1}} \frac{\partial \eta_h}{\partial y^h} dy^2 \cdots dy^n \\ &= \iint_{[-1,1]^{n-1}} \eta_1(0, y^2, \dots, y^n) dy^2 \cdots dy^n = \int_{\partial D} \eta, \end{aligned}$$

perché

$$\int_{-1}^0 \frac{\partial \eta_1}{\partial y^1} dy^1 = \eta_1^{(i)}(0, y^2, \dots, y^n), \quad \int_{-1}^1 \frac{\partial \eta_h}{\partial y^h} dy^h = 0 \quad \text{per } 2 \leq h \leq n.$$

□

Sia ora S una sottovarietà differenziabile orientata di dimensione q e di classe \mathcal{C}^k , con $k \geq 1$, di un aperto A di \mathbb{R}^n . Ciò significa che, per ogni punto $p \in S$, possiamo trovare un intorno U_p di p ed $n - q$ funzioni differenziabili f_i per $i = q + 1, \dots, n$ definite in U_p e tali che :

$$\begin{cases} S \cap U_p = \{x \in U_p \mid f_i(x) = 0, \forall i = q + 1, \dots, n\}, \\ df_{q+1}(x) \wedge \dots \wedge df_n(x) \neq 0, \quad \forall x \in S \cap U_p. \end{cases}$$

e inoltre l'orientazione di S è definita dall'atlante in cui sono carte ammissibili in $S \cap U_p$ le parametrizzazioni:

$$\mathbf{r} : V \subset \mathbb{R}^q \rightarrow S \cap U_p \subset \mathbb{R}^n$$

per cui

$$\det \left(\nabla f_{q+1}(\mathbf{r}), \dots, \nabla f_n(\mathbf{r}), \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^q} \right) > 0.$$

Dato un aperto relativamente compatto D di S , diremo che la sua frontiera è di classe \mathcal{C}^k se possiamo trovare una funzione ϕ di classe \mathcal{C}^k con:

$$\begin{cases} D = \{x \in S \mid \phi(x) < 0\} \\ d\phi(x) \wedge df_{q+1}(x) \wedge \dots \wedge df_n(x) \neq 0 \quad \forall x \in bD, \end{cases}$$

dove bD è la frontiera di D in S e le f_{q+1}, \dots, f_n definiscono l'orientazione di S in un intorno x . Su bD consideriamo allora l'orientazione definita dalle funzioni $f_{q+1}, \dots, f_n, \phi$. La sottovarietà bD , con questa orientazione, si dice il *bordo* di D e si indica con ∂D . Otteniamo allora, per la definizione di integrale di una q -forma su una sottovarietà orientata q -dimensionale e la formula di Green:

TEOREMA XXI.8.2 (Formula di Stokes). *Sia D un dominio relativamente compatto con frontiera di classe \mathcal{C}^k ($k \geq 1$) di una sottovarietà orientata S di dimensione q di \mathbb{R}^n (con $q \geq 1$). Sia $\eta \in \Omega_1^{q-1}(U)$ per un intorno U di \bar{D} in \mathbb{R}^n . Allora:*

$$\int_{\partial D} \eta = \int_D d\eta.$$

OSSERVAZIONE XXI.8.3. Le formule di Green e di Stokes si estendono al caso in cui la frontiera dell'aperto relativamente compatto D sia di classe \mathcal{C}^1 a tratti, cioè D si possa ottenere mediante unioni e intersezioni finite di aperti con frontiera regolare di classe \mathcal{C}^1 . In questo caso ∂D risulta un'unione finita di sottoinsiemi chiusi di sottovarietà orientate, due a due senza punti interni comuni e l'integrale sulla frontiera deve intendersi come la somma finita degli integrali effettuati su ciascuno di tali sottoinsiemi.

OSSERVAZIONE XXI.8.4. Concludiamo con alcune osservazioni che collegano le formule di Green-Stokes al lemma di Poincaré-Volterra. Sia A un aperto di \mathbb{R}^n e sia $\eta \in \Omega_k^q(A)$, ($k, q \geq 1$) con

$$d\eta = 0 \quad \text{in } A.$$

Una tale forma si dice *chiusa*. Allora:

(i) L'integrale della η su sottovarietà compatte di A di dimensione q è invariante per omotopia e la sua definizione si può estendere fino a definire applicazioni:

$$\pi(S^q, A) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \pi_\ell(D^q, S^{q-1}; A) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Ciò dipende dal fatto che le applicazioni continue $S^n \rightarrow A$ si possono approssimare mediante applicazioni di classe \mathcal{C}^∞ e queste, per il lemma di Sard, hanno luogo di valori critici di misura q -dimensionale nulla.

(ii) Condizione necessaria e sufficiente affinché si possa trovare una forma $u \in \Omega_{k+1}^{q-1}(A)$ tale che

$$du = \eta \text{ in } A$$

(in questo caso diciamo che η è *esatta* in A) è che l'integrale di η su ogni sottovarietà compatta orientata di dimensione q di A sia 0.

OSSERVAZIONE XXI.8.5. Sia $A = \mathbb{R}^2 - \{0\}$. Consideriamo su A la forma chiusa

$$d\theta = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$$

Essa non è esatta in quanto il suo integrale su una qualsiasi circonferenza

$$[0, 2\pi] \ni t \rightarrow {}^t(R \cos t, R \sin t) \in A$$

($R > 0$) è uguale a 2π . L'integrale della forma $d\theta$ su un laccetto in A , diviso per 2π si dice l'*indice* del laccetto rispetto a 0 e l'annullarsi dell'indice del laccetto è condizione necessaria e sufficiente affinché esso sia omotopo al laccetto costante. Intuitivamente l'indice rispetto a 0 di un laccetto in A misura quante volte esso si avvolge intorno all'origine. In generale, dato un laccetto in \mathbb{R}^2 , è possibile definire l'indice del laccetto rispetto a qualsiasi punto di \mathbb{R}^2 che non appartenga al laccetto, considerando le forme:

$$\frac{(x - x_0)dy - (y - y_0)dx}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Nel caso di laccetti semplici, l'indice rispetto al laccetto di ciascun punto che non sia nel suo supporto può assumere solo due valori tra i numeri 0, 1, -1. I punti in cui l'indice è diverso da 0 formano un aperto limitato che ha il laccetto come frontiera (Teorema di Jordan).

L'indice rispetto a 0 della frontiera orientata di un dominio regolare connesso e semplicemente connesso che contenga 0 come suo punto interno è 1, mentre la somma degli indici dei laccetti che compongono la frontiera di un dominio regolare che non contenga 0 nella sua chiusura è uguale a 0.

Calcolo differenziale sulle varietà

XXII.1. Fibrato cotangente e tensori

DEFINIZIONE XXII.1.1. Sia M una varietà differenziabile. Il fibrato duale T^*M del suo fibrato tangente TM si dice il suo *fibrato cotangente* ed i suoi elementi *vettori cotangenti* o *covettori* di M .

Se $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, per ogni $p \in M$ l'applicazione $T_p \ni v \rightarrow v(f) \in \mathbb{R}$ è un funzionale lineare su $T_p M$ ed è dunque un elemento di $T_p^* M$. Associamo in questo modo ad ogni $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ una sezione differenziabile \widetilde{df} del fibrato T^*M , con

$$df(v) = \langle v, \widetilde{df}(\pi(v)) \rangle, \quad \forall v \in TM.$$

Nel seguito scriveremo per semplicità df invece di \widetilde{df} , identificando il differenziale di una funzione reale alla corrispondente sezione del fibrato cotangente.

Indichiamo con $\mathfrak{X}^*(M)$ il $\mathcal{C}^\infty(M)$ -modulo $\Gamma(M, T^*M)$ delle sezioni differenziabili del fibrato T^*M .

Abbiamo un accoppiamento di dualità

$$(22.1.1) \quad \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}^*(M) \ni (X, \xi) \rightarrow \langle X, \xi \rangle \in \mathcal{C}^\infty(M),$$

definito da

$$\langle X, \xi \rangle(p) = [X(\xi)](p) = \xi_p(X_p) \quad \text{per ogni } p \in M.$$

DEFINIZIONE XXII.1.2. Indichiamo con $\mathcal{T}^{r,s}(TM)$ la potenza tensoriale r -covariante ed s -controvariante di TM . Essa è un fibrato vettoriale con fibra $[T_p M]^{\otimes r} \otimes [T_p^* M]^{\otimes s}$. Indichiamo poi con $\mathfrak{T}^{r,s}(M)$ lo spazio delle sue sezioni, che si dicono *tensori r -covarianti ed s -controvarianti*.

Per estensione dell'accoppiamento (22.1.1), possiamo far corrispondere ad una sezione $\tau \in \Gamma(M, \mathcal{T}^{r,s}(TM))$ un'applicazione:

$$(22.1.2) \quad \tau : \underbrace{\mathfrak{X}^*(M) \otimes \cdots \otimes \mathfrak{X}^*(M)}_{r \text{ volte}} \otimes \underbrace{\mathfrak{X}(M) \otimes \cdots \otimes \mathfrak{X}(M)}_{s \text{ volte}} \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$$

Si verifica senza difficoltà il seguente criterio:

PROPOSIZIONE XXII.1.3. *Condizione necessaria e sufficiente affinché un'applicazione \mathbb{R} -multilineare (22.1.2) sia associata ad un tensore è che sia $\mathcal{C}^\infty(M)$ -multilineare.*

XXII.2. Forme differenziali su una varietà

Indichiamo con $\Omega^q(M)$ lo spazio dei tensori alternati q -controvarianti su M . Per la Proposizione XXII.1.3 abbiamo il seguente criterio

PROPOSIZIONE XXII.2.1. *Sia M una varietà differenziabile. Un'applicazione \mathbb{R} -multilineare*

$$\tau : (\mathfrak{X}(M))^q \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$$

definisce un elemento di $\Omega^q(M)$ se e soltanto se verifica le due condizioni:

$$(22.2.1) \quad \tau(X_1, X_2, \dots, X_q) = 0 \quad \text{se } X_1, X_2, \dots, X_q \in \mathfrak{X}(M) \quad \text{ed} \\ \exists 1 \leq i < j \leq h \quad \text{con } X_i = X_j,$$

$$(22.2.2) \quad \tau(fX_1, X_2, \dots, X_q) = f \cdot \tau(X_1, \dots, X_q), \\ \forall X_1, \dots, X_q \in \mathfrak{X}(M), \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

La condizione (22.2.1) è equivalente a ciascuna delle

$$(22.2.3) \quad \tau(X_1, \dots, X_q) = 0 \quad \text{se } X_1, \dots, X_q \in \mathfrak{X}(M) \\ \text{sono } \mathbb{R}\text{-linearmente dipendenti,}$$

$$(22.2.4) \quad \tau(X_{\sigma_1}, \dots, X_{\sigma_q}) = \varepsilon(\sigma)\tau(X_1, \dots, X_q), \\ \forall X_1, \dots, X_q \in \mathfrak{X}(M), \quad \forall \sigma \in \mathfrak{S}_q.$$

Dalle (22.2.1) ed (22.2.2) segue che

$$(22.2.5) \quad \tau(X_1, \dots, X_q)(p) = 0 \quad \text{se } X_1, \dots, X_q \in \mathfrak{X}(M), p \in M \\ \text{ed } X_{1_p}, \dots, X_{q_p} \text{ sono } \mathbb{R}\text{-linearmente dipendenti in } T_pM.$$

DEFINIZIONE XXII.2.2. Gli elementi di $\Omega^q(M)$ si chiamano *forme alternate di grado q* , o *q -forme alternate*.

DEFINIZIONE XXII.2.3. Il *differenziale* della q -forma alternata $\tau \in \Omega^q(M)$ è la $(q+1)$ -forma alternata $d\tau \in \Omega^{q+1}(M)$ definita da

$$(22.2.6) \quad d\tau(X_0, X_1, \dots, X_q) = \sum_{i=0}^q (-1)^i X_i[\tau(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_q)] \\ + \sum_{0 \leq i < j \leq q} (-1)^{i+j} \tau([X_i, X_j], X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_q) \\ \forall X_0, X_1, \dots, X_q \in \mathfrak{X}(M).$$

Verifichiamo che la (22.2.6) definisce una $(q+1)$ -forma alternata. Se, per due indici $0 \leq r < s \leq q$, è $X_r = X_s = Y$, si verifica facilmente che ciascuna delle due somme a secondo membro di (22.2.6) si annulla. Per dimostrare la $\mathcal{C}^\infty(M)$ -multilinearità, è allora sufficiente verificare che $d\tau$ verifica anche la (22.2.2). Abbiamo

$$[fX_0, X_i] = f[X_0, X_i] - (X_i f)X_0.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
d\tau(fX_0, X_1, \dots, X_h) &= f \sum_{i=0}^h (-1)^i (X_i) \tau(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_h) \\
&+ \sum_{i=1}^h (-1)^i (X_i f) \tau(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_h) \\
&+ f \sum_{0 \leq i < j \leq h} (-1)^{i+j} \tau([X_i, X_j], X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_h) \\
&- \sum_{i=1}^h (-1)^i (X_i f) \tau(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_h) \\
&= f d\tau(X_0, X_1, \dots, X_h), \\
&\forall f \in \mathcal{C}^\infty(M), \quad \forall X_0, X_1, \dots, X_h \in \mathfrak{X}(M).
\end{aligned}$$

Se x^1, \dots, x^m sono coordinate locali, è

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] = 0.$$

Quindi la definizione (22.2.6) coincide, nel caso in cui M sia un aperto di uno spazio Euclideo, con quella data in §XXI.3 del Capitolo XXI. Poiché, per calcolare il differenziale di una q -forma alternata τ nell'intorno di un punto $p \in M$ possiamo utilizzare nella (22.2.6) campi di vettori definiti soltanto in un intorno di p , otteniamo in particolare il

TEOREMA XXII.2.4. *Se M è una varietà differenziabile di dimensione m , il differenziale definisce un complesso di operatori differenziali del prim'ordine :*

$$(22.2.7) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega^0(M) & \xrightarrow{d} & \Omega^1(M) & \longrightarrow & \dots \\ & & & & \dots & \xrightarrow{d} & \Omega^{m-1}(M) & \xrightarrow{d} & \Omega^m(M) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

È $\Omega^0(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$ e, per ogni aperto connesso U di M , le funzioni $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ con $df = 0$ su U sono costanti su U .

Ogni punto $p \in M$ ha un sistema fondamentale di intorni aperti U tali che, se $1 \leq q \leq m$ e $\tau \in \Omega^q(U)$ soddisfa $d\tau = 0$ in U , allora esiste una $\eta \in \Omega^{q-1}(U)$ tale che $d\eta = \tau$ in U .

DIMOSTRAZIONE. Il Teorema segue dal teorema analogo (Lemma di Poincaré-Volterra) dimostrato per le forme differenziali definite sugli aperti degli spazi Euclidei. \square

DEFINIZIONE XXII.2.5. Poniamo

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}^q(M) &= \{f \in \Omega^q(M) \mid df = 0\} && \text{(spazio delle } q\text{-forme chiuse su } M), \\
\mathcal{B}^q(M) &= \{df \mid f \in \Omega^{q-1}(M)\} && \text{(spazio delle } q\text{-forme esatte su } M), \\
H^q(M) &= \mathcal{Z}^q(M) / \mathcal{B}^q(M) && \text{(} q\text{-esimo gruppo di coomologia} \\
&&& \text{di de Rham di } M).
\end{aligned}$$

XXII.3. Il lemma di Poincaré-Volterra sugli intorni contrattili

Sia M una varietà differenziabile di dimensione m . Un aperto U di M si dice *contrattile* se esiste un'omotopia $\Phi \in \mathcal{C}^\infty(U \times [0, 1], U)$, di un'applicazione costante con l'identità.

Abbiamo:

TEOREMA XXII.3.1 (Poincaré-Volterra). *Se U è un aperto contrattile di M , allora*

$$H^q(U) = \{0\} \quad \text{per ogni } q \geq 1.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $\Phi \in \mathcal{C}^\infty(U \times [0, 1], U)$ con

$$F_0(p) = p_0 \in U, \quad F_1(p) = p, \quad \forall p \in U.$$

Sia $\alpha \in \Omega^q(U)$ una forma chiusa e poniamo

$$\Phi^*(\alpha) = \alpha_0 + dt \wedge \alpha_1,$$

con $\alpha_0 \in \Gamma(U \times [0, 1], \Lambda^q T^*M)$, $\alpha_1 \in \Gamma(U \times [0, 1], \Lambda^{q-1} T^*M)$. Allora

$$d(\Phi^*(\alpha)) = \Phi^*(d\alpha) = 0 \implies (d_M \alpha_0 = 0, \quad \frac{\partial \alpha_0}{\partial t} = d_M \alpha_1),$$

dove abbiamo indicato con d_M la restrizione del differenziale su $U \times [0, 1]$ ai vettori *orizzontali*, cioè a $\ker dt$. Definiamo:

$$\beta(t) = \int_0^t \alpha_1(s) ds.$$

Otteniamo allora, per differenziazione sotto il segno di integrale,

$$d_M \beta(t) = \int_0^t d_M \alpha_1(s) ds = \int_0^t \frac{\partial \alpha_0}{\partial t}(s) ds = \alpha_0(t),$$

perché $\alpha_0(0) = 0$. Con $u = \beta(1) \in \Omega^{q-1}(U)$, otteniamo $du = \alpha_0(1) = \alpha$ in U . \square

XXII.4. Derivata di Lie di un tensore

Un diffeomorfismo $\psi \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ definisce isomorfismi:

$$(\psi^{-1})^* : \mathcal{C}^\infty(M) \ni f \rightarrow f_\psi = f \circ \psi^{-1} \in \mathcal{C}^\infty(N)$$

$$\psi_* : \mathfrak{X}(M) \ni X \rightarrow X^\psi = \psi_*(X) \in \mathfrak{X}(N)$$

$$\text{ove } \psi_*(X)(q) = d\psi(X_{\psi^{-1}(q)}) \quad \forall q \in N$$

$$(\psi^{-1})^* : \mathfrak{X}^*(M) \ni \xi \rightarrow \xi_\psi \in \mathfrak{X}^*(N) \quad \text{ove } \xi_\psi(X^\psi) = \xi(X) \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

Questi isomorfismi si estendono agli isomorfismi degli spazi tensoriali:

$$\mathcal{T}^{r,s}(M) \ni \tau \rightarrow \tau^\psi \in \mathcal{T}^{r,s}(N),$$

definiti da:

$$\tau^\psi(\xi^1_\psi, \dots, \xi^r_\psi, X_1^\psi, \dots, X_s^\psi) = \tau(\xi^1, \dots, \xi^r, X_1, \dots, X_s)$$

$$\forall \xi^1, \dots, \xi^r \in \mathfrak{X}^*(M), \quad \forall X_1, \dots, X_s \in \mathfrak{X}(M).$$

Sia $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\Phi_X = \Phi_X(t)$ il corrispondente gruppo locale a un parametro di diffeomorfismi di M .

Per ogni aperto U relativamente compatto in M esiste un $\epsilon > 0$ tale che, per ogni $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, $\Phi_X(p, t)$ sia definita per ogni $p \in U$. Quindi, per ogni $\tau \in \mathcal{T}^{r,s}(M)$, utilizzando il diffeomorfismo

$$\Phi_X(t)^{-1}(U) \ni p \rightarrow \Phi_X(p, t) \in U,$$

possiamo definire $\tau_X(t) = \tau^{\Phi_X(\cdot, t)} \in \mathcal{T}^{r,s}(U)$. Otteniamo pertanto un nuovo tensore $L_X(\tau) \in \mathcal{T}^{r,s}(M)$, ponendo:

$$(22.4.1) \quad L_X(\tau) = - \left. \frac{d\tau_X(t)}{dt} \right|_{t=0}.$$

DEFINIZIONE XXII.4.1. Il tensore $L_X(\tau)$ è la *derivata di Lie del tensore τ rispetto al campo di vettori X* .

PROPOSIZIONE XXII.4.2. Se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, allora $L_X(Y) = [X, Y]$.

DIMOSTRAZIONE. In una carta coordinata (U, x) siano $X = \sum_{i=1}^m a^i \partial/\partial x^i$, $Y_i = \sum b^i \partial/\partial x^i$. Il gruppo locale a un parametro $\Phi(t)$ è allora definito dalle equazioni:

$$\dot{\Phi}^i(x, t) = a^i(\Phi(x, t)) \quad i = 1, \dots, m.$$

Scriviamo $\Psi(x, t)$ per l'inversa della $\Phi(t)$. Abbiamo cioè $\Phi(\Psi(x, t), t) = x$ per ogni t e x nel dominio di definizione. Abbiamo allora:

$$Y(t) = \sum_{i,j=1}^m b^i(\Psi(x, t)) (\partial \Phi^j / \partial x^i)(\Psi(x, t)) (\partial / \partial x^j).$$

Otteniamo quindi:

$$\frac{\partial Y(t)}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^m \left(\sum_{h=1}^m \frac{\partial b^i}{\partial x^h} \frac{\partial \Psi^h}{\partial t} \frac{\partial \Phi^j}{\partial x^i} + b^i \left[\frac{\partial^2 \Phi^j}{\partial x^i \partial x^k} \frac{\partial \Psi^k}{\partial t} + \frac{\partial^2 \Phi^j}{\partial x^i \partial t} \right] \right) \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Da $\Psi(\Phi(x, t), t) = x$, abbiamo:

$$\frac{\partial \Psi^h}{\partial t} + \sum_{k=1}^m \frac{\partial \Psi^h}{\partial x^k} \frac{\partial \Phi^k}{\partial t} = 0.$$

Poiché $\partial \Phi / \partial x$ e $\partial \Psi / \partial x$ sono entrambi l'identità per $t = 0$, abbiamo:

$$\sum_{i,j,h=1}^m \left. \frac{\partial b^i}{\partial x^h} \frac{\partial \Psi^h}{\partial t} \frac{\partial \Phi^j}{\partial x^i} \right|_{t=0} = - \sum_{h=1}^m a^h \frac{\partial b^j}{\partial x^h}.$$

Per $t = 0$ è $\partial^2 \Phi^j / \partial x^i \partial x^k = 0$, mentre $\partial^2 \Phi^j / \partial x^i \partial t = \partial a^j / \partial x^i$ ed otteniamo quindi la formula desiderata. \square

Si verifica facilmente che:

PROPOSIZIONE XXII.4.3. Se $f \in \mathcal{T}^{0,0}(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$, allora $L_X f = Xf$ per ogni $X \in \mathfrak{X}(M)$.

DEFINIZIONE XXII.4.4. Dati numeri positivi h, k, r, s con $h \leq r, k \leq s$, definiamo sui tensori l'operazione di *contrazione degli indici* (h, k):

$$\mathbf{c}_k^h : \mathcal{T}^{r,s}(M) \longrightarrow \mathcal{T}^{r-1,s-1}(M)$$

nel modo seguente: siano $X_1, \dots, X_m \in \mathfrak{X}(M)$ campi di vettori che definiscono un sistema di riferimento su un aperto U di M , tali cioè che $X_1(p), \dots, X_m(p) \in T_p M$ sia una base di $T_p M$ per ogni $p \in U$. Definiamo il sistema di riferimento duale $\xi^1, \dots, \xi^m \in \mathfrak{X}^*(U)$ mediante $\langle X_i, \xi^j \rangle(p) = \delta_j^i$ (delta di Kronecker) per ogni $p \in U$. Allora, su U , poniamo:

$$\begin{aligned} & \mathbf{c}_k^h(\tau)(\eta^1, \dots, \eta^{r-1}, Y_1, \dots, Y_{s-1}) \\ &= \sum_{j=1}^m \tau(\eta^1, \dots, \eta^{k-1}, \underbrace{\xi^j}_{\hat{k}}, \eta^k, \dots, \eta^{r-1}, Y_1, \dots, Y_{h-1}, \underbrace{X_j}_{\hat{h}}, Y_h, \dots, Y_{s-1}) \\ & \quad \forall \eta^j \in \mathfrak{X}^*(M), Y_i \in \mathfrak{X}(M). \end{aligned}$$

Si verifica che la contrazione è ben definita, che cioè non dipende dalla scelta del sistema di riferimento su U .

Abbiamo:

PROPOSIZIONE XXII.4.5. *La derivata di Lie commuta con le contrazioni.*

Utilizzando questa proposizione possiamo calcolare la derivata di Lie dei diversi tensori a partire dalla definizione della derivata di Lie dei campi di vettori. Ad esempio, se $\alpha \in \Omega^1(M)$, abbiamo:

$$(22.4.2) \quad L_X(\alpha)(Y) = X(\alpha(Y)) - \alpha([X, Y]) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

e, più in generale:

PROPOSIZIONE XXII.4.6. *Se $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\alpha \in \Omega^h(M)$, allora:*

$$(22.4.3) \quad \begin{aligned} L_X(\alpha)(X_1, \dots, X_h) &= X(\alpha(X_1, \dots, X_h)) \\ &+ \sum_{i=1}^h (-1)^i \alpha([X, X_i], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_h), \\ & \quad \forall X_1, \dots, X_h \in \mathfrak{X}(M). \end{aligned}$$

DEFINIZIONE XXII.4.7. Dato un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$, definiamo il *prodotto interno* rispetto ad $X \in \mathfrak{X}(M)$ mediante:

$$\begin{aligned} \iota_X : \mathcal{T}^{r,s}(M) \ni \tau &\rightarrow \iota_X(\tau) \in \mathcal{T}^{r,s-1}(M) \\ \iota_X(\tau)(\xi^1, \dots, \xi^r, X_1, \dots, X_{s-1}) &= \tau(\xi^1, \dots, \xi^r, X, X_1, \dots, X_{s-1}) \\ \forall \xi^1, \dots, \xi^r \in \mathfrak{X}^*(M), \forall X_1, \dots, X_{s-1} &\in \mathfrak{X}(M) \end{aligned}$$

quando $s \geq 1$. Porremo $\iota_X(\tau) = 0$ per ogni tensore 0-controvariante.

TEOREMA XXII.4.8. *Valgono le formule:*

$$(22.4.4) \quad L_X(\alpha) = d(\iota_X \alpha) + \iota_X(d\alpha) \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M), \forall \alpha \in \Omega^h(X),$$

$$(22.4.5) \quad \begin{aligned} [L_X, \iota_Y](\tau) &= L_X(\iota_Y(\tau)) - \iota_Y(L_X(\tau)) \\ &= \iota_{[X, Y]}(\tau) \end{aligned} \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M), \tau \in \mathcal{T}^{r, s}(M).$$

XXII.5. Distribuzioni vettoriali e teorema di Frobenius

Sia M una varietà differenziabile di dimensione m .

DEFINIZIONE XXII.5.1. Una *distribuzione vettoriale generalizzata* su M è un sotto- $\mathcal{C}^\infty(M)$ -modulo \mathfrak{B} di $\mathfrak{X}(M)$.

Ciò significa che

$$fX + gY \in \mathfrak{B}, \quad \text{per ogni } X, Y \in \mathfrak{B} \text{ e per ogni } f, g \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

Per ogni $p \in M$ poniamo

$$\mathfrak{B}_p = \{X_p \mid X \in \mathfrak{B}\} \subset T_p M.$$

La dimensione di \mathfrak{B}_p , come spazio vettoriale reale, è il *rango* di \mathfrak{B} in p .

DEFINIZIONE XXII.5.2. Una distribuzione vettoriale generalizzata \mathfrak{B} di rango costante si dice una *distribuzione vettoriale*.

In questo caso, gli elementi di \mathfrak{B} sono le sezioni di un sottofibrato vettoriale $\xi_{\mathfrak{B}} = (W \xrightarrow{\pi} M)$ del fibrato tangente e, viceversa, se $\xi = (W \xrightarrow{\pi} M)$ è un sottofibrato vettoriale del fibrato tangente, lo spazio $\mathfrak{B} = \Gamma(M, W)$ delle sue sezioni è una distribuzione vettoriale su M .

Sia $\Omega^*(M) = \bigoplus_{h=0}^m \Omega^h(M)$ l'algebra delle forme differenziali alternate su M . Indichiamo con $\Omega^+(M) = \bigoplus_{h=1}^m \Omega^h(M)$ l'ideale delle forme di grado positivo, che non contengono cioè componenti di grado 0.

Associamo alla distribuzione vettoriale \mathfrak{B} il *sistema differenziale*:

$$\mathcal{I}_{\mathfrak{B}} = \{\alpha \in \Omega^+(M) \mid \alpha|_{\mathfrak{B}} = 0\}.$$

Osserviamo che $\mathcal{I}_{\mathfrak{B}}$ è un sotto- $\mathcal{C}^\infty(M)$ -modulo graduato ed un ideale di $\Omega^*(M)$, e che, come ideale, è generato dai suoi elementi di grado uno.

DEFINIZIONE XXII.5.3. Chiamiamo *sistema differenziale* su M un qualsiasi ideale \mathcal{I} di $\Omega^*(M)$ contenuto in $\Omega^+(M)$.

Ad un sistema differenziale \mathcal{I} associamo la sua *distribuzione caratteristica*

$$(22.5.1) \quad \mathfrak{B}_{\mathcal{I}} = \{X \in \mathfrak{X}(M) \mid \iota_X(\mathcal{I}) \subset \mathcal{I}\}.$$

La relazione tra sistemi differenziali e distribuzioni vettoriali è descritta dal seguente:

LEMMA XXII.5.4. Sia \mathfrak{B} una distribuzione vettoriale ed $\mathcal{I}_{\mathfrak{B}}$ il sistema differenziale ad essa associato. Allora \mathfrak{B} è la distribuzione caratteristica di $\mathcal{I}_{\mathfrak{B}}$.

Se \mathcal{I} è un sistema differenziale e $\mathfrak{B}_{\mathcal{I}}$ la sua distribuzione caratteristica, abbiamo l'inclusione

$$(22.5.2) \quad \mathcal{I} \subset \mathcal{I}_{\mathfrak{B}_{\mathcal{I}}}.$$

ESEMPIO XXII.5.5. Sia \mathcal{S} il sistema differenziale $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n) \wedge (dx^1 + dx^2 \wedge dx^3)$ in \mathbb{R}^m , con $m \geq 3$. Allora $\mathfrak{B}_{\mathcal{S}} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m) \left[\frac{\partial}{\partial x^4}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m} \right]$ ed $\mathcal{I}_{\mathfrak{B}_{\mathcal{S}}}$ è l'ideale di $\mathcal{Q}^*(M)$ generato da dx^1, dx^2, dx^3 .

DEFINIZIONE XXII.5.6. Sia \mathfrak{B} una distribuzione vettoriale su M .

Una sottovarietà N di M si dice una *sottovarietà integrale* di \mathfrak{B} se $T_p N \subset \mathfrak{B}_p$ per ogni $p \in N$.

Una distribuzione vettoriale \mathfrak{B} si dice *totalmente integrabile* se per ogni punto $p \in M$ esiste una sottovarietà integrale N di \mathfrak{B} con $p \in N$ e $T_p N = \mathfrak{B}_p$.

Diciamo che \mathfrak{B} è *formalmente integrabile* se

$$(22.5.3) \quad [\mathfrak{B}, \mathfrak{B}] \subset \mathfrak{B}.$$

Abbiamo il

TEOREMA XXII.5.7 (Frobenius). *Sia \mathfrak{B} una distribuzione vettoriale di rango costante k . Sono allora equivalenti:*

- (i) \mathfrak{B} è *totalmente integrabile*;
- (ii) \mathfrak{B} è *formalmente integrabile*;
- (iii) $d\mathcal{I}_{\mathfrak{B}} \subset \mathcal{I}_{\mathfrak{B}}$

DIMOSTRAZIONE. (ii) \implies (i). Sia $p \in M$. Poiché \mathfrak{B}_p ha rango k , possiamo fissare k campi vettoriali $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{B}$ con X_{1p}, \dots, X_{kp} linearmente indipendenti in $T_p M$. Possiamo allora trovare una carta locale (U, x) per cui:

$$X_i = \sum_{j=1}^m a_i^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad \text{con } a_i^j(0) = \delta_i^j \quad \text{per } 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq m.$$

Consideriamo la matrice $k \times k$

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1k}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2k}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1}(x) & a_{k2}(x) & \cdots & a_{kk}(x) \end{pmatrix}.$$

Poiché $A(0) = I_k$, a meno di restringere l'intorno U di p , possiamo supporre che $A(x)$ sia invertibile in U . Sia $B(x) = (b_i^j(x))$ la sua inversa. Allora i campi di vettori

$$Y_i = \sum_{j=1}^k b_i^j(x) X_j = \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{j=k+1}^m c_i^h(x) \frac{\partial}{\partial x^h} \quad (i = 1, \dots, k)$$

generano \mathfrak{B}_q in ogni punto $q \in U$. La condizione (ii) implica che

$$[Y_i, Y_j]_q \in \langle Y_{1q}, \dots, Y_{kq} \rangle \quad \text{per ogni } q \in U.$$

Poiché i campi di vettori

$$Y_1, \dots, Y_k, \frac{\partial}{\partial x^{k+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}$$

definiscono una base di $T_q M$ in ogni punto $q \in U$, ed

$$[Y_i, Y_j]_q \in \left\langle \left[\frac{\partial}{\partial x^{k+1}} \right]_q, \dots, \left[\frac{\partial}{\partial x^m} \right]_q \right\rangle,$$

otteniamo che $[Y_i, Y_j] = 0$ in U per ogni $1 \leq i, j \leq k$.

Dimostriamo ora il seguente

LEMMA XXII.5.8. *Siano Y_1, \dots, Y_k campi di vettori definiti e linearmente indipendenti in tutti i punti di un intorno aperto U di $p \in M$. Se $[Y_i, Y_j] = 0$ in U per ogni $1 \leq i < j \leq k$, allora esiste una carta locale (U', y) con $p \in U' \subset U$ per cui $Y_i = \frac{\partial}{\partial y^i}$ in U' per $i = 1, \dots, k$.*

DIMOSTRAZIONE. Possiamo supporre che (U, x) sia una carta locale in p . Ragioniamo per induzione su k .

Sia $k = 1$. Possiamo supporre che $Y_1|_p = \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \right]_p$. Il campo di vettori Y_1 definisce un gruppo locale a un parametro di diffeomorfismi $x(U) \times \mathbb{R} \supset \tilde{U} \ni (x, t) \rightarrow \Phi(x, t) \in \mathbb{R}^m$, ove \tilde{U} è un intorno di $x(U) \times \{0\}$ in $x(U) \times \mathbb{R}$. Abbiamo $\frac{\partial \Phi^1(x, t)}{\partial t} = 1$ per $x = 0, t = 0$ e quindi, per il teorema delle funzioni implicite, $x = \Phi(0, y^2, \dots, y^m; y^1)$ definisce coordinate in un intorno U' di p in U , per cui $Y_1 = \frac{\partial}{\partial y^1}$.

Sia ora $k > 1$ e supponiamo che il lemma valga per un numero inferiore di campi di vettori linearmente indipendenti che commutano tra loro. Per la prima parte della dimostrazione, possiamo fissare coordinate locali (U, x) tali che:

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}, \quad Y_i = \sum_{j=1}^m a_i^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j} \quad \text{per } 2 \leq j \leq k.$$

Poiché

$$[Y_1, Y_i] = \sum_{j=1}^m \frac{\partial a_i^j(x)}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial x^j} \quad \text{per } 2 \leq j \leq k,$$

la condizione $[Y_1, Y_i] = 0$ implica che i coefficienti a_i^j sono indipendenti da x^1 in un intorno $\{-\epsilon < x^1 < \epsilon\} \subset x(U)$.

Poniamo $Z_j = \sum_{i=2}^m a_i^j(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$ per $2 \leq j \leq k$. Allora $[Z_i, Z_j] = 0$ per $2 \leq i, j \leq k$. Per l'ipotesi induttiva, possiamo trovare un cambiamento delle coordinate x^2, \dots, x^m per cui risulti $Z_j = \frac{\partial}{\partial x^j}$ per $2 \leq j \leq k$. Otteniamo perciò nelle nuove coordinate x^1, \dots, x^m :

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}, \quad Y_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + a_i^1(x) \frac{\partial}{\partial x^1} \quad \text{per } 2 \leq i \leq k.$$

Da $[Y_i, Y_j] = 0$ per ogni $1 \leq i, j \leq k$ otteniamo allora che le a_i^1 sono indipendenti da x^1 e $\partial a_i^1 / \partial x^j = \partial a_j^1 / \partial x^i$ per $2 \leq i, j \leq k$. Possiamo quindi trovare una funzione ϕ , indipendente da x^1 , tale che $a_i^1 = \partial \phi / \partial x^i$ per $2 \leq i \leq k$. Nelle nuove variabili:

$$\begin{cases} y^1 = x^1 + \phi(x^2, \dots, x^m) \\ y^i = x^i \end{cases} \quad \text{per } 2 \leq i \leq m$$

abbiamo $Y_i = \frac{\partial}{\partial y^i}$ per $1 \leq i \leq k$. \square

Completiamo ora la dimostrazione dell'implicazione (ii) \implies (i). Fissata una carta locale (U', y) con centro in p per cui $Y_i = \frac{\partial}{\partial y^i}$, la

$$N = \{y^{k+1} = 0, \dots, y^m = 0\}$$

è una sottovarietà di M , contenuta in U' , contenente p e tale che $T_q N = \mathfrak{B}_q$ per ogni $q \in N$.

(ii) \implies (iii) Se $\alpha \in \Omega^1(M)$ si annulla su tutti i campi di \mathfrak{B} , abbiamo:

$$(*) \quad d\alpha(X, Y) = X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y]) = 0 \quad \forall X, Y \in \mathfrak{B}$$

perché $\alpha(Y) = 0$, $\alpha(X) = 0$ ed anche $\alpha([X, Y]) = 0$ perché $[X, Y] \in \mathfrak{B}$. Si ragiona in modo analogo per forme di grado maggiore di uno.

(iii) \implies (ii) Abbiamo $\mathfrak{B} = \{X \in \mathfrak{X}(M) \mid \alpha(X) = 0, \forall \alpha \in \mathcal{I}_{\mathfrak{B}} \cap \mathfrak{X}^*(M)\}$. L'implicazione è allora una facile conseguenza della (*).

(ii) \implies (i) Segue dal fatto che il commutatore di due campi di vettori tangenti a una sottovarietà N in tutti i suoi punti è ancora tangente alla sottovarietà N in tutti i suoi punti. \square

Osserviamo infine che vale la :

PROPOSIZIONE XXII.5.9. *Se \mathcal{I} è un sistema differenziale in M e $d\mathcal{I} \subset \mathcal{I}$, allora $\mathfrak{B}_{\mathcal{I}}$ è formalmente integrabile.*

DIMOSTRAZIONE. Se $X \in \mathfrak{B}_{\mathcal{I}}$ ed $\alpha \in \mathcal{I}$, allora :

$$L_X(\alpha) = d(\iota_X(\alpha)) + \iota_X(d\alpha) \in \mathcal{I}$$

per l'ipotesi che $d\alpha \in d\mathcal{I} \subset \mathcal{I}$. Poiché la derivata di Lie commuta con la contrazione, abbiamo, per $X, Y \in \mathfrak{B}_{\mathcal{I}}$ ed $\alpha \in \mathcal{I}$:

$$\iota_{[X, Y]}(\alpha) = \iota_{L_X(Y)}(\alpha) = L_X(\iota_Y(\alpha)) - \iota_Y(L_X(\alpha)) \in \mathcal{I}.$$

Questo vale per ogni $\alpha \in \mathcal{I}$ e quindi anche $[X, Y] \in \mathfrak{B}_{\mathcal{I}}$. \square

La coomologia di de Rham sulle varietà

XXIII.1. Definizioni principali

DEFINIZIONE XXIII.1.1. I complessi di spazi vettoriali ed operatori differenziali

$$(23.1.1) \quad \begin{aligned} 0 \rightarrow \Omega^0(M) &\xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \Omega^2(M) \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow \Omega^{q-1}(M) &\xrightarrow{d} \Omega^q(M) \xrightarrow{d} \Omega^{q+1}(M) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

$$(23.1.2) \quad \begin{aligned} 0 \rightarrow \Omega_c^0(M) &\xrightarrow{d} \Omega_c^1(M) \xrightarrow{d} \Omega_c^2(M) \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow \Omega_c^{q-1}(M) &\xrightarrow{d} \Omega_c^q(M) \xrightarrow{d} \Omega_c^{q+1}(M) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

si dicono il *complesso di de Rham* ed il *complesso di de Rham pei supporti compatti*, rispettivamente. Poniamo

$$(23.1.3) \quad \mathcal{Z}^q(M) = \{\alpha \in \Omega^q(M) \mid d\alpha = 0\}, \quad (\text{cicli})$$

$$(23.1.4) \quad \mathcal{B}^q(M) = \{d\alpha \mid \alpha \in \Omega^{q-1}(M)\}, \quad (\text{bordi})$$

$$(23.1.5) \quad \mathcal{Z}_c^q(M) = \{\alpha \in \Omega_c^q(M) \mid d\alpha = 0\}, \quad (\text{cicli a supporto compatto})$$

$$(23.1.6) \quad \mathcal{Z}_c^q(M) = \{d\alpha \mid \alpha \in \Omega_c^{q-1}(M)\}, \quad (\text{bordi a supporto compatto}).$$

I quozienti

$$(23.1.7) \quad H^q(M) = \mathcal{Z}^q(M) / \mathcal{B}^q(M),$$

$$(23.1.8) \quad H_c^q(M) = \mathcal{Z}_c^q(M) / \mathcal{B}_c^q(M)$$

si dicono, rispettivamente, il *q-esimo gruppo di coomologia di de Rham* e il *q-esimo gruppo di coomologia di de Rham a supporti compatti*.

PROPOSIZIONE XXIII.1.2. Sia M una varietà differenziabile di dimensione m e poniamo

$$(23.1.9) \quad H^*(M) = \bigoplus_{q=0}^m H^q(M), \quad H_c^*(M) = \bigoplus_{q=0}^m H_c^q(M).$$

Il prodotto esterno nell'algebra di Grassmann $\Omega^*(M)$ definisce per passaggio al quoziente una struttura di algebra di Grassmann su $H^*(M)$ ed $H_c^*(M)$.

DIMOSTRAZIONE. Basta osservare che

$$(d\alpha) \wedge \beta = d(\alpha \wedge \beta), \quad \forall \alpha \in \Omega^{q_1}(M), \quad \beta \in \Omega^{q_2}(M).$$

Quindi

$$\mathcal{Z}^{q_1}(M) \wedge \mathcal{Z}^{q_2}(M) \subset \mathcal{Z}^{q_1+q_2}(M) \quad \text{e}$$

$$\mathcal{B}^{q_1}(M) \wedge \mathcal{L}^{q_2}(M) + \mathcal{L}^{q_1}(M) \wedge \mathcal{B}^{q_2}(M) \subset \mathcal{B}^{q_1+q_2}(M). \quad \square$$

Se $\alpha \in \mathcal{L}^{q_1}(M)$, $\beta \in \mathcal{L}^{q_2}$ ed $[\alpha]$, $[\beta]$ sono le classi di coomologia da esse definite, poniamo

$$[\alpha] \wedge [\beta] = [\alpha \wedge \beta].$$

XXIII.2. Invarianza omotopica

Siano M , N varietà differenziabili ed $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ un'applicazione differenziabile. Si verifica facilmente che il pull-back e il differenziale sulle forme commutano. Quindi, per passaggio ai quozienti, la f definisce un'applicazione naturale

$$(23.2.1) \quad f^* : H^q(N) \rightarrow H^q(M)$$

ed anche, se f è propria, un'applicazione $f^* : H_c^q(N) \rightarrow H_c^q(M)$.

LEMMA XXIII.2.1. *Sia M una varietà differenziabile, sia I un intervallo di \mathbb{R} , e consideriamo la proiezione $p_M : M \times I \rightarrow M$ e, per ogni $t \in I$, la sezione $s_t : M \ni x \rightarrow (x, t) \in M \times I$. Allora per ogni intero $q \geq 0$ ed ogni $t \in I$,*

$$p_M^* : H^q(M) \rightarrow H^q(M \times I) \quad \text{ed} \quad s_t^* : H^q(M \times I) \rightarrow H^q(M)$$

sono isomorfismi, l'uno inverso dell'altro.

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo $s_t \circ \pi = \text{id}_M$ per ogni $t \in I$, e quindi anche $\pi^* \circ s_t^*$ è l'identità in coomologia:

$$\begin{array}{ccc} H^q(M) & \xrightarrow{p_M^*} & H^q(M \times I) \\ & \searrow & \swarrow s_t^* \\ & H^q(M) & \end{array}$$

In particolare, $s_t^* : H^q(M \times I) \rightarrow H^q(M)$ è surgettiva, e $p_M^* : H^q(M) \rightarrow H^q(M \times I)$ è iniettiva.

Per ogni intero $q \geq 1$ indichiamo con $\Omega_M^q(M \times I)$ lo spazio delle q -forme su $M \times I$ che sono localmente combinazioni lineari di elementi di $p_M^*(\Omega^q(M))$, con coefficienti in $\mathcal{C}^\infty(M \times I)$. Abbiamo

$$\Omega^q(M \times I) = \Omega_M^q(M \times I) \oplus \Omega_M^{q-1}(M \times I) \wedge dt.$$

Sia $f \in \mathcal{L}^q(M \times I)$. Scriviamo $f = f^{(q)} + f^{(q-1)} \wedge dt$ con $f^{(h)} \in \Omega_M^h(M \times I)$. La condizione d'integrabilità $df = 0$ ci dà

$$\begin{cases} d_M s_t^* f^{(h)} = 0 & \forall t \in I, \\ \frac{d}{dt} s_t^* f^{(q)} + (-1)^q d_M s_t^* f^{(q-1)} = 0 & \forall t \in I. \end{cases}$$

Fissato $t_0 \in I$, definiamo una forma $g^{(q-1)} \in \Omega_M^{q-1}(M \times I)$ mediante

$$g^{(q-1)}(x, t) = p_M^* \left(\int_{t_0}^t s_\tau^* f^{(h-1)} d\tau \right)(x, t)$$

Allora $\phi^{(q)} = f - d_{M \times I} g^{(q-1)} \in \mathcal{Z}^q(M \times I) \cap \Omega_M^q(M \times I)$. In particolare, ϕ soddisfa

$$\frac{d}{dt} s_t^* \phi^{(q)} = 0,$$

onde $s_t^* \phi^{(q)}$ è una forma $\psi \in \Omega^q(M)$, indipendente da $t \in I$, ed abbiamo $\phi^{(q)} = p_M^* \psi$. Inoltre

$$d_M \psi = d_M s_t^* \phi^{(q)} = s_t^* d_{M \times I} \phi^{(q)} = 0.$$

Questo dimostra che $p_M^* : H^q(M) \rightarrow H^q(M \times I)$ è anche surgettiva, e completa quindi la dimostrazione. \square

Abbiamo la

PROPOSIZIONE XXIII.2.2. *Due applicazioni differenziabili $f_0, f_1 \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ omotope inducono la stessa applicazione in coomologia.*

DIMOSTRAZIONE. Per ipotesi esiste un'applicazione differenziabile

$$F = (f_t) \in \mathcal{C}^\infty(M \times I, N), \quad \text{con } F(\cdot, 0) = f_0, \quad F(\cdot, 1) = f_1.$$

È $f_t = F \circ s_t$ e quindi $f_t^* = s_t^* \circ F^*$. Per il Lemma XXIII.2.1, per ogni $t \in [0, 1]$, s_t^* inverte p_M^* , ove $p_M : M \times [0, 1] \rightarrow M$ è la proiezione sul primo fattore. Abbiamo perciò, in coomologia, $f_0^* = (p_M^*)^{-1} \circ F^* = f_1^*$. \square

COROLLARIO XXIII.2.3. *Due varietà che abbiano lo stesso tipo d'omotopia hanno la stessa coomologia di de Rham.*

Ricordiamo, che, per varietà differenziabili, possiamo definire tutte le nozioni usuali dell'omotopia richiedendo che tutte le mappe considerate siano differenziabili. Ad esempio, nell'enunciato del corollario, il fatto che due varietà M ed N abbiano lo stesso tipo d'omotopia si può formulare nel modo seguente:

Esistono applicazioni differenziabili $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$, $g \in \mathcal{C}^\infty(N, M)$, $F \in \mathcal{C}^\infty(M \times [0, 1], M)$, $G \in \mathcal{C}^\infty(N \times [0, 1], N)$, tali che

$$\begin{cases} F_0 = g \circ f, & G_0 = f \circ g, \\ F_1 = \text{id}_M, & G_1 = \text{id}_N. \end{cases}$$

XXIII.3. Complessi differenziali

Ricordiamo qui alcuni fatti algebrici generali che ci saranno utili nel seguito.

DEFINIZIONE XXIII.3.1. Un *complesso differenziale* è il dato di uno spazio vettoriale \mathbf{C} su un campo \mathbb{k} , di una sua \mathbb{Z} -gradazione $\mathbf{C} = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} \mathbf{C}^q$ e di un omomorfismo $d_C : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$, omogeneo di grado 1, con $d_C^2 = 0$. Indichiamo il complesso mediante

$$(23.3.1) \quad \dots \rightarrow \mathbf{C}^{q-1} \xrightarrow{d_C} \mathbf{C}^q \xrightarrow{d_C} \mathbf{C}^{q+1} \rightarrow \dots$$

La *coomologia* di (23.3.1) è la somma diretta di spazi vettoriali:

$$(23.3.2) \quad H(\mathbf{C}, d_C) = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} H^q(\mathbf{C}, d_C),$$

$$\text{ove } H^q(\mathbf{C}, d_C) = (\ker d_C \cap \mathbf{C}^q) / d_C(\mathbf{C}^{q-1}).$$

Lo spazio vettoriale $H^q(\mathbf{C}, d_C)$ si dice anche il q -esimo gruppo di coomologia di (23.3.1).

Dati due complessi differenziali (\mathbf{A}, d_A) e (\mathbf{B}, d_B) sullo stesso campo \mathbb{k} , un'applicazione lineare $f : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ si dice un *omomorfismo di complessi* se

$$(23.3.3) \quad f(\mathbf{A}^q) \subset \mathbf{B}^q, \quad \forall q \in \mathbb{Z},$$

$$(23.3.4) \quad f \circ d_A = d_B \circ f.$$

Essa induce un'applicazione naturale

$$(23.3.5) \quad f_* : H^q(\mathbf{A}, d_A) \rightarrow H^q(\mathbf{B}, d_B),$$

che fa corrispondere alla classe $[a_q]$ di $a_q \in \ker d_A \cap \mathbf{A}^q$ la classe $[f(a_q)]$ di $f(a_q) \in \ker d_B \cap \mathbf{B}^q$.

Una successione

$$(23.3.6) \quad \dots \rightarrow \mathbf{V}^{q-1} \xrightarrow{f_{q-1}} \mathbf{V}^q \xrightarrow{f_q} \mathbf{V}^{q+1} \rightarrow \dots$$

di \mathbb{k} -spazi vettoriali su di applicazioni \mathbb{k} -lineari si dice *esatta* se

$$(23.3.7) \quad f_{q-1}(\mathbf{V}^{q-1}) = \ker f_q, \quad \forall q \in \mathbb{Z}.$$

Una successione esatta della forma

$$(23.3.8) \quad 0 \longrightarrow \mathbf{A} \xrightarrow{\alpha} \mathbf{B} \xrightarrow{\beta} \mathbf{C} \longrightarrow 0$$

si dice una *successione esatta corta*.

Se (\mathbf{A}, d_A) , (\mathbf{B}, d_B) e (\mathbf{C}, d_C) sono complessi differenziali di spazi vettoriali su \mathbb{k} e la (23.3.8) è una successione esatta corta di omomorfismi di complessi, possiamo definire delle applicazioni \mathbb{k} -lineari

$$(23.3.9) \quad \Delta_q : H^q(\mathbf{C}, d_C) \rightarrow H^{q+1}(\mathbf{A}, d_A)$$

nel modo seguente.

Sia $c_q \in \mathbf{C}^q$ con $d_C c_q = 0$. Poiché β è surgettiva, esiste un elemento $b_q \in \mathbf{B}^q$ tale che $c_q = \beta(b_q)$. Abbiamo

$$\beta(d_B b_q) = d_C \beta(b_q) = d_C c_q = 0$$

e quindi, per l'esattezza di (23.3.8) esiste uno ed un solo $a_{q+1} \in \mathbf{A}^{q+1}$ tale che

$$\alpha(a_{q+1}) = d_B b_q.$$

Poiché

$$\alpha(d_A a_{q+1}) = d_B \alpha(a_{q+1}) = d_B^2 b_q = 0 \implies d_A a_{q+1} = 0$$

per l'esattezza di (23.3.8), l'elemento a_{q+1} definisce per passaggio al quoziente una classe $[a_{q+1}] \in H^{q+1}(\mathbf{A}, d_A)$.

Siano ora

$$\begin{aligned} c'_q &= c_q + d_C c_{q-1}, \quad \text{con } c_{q-1} \in \mathbf{C}^{q-1}, \\ b'_q &\in \mathbf{B}^q \quad \text{con } \beta(b'_q) = c'_q = c_q + d_C c_{q-1}, \\ a'_{q+1} &\in \mathbf{A}^{q+1} \quad \text{con } \alpha(a'_{q+1}) = d_B b'_q. \end{aligned}$$

Utilizzando ancora l'esattezza di (23.3.8), otteniamo

$$\begin{aligned} & \exists b_{q-1} \in \mathbf{B}^{q-1} \text{ tale che} \\ \beta(b'_q - b_q) &= c'_q - c_q = d_C c_{q-1} = d_C \beta(b_{q-1}) = \beta(d_B b_{q-1}) \\ \implies \exists a_q \in \mathbf{A}^q & \text{ tale che } b'_q - b_q - d_B b_{q-1} = \alpha(a_{q-1}) \\ \implies \alpha(a'_{q+1} - a_{q+1}) &= d_B b'_{q+1} - d_B b_q \\ &= d_B(b'_q - b_q - d_B b_{q-1}) \\ &= d_B \alpha(a_q) = \alpha(d_A a_q) \\ \implies a'_{q+1} - a_{q+1} &= d_A a_q. \end{aligned}$$

Quindi la Δ_q risulta ben definita da

$$(23.3.10) \quad \Delta([c_q]) = [a_{q+1}].$$

Abbiamo il

TEOREMA XXIII.3.2. *Se (23.3.8) è una successione esatta lunga di complessi differenziali di spazi vettoriali su \mathbb{k} , allora abbiamo una successione esatta lunga*

$$(23.3.11) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & & \dots & \longrightarrow & H^{q-1}(\mathbf{B}, d_B) & \xrightarrow{\beta_*} & H^{q-1}(\mathbf{C}, d_C) \\ \Delta_{q-1} & \longrightarrow & H^q(\mathbf{A}, d_A) & \xrightarrow{\alpha_*} & H^q(\mathbf{B}, d_B) & \xrightarrow{\beta_*} & H^q(\mathbf{C}, d_C) \\ \Delta_q & \longrightarrow & H^{q+1}(\mathbf{A}, d_A) & \longrightarrow & \dots & & \end{array}$$

Nello studio dei gruppi di coomologia dei complessi, è spesso utile il seguente lemma algebrico:

TEOREMA XXIII.3.3 (Lemma dei cinque). *Consideriamo un diagramma commutativo di gruppi abeliani e di omomorfismi, con righe e colonne esatte:*

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{A}_1 & \xrightarrow{f_1} & \mathbf{A}_2 & \xrightarrow{f_2} & \mathbf{A}_3 & \xrightarrow{f_3} & \mathbf{A}_4 & \xrightarrow{f_4} & \mathbf{A}_5 \\ \alpha_1 \downarrow & & \alpha_2 \downarrow & & \alpha_3 \downarrow & & \alpha_4 \downarrow & & \alpha_5 \downarrow \\ \mathbf{B}_1 & \xrightarrow{g_1} & \mathbf{B}_2 & \xrightarrow{g_2} & \mathbf{B}_3 & \xrightarrow{g_3} & \mathbf{B}_4 & \xrightarrow{g_4} & \mathbf{B}_5 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

Abbiamo supposto cioè che α_1 sia surgettiva, α_2 e α_4 siano isomorfismi ed α_5 sia iniettiva. Allora α_3 è un isomorfismo.

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo che α_3 è iniettiva. Sia $a_3 \in \mathbf{A}_3$, con $\alpha_3(a_3) = 0$. Abbiamo

$$\begin{aligned} \alpha_4(f_3(a_3)) &= g_3(\alpha_3(a_3)) = 0 \implies f_3(a_3) = 0 \implies \exists a_2 \in \mathbf{A}_2 \text{ t.c. } a_3 = f_2(a_2) \\ \implies \alpha_3(f_2(a_2)) &= g_2(\alpha_2(a_2)) = 0 \implies \exists b_1 \in \mathbf{B}_1 \text{ t.c. } \alpha_2(a_2) = g_1(b_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies \exists a_1 \in \mathbf{A}_1 \text{ t.c. } \alpha_1(a_1) = b_1, &\implies \alpha_2(a_2) = g_1(\alpha_1(a_1)) = \alpha_2(f_1(a_1)) \\ \implies a_2 = f_1(a_1) &\implies a_3 = f_2 \circ f_1(a_1) = 0. \end{aligned}$$

Dimostriamo ora che α_3 è surgettiva. Abbiamo:

$$\begin{aligned} \exists a_4 \in \mathbf{A}_4 \text{ t.c. } g_3(b_3) = \alpha_4(a_4) &\implies 0 = g_4 \circ g_3(b_3) = g_4 \circ \alpha_4(a_4) = \alpha_5 \circ f_4(a_4) \\ \implies f_4(a_4) = 0 &\implies \exists a_3 \in \mathbf{A}_3 \text{ t.c. } f_3(a_3) = a_4 \\ \implies g_3(b_3) = \alpha_4 \circ f_3(a_3) = g_3(\alpha_3(a_3)) &\implies g_3(b_3 - \alpha_3(a_3)) = 0 \\ \implies \exists b_2 \in \mathbf{B}_2 \text{ t.c. } g_2(b_2) = b_3 - \alpha_3(a_3) &\implies \exists a_2 \in \mathbf{A}_2 \text{ t.c. } \alpha_2(a_2) = b_2 \\ \implies b_3 - \alpha_3(a_3) = g_2 \circ \alpha_2(a_2) = \alpha_3(f_2(a_2)) &\implies b_3 = \alpha_3(a_3 + f_2(a_2)). \end{aligned}$$

□

Dalla dimostrazione segue che

TEOREMA XXIII.3.4 (Lemmi dei quattro). *Consideriamo un diagramma commutativo di gruppi abeliani e di omomorfismi, con righe esatte:*

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathbf{A}_1 & \xrightarrow{f_1} & \mathbf{A}_2 & \xrightarrow{f_2} & \mathbf{A}_3 & \xrightarrow{f_3} & \mathbf{A}_4 \\ \alpha_1 \downarrow & & \alpha_2 \downarrow & & \alpha_3 \downarrow & & \alpha_4 \downarrow \\ \mathbf{B}_1 & \xrightarrow{g_1} & \mathbf{B}_2 & \xrightarrow{g_2} & \mathbf{B}_3 & \xrightarrow{g_3} & \mathbf{B}_4 \\ & & \downarrow & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$$

Se α_1 è surgettiva ed α_2, α_4 iniettive, allora α_3 è iniettiva.

Consideriamo un diagramma commutativo di gruppi abeliani e di omomorfismi, con righe esatte:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 0 & & \\ & & & & \downarrow & & \\ \mathbf{A}_2 & \xrightarrow{f_2} & \mathbf{A}_3 & \xrightarrow{f_3} & \mathbf{A}_4 & \xrightarrow{f_4} & \mathbf{A}_5 \\ \alpha_2 \downarrow & & \alpha_3 \downarrow & & \alpha_4 \downarrow & & \alpha_5 \downarrow \\ \mathbf{B}_2 & \xrightarrow{g_2} & \mathbf{B}_3 & \xrightarrow{g_3} & \mathbf{B}_4 & \xrightarrow{g_4} & \mathbf{B}_5 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

Se α_5 è iniettiva ed α_2, α_4 surgettive, allora α_3 è surgettiva.

XXIII.4. Le successioni di Mayer-Vietoris

La successione di Mayer-Vietoris¹ è uno degli strumenti fondamentali per il calcolo dei gruppi di coomologia. Essa è una conseguenza del Teorema XXIII.3.2 e del

LEMMA XXIII.4.1. *Siano A, B due aperti di una varietà M . Allora, per ogni intero q , la successione corta*

$$(23.4.1) \quad 0 \rightarrow \Omega^q(A \cup B) \xrightarrow{\alpha} \Omega^q(A) \oplus \Omega^q(B) \xrightarrow{\beta} \Omega^q(A \cap B) \rightarrow 0,$$

ove

$$(23.4.2) \quad \begin{cases} \alpha(f) = f|_A \oplus f|_B & \forall f \in \Omega^q(A \cup B), \\ \beta(g \oplus h) = g|_{A \cap B} - h|_{A \cap B} & \forall g \in \Omega^q(A), h \in \Omega^q(B), \end{cases}$$

è esatta.

DIMOSTRAZIONE. L'iniettività di α e il fatto che l'immagine di α sia uguale al nucleo di β sono evidenti. La surgettività di β segue dall'esistenza di una partizione dell'unità su $A \cup B$ subordinata al ricoprimento $\{A, B\}$. Se $\phi_A, \phi_B \in \mathcal{C}^\infty(A \cup B)$ e $\text{supp } \phi_A \subset A$, $\text{supp } \phi_B \subset B$, e $\phi_A + \phi_B = 1$ su $A \cup B$, allora, data $f \in \Omega^q(A \cap B)$, possiamo definire

$$f_A = \begin{cases} \phi_B f & \text{su } A \cap B, \\ 0 & \text{su } A \setminus B, \end{cases}, \quad f_B = \begin{cases} -\phi_A f & \text{su } A \cap B, \\ 0 & \text{su } B \setminus A. \end{cases}$$

Allora $f_A \in \Omega^q(A)$, $f_B \in \Omega^q(B)$ ed $f_A - f_B = f$ su $A \cap B$. □

Otteniamo quindi, per il Teorema XXIII.3.2, il

TEOREMA XXIII.4.2 (Mayer-Vietoris). *Se A, B sono due aperti di una varietà differenziabile M abbiamo una successione esatta lunga*

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H^{q-1}(A) \oplus H^{q-1}(B) & \longrightarrow & H^{q-1}(A \cap B) & & \\ \longrightarrow & H^q(A \cup B) & \longrightarrow & H^q(A) \oplus H^q(B) & \longrightarrow & H^q(A \cap B) & \\ \longrightarrow & H^{q+1}(A \cup B) & \longrightarrow & H^{q+1}(A) \oplus H^{q+1}(B) & \longrightarrow & \dots & \end{array}$$

DIMOSTRAZIONE. Il risultato segue dal Teorema ???. L'applicazione Δ_q si può descrivere nel modo seguente. Se $f \in \mathcal{L}^q(A \cap B)$ ed $f_A \in \Omega^q(A)$, $f_B \in \Omega^q(B)$ sono forme tali che $f = f_A - f_B$ su $A \cap B$, allora

$$(23.4.3) \quad g = \begin{cases} df_A & \text{su } A, \\ df_B & \text{su } B, \end{cases}$$

¹Leopold Vietoris (Radkersburg, 4 giugno 1891 Innsbruck, 9 aprile 2002), matematico austriaco. I suoi principali contributi sono nel campo della topologia e della storia della matematica.

Meinhard E. Mayer (nato nel 1929 in Romania), ha insegnato a partire dal 1966 presso l'Università della California ad Irvine. I suoi interessi principali sono stati i metodi geometrici delle teorie di gauge e le applicazioni delle ondelette alla turbolenza. Ha contribuito alla teoria dei bosoni-vettori (W e Z bosoni) e dell'unificazione elettro-debole, che sarebbe divenuta poi il modello standard.

definisce un elemento di $\mathcal{L}^{q+1}(A \cup B)$, la cui classe di coomologia $[g]$ in $H^{q+1}(A \cup B)$ è l'immagine mediante Δ_q della classe $[f]$ di f in $H^q(A \cap B)$. \square

ESEMPIO XXIII.4.3. Consideriamo la circonferenza $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Siano $A = S^1 \setminus \{-i\}$, $B = S^1 \setminus \{i\}$. Allora A e B sono diffeomorfi ad \mathbb{R} , $A \cap B$ all'unione disgiunta di due copie di \mathbb{R} . Risulterà quindi:

$$H^q(A) \simeq H^q(B) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } q = 0, \\ 0 & \text{se } q \neq 0, \end{cases} \quad H^q(A \cap B) = \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \text{se } q = 0, \\ 0 & \text{se } q \neq 0. \end{cases}$$

Dalla successione di Mayer-Vietoris ricaviamo allora che $H^q(S^1) = 0$ se $q \neq 0, 1$. Abbiamo poi

$$0 \longrightarrow H^0(S^1) \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \longrightarrow H^1(S^1) \longrightarrow 0.$$

È $H^0(S^1) \simeq \mathbb{R}$, perché S^1 è connesso per archi. Quindi la dimensione dello spazio vettoriale $H^1(S^1)$ si ricava da

$$\begin{aligned} 0 &= \dim_{\mathbb{R}} H^0(S^1) - \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} + \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 - \dim_{\mathbb{R}} H^1(S^1) \\ &= 1 - 2 + 2 - \dim_{\mathbb{R}} H^1(S^1). \end{aligned}$$

È perciò $H^1(S^1) \simeq \mathbb{R}$.

ESEMPIO XXIII.4.4. Consideriamo la sfera

$$S^n = \{x = (x^0, x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}, \quad n > 1.$$

Siano $A = \{x \in S^n \mid x^0 > -1\}$, $B = \{x \in S^n \mid x^0 < 1\}$. Poiché A e B sono diffeomorfi ad \mathbb{R}^n , ed $A \cap B$ è connesso, otteniamo dalla successione di Mayer-Vietoris gli isomorfismi

$$H^q(S^n) \simeq H^{q-1}(A \cap B), \quad \text{se } q \neq 0, 1,$$

e la successione esatta

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H^0(S^n) \simeq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \longrightarrow H^0(A \cap B) \simeq \mathbb{R} \\ &\longrightarrow H^1(S^n) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Dalla successione esatta ricaviamo che $H^1(S^n) = 0$ se $n > 1$. Infine, $A \cap B$ si retrae per deformazione su $S^{n-1} = \{x \in S^n \mid x^0 = 0\}$. Vedremo che questo dà $H^q(A \cap B) \simeq H^q(S^{n-1})$ per ogni $q \in \mathbb{Z}$. Ricaviamo così per ricorrenza, utilizzando l'esempio precedente, che

$$H^q(S^n) \simeq \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } q = 0, n, \\ 0 & \text{se } q \neq 0, n. \end{cases}$$

ESEMPIO XXIII.4.5. Sia Σ un iperpiano dello spazio proiettivo reale $\mathbb{R}P^n$. Possiamo supporre che $\Sigma = \{x^0 = 0\}$. Allora $A = \{(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 > 0\}$ è lo spazio totale di un intorno tubolare di Σ in $\mathbb{R}P^n$. Sia $B = \mathbb{R}P^n \setminus \Sigma$. Abbiamo allora

$$\begin{aligned} A &= \{(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 > 0\} \simeq \mathbb{R}P^{n-1} \times \mathbb{R}, \\ B &= \{x_0 \neq 0\} \simeq \mathbb{R}^n, \\ A \cup B &= \mathbb{R}P^n, \end{aligned}$$

$$A \cap B \simeq \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Abbiamo le equivalenze omotopiche $A \simeq \mathbb{R}P^{n-1}$, $B \simeq \{0\}$, $A \cap B \equiv S^{n-1}$.

Abbiamo perciò la successione esatta in coomologia

$$\begin{aligned} \dots &\longrightarrow H^{q-1}(S^{n-1}) \longrightarrow H^q(\mathbb{R}P^n) \longrightarrow H^q(\mathbb{R}P^{n-1}) \oplus H^q(\{0\}) \\ &\longrightarrow H^q(S^{n-1}) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

Per $n = 2$ otteniamo la successione esatta

$$0 \longrightarrow H^1(\mathbb{R}P^2) \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow H^2(\mathbb{R}P^2) \longrightarrow 0.$$

Poiché $\mathbb{R}P^2$ è semplicemente connesso, $H^1(\mathbb{R}P^2) = 0$ e quindi anche $H^2(\mathbb{R}P^2) = 0$.

Si dimostra allora per ricorrenza che

$$H^q(\mathbb{R}P^{2m+1}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } q = 0, 2m+1, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad H^q(\mathbb{R}P^{2m}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } q = 0, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

ESEMPIO XXIII.4.6. Siano m, n interi con $1 \leq m < n$ e sia Σ un m -piano di $\mathbb{R}P^n$. Sia $M = \mathbb{R}P^n \setminus \Sigma$. Scegliamo un $(n-m-1)$ -piano Σ' di $\mathbb{R}P^n$ con $\Sigma \cap \Sigma' = \emptyset$. Per ogni $q \in M$, l' $(m+1)$ -piano per q e Σ interseca Σ' in uno ed un solo punto $p = \pi(q)$. Poiché $(q\Sigma) \setminus \Sigma \simeq \mathbb{R}^{m+1}$, la $\tau = (M \xrightarrow{\pi} \Sigma')$ definisce un intorno tubolare di Σ' in $\mathbb{R}P^n$, con spazio totale M . L' $(n-m-1)$ -piano Σ' è quindi un retratto di deformazione di M . Otteniamo perciò

$$H^q(\mathbb{R}P^n \setminus \mathbb{R}P^m) \simeq H^q(\mathbb{R}P^{n-m-1}), \quad \forall q > 0.$$

Ad esempio,

$$\begin{aligned} H^q(\mathbb{R}P^3 \setminus \mathbb{R}P^1) &= \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } q = 0, 1, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \\ H^q(\mathbb{R}P^5 \setminus \mathbb{R}P^1) &= \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } q = 0, 3, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \\ H^q(\mathbb{R}P^5 \setminus \mathbb{R}P^2) &= \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } q = 0, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \\ H^q(\mathbb{R}P^5 \setminus \mathbb{R}P^3) &= \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } q = 0, 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \end{aligned}$$

ESEMPIO XXIII.4.7. Consideriamo ora lo spazio proiettivo $\mathbb{C}P^n$. Sia $\Sigma = \{z^0 = 0\}$ un suo iperpiano. Allora $A = \{|z^1|^2 + \dots + |z^n|^2 > 0\}$ è lo spazio totale di un suo intorno tubolare in $\mathbb{C}P^n$. Poniamo $B = \mathbb{C}P^n \setminus \Sigma$. Allora

$$\begin{aligned} A &= \{|z^1|^2 + \dots + |z^n|^2 > 0\} \simeq \mathbb{C}P^{n-1}, \\ B &= \mathbb{C}P^n \setminus \Sigma = \mathbb{C}^n \simeq \{0\}, \\ A \cup B &= \mathbb{C}P^n, \\ A \cap B &= \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \simeq S^{2n-1}, \end{aligned}$$

ove \simeq indica equivalenza omotopica. Otteniamo allora la successione esatta:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^1(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) & \longrightarrow & H^1(\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}) & \longrightarrow & H^1(S^{2n-1}) \\ & & \longrightarrow & & \longrightarrow & & \longrightarrow H^{q-1}(S^{2n-1}) \\ & & \longrightarrow & & \longrightarrow & & \longrightarrow H^q(S^{2n-1}) \\ & & \longrightarrow & & \longrightarrow & & \longrightarrow \dots \end{array}$$

Otteniamo allora

$$H^q(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) \simeq H^q(\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}), \quad \forall q \leq 2n-2, \quad H^{2n-1}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) = 0, \quad H^{2n}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) = \mathbb{R}.$$

Ricaviamo perciò, per ricorrenza,

$$H^q(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } q = 0, 2, \dots, 2n, \\ 0 & \text{se } q = 1, 3, \dots, 2n-1. \end{cases}$$

ESEMPIO XXIII.4.8. Siano m, n due interi con $1 \leq m < n$ e Σ un m -piano proiettivo complesso in $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$. Se scegliamo un $(n-m-1)$ -piano proiettivo complesso Σ' che non intersechi Σ , l'applicazione che fa corrispondere ad ogni punto q di $M = \mathbb{C}\mathbb{P}^n \setminus \Sigma$ l'unico punto $p = \pi(q)$ di Σ' in cui l' $(m+1)$ -piano proiettivo complesso per Σ e q interseca Σ' definisce un intorno tubolare $\tau = (M \xrightarrow{\pi} \Sigma')$ di Σ' in $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$. Otteniamo perciò

$$H^q(\mathbb{C}\mathbb{P}^n \setminus \mathbb{C}\mathbb{P}^m) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } q = 0, 2, \dots, 2(n-m-1), \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

ESEMPIO XXIII.4.9. Siano M ed N due sottovarietà proprie connesse di \mathbb{R}^n che si intersechino in un punto p_0 . Possiamo scegliere due loro intorni tubolari con spazi totali A e B la cui intersezione $A \cap B$ sia un intorno contrattile di p_0 . Dalla successione esatta di Mayer-Vietoris possiamo allora dedurre che

$$H^0(A \cap B) = \mathbb{R}, \quad H^q(A \cup B) = H^q(A) \oplus H^q(B), \quad \text{per ogni } q > 0.$$

ESEMPIO XXIII.4.10. Siano M una varietà connessa di dimensione $m \geq 2$, $p_0 \in M$ ed $N = M \setminus \{p_0\}$. Allora $H^q(M) \simeq H^q(N)$ per ogni $q \neq m, m-1$. Infatti, se A è un intorno contrattile di p_0 in M , l'intersezione $A \cap N$ è omotopicamente equivalente alla sfera S^{m-1} . La successione di Mayer-Vietoris ci dà quindi l'isomorfismo desiderato se $1 \leq q \leq m-2$. Abbiamo poi la successione esatta

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^{m-1}(M) & \longrightarrow & H^{m-1}(N) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & \longrightarrow & & \longrightarrow & & \longrightarrow 0. \end{array}$$

Una varietà connessa di dimensione m ha m -esimo gruppo di coomologia di de Rham uguale ad \mathbb{R} se compatta ed orientabile, uguale a 0 altrimenti. Avremo quindi $H^{m-1}(M) \simeq H^{m-1}(N)$ se M è compatta e orientabile, $H^{m-1}(N) \simeq H^{m-1}(M) \oplus \mathbb{R}$ altrimenti.

ESEMPIO XXIII.4.11. Siano M_1, M_2 due varietà connesse di dimensione m . Allora

$$H^q(M_1 \# M_2) = H^q(M_1) \oplus H^q(M_2) \quad \text{se } q \neq m-1, m.$$

ESEMPIO XXIII.4.12. Introduciamo su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ la relazione di equivalenza

$$x \sim y \iff y = 2^k x, \text{ con } k \in \mathbb{Z}.$$

Allora $M = (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) / \sim$ ha un'unica struttura di varietà differenziabile di dimensione n per cui la proiezione nel quoziente $\pi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow M$ sia un diffeomorfismo locale. Per $n = 1$ la M è diffeomorfa ad S^1 e per $n = 2$ al toro $T^2 = S^1 \times S^1$. Supponiamo quindi nel seguito che $n \geq 3$.

Possiamo ricoprire M con i due aperti

$$A = \pi(\{1 < |x| < 2\}), \quad B = \pi(\{\frac{3}{2} < |x| < 3\}).$$

Allora A e B sono omotopicamente equivalenti ad S^{n-1} ed $A \cap B$ all'unione disgiunta di due copie di S^{n-1} . Otteniamo allora la successione esatta di Mayer-Vietoris:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \\ & & \longrightarrow & H^1(M) & \longrightarrow & 0 & \\ 0 & \longrightarrow & H^q(M) & \longrightarrow & 0 & \text{ per } 2 \leq q \leq m-2 & \\ 0 & \longrightarrow & H^{m-1}(M) & \longrightarrow & \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \\ & & \longrightarrow & H^m(M) = \mathbb{R} & \longrightarrow & 0. & \end{array}$$

Otteniamo perciò

$$H^q(M) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } q = 0, 1, (m-1), m, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Costruiamo ora la successione esatta di Mayer-Vietoris per le forme a supporto compatto.

LEMMA XXIII.4.13. *Siano A, B due aperti della varietà differenziabile M . Allora, per ogni intero non negativo q abbiamo la successione esatta*

$$(23.4.4) \quad 0 \rightarrow \Omega_c^q(A \cap B) \xrightarrow{\alpha} \Omega_c^q(A) \oplus \Omega_c^q(B) \xrightarrow{\beta} \Omega_c^q(A \cup B) \rightarrow 0$$

ove

$$\begin{cases} \alpha(f) = f \oplus f & \forall f \in \Omega_c^q(A \cap B), \\ \beta(f \oplus g) = f - g & \forall f \in \Omega_c^q(A), g \in \Omega_c^q(A \cap B). \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. L'iniettività di α e il fatto che l'immagine di α sia il nucleo di β sono ovvii. La surgettività di β è conseguenza della partizione dell'unità. Se $\phi_A, \phi_B \in \mathcal{C}^\infty(A \cup B)$ e $\text{supp } \phi_A \subset A$, $\text{supp } \phi_B \subset B$, e $\phi_A + \phi_B = 1$ su $A \cup B$, allora, data $f \in \Omega_c^q(A \cup B)$, possiamo definire

$$f_A = \phi_A f, \quad f_B = \phi_B f.$$

Allora $f_A \in \Omega_c^q(A)$, $f_B \in \Omega_c^q(B)$ ed $f_A - f_B = f$ su $A \cup B$. □

Come conseguenza abbiamo

TEOREMA XXIII.4.14 (Mayer-Vietoris per i supporti compatti). *Siano A, B due aperti della varietà differenziabile M . Abbiamo allora una successione esatta lunga per la coomologia di de Rham a supporti compatti:*

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_c^{q-1}(A) \oplus H_c^{q-1}(B) & \longrightarrow & H_c^{q-1}(A \cup B) & & \\ \longrightarrow & H_c^q(A \cap B) & \longrightarrow & H_c^q(A) \oplus H_c^q(B) & \longrightarrow & H_c^q(A \cup B) & \\ \longrightarrow & H_c^{q+1}(A \cap B) & \longrightarrow & H_c^{q+1}(A) \oplus H_c^{q+1}(B) & \longrightarrow & \cdots & \end{array}$$

XXIII.5. La dualità di Poincaré

DEFINIZIONE XXIII.5.1. Sia M una varietà differenziabile di dimensione m . Un *buon ricoprimento* di M è un suo ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_i\}$ per cui ogni intersezione non vuota $U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_k}$ sia diffeomorfa ad \mathbb{R}^m .

Introducendo una metrica Riemanniana su M e scegliendo intorno aperti convessi (vedi il Teorema VIII.2.5 del Capitolo XII) possiamo dimostrare il

TEOREMA XXIII.5.2. *Ogni varietà differenziabile M ammette un buon ricoprimento. Ogni ricoprimento aperto di una varietà differenziabile M ammette un buon raffinamento.*

TEOREMA XXIII.5.3. *Se una varietà M ammette un buon ricoprimento finito, allora sia la sua coomologia di de Rham che la sua coomologia di de Rham coi supporti compatti hanno dimensione finita. Se inoltre M è una varietà differenziabile orientabile di dimensione m , la forma bilineare*

$$(23.5.1) \quad (f, g) \rightarrow \int_M f \wedge g, \quad \text{per } f \in \Omega^q(M), g \in \Omega_c^{m-q}(M)$$

definisce per passaggio al quoziente un accoppiamento di dualità tra $H^q(M)$ ed $H_c^{m-q}(M)$.

DIMOSTRAZIONE. Ragionando per induzione sulla cardinalità di un buon ricoprimento, ed utilizzando le successioni esatte di Mayer-Vietoris, si dimostra facilmente la finitezza dei gruppi di coomologia di de Rham, sia con supporti chiusi che con supporti compatti.

Supponiamo ora che M sia orientabile, in modo da poter definire senza ambiguità l'integrale su M delle n -forme. Se f e g sono chiuse, ed una delle due esatta, abbiamo

$$\int_M f \wedge g = 0.$$

Se infatti $f = du$, con $u \in \Omega^{q-1}(M)$, allora $f \wedge g = d(u \wedge g)$, con $u \wedge g \in \Omega_c^{m-1}(M)$, e quindi l'integrale (23.5.1) è nullo per la formula di Stokes. Se $g = dv$ con $v \in \Omega_c^{q-1}(M)$, allora ancora $w = (-1)^q f \wedge v \in \Omega_c^{m-1}(M)$ e l'integrale (23.5.1) è nullo per la formula di Stokes perché $f \wedge g = dw$.

Dimostriamo ora che (23.5.1) definisce un accoppiamento di dualità tra i gruppi di coomologia. Osserviamo che questo è vero se $M = \mathbb{R}^m$. Possiamo quindi ragionare per induzione, supponendolo vero per varietà M che ammettano un buon

ricoprimento che consista di al più un certo numero $\ell \geq 1$ di aperti, e dimostrandolo quindi per varietà che ammettano un buon ricoprimento con $\ell + 1$ aperti.

Siamo U, V due aperti di M e definiamo

$$\begin{cases} \mathbf{A}_1 = H^q(U \cap V), \\ \mathbf{A}_2 = H^q(U) \oplus H^q(V), \\ \mathbf{A}_3 = H^q(U \cup V), \\ \mathbf{A}_4 = H^{q+1}(U \cap V), \\ \mathbf{A}_5 = H^{q+1}(U) \oplus H^{q+1}(V), \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{B}_1 = (H_c^{m-q}(U \cap V))^*, \\ \mathbf{B}_2 = (H_c^{m-q}(U))^* \oplus (H_c^{m-q}(V))^*, \\ \mathbf{B}_3 = (H_c^q(U \cup V))^*, \\ \mathbf{B}_4 = (H_c^{m-q-1}(U \cap V))^*, \\ \mathbf{B}_5 = (H_c^{m-q-1}(U))^* \oplus (H_c^{m-q-1}(V))^*, \end{cases}$$

ove V^* denota il duale dello spazio vettoriale di dimensione finita V . La (23.5.1) definisce le frecce verticali del diagramma commutativo a righe esatte

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbf{A}_1 & \xrightarrow{f_1} & \mathbf{A}_2 & \xrightarrow{f_2} & \mathbf{A}_3 & \xrightarrow{f_3} & \mathbf{A}_4 & \xrightarrow{f_4} & \mathbf{A}_5 \\ \alpha_1 \downarrow & & \alpha_2 \downarrow & & \alpha_3 \downarrow & & \alpha_4 \downarrow & & \alpha_5 \downarrow \\ \mathbf{B}_1 & \xrightarrow{g_1} & \mathbf{B}_2 & \xrightarrow{g_2} & \mathbf{B}_3 & \xrightarrow{g_3} & \mathbf{B}_4 & \xrightarrow{g_4} & \mathbf{B}_5, \end{array}$$

ove le g_i sono ottenute per dualità da quelle della successione esatta di Mayer-Vietoris per i supporti compatti. Se M ammette un buon ricoprimento consistente di $\ell + 1$ aperti U_0, U_1, \dots, U_ℓ e scegliamo $U = U_0, V = \bigcup_{j=1}^\ell U_j$, allora U, V ed $U \cap V$ ammettono buoni ricoprimenti con al più ℓ aperti. Per l'ipotesi induttiva ne segue che $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5$ sono isomorfismi e dunque, per il lemma dei cinque, anche α_3 è un isomorfismo, che identifica $H^q(M) = H^q(U \cup V)$ al duale di $H_c^{m-q}(M)$. \square

COROLLARIO XXIII.5.4. *Sia M una varietà differenziabile orientabile che ammette un buon ricoprimento finito.*

Sia $\alpha \in \Omega^q(M)$. Condizione necessaria e sufficiente affinché $\alpha \in \mathcal{B}^q(M)$ è che

$$(23.5.2) \quad \int_M \alpha \wedge \eta = 0, \quad \forall \eta \in \mathcal{L}_c^{m-q}(M).$$

Sia $\alpha \in \Omega_c^q(M)$. Condizione necessaria e sufficiente affinché $\alpha \in \mathcal{B}_c^q(M)$ è che

$$(23.5.3) \quad \int_M \alpha \wedge \eta = 0, \quad \forall \eta \in \mathcal{L}^{m-q}(M).$$

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che $\alpha \in \Omega^q(M)$ soddisfi la (23.5.3). Abbiamo in particolare

$$\int_M (d\alpha) \wedge \theta = (-1)^{q+1} \int_M \alpha \wedge d\theta = 0, \quad \forall \theta \in \Omega_c^{m-q+1}(M),$$

e quindi $\alpha \in \mathcal{L}^q(M)$. Se fosse $[\alpha] \neq 0$ in $H^q(M)$, per il Teorema XXIII.5.3 potremmo trovare una $\eta \in \mathcal{L}_c^{m-q}(M)$ con

$$\int_M \alpha \wedge \eta \neq 0.$$

Quindi $\alpha \in \mathcal{B}^q(M)$. La dimostrazione nel caso delle forme a supporto compatto è analoga. \square

In particolare abbiamo:

TEOREMA XXIII.5.5. *Se M è una varietà differenziabile compatta e orientabile di dimensione m , allora*

$$(23.5.4) \quad \dim_{\mathbb{R}} H^q(M) = \dim_{\mathbb{R}} H^{m-q}(M) < +\infty$$

e la (23.5.1) definisce un accoppiamento di dualità tra $H^q(M)$ ed $H^{m-q}(M)$. In particolare, per una varietà differenziabile connessa, compatta ed orientabile di dimensione m è $H^m(M) \simeq \mathbb{R}$.

OSSERVAZIONE XXIII.5.6. L'enunciato non vale, in generale, nel caso di varietà non orientabili. Infatti, per uno spazio proiettivo reale di dimensione pari $2m$ abbiamo

$$\mathbb{R} = H^0(\mathbb{R}P^{2m}) \neq H^{2m}(\mathbb{R}P^{2m}) = 0.$$

ESEMPIO XXIII.5.7. Sia M una superficie orientabile di genere g . Possiamo ottenere M da un poligono chiuso P di $4g$ identificando a coppie i suoi lati secondo la formula $\partial P = a_1 b_1^{-1} a_1 b_1^{-1} \cdots a_g b_g^{-1} a_g b_g^{-1}$. Sia $\pi : P \rightarrow M$ la proiezione nel quoziente. Utilizziamo un ricoprimento di M mediante i due aperti $A = \pi(\mathring{P}) \simeq \mathbb{R}^2$, $B = \pi(P \setminus \{p_0\})$ per un punto $p_0 \in \mathring{P}$. L'intersezione $A \cap B$ è omotopicamente equivalente ad S^1 . Per l'Esempio XXIII.4.9, poiché B si retrae su un bouquet di $2g$ circonferenze, otteniamo che $H^1(B) = \underbrace{H^1(S^1) \oplus \cdots \oplus H^1(S^1)}_{2g \text{ volte}} = \mathbb{R}^{2g}$. Per Mayer-

Vietoris abbiamo allora la successione esatta

$$0 \longrightarrow H^1(M) \longrightarrow \mathbb{R}^{2g} \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow H^2(M) \longrightarrow 0.$$

Per la dualità di Poincaré abbiamo $H^2(M) \simeq H^0(M) = \mathbb{R}$ e quindi $H^1(M) = \mathbb{R}^{2g}$.

OSSERVAZIONE XXIII.5.8. I gruppi di coomologia $H^q(M)$ hanno in generale, anche quando non siano di dimensione finita, una struttura naturale di spazi di Fréchet. Se M è orientabile, i gruppi $H_c^{m-q}(M)$ sono ancora i loro duali topologici, con opportuna topologia di spazi vettoriali topologici. L'accoppiamento di dualità è sempre definito dalla (23.5.1).

XXIII.6. Grado di un'applicazione

Dal Teorema XXIII.5.5 segue:

TEOREMA XXIII.6.1. *Siano M, N due varietà connesse, compatte, orientabili, della stessa dimensione m . Se $f : M \rightarrow N$ è un'applicazione differenziabile, esiste un numero intero k tale che*

$$(23.6.1) \quad \int_M f^* \phi = k \int_N \phi, \quad \forall \phi \in \Omega^m(N).$$

DEFINIZIONE XXIII.6.2. Il numero intero k nella formula (23.6.1) si dice il *grado* dell'applicazione f e si denota con $\deg(f)$.

Con una dimostrazione analoga a quella del Teorema XXI.6.2 del Capitolo XXI possiamo dimostrare

TEOREMA XXIII.6.3. *Siano M, N due varietà connesse, compatte, orientabili, della stessa dimensione m ed $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$. Allora il grado di f è la somma algebrica delle segnature di $df(p)$, per p che varia nella controimmagine $f^{-1}(q)$ di un valore regolare $q \in N$ di f , ed è zero se f non è surgettiva. \square*

ESEMPIO XXIII.6.4. Su $S^1 = \{z = e^{i\theta} \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ la forma differenziale

$$\frac{1}{2\pi}d\theta = \frac{1}{2\pi i} \frac{dz}{z} = -\frac{1}{2\pi i} \frac{d\bar{z}}{\bar{z}}$$

definisce l'orientazione ed ha integrale 1.

Se $f \in \mathcal{O}(D) \cap \mathcal{C}^\infty(\bar{D})$ ed $f(z) \neq 0$ per $z \in S^1$, la

$$(23.6.2) \quad g : S^1 \ni z \longrightarrow \frac{f(z)}{|f(z)|} \in S^1$$

è un'applicazione di classe \mathcal{C}^∞ . Per calcolarne l'indice, osserviamo che

$$(23.6.3) \quad \begin{aligned} g^*\left(\frac{1}{2\pi}d\theta\right) &= \frac{1}{2\pi i}d \log g = \frac{1}{2\pi i}(d \log f(z) - \frac{1}{2}d \log f(z)\bar{f}(z)) \\ &= \frac{1}{4\pi i}\left(\frac{f'(z)dz}{f(z)} - \frac{\bar{f}'(z)d\bar{z}}{\bar{f}(z)}\right). \end{aligned}$$

Otteniamo allora

$$(23.6.4) \quad \begin{aligned} \deg(g) &= \frac{1}{4\pi i} \int_S \left(\frac{f'(z)dz}{f(z)} - \frac{\bar{f}'(z)d\bar{z}}{\bar{f}(z)}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{f'(z)dz}{f(z)} = \sum_{z \in D} \nu_z(f), \end{aligned}$$

ove $\nu_z(f)$ è la molteplicità di zero di f in z .

Più in generale se $f \in \mathcal{M}(D) \cap \mathcal{C}^\infty(\bar{D} \setminus f^{-1}(\infty))$ è una funzione meromorfa su D , che si prolunga ad una funzione \mathcal{C}^∞ in un intorno di S^1 , e definiamo g mediante la (23.6.2), il grado di g è ancora definito dalla (23.6.4), ove $\nu_z(f)$ indica l'intero per cui $\zeta \rightarrow (\zeta - z)^{\nu_z(f)} f(\zeta)$ è definita, olomorfa e non nulla in un intorno di z in D , è cioè o l'ordine di zero o l'opposto dell'ordine di polo di f in z .

XXIII.7. La formula di Künnet

TEOREMA XXIII.7.1 (formula di Künnet). *Siano M ed N due varietà differenziabili, di dimensioni m ed n , rispettivamente. Supponiamo che M ammetta un buon ricoprimento finito². Allora vale la formula di Künnet³*

$$(23.7.1) \quad \begin{cases} H^q(M \times N) \simeq \bigoplus_{j=0}^m H^j(M) \otimes H^{q-j}(N), \\ H_c^q(M \times N) \simeq \bigoplus_{j=0}^m H_c^j(M) \otimes H_c^{q-j}(N), \end{cases} \quad \text{per ogni } q \in \mathbb{N}.$$

²Il teorema vale anche sotto l'ipotesi meno restrittiva che i gruppi di coomologia di M siano di dimensione finita. Nel caso in cui né i gruppi di coomologia di de Rham di M né tutti quelli di N siano tutti di dimensione finita, la tesi vale ancora, purché i prodotti tensoriali nella formula di Künnet si intendano calcolati nel senso degli spazi vettoriali topologici.

³Otto Hermann Lorenz Künneth (Neustadt an der Haardt, 6 luglio 1892 – Erlangen, 7 maggio 1975) topologo algebrico tedesco.

DIMOSTRAZIONE. Siano

(23.7.2)

$$\begin{array}{ccc} & M \times N & \\ \pi_M \swarrow & & \searrow \pi_N \\ M & & N \end{array}$$

le proiezioni del prodotto $M \times N$ sui singoli fattori, e sia $\Omega^{q_1}(M) \otimes \Omega^{q_2}(N)$ il prodotto tensoriale algebrico di $\Omega^{q_1}(M)$ ed $\Omega^{q_2}(N)$. I suoi elementi sono le somme finite

$$(23.7.3) \quad f = \sum_{j=1}^r \pi_M^*(g_j) \wedge \pi_N^*(h_j), \quad \text{con } g_j \in \Omega^{q_1}(M), h_j \in \Omega^{q_2}(N).$$

Abbiamo inclusioni naturali

$$\begin{aligned} \bigoplus_{q_1+q_2=q} \mathcal{L}^{q_1}(M) \otimes \mathcal{L}^{q_2}(N) &\hookrightarrow \mathcal{L}^q(M \times N), \\ \bigoplus_{q_1+q_2=q} \mathcal{B}^{q_1}(M) \otimes \mathcal{B}^{q_2}(N) &\hookrightarrow \mathcal{B}^q(M \times N), \end{aligned}$$

che definiscono applicazioni

$$(23.7.4) \quad \bigoplus_{q_1+q_2=q} H^{q_1}(M) \otimes H^{q_2}(N) \longrightarrow H^q(M \times N).$$

Fissiamo due aperti U, V di M e poniamo

$$\begin{cases} \mathbf{A}_1 = \bigoplus_{q_1+q_2=q} H^{q_1}(U \cap V) \otimes H^{q_2}(N), \\ \mathbf{A}_2 = \bigoplus_{q_1+q_2=q} (H^{q_1}(U) \oplus H^{q_1}(V)) \otimes H^{q_2}(N), \\ \mathbf{A}_3 = \bigoplus_{q_1+q_2=q} H^{q_1}(U \cup V) \otimes H^{q_2}(N), \\ \mathbf{A}_4 = \bigoplus_{q_1+q_2=q+1} H^{q_1}(U \cap V) \otimes H^{q_2}(N), \\ \mathbf{A}_5 = \bigoplus_{q_1+q_2=q+1} (H^{q_1}(U) \oplus H^{q_1}(V)) \otimes H^{q_2}(N), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{B}_1 = H^q((U \cap V) \times N), \\ \mathbf{B}_2 = H^q(U \times N) \oplus H^q(V \times N), \\ \mathbf{B}_3 = H^q((U \cup V) \times N), \\ \mathbf{B}_4 = H^{q+1}((U \cap V) \times N), \\ \mathbf{B}_5 = H^{q+1}(U) \oplus H^{q+1}(V \times N), \end{cases}$$

Per la successione esatta di Mayer-Vietoris, otteniamo un diagramma commutativo a righe esatte

$$(*) \quad \begin{array}{ccccccccc} \mathbf{A}_1 & \xrightarrow{f_1} & \mathbf{A}_2 & \xrightarrow{f_2} & \mathbf{A}_3 & \xrightarrow{f_3} & \mathbf{A}_4 & \xrightarrow{f_4} & \mathbf{A}_5 \\ \alpha_1 \downarrow & & \alpha_2 \downarrow & & \alpha_3 \downarrow & & \alpha_4 \downarrow & & \alpha_5 \downarrow \\ \mathbf{B}_1 & \xrightarrow{g_1} & \mathbf{B}_2 & \xrightarrow{g_2} & \mathbf{B}_3 & \xrightarrow{g_3} & \mathbf{B}_4 & \xrightarrow{g_4} & \mathbf{B}_5, \end{array}$$

dove le α_i sono definite dalle (23.7.4), sostituendo ad M le sottovarietà $U, V, U \cap V$. Dimostreremo quindi la formula di Künnet per induzione sul numero di aperti di

un buon ricoprimento di M . Infatti, con una dimostrazione analoga a quella del Lemma XXI.4.4 del Capitolo XXI, si dimostra che

$$H^q(\mathbb{R}^m \times N) \simeq H^q(N), \quad \forall q \in \mathbb{N},$$

e quindi la formula di Künnet vale quando $M = \mathbb{R}^m$. Supponiamo che essa valga per ogni varietà M che ammetta un buon ricoprimento con al più k aperti, per qualche $k \geq 1$. Se $\{U_0, \dots, U_k\}$ è un buon ricoprimento di una varietà M , che consiste di $k + 1$ aperti, consideriamo il diagramma (*) con $U = U_0$ e $V = U_1 \cup \dots \cup U_k$. Allora, per l'ipotesi induttiva, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5$ sono isomorfismi. Per il lemma dei cinque anche α_3 è un isomorfismo. \square

Con analoga dimostrazione otteniamo

TEOREMA XXIII.7.2 (Leray-Hirsch). *Sia $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibrato differenziabile, con fibra tipica F . Supponiamo che M abbia un buon ricoprimento finito e che per ogni intero non negativo q vi siano delle classi di coomologia $e_1^q, \dots, e_{\nu_q}^q \in H^q(E)$ tali che il loro pull-back su ciascuna fibra $\pi^{-1}(x)$, per $x \in M$, sia una base di $H^q(\pi^{-1}(x))$. Allora vale la formula di Künneth:*

$$(23.7.5) \quad H^q(E) = \bigoplus_{q_1+q_2=q} H^{q_1}(M) \otimes H^{q_2}(F).$$

ESEMPIO XXIII.7.3. Sia $T^n = \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_{n \text{ volte}}$ il toro n -dimensionale. È $T^n = T^{n-1} \times S^1$.

Allora, per la formula di Künnet, abbiamo

$$H^q(T^n) = (H^q(T^{n-1}) \otimes \mathbb{R}) \oplus (H^{q-1}(T^{n-1}) \otimes \mathbb{R}) = H^{q-1}(T^{n-1}) \oplus H^q(T^{n-1}), \quad \forall q \geq 1.$$

Poiché $\binom{n-1}{q} + \binom{n-1}{q-1} = \binom{n}{q}$, otteniamo per ricorrenza

$$H^q(T^n) = \mathbb{R} \binom{n}{q}, \quad \forall q = 0, 1, \dots, n.$$

XXIII.8. Duale di Poincaré in una sottovarietà orientata

Sia M una varietà differenziabile di dimensione m ed S una sua sottovarietà propria orientata di dimensione k . Associamo ad S il funzionale lineare \mathbb{I}_S , definito sulle k -forme a supporto compatto da:

$$(23.8.1) \quad \mathbb{I}_S(f) = \int_S f, \quad \forall f \in \mathcal{Q}_c^k(M).$$

Per la formula di Stokes, $\mathbb{I}_S(f) = 0$ se $f \in \mathcal{B}_c^k(M)$. Per passaggio al quoziente, \mathbb{I}_S definisce quindi un funzionale lineare su $H_c^k(M)$. Supponiamo che M sia orientata ed ammetta un buon ricoprimento finito. Allora vale la dualità di Poincaré e potremo dunque identificare \mathbb{I}_S ad un elemento di $H^{m-k}(M)$.

DEFINIZIONE XXIII.8.1. Sia M una varietà orientata ed S una sua sottovarietà propria orientata di dimensione k . Si dice *duale di Poincaré chiuso* di S una qualsiasi forma $\eta_S \in \mathcal{L}^{m-k}(M)$, tale che

$$(23.8.2) \quad \int_M f \wedge \eta_S = \int_S f, \quad \forall f \in \mathcal{L}_c^k(M).$$

La classe $[\eta_S] \in H^{m-k}(M)$ è l'elemento che definisce \mathbb{I}_S nella dualità di Poincaré.

In modo analogo, se S è una sottovarietà compatta orientata di dimensione k di M , possiamo associare ad essa un funzionale definito sulle k -forme differenziali con supporti chiusi in M , mediante

$$(23.8.3) \quad \mathbb{I}_S(f) = \int_S f, \quad \forall f \in \mathcal{Q}^k(M).$$

Poiché $\mathbb{I}_S(f) = 0$ se $f \in \mathcal{B}^k(M)$, la \mathbb{I}_S definisce in questo caso un funzionale lineare su $H^k(M)$. Per la dualità di Poincaré potremo trovare un unico elemento di $H_c^{m-k}(M)$ tale che, se $\eta_S \in \mathcal{L}_c^{m-k}(M)$ è un suo rappresentante, risulti

$$(23.8.4) \quad \int_M f \wedge \eta_S = \int_S f, \quad \forall f \in \mathcal{L}^k(M).$$

DEFINIZIONE XXIII.8.2. Sia M una varietà orientata ed S una sua sottovarietà compatta orientata di dimensione k . Una forma $\eta_S \in \mathcal{L}_c^{m-k}(M)$ per cui valga la (23.8.4) si dice *duale di Poincaré compatto* di S . La sua classe $[\eta_S] \in H_c^{m-k}(M)$ è l'elemento che definisce \mathbb{I}_S nella dualità di Poincaré.

ESEMPIO XXIII.8.3. Il duale di Poincaré chiuso di un punto in \mathbb{R}^n è 0, mentre il suo duale di Poincaré compatto è una qualsiasi forma a supporto compatto con integrale 1 su \mathbb{R}^n .

ESEMPIO XXIII.8.4. Sia $S = \{(x, 0) \mid x > 0\} \subset M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Introduciamo su M coordinate polari (r, θ) . Il differenziale

$$d\theta = (x dy - y dx)/(x^2 + y^2)$$

è ben definito su M .

Sia $f = a(x, y)dx + b(x, y)dy \in \mathcal{Z}_c^1(M)$. Scriviamola nella forma

$$f = \phi dr + \psi d\theta, \quad \text{con} \quad \phi = a \cos \theta + b \sin \theta, \quad \psi = -r(a \sin \theta - b \cos \theta).$$

Abbiamo

$$\iint_M f \wedge d\theta = \iint \phi dr \wedge d\theta = \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} \phi(r, \theta) d\theta$$

Integrando per parti abbiamo

$$\int_0^{2\pi} \phi d\theta = 2\pi\phi(r, 0) - \int_0^{2\pi} \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} d\theta.$$

Utilizzando le condizioni d'integrabilità e scambiando l'ordine d'integrazione, otteniamo che

$$\int_0^{+\infty} dr \int_0^{2\pi} \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \theta d\theta \int_0^\infty \frac{\partial \psi}{\partial r} dr = 0.$$

Quindi

$$\iint_M f \wedge d\theta = 2\pi \int_0^\infty \phi(r, 0) dr = 2\pi \int_S f.$$

Quindi $(2\pi)^{-1}d\theta$ è il duale di Poincaré chiuso di $S = \{x > 0, y = 0\}$ in $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Osserviamo che, in particolare, se $f = adx + bdy \in \mathcal{L}_c^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$, l'integrale

$$\int_{S_\theta} f, \quad \text{per } S_\theta = \{t(\cos \theta, \sin \theta) \mid t > 0\}$$

non dipende dalla scelta dell'angolo θ .

ESEMPIO XXIII.8.5. Sia $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Il duale di Poincaré di S^1 è la classe di $\chi(r)dr$ per una qualsiasi funzione $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, con $\text{supp } \chi \subset \{r > 0\}$ ed $\int_{\mathbb{R}} \chi dr = 1$.

XXIII.9. La proprietà semi-locale

In questo paragrafo studiamo la coomologia di de Rham su varietà differenziabili che possono non avere un buon ricoprimento finito. Dimostriamo innanzi tutto il seguente

LEMMA XXIII.9.1. *Sia M una varietà differenziabile connessa ed orientabile, che ammette un buon ricoprimento finito. Sia q un intero con $1 \leq q \leq n$ ed $\eta_1, \dots, \eta_k \in \mathcal{L}_c^{m-q+1}(M)$ forme chiuse a supporto compatto tali che $[\eta_1], \dots, [\eta_k]$ sia una base di $H_c^{m-q+1}(M)$.*

Se $\alpha \in \mathcal{B}^q(M)$, allora esiste una soluzione $\beta \in \Omega^{q-1}$ di

$$(23.9.1) \quad d\beta = \alpha, \quad \int_M \beta \wedge \eta_i = 0, \quad \forall 1 \leq i \leq k.$$

Se $\beta_1, \beta_2 \in \Omega^{q-1}$ sono soluzioni di (23.9.1), allora $\beta_1 - \beta_2 \in \mathcal{B}^{q-2}(M)$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\beta_0 \in \Omega^{q-1}$ una soluzione di $d\beta_0 = \alpha$ in M . Per la dualità di Poincaré, esiste una $\beta_1 \in \mathcal{L}^{q-1}(M)$ tale che

$$\int_M \beta_1 \wedge \eta_i = \int_M \beta_0 \wedge \eta_i, \quad \text{per } 1 \leq i \leq k.$$

Allora $\beta = \beta_0 - \beta_1$ soddisfa la (23.9.1).

Se β_1, β_2 soddisfano la (23.9.1), allora $\beta_1 - \beta_2 \in \mathcal{L}^{q-1}(M)$ soddisfa

$$\int_M (\beta_1 - \beta_2) \wedge \eta = 0, \quad \forall \eta \in \mathcal{L}_c^{m-q+1}(M).$$

Infatti, $\eta \in \mathcal{L}_c^{m-q+1}(M)$ si può scrivere in modo unico nella forma $\eta = d\theta + \sum_{i=1}^k c_i \eta_i$ con $\theta \in \Omega_c^{m-q}(M)$ e $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$. Abbiamo perciò

$$\begin{aligned} \int_M (\beta_1 - \beta_2) \wedge \eta &= \int_M (\beta_1 - \beta_2) \wedge d\theta + \sum_{i=1}^k c_i \int_M (\beta_1 - \beta_2) \wedge \eta_i \\ &= (-1)^{q-1} \int_M d((\beta_1 - \beta_2) \wedge \theta) = 0 \end{aligned}$$

per la formula di Stokes. Quindi, per il Corollario XXIII.5.4, $\beta_1 - \beta_2 \in \mathcal{B}^q(M)$. \square

La coomologia di de Rham gode della proprietà semi-locale, che è descritta dalla seguente

PROPOSIZIONE XXIII.9.2. *Sia M una varietà differenziabile connessa, orientabile e numerabile all'infinito. Sia q un intero ≥ 0 e supponiamo che $H_c^{m-q+1}(M)$ abbia dimensione finita.*

Per $\alpha \in \mathcal{L}^q(M)$ sono equivalenti:

- (1) $\alpha \in \mathcal{B}^q(M)$,
- (2) $\int_M \alpha \wedge \eta = 0, \quad \forall \eta \in \mathcal{L}_c^{m-q}(M)$,
- (3) $\forall U^{\text{aperto}} \Subset M, \quad \alpha|_U \in \mathcal{B}^q(U)$.

DIMOSTRAZIONE. Per $q = 0$, una $\alpha \in \mathcal{L}^0(M)$ è una funzione costante su M e le condizioni (1), (2), (3) equivalgono al fatto che $\alpha = 0$.

Osserviamo che chiaramente (1) \Rightarrow (3) \Rightarrow (2). Basterà quindi dimostrare l'implicazione (3) \Rightarrow (1) per $1 \leq q \leq n$.

Fissiamo un buon ricoprimento numerabile e localmente finito $\{U_\nu\}_{\nu \geq 0}$ di M , formato da aperti relativamente compatti. Costruiamo una successione crescente di aperti $\{V_\nu\}_{\nu \geq 0}$, con $V_\nu \Subset V_{\nu+1}$ ed $M = \bigcup_\nu V_\nu$, ciascuno dotato di un buon ricoprimento finito. A questo scopo possiamo definire per ricorrenza:

$$\begin{cases} V_0 = U_0, \\ V_{\nu+1} = \bigcup \{U_\mu \mid U_\mu \cap \bar{V}_\nu \neq \emptyset\}. \end{cases}$$

Il gruppo $H_c^{m-q+1}(M)$ è unione delle immagini delle applicazioni

$$H_c^{m-q+1}(V_\nu) \rightarrow H_c^{m-q+1}(M)$$

definite dalle inclusioni $V_\nu \hookrightarrow M$. Quindi $H_c^{m-q+1}(M)$ ha una base al più numerabile. Costruiamo una successione $\{\eta_h\}_{h \geq 1} \subset \mathcal{L}_c^{m-q+1}(M)$ ed una successione di aperti $\{W_\nu\}$ di M con le proprietà

- (1) $([\eta_h])$ è una base di $H_c^{m-q+1}(M)$.
- (2) $W_\nu \Subset W_{\nu+1}$ ed $M = \bigcup_\nu W_\nu$.
- (3) Ogni W_ν ammette un buon ricoprimento finito.
- (4) Esiste una successione crescente h_ν di interi positivi tali che $\text{supp } \eta_h \subset W_\nu$ per $h \leq h_\nu$ e l'immagine di $H^{n-q+1}(W_\nu) \rightarrow H^{n-q+1}(W_{\nu+1})$ sia generata dalle classi di $\eta_1, \dots, \eta_{h_\nu}$ in $H^{n-q+1}(W_{\nu+1})$.

Ragioniamo per ricorrenza. Possiamo fissare $W_0 = V_0$. Per il Teorema XXIII.5.5, $H^{m-q+1}(W_0)$ ha dimensione finita. Possiamo quindi scegliere $\eta_1, \dots, \eta_{h_0} \in \mathcal{L}_c^{m-q+1}(W_0)$ in modo tale che le loro classi di coomologia in $H^{m-q+1}(M)$ generino l'immagine di $H^{m-q+1}(W_0) \rightarrow H^{m-q+1}(M)$.

Completiamo $[\eta_1]_0, \dots, [\eta_{h_0}]_0 \in H_c^{m-q+1}(W_0)$ ad una base di $H^{m-q+1}(W_0)$, aggiungendo classi $[\theta_1]_0, \dots, [\theta_k]_0 \in H^{m-q+1}(W_0)$, con $\theta_1, \dots, \theta_k \in \mathcal{L}_0^{m-q+1}(W_0)$. Per ogni $j = 1, \dots, k$ potremo allora trovare $c_1, \dots, c_{h_0} \in \mathbb{R}$ e $\zeta_j \in \mathcal{L}_c^{m-q}(M)$ tali che

$$\theta_j = d\zeta_j + \sum_{h=1}^{h_0} c_h \eta_h, \quad \text{per } j = 1, \dots, k.$$

Scegliamo allora $W_1 = V_{\mu_1}$, per un intero positivo μ_1 tale che

$$\bar{W}_0 \cup \bigcup_{j=1}^k \text{supp } \zeta_j \subset V_{\mu_1}.$$

Ripetendo questa costruzione otteniamo le successioni $\{[\eta_h]\}$ e $\{W_\nu\}$ desiderate.

Costruiamo ora, per ricorrenza, una successione $\{\beta_\nu\}$, con

- (1) $\beta_\nu \in \Omega^{q-1}(W_\nu)$, $d\beta_\nu = \alpha$, $\int_{W_\nu} \beta_\nu \wedge \eta_j = 0$ per $1 \leq j \leq h_\nu$,
- (2) $\beta_{\nu+1}|_{W_{\nu-2}} = \beta_\nu|_{W_{\nu-2}}$ se $\nu \geq 2$.

Per il Lemma XXIII.9.1 possiamo trovare β_0 e β_1 che soddisfino (1). Supponiamo di aver costruito $\beta_0, \dots, \beta_\nu$, con $\nu \geq 1$, che soddisfino (1) e (2). Sia $\gamma \in \Omega^{q-1}(W_{\nu+1})$ una soluzione di

$$d\gamma = \alpha \text{ in } W_{\nu+1}, \quad \int_{W_{\nu+1}} \gamma \wedge \eta_j = 0 \text{ se } j \leq h_{\nu+1}.$$

Dico che $\beta_{\nu+1} - \beta_\nu$ soddisfa

$$\int_{W_{\nu-1}} (\gamma - \beta_\nu) \wedge \eta = 0, \quad \forall \eta \in \mathcal{L}_c^{m-q+1}(W_{\nu-1}).$$

Infatti questa equazione è equivalente a

$$\int_{W_{\nu-1}} (\gamma - \beta_\nu) \wedge \eta_j = 0, \quad \forall j \leq h_{\nu-1}.$$

Possiamo quindi trovare $\zeta \in \Omega^{q-2}(W_{\nu-1})$ tale che $d\zeta = \gamma - \beta_\nu$. Con $\tilde{\zeta} \in \Omega^{q-2}(M)$ con $\tilde{\zeta}|_{W_{\nu-2}} = \zeta|_{W_{\nu-2}}$, poniamo allora $\beta_{\nu+1} = \gamma - d\tilde{\zeta}$.

Definiamo infine $\beta \in \Omega^{q-1}(M)$ mediante

$$\beta|_{W_\nu} = \beta_{\nu+2}|_{W_\nu} \quad \text{per } \nu = 0, 1, 2, \dots$$

Abbiamo $d\beta = \alpha \in \mathcal{B}^q(M)$. Ciò completa la dimostrazione.

Il caso $q = 1$ si può trattare in modo più semplice. Ricordiamo che abbiamo supposto che M sia connessa. Fissiamo una successione di aperti connessi $\{U_\nu\}_{\nu \geq 0}$ con $U_\nu \Subset U_{\nu+1}$ per ogni ν ed $M = \bigcup_\nu U_\nu$.

Sia $\alpha \in \mathcal{L}^q(M)$ e supponiamo che, per ogni ν , vi sia

$\beta_\nu \in \Omega^{q-1}(U_\nu)$ con $d\beta_\nu = \alpha|_{U_\nu}$. Dico che è possibile trovare un'altra successione $\{\gamma_\nu \in \Omega^{q-1}(U_\nu)\}$ tale che (poniamo $U_\nu = \emptyset$ se $\nu < 0$)

$$(23.9.2) \quad d\gamma_\nu = \alpha|_{U_\nu}, \quad \gamma_\nu|_{U_{\nu-1}} = \gamma_{\nu-1}.$$

Ragioniamo per i diversi interi $q \geq 0$.

Se $q = 0$, le ipotesi dicono che $\alpha = 0$ e quindi la condizione è banalmente soddisfatta con $\gamma_\nu = 0$ per ogni ν .

Se $q = 1$, scegliamo $v_0 = u_0$ e supponiamo di aver scelto, per qualche $\mu \geq 0$, v_0, \dots, v_μ in modo tale che (23.9.2) sia soddisfatta se $\nu \leq \mu$. Poiché

$$d(\gamma_\mu - \beta_{\mu+1}) = \alpha - \alpha = 0 \quad \text{su } U_\mu \implies \exists c_\mu \in \mathbb{R} \text{ tale che } u_{\mu+1} = v_\mu + c_\mu,$$

basterà allora scegliere $v_{\mu+1} = u_{\mu+1} - c_\mu$ perché la (23.9.2) sia soddisfatta anche per $\nu \leq \mu + 1$.

Sia ora $q > 1$. Dico che possiamo costruire per ricorrenza una successione $\{\gamma_\nu \in \Omega^{q-1}(M)\}_{\nu \geq 0}$ con le proprietà

$$(23.9.3) \quad d\gamma_\nu = \alpha \text{ su } U_{\nu+1}, \quad \gamma_\nu|_{U_{\nu-2}} = \gamma_{\nu-1}|_{U_{\nu-2}}.$$

Sia infatti $\gamma_0 \in \Omega^{q-1}(M)$ una $(q-1)$ -forma su M uguale ad β_2 su U_1 . In particolare, $d\gamma_0 = \alpha$ su U_1 . Supponiamo poi di aver costruito, per qualche $\mu \geq 0$, $\gamma_0, \dots, \gamma_\mu \in \Omega^{q-1}(M)$ che soddisfino (23.9.3). Allora $w = \gamma_\mu - \beta_{\mu+2}$ soddisfa $dw = 0$ su $U_{\mu+1}$. \square

Come conseguenza di questo teorema, abbiamo

TEOREMA XXIII.9.3. *Se M è una varietà compatta orientabile, allora*

$$(23.9.4) \quad H^q(M) \simeq (H_c^{m-q}(M))^*.$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo osservato, nella dimostrazione del teorema precedente, che $H_c^{m-q}(M)$ ammette una base numerabile. Ripetendo la costruzione nella dimostrazione del lemma precedente, otteniamo una successione $\{W_\nu\}$ di aperti di M ed una successione $\{\eta_h\} \subset \mathcal{L}_c^{m-q}(M)$ con le proprietà:

- (1) ogni W_ν ammette un buon ricoprimento finito,
- (2) $W_\nu \Subset W_{\nu+1}$, $\bigcup W_\nu = M$,
- (3) per una successione non decrescente $\{h_\nu\}$ abbiamo $\text{supp } \eta_h \subset W_\nu$ per $h \leq h_\nu$ e l'immagine di $H_c^{m-q}(W_\nu) \rightarrow H_c^{m-q}(W_{\nu+1})$ è generata dalle classi di η_h per $h \leq h_\nu$.

Sia $\{c_h\}$ una successione di numeri reali. Dico che è possibile determinare una successione $\{\alpha_\nu \in \mathcal{L}(W_\nu)\}$ tale che

$$\int_{W_\nu} \alpha_\nu \wedge \eta_h = c_h, \quad \text{per } h \leq h_\nu, \quad \alpha_{\nu+1}|_{W_{\nu-2}} = \alpha_\nu|_{W_{\nu-2}} \quad \text{per } \nu \geq 2.$$

Poiché i W_ν ammettono un buon ricoprimento finito, per la dualità di Poincaré possiamo trovare $\{\beta_\nu \in \mathcal{L}(W_\nu)\}$ tali che

$$\int_{W_\nu} \beta_\nu \wedge \eta_h = c_h, \quad \text{per } h \leq h_\nu.$$

Possiamo quindi scegliere $\alpha_0 = \beta_0$, $\alpha_1 = \beta_1$. Supponiamo di aver costruito $\alpha_0, \dots, \alpha_\nu$, per qualche $\nu \geq 1$, in modo che sia soddisfatta la

$$\alpha_\mu|_{W_{\mu-2}} = \alpha_{\mu+1}|_{W_{\mu-2}}, \quad \text{se } 2 \leq \mu \leq \nu.$$

Abbiamo allora

$$\int_{W_{\nu-1}} (\beta_{\nu+1} - \alpha_\nu) \wedge \eta_h = 0, \quad \text{per } h \leq h_\nu.$$

Questo implica che

$$\int_{W_{\nu-1}} (\beta_{\nu+1} - \alpha_\nu) \wedge \eta = 0, \quad \forall \eta \in \mathcal{L}_c^{m-q}(W_{\nu-1})$$

e quindi esiste una $\phi \in \Omega^{q-1}(W_{\nu-1})$ tale che $\beta_{\nu+1}|_{W_{\nu-1}} - \alpha_\nu|_{W_{\nu-1}} = d\phi$. Se $\psi \in \Omega^{q-1}(W_{\nu+1})$ è uguale a ϕ su $W_{\nu-2}$, possiamo definire $\alpha_{\nu+1} = \beta_{\nu+1} - d\psi$. Otteniamo quindi per ricorrenza la successione delle $\{\beta_\nu\}$ e potremo allora definire $\beta \in \mathcal{L}^q(M)$

ponendo $\beta|_{W_\nu} = \beta_{\nu+2}|_{W_\nu}$ per ogni $\nu \geq 0$. La classe di coomologia definita da β è l'elemento del duale di $H_c^{m-q}(M)$ che vale c_h sull'elemento $[\eta_h]$ della base di $H_c^{m-q}(M)$. Ciò completa la dimostrazione. \square

Appendice: Complementi di topologia generale

Fibrati di Steenrod topologici

Richiamiamo in questo capitolo alcune nozioni di topologia che utilizzeremo in seguito.

XXIV.1. Azione di gruppo

Sia \mathbf{G} un gruppo ed F un insieme.

DEFINIZIONE XXIV.1.1. Un'azione a sinistra di \mathbf{G} su F è un'applicazione

$$(24.1.1) \quad \mathbf{G} \times F \ni (g, p) \longrightarrow gp \in F$$

tale che

- (i) $ep = p, \quad \forall p \in F,$
- (ii) $g_1(g_2p) = (g_1g_2)p, \quad \forall g_1, g_2 \in \mathbf{G}, \forall p \in F.$

In modo analogo si definisce un'azione a destra di \mathbf{G} su F come un'applicazione

$$(24.1.2) \quad F \times \mathbf{G} \ni (p, g) \longrightarrow pg \in F$$

tale che

- (i') $pe = p, \quad \forall p \in F,$
- (ii') $(pg_1)g_2 = p(g_1g_2), \quad \forall g_1, g_2 \in \mathbf{G}, \forall p \in F.$

Se (24.1.1) è un'azione a sinistra, la

$$(24.1.3) \quad F \times \mathbf{G} \ni (p, g) \longrightarrow g^{-1}p \in F$$

è un'azione a destra e, se (24.1.2) è un'azione a destra, la

$$(24.1.4) \quad \mathbf{G} \times F \ni (g, p) \longrightarrow pg^{-1} \in F$$

è un'azione a sinistra. Non sarà quindi restrittivo limitarsi, nel trattare le azioni di gruppo in generale, a considerare quelle a sinistra.

Data un'azione a sinistra (24.1.1), possiamo associare all'elemento g di \mathbf{G} l'applicazione

$$(24.1.5) \quad \rho(g) : F \ni p \longrightarrow gp \in F.$$

Dalle (i) ed (ii) segue che

$$\rho(e) = \text{id}_F, \quad \rho(g_1g_2) = \rho(g_1) \circ \rho(g_2), \quad \rho(g^{-1}) = [\rho(g)]^{-1}, \quad \forall g_1, g_2, g \in \mathbf{G}.$$

Quindi

$$(24.1.6) \quad \rho : \mathbf{G} \longrightarrow \mathbf{S}(F)$$

è un omomorfismo di \mathbf{G} nel gruppo $\mathbf{S}(F)$ delle permutazioni degli elementi di F e, viceversa, ogni omomorfismo (24.1.6) definisce un'azione a sinistra di \mathbf{G} su F mediante

$$(24.1.7) \quad \mathbf{G} \times F \ni (g, p) \longrightarrow \rho(g)(p) \in F.$$

DEFINIZIONE XXIV.1.2. L'omomorfismo ρ per cui valgano le (24.1.5), (24.1.7) si dice *associato* all'azione (24.1.1).

OSSERVAZIONE XXIV.1.3. Se (24.1.2) è un'azione a destra, allora l'applicazione $\rho : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{S}(F)$ definita da $\rho(g)(p) = pg$ è un anti-omomorfismo di gruppi; soddisfa cioè la $\rho(g_1g_2) = \rho(g_2)\rho(g_1)$ per ogni $g_1, g_2 \in \mathbf{G}$.

DEFINIZIONE XXIV.1.4. $\ker \rho$ è il *nucleo d'infedeltà dell'azione* (24.1.1). Se ρ è iniettivo chiamiamo l'azione (24.1.1) *fedele* (o *effettiva*).

DEFINIZIONE XXIV.1.5. L'*orbita* di un punto $p \in F$ (per l'azione di \mathbf{G}) è il sottoinsieme $\mathbf{G}p = \{gp \mid g \in \mathbf{G}\}$ di F .

Le orbite degli elementi di F definiscono una partizione di F e quindi la relazione di appartenere alla stessa orbita è una relazione di equivalenza. Il quoziente corrispondente si indica con F/\mathbf{G} e si dice *spazio delle orbite*.

Se $\mathbf{G}p = F$ per ogni $p \in F$, se cioè F/\mathbf{G} contiene un solo punto, diciamo che l'azione è *transitiva*.

Un'azione transitiva e fedele si dice *semplicemente transitiva*.

OSSERVAZIONE XXIV.1.6. Il nucleo d'infedeltà $\mathbf{K} = \ker \rho$ dell'azione (24.1.1) è un sottogruppo normale di \mathbf{G} . Poiché $g_1p = g_2p$ se $g_1^{-1}g_2 \in \mathbf{K}$, fissato $p \in F$ l'elemento gp dipende solo dalla classe di equivalenza di g in \mathbf{G}/\mathbf{K} . Possiamo quindi far corrispondere all'azione di \mathbf{G} su F un'azione fedele di \mathbf{G}/\mathbf{K} su F e, viceversa, ad ogni azione fedele di \mathbf{G}/\mathbf{K} su F determina un'azione di \mathbf{G} su F con nucleo d'infedeltà \mathbf{K} , dimodoché $[g]p = gp$ per ogni $g \in \mathbf{G}$ e $p \in F$, ove abbiamo indicato con $[g]$ la classe laterale di g in \mathbf{G}/\mathbf{K} .

OSSERVAZIONE XXIV.1.7. Diciamo che l'azione di \mathbf{G} su F è *n-transitiva* se, date due n -uple di punti distinti (p_1, \dots, p_n) e (q_1, \dots, q_n) vi è un elemento g di \mathbf{G} tale che $gp_i = q_i$ per $1 \leq i \leq n$.

Ricordiamo che l'azione si dice *primitiva* se è transitiva e non preserva nessuna partizione non banale di F .

Un'azione doppiamente transitiva è primitiva, ma non vale il vice versa. Ad esempio, il gruppo delle rotazioni piane intorno all'origine agisce sulla circonferenza in modo primitivo, ma non doppiamente transitivo.

OSSERVAZIONE XXIV.1.8. Sia (24.1.1) un'azione di gruppo. Se \mathbf{H} è un altro gruppo e $\phi : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{G}$ un omomorfismo di gruppi, allora anche la

$$(24.1.8) \quad \mathbf{H} \times F \ni (h, p) \longrightarrow \phi(h)p \in F$$

è un'azione di gruppo. Se ϕ è iniettiva e (24.1.1) è fedele, allora anche (24.1.8) è fedele. Se ϕ è surgettiva e (24.1.1) è transitiva, allora anche (24.1.8) è transitiva.

Se \mathbf{H} è un sottogruppo di \mathbf{G} e ϕ l'inclusione, allora diciamo che la (24.1.8) è una *restrizione* ad \mathbf{H} di (24.1.1) e che (24.1.1) è un'*estensione* a \mathbf{G} di (24.1.8).

DEFINIZIONE XXIV.1.9. Un sottoinsieme E di F è *invariante* per l'azione di \mathbf{G} se $gp \in E$ per ogni $p \in E$. In questo caso la

$$\mathbf{G} \times E \ni (g, p) \longrightarrow gp \in E$$

è ancora un'azione di gruppo.

OSSERVAZIONE XXIV.1.10. Se \mathbf{G}_i sono gruppi, F_i insiemi, e $\mathbf{G}_i \times F_i \ni (g_i, p_i) \rightarrow g_i p_i$ azioni di gruppo (a sinistra), per i che varia in un insieme I di indici, allora anche

$$\left(\prod_{i \in I} \mathbf{G}_i \right) \times \left(\prod_{i \in I} F_i \right) \ni ((g_i), (p_i)) \longrightarrow (g_i p_i) \in \prod_{i \in I} F_i$$

è un'azione di gruppo (a sinistra). Se tutte le azioni sono fedeli anche il loro prodotto è fedele e se tutte sono transitive anche il loro prodotto è transitivo.

DEFINIZIONE XXIV.1.11. Chiamiamo \mathbf{G} -insieme un insieme F su cui sia assegnata un'azione (24.1.1) del gruppo \mathbf{G} .

Se F_1, F_2 sono due \mathbf{G} -insiemi, una \mathbf{G} -applicazione di F_1 in F_2 è un'applicazione $f : F_1 \rightarrow F_2$ tale che

$$f(gp) = gf(p), \quad \forall g \in \mathbf{G}, \forall p \in F_1.$$

Più in generale, se F_i è un \mathbf{G}_i -spazio, per $i = 1, 2$ e $\phi : \mathbf{G}_1 \rightarrow \mathbf{G}_2$ un omomorfismo di gruppi, una ϕ -applicazione di F_1 in F_2 è una $f : F_1 \rightarrow F_2$ con $f(gp) = \phi(g)f(p)$ per ogni $g \in \mathbf{G}_1$ ed $p \in F_1$.

DEFINIZIONE XXIV.1.12. Due azioni dello stesso gruppo \mathbf{G} su due insiemi F_1, F_2 si dicono *equivalenti* se esiste una \mathbf{G} -applicazione bigettiva $f : F_1 \rightarrow F_2$.

DEFINIZIONE XXIV.1.13. Se F è uno spazio topologico e le applicazioni $\rho(g)$ corrispondenti all'azione (24.1.1) di \mathbf{G} su F sono degli omeomorfismi, diciamo che \mathbf{G} opera su F *mediante omeomorfismi*.

Se F è una varietà differenziabile e le applicazioni $\rho(g)$ corrispondenti all'azione (24.1.1) di \mathbf{G} su F sono dei diffeomorfismi, diciamo che \mathbf{G} opera su F *mediante diffeomorfismi*.

Se F ha una struttura algebrica (un gruppo, un anello, un'algebra ...) e le applicazioni $\rho(g)$ corrispondenti all'azione (24.1.1) di \mathbf{G} su F sono degli automorfismi, diciamo che \mathbf{G} opera su F *mediante automorfismi*.

Nel caso di un'azione fedele, parleremo ancora di *gruppo di omeomorfismi*, di *diffeomorfismi* o di *automorfismi*, rispettivamente.

ESEMPIO XXIV.1.14. Se \mathbf{G} è un gruppo, le traslazioni a destra $(g, h) \rightarrow L_g h = gh$ e l'aggiunta $(g, h) \rightarrow \text{ad}(g)h = ghg^{-1}$ sono azioni di gruppo a sinistra su \mathbf{G} , che si dicono, rispettivamente, *azione canonica a sinistra* ed *azione aggiunta, o interna*. La traslazione a destra $(h, g) \rightarrow R_g h = hg$ è un'azione a destra, che si dice *azione canonica a destra*.

ESEMPIO XXIV.1.15. Sia \mathbf{H} un sottogruppo del gruppo \mathbf{G} . La restrizione ad \mathbf{H} dell'azione canonica a destra definisce un'azione di \mathbf{H} su \mathbf{G} le cui orbite formano lo spazio quoziente $F = \mathbf{G}/\mathbf{H}$. Poiché l'azione canonica a sinistra di \mathbf{G} opera sulle classi laterali sinistre di \mathbf{H} , risulta definita un'azione a sinistra canonica di \mathbf{G} su F .

DEFINIZIONE XXIV.1.16. Fissiamo un'azione di gruppo (24.1.1). Se $p_0 \in F$, l'insieme

$$(24.1.9) \quad \mathbf{G}_{p_0} = \{g \in \mathbf{G} \mid gp_0 = p_0\}$$

è un sottogruppo di \mathbf{G} , che si dice lo *stabilizzatore* (o *sottogruppo di stabilità*) del punto p_0 .

Se $p_0, p_1 \in F$, $a \in \mathbf{G}$, e $p_1 = ap_0$, allora

$$g \in \mathbf{G}_{p_1} \iff gap_0 = ap_0 \iff a^{-1}ga p_0 = p_0 \iff a^{-1}ga \in \mathbf{G}_{p_0}$$

e quindi

$$\mathbf{G}_{p_1} = \mathbf{G}_{ap_0} = a\mathbf{G}_{p_0}a^{-1} = \text{ad}(a)(\mathbf{G}_{p_0}).$$

In particolare

LEMMA XXIV.1.17. Se l'azione (24.1.1) di \mathbf{G} su F è transitiva, allora gli stabilizzatori dei diversi punti di F sono coniugati tra loro. \square

PROPOSIZIONE XXIV.1.18. Ogni azione transitiva di un gruppo è equivalente alla sua azione canonica su un suo quoziente.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che il gruppo \mathbf{G} agisca transitivamente su un insieme F . Fissiamo un qualsiasi punto p_0 di F e sia \mathbf{G}_{p_0} lo stabilizzatore del punto p_0 .

L'applicazione $\mathbf{G} \ni g \rightarrow gp_0 \in F$ definisce per passaggio al quoziente un'applicazione $f : \mathbf{G}/\mathbf{G}_{p_0} \rightarrow F$. Infatti, se $g_1^{-1}g_2 \in \mathbf{G}_{p_0}$, abbiamo

$$g_1^{-1}g_2 \in \mathbf{G}_{p_0} \iff g_1^{-1}g_2p_0 = p_0 \iff g_2p_0 = g_1p_0.$$

Queste equivalenze dimostrano che la f è ben definita ed iniettiva. Essa è anche bigettiva perché abbiamo supposto che l'azione fosse transitiva. Poiché $f(g[h]) = f([gh]) = gh p_0 = gf([h])$ (al solito indichiamo con $[h]$ la classe di equivalenza di $h \in \mathbf{G}$ in \mathbf{G}/\mathbf{H}), la f è una \mathbf{G} -applicazione e quindi, essendo invertibile, una \mathbf{G} -equivalenza. \square

XXIV.2. Azioni continue

Siano \mathbf{G} un gruppo topologico ed F uno spazio topologico.

DEFINIZIONE XXIV.2.1. Un'azione (24.1.1) di \mathbf{G} su F si dice *continua* se l'applicazione $\mathbf{G} \times F \ni (g, p) \rightarrow gp \in F$ è continua.

In questo caso \mathbf{G} agisce su F mediante omeomorfismi.

DEFINIZIONE XXIV.2.2. Chiamiamo \mathbf{G} -spazio uno spazio topologico F su cui sia definita un'azione continua di un gruppo topologico \mathbf{G} .

LEMMA XXIV.2.3. Se F è un \mathbf{G} -spazio, la proiezione $\pi : F \rightarrow F/\mathbf{G}$ sullo spazio delle orbite è aperta.

Se inoltre F è uno spazio di Hausdorff compatto e \mathbf{G} un gruppo compatto, allora la proiezione $\pi : F \rightarrow F/\mathbf{G}$ è anche chiusa.

DIMOSTRAZIONE. Se A è un aperto di F , allora

$$\pi^{-1}(\pi(A)) = \bigcup_{p \in A} \mathbf{G}p = \bigcup_{g \in \mathbf{G}} gA$$

è aperto, perché ciascuno degli insiemi gA , immagine di A mediante l'omeomorfismo di F definito da g , è aperto. Questo equivale ad affermare che $\pi(A)$ è aperto.

Supponiamo ora che F e \mathbf{G} siano compatti e che, inoltre, F sia di Hausdorff. Il prodotto topologico $\mathbf{G} \times F$ è compatto. Quindi ogni chiuso di $\mathbf{G} \times F$ è compatto, e perciò la sua immagine in F mediante l'applicazione continua (24.1.1) è compatta e quindi chiusa, perché i compatti di F sono chiusi per l'ipotesi che F fosse di Hausdorff. Se K è un sottoinsieme chiuso di F , allora $\pi^{-1}(\pi(K))$ è l'immagine del chiuso $\mathbf{G} \times K$ mediante la (24.1.1) e quindi un chiuso. Questo dimostra che $\pi(K)$ è chiuso per ogni chiuso K di F , cioè che l'applicazione (24.1.1) è chiusa. \square

DEFINIZIONE XXIV.2.4. Siano \mathbf{G}_1 e \mathbf{G}_2 due gruppi topologici e $\phi : \mathbf{G}_1 \rightarrow \mathbf{G}_2$ un omomorfismo di gruppi topologici. Dati due \mathbf{G}_i -spazi F_i ($i = 1, 2$) un ϕ -omomorfismo di F_1 in F_2 è un'applicazione continua $f : F_1 \rightarrow F_2$ che soddisfa $f(gp) = \phi(g)f(p)$ per ogni $p \in F_1$ e $g \in \mathbf{G}_1$.

Se $\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_2 = \mathbf{G}$ e ϕ l'identità, una $f \in \mathcal{C}(F_1, F_2)$ che commuti con l'azione di \mathbf{G} si dice un \mathbf{G} -omomorfismo. Se f è un omeomorfismo, anche la sua inversa è un \mathbf{G} -omomorfismo. Diremo, in questo caso, che f è un \mathbf{G} -isomorfismo.

OSSERVAZIONE XXIV.2.5. Se \mathbf{H} è un sottogruppo del gruppo topologico \mathbf{G} , l'azione di \mathbf{G} su \mathbf{G}/\mathbf{H} è transitiva e continua.

OSSERVAZIONE XXIV.2.6. Sia F un \mathbf{G} -spazio su cui \mathbf{G} operi transitivamente. Fissiamo un punto $p_0 \in F$ e sia \mathbf{H} lo stabilizzatore di p_0 . Risulta allora definita una \mathbf{G} -applicazione bigettiva e continua $f : \mathbf{G}/\mathbf{H} \rightarrow F$. Non possiamo dire in generale che questo sia un \mathbf{G} -isomorfismo.

Ciò vale senz'altro nel caso in cui \mathbf{G} sia compatto ed F di Hausdorff, perché un'applicazione continua e bigettiva tra spazi di Hausdorff compatti è anche un omeomorfismo.

XXIV.3. Fibrati di Steenrod e fibrati principali

Siano \mathbf{G} un gruppo topologico ed F un \mathbf{G} -spazio fedele. Identifichiamo \mathbf{G} al corrispondente gruppo di omeomorfismi di F .

DEFINIZIONE XXIV.3.1. Una F -struttura su uno spazio topologico W è il dato di una famiglia $\mathbf{A}(F, W)$ di omeomorfismi $\sigma : F \rightarrow W$ tali che $\sigma_1^{-1} \circ \sigma_2 \in \mathbf{G}$ per ogni $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbf{A}(F, W)$.

DEFINIZIONE XXIV.3.2. Una F -struttura su un fibrato topologico $\xi = (E \xrightarrow{\pi} B)$ è il dato, per ogni fibra E_p , di una F -struttura $\mathbf{A}(F, E_p)$.

Chiamiamo F la fibra standard e \mathbf{G} il gruppo strutturale di ξ .

Un fibrato ξ dotato di una F -struttura si dice un F -fibrato in senso debole.

Se $F = \mathbf{G}$ con \mathbf{G} che opera su sé stesso per traslazioni a sinistra, chiamiamo una tale \mathbf{G} -struttura principale e ξ un \mathbf{G} -fibrato principale in senso debole.

Ad un F -fibrato in senso debole $\xi = (E \xrightarrow{\pi} B)$ possiamo associare in modo canonico un \mathbf{G} -fibrato principale in senso debole $P(\xi) = (P(E) \xrightarrow{\pi} B)$ con

$$(24.3.1) \quad P(E) = \{(p, \sigma) \mid p \in B, \sigma \in \mathbf{A}(F, E_p)\}, \quad \pi(p, \sigma) = p$$

ed azione canonica a destra di \mathbf{G} sulle fibre definita da

$$(24.3.2) \quad (p, \sigma) \cdot a = (p, \sigma \circ a), \quad \forall (p, \sigma) \in P(E), \forall a \in \mathbf{G}.$$

Su $P(E)$ possiamo considerare la topologia di sottospazio di $B \times \mathcal{C}(F, E)$.

DEFINIZIONE XXIV.3.3. Il \mathbf{G} -fibrato principale in senso debole $P(\xi)$ si dice *associato* a ξ .

Chiaramente, se U è un aperto di B , la restrizione $\xi|_U$ di ξ ad U è ancora un F -fibrato con gruppo strutturale \mathbf{G} se tale era ξ .

DEFINIZIONE XXIV.3.4. Se $\xi_i = (E_i \xrightarrow{\pi_i} B_i)$, $i = 1, 2$, sono fibrati topologici con la stessa fibra tipica F e gruppo strutturale \mathbf{G} , un morfismo continuo di fibrati $(f, \tilde{f}) : \xi_1 \rightarrow \xi_2$ è un F -morfismo se

$$(24.3.3) \quad \tilde{f} \circ \sigma \in \mathbf{A}(F, E_{2f(p)}), \quad \forall p \in B_1, \quad \forall \sigma \in \mathbf{A}(F, E_p).$$

Osserviamo che un F -morfismo si restringe, su ciascuna fibra di ξ_1 , ad un omeomorfismo con la corrispondente fibra di ξ_2 .

DEFINIZIONE XXIV.3.5. Se $B_1 = B_2$, $f = \text{id}$ ed \tilde{f} è un omeomorfismo, diciamo che (f, \tilde{f}) è una F -equivalenza.

Una F -equivalenza è invertibile e l'inversa è ancora una F -equivalenza.

DEFINIZIONE XXIV.3.6. Se B è uno spazio topologico ed F un \mathbf{G} -spazio fedele, chiamiamo *fibrato banale* di base B , fibra F e gruppo strutturale \mathbf{G} , il fibrato

$$(24.3.4) \quad \pi : B \times F \ni (p, \mu) \rightarrow p \in B, \quad \text{con } \mathbf{A}(F, \{p\} \times F) = \mathbf{G}, \quad \forall p \in F.$$

DEFINIZIONE XXIV.3.7. Un F -fibrato $\xi = (E \xrightarrow{\pi} B)$ si dice *di Steenrod* se è localmente F -equivalente ad un fibrato banale.

Un \mathbf{G} -fibrato di Steenrod si dice un *\mathbf{G} -fibrato principale*.

PROPOSIZIONE XXIV.3.8. Sia $\xi = (E \xrightarrow{\pi} B)$ un F -fibrato in senso debole. *Condizione necessaria e sufficiente affinché ξ sia di Steenrod è che $P(\xi)$ sia principale.*

DIMOSTRAZIONE. Se $\phi : U \times F \rightarrow E|_U$ è una trivializzazione di ξ su un aperto U di B , allora $\hat{\phi} : U \times \mathbf{G} \ni (p, a) \rightarrow \phi \circ a \in P(E)|_U$ è una trivializzazione di $P(\xi)$ su U . Viceversa, se $\psi : U \times \mathbf{G} \rightarrow P(E)|_U$ è una trivializzazione di $P(\xi)$ su U , possiamo definire una trivializzazione $\phi : U \times F \rightarrow E|_U$ ponendo $\phi(p, \mu) = \psi(p, e_{\mathbf{G}})(\mu)$. \square

Un *atlante di trivializzazione* di ξ è il dato di un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_i\}$ di B e, per ogni indice i , di un'applicazione continua $\phi_i \in \mathcal{C}(U_i \times F, E|_{U_i})$ per cui $(\text{id}_{U_i}, \phi_i)$ sia una F -equivalenza del fibrato banale $(U_i \times F \rightarrow U_i)$ con $\xi|_{U_i}$. Per ogni $p \in U_i$, la $F \ni \mu \rightarrow \phi_i(p, \mu)$ è un elemento di $\mathbf{A}(F, E_p)$. Le funzioni di transizione sono quindi della forma

$$(24.3.5) \quad (p, \mu) \rightarrow (p, \phi_{i,j}(p)\mu), \quad \text{con } \phi_{i,j} \in \mathcal{C}(U_{i,j}, \mathbf{G}).$$

Viceversa, abbiamo

PROPOSIZIONE XXIV.3.9. *Siano F un \mathbf{G} -spazio fedele, B uno spazio topologico ed $\mathcal{U} = \{U_i\}$ un suo ricoprimento aperto. Sia poi assegnata una famiglia $\{\phi_{i,j} \in \mathcal{C}(U_{i,j}, \mathbf{G})\}$ con*

$$\phi_{i,j}\phi_{j,k}\phi_{k,i} = e_{\mathbf{G}} \text{ su } U_{i,j,k}, \quad \forall i, j, k.$$

Esiste allora unico, a meno di equivalenze, un F -fibrato di Steenrod su B , con gruppo strutturale \mathbf{G} , che ammetta un atlante di trivializzazione con ricoprimento aperto \mathcal{U} e funzioni di transizione $\{\phi_{i,j}\}$. \square

Ne segue facilmente la

PROPOSIZIONE XXIV.3.10. *Se ξ è un \mathbf{G} -fibrato principale ed F un \mathbf{G} -spazio fedele, esiste unico, a meno di equivalenze, un F -fibrato di Steenrod θ con $\xi = P(\theta)$. \square*

La Proposizione XXIV.3.10 riduce lo studio dei fibrati di Steenrod generali a quello dei fibrati principali.

XXIV.4. Un Lemma di trivializzazione

Sia \mathbf{G} un gruppo topologico ed F un \mathbf{G} -spazio fedele.

LEMMA XXIV.4.1. *Sia $\xi = (E \xrightarrow{\pi} B)$ un F -fibrato principale e siano B_1, B_2 due sottoinsiemi chiusi di B tali che $B_1 \cup B_2 = B$ e $B_1 \cap B_2$ sia un retratto¹ di B_2 su $B_1 \cap B_2$. Se i fibrati $\xi|_{B_1}$ e $\xi|_{B_2}$ sono trivializzabili, allora anche ξ è trivializzabile.*

Se $\phi_1 : B_1 \times F \rightarrow E|_{B_1}$ definisce una F -trivializzazione di ξ su B_1 , è possibile trovare una trivializzazione di ξ su B definita da una $\phi : B \times F \rightarrow E$ che estende ϕ_1 .

DIMOSTRAZIONE. Siano $\rho \in \mathcal{C}(B_2, B_1 \cap B_2)$ una retrazione e $\phi_i \in \mathcal{C}(U_i \times F, E|_{U_i})$, per $i = 1, 2$, applicazioni di trivializzazione. La funzione di transizione $\phi_{1,2} \in \mathcal{C}(B_1 \cap B_2, \mathbf{G})$ verifica la

$$\phi_1(p, \mu) = \phi_2(p, \phi_{1,2}(p)\mu), \quad \forall p \in B_1 \cap B_2, \quad \forall \mu \in F.$$

Allora la $\phi : B \times F \rightarrow E$, definita da

$$\phi(p, \mu) = \begin{cases} \phi_1(p, \mu) & \text{se } p \in B_1, \mu \in F, \\ \phi_2(p, \phi_{1,2}(\rho(p))\mu) & \text{se } p \in B_2, \mu \in F, \end{cases}$$

è una trivializzazione di ξ su B . \square

Possiamo ora dimostrare

LEMMA XXIV.4.2. *Sia F uno spazio \mathbf{G} -fedele. Ogni F -fibrato di Steenrod su $[0, 1]^n$ è trivializzabile.*

¹Questo significa che esiste un'applicazione continua $\rho \in \mathcal{C}(B_2, B_1 \cap B_2)$ tale che $\rho(p) = p$ per ogni $p \in B_1 \cap B_2$.

DIMOSTRAZIONE. Per un intero positivo ν sufficientemente grande possiamo suddividere $[0, 1]^\nu$ in ν^n ipercubi di lato $1/\nu$, su ciascuno dei quali ξ sia trivialisabile. Ordiniamo gli ν^n ipercubi Q_1, \dots, Q_{ν^n} in ordine lessicografico. In questo modo, per ogni h con $2 \leq h \leq \nu^n$ l'ipercubo Q_h si retrae per deformazione sulla sua intersezione con $\bigcup_{i < h} Q_i$. La tesi segue allora per ricorrenza, utilizzando il Lemma XXIV.4.1. \square

XXIV.5. Richiami sui CW-complessi

Indichiamo con D^k la palla unitaria chiusa $D^k = \{x \in \mathbb{R}^k \mid |x| \leq 1\}$ di \mathbb{R}^k e con $S^{k-1} = \{x \in \mathbb{R}^k \mid |x| = 1\}$ la sua frontiera in \mathbb{R}^k .

Sia M uno spazio topologico. Una *cella* di dimensione k di M è il dato di un sottoinsieme e di M e di un'applicazione continua $\phi_e : D^k \rightarrow M$ la cui restrizione alla parte interna $\overset{\circ}{D}^k$ di D^k definisca un omeomorfismo di $\overset{\circ}{D}^k$ su e , con la topologia di sottospazio. La ϕ_e si dice *funzione caratteristica* della cella e . Chiamiamo \bar{e} la *cella chiusa* e $\partial e = \phi_e(S^{k-1})$ la frontiera di e .

Una *partizione in celle* di M è un ricoprimento \mathbf{K} di M mediante celle (aperte) tale che, per ogni $e \in \mathbf{K}$, la frontiera ∂e sia contenuta in un'unione di celle di \mathbf{K} di dimensione più piccola.

Diciamo che M è un *CW-complesso* se è uno spazio di Hausdorff e su di esso è assegnata una partizione in celle \mathbf{K} con le proprietà:

- (C) ogni cella chiusa interseca un numero finito di celle;
- (W) $\bar{\mathbf{K}} = \{\bar{e} \mid e \in \mathbf{K}\}$ è un ricoprimento fondamentale² di M .

Indichiamo con \mathbf{K}_k ed $\mathbf{K}_{(k)}$, rispettivamente, l'insieme delle celle di dimensione k di \mathbf{K} e delle celle di dimensione $\leq k$ di \mathbf{K} . L'unione $\mathbf{S}_k(M) = \bigcup \mathbf{K}_{(k)}$ delle celle di dimensione minore o uguale di k si dice *scheletro di dimensione k* di M . L'estremo superiore dell'insieme dei numeri interi non negativi k per cui $\mathbf{K}_k \neq \emptyset$ si dice la *dimensione* di M .

Un CW-complesso M è *localmente finito* se ogni punto ha un intorno aperto che interseca un numero finito di celle. Questo equivale al fatto che ogni cella intersechi soltanto un numero finito di celle chiuse.

Un CW-complesso M è *compatto* se e soltanto se la sua partizione in celle \mathbf{K} è finita.

Un CW-complesso M è *connesso* se e soltanto se il suo scheletro 1-dimensionale $\mathbf{S}_1(M)$ è connesso. Più in generale, se $p_0 \in M$ è una cella di dimensione 0, abbiamo $\pi_q(M) = \pi(\mathbf{S}_{q+1}(M))$ per ogni intero $q \geq 0$.

Ricordiamo che uno spazio topologico M è *m -connesso*³ se, per ogni intero k con $0 \leq k \leq m$, ogni $f \in \mathcal{C}(S^k, M)$ è omotopa ad un'applicazione costante. Una coppia topologica (M, A) è *m -connessa* se, per ogni intero k con $0 \leq k \leq m$, ogni applicazione continua $f \in \mathcal{C}(D^k, S^{k-1}; M, A)$ è omotopa ad un'applicazione costante. Vale la

²Ciò significa che un sottoinsieme A di M è chiuso se e soltanto se $A \cap \bar{e}$ è chiuso per ogni $e \in \mathbf{K}$.

³Conveniamo che un qualsiasi spazio topologico non vuoto sia -1 -connesso.

PROPOSIZIONE XXIV.5.1. Ogni applicazione $f \in \mathcal{C}(M, N)$ di un CW-complesso M di dimensione minore o uguale ad m in uno spazio topologico m -connesso N è omotopa ad un'applicazione costante.

Sia A un sotto-CW-complesso di un CW-complesso M ed $f \in \mathcal{C}(M, A; N, B)$ un'applicazione a valori in una coppia m -connessa. Se tutte le celle contenute in $M \setminus A$ hanno dimensione minore o uguale ad m , allora f è A -omotopa⁴ ad un'applicazione a valori in B .

XXIV.6. Invarianza omotopica dei fibrati di Steenrod a base CW

Sia \mathbf{G} un gruppo topologico ed F uno spazio \mathbf{G} -fedele.

LEMMA XXIV.6.1. Sia e una cella di uno spazio topologico M e siano ξ_1 e ξ_2 due F -fibrati di Steenrod su $e \times [0, 1]$. Sia $N = (e \times \{0\}) \cup (\partial e \times [0, 1])$. Se ξ_1 e ξ_2 sono F -equivalenti su N , allora ξ_1 e ξ_2 sono F -equivalenti ed ogni F -equivalenza $(\text{id}_N, \psi_N) : \xi_1|_N \rightarrow \xi_2|_N$ si estende ad una F -equivalenza $(\text{id}_{e \times [0, 1]}, \psi) : \xi_1 \rightarrow \xi_2$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\phi : D^n \times [0, 1] \rightarrow M \times [0, 1]$ il prodotto della funzione caratteristica della cella e per l'identità sull'intervallo $[0, 1]$. Poniamo

$$N = (e \times \{0\}) \cup (\partial e \times [0, 1]),$$

dimodoché

$$\phi^{-1}(N) = (D^n \times \{0\}) \cup (D^n \times [0, 1]).$$

Per ipotesi, è data un'equivalenza $(\text{id}_N, \psi_N) : \xi_1|_N \rightarrow \xi_2|_N$.

Fissiamo una retrazione $\rho : D^n \times [0, 1] \rightarrow \phi^{-1}(N)$. Poiché $D^n \times [0, 1]$ è omeomorfo a $[0, 1]^{n+1}$, per il Lemma XXIV.4.2 i fibrati di Steenrod sulla base $D^n \times [0, 1]$ sono trivializzabili. Se $\lambda_i : (D^n \times [0, 1]) \times F \rightarrow E_{\phi^*(\xi_i)}$ ed $\eta_i : (D^n \times [0, 1]) \times F \rightarrow E_{\rho^*(\phi^*(\xi_i))}$ sono omeomorfismi di trivializzazione, la $\lambda_i \circ \eta_i^{-1} : E_{\rho^*(\phi^*(\xi_i))} \rightarrow E_{\phi^*(\xi_i)}$ definisce una F -equivalenza tra $\rho^*(\phi^*(\eta_i))$ e $\phi^*(\eta_i)$ che è l'identità sopra $\phi^{-1}(N)$. Osserviamo ora che la F -equivalenza $\psi_N : E_{\xi_1}|_N \rightarrow E_{\xi_2}|_N$ definisce una F -equivalenza $\psi_N^* : E_{\phi^*(\xi_1)}|_{\phi^{-1}(N)} \rightarrow E_{\phi^*(\xi_2)}|_{\phi^{-1}(N)}$, mediante

$$\begin{aligned} \{(x, t; \mu) \in \phi^{-1}(N) \times E_{\xi_1} \mid \phi(x, t) = \pi_1(\mu)\} &\ni (x, t; \mu) \rightarrow \psi_N^*(x, t; \mu) \\ &= (x, t; \psi_N(\phi(x, t), \mu)) \in \{(x, t; \mu) \in \phi^{-1}(N) \times E_{\xi_2} \mid \phi(x, t) = \pi_2(\mu)\}. \end{aligned}$$

La ψ_N^* si estende in modo naturale ad un' F -equivalenza tra $\rho^*(\phi^*(\xi_1))$ e $\rho^*(\phi^*(\xi_2))$. Per composizione, otteniamo così un'equivalenza tra $\phi^*(\xi_1)$ e $\phi^*(\xi_2)$ che estende quella data tra le loro restrizioni a $\phi^{-1}(N)$. Poiché ϕ è un omeomorfismo fuori di $\phi^{-1}(N)$, questa F -equivalenza tra $\phi^*(\xi_1)$ e $\phi^*(\xi_2)$ definisce una F -equivalenza tra ξ_1 e ξ_2 che estende quella assegnata su N . \square

TEOREMA XXIV.6.2. Sia $\xi = (E \xrightarrow{\pi} B)$ un F -fibrato di Steenrod, M un CW-complesso, A un suo sotto-CW-complesso, ed $f = \{f_t\} \in \mathcal{C}(M \times [0, 1], B)$ un' A -omotopia⁵. Allora $f_0^*(\xi)$ ed $f_1^*(\xi)$ sono equivalenti e possiamo trovare un'equivalenza $(\text{id}_M, \phi) : f_0^*(\xi) \rightarrow f_1^*(\xi)$ che sia l'identità su $f_0^*(\xi)|_A$.

⁴Esiste cioè una $\tilde{f} = \{f_t\} \in \mathcal{C}(M \times [0, 1], N)$ tale che $f_0 = \tilde{f}$, $f_1(M) \subset B$ ed $f_t(p) = f_0(p)$ per ogni $p \in A$ ed ogni $t \in [0, 1]$.

⁵Ciò significa che $t \rightarrow f_t(p)$ è costante per $p \in A$.

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo fissata la struttura di CW -complesso di M .

Sia $p_M : M \times [0, 1] \rightarrow M$ la proiezione del prodotto cartesiano sul primo fattore. Consideriamo su $M \times [0, 1]$ i due F -fibrati

$$\zeta_0 = p_M^*(f_0^*(\xi)) \quad \text{e} \quad \zeta_1 = f^*(\xi).$$

Essi hanno uguale restrizione ad $(M \times \{0\}) \cup (A \times [0, 1])$ e l'omeomorfismo $M \ni p \rightarrow (p, 1) \in M \times [0, 1]$ trasforma $\zeta_0|_{M \times \{1\}}$ in $f_0^*(\xi)$ e $\zeta_1|_{M \times \{1\}}$ in $f_1^*(\xi)$. Basterà quindi costruire una F -equivalenza tra ζ_0 e ζ_1 che sia l'identità sopra ad $(M \times \{0\}) \cup (A \times [0, 1])$.

Sia $N_{-1} = (M \times \{0\}) \cup (A \times [0, 1])$ e, per ogni intero non negativo q , poniamo

$$N_q = (M \times \{0\}) \cup (A \times [0, 1]) \cup (\mathbf{S}_q(M) \times [0, 1]).$$

Dimostriamo per ricorrenza che è possibile definire una successione $\{\phi_q\}_{q \geq -1}$ tale che

- (1) ϕ_{-1} sia l'identità sulle fibre sopra $(M \times \{0\}) \cup (A \times [0, 1])$;
- (2) $(\text{id}_{N_q}, \phi_q) : \zeta_0|_{N_q} \rightarrow \zeta_1|_{N_q}$ sia una F -equivalenza;
- (3) $\phi_{q+1} = \phi_q$ su $E_{\zeta_0}|_{N_q}$.

La ϕ_{-1} è assegnata. Dimostriamo per ricorrenza che, fissato $q \geq 0$ ed assegnata ϕ_{q-1} , è possibile costruire ϕ_q . Utilizziamo a questo scopo il lemma di Zorn. Indichiamo con Ψ l'insieme delle coppie (Q, ψ) formate da un sotto- CW -complesso Q di M con

$$N_{q-1} \subset Q \subset N_q$$

e da un'applicazione continua

$$\psi_Q : E_{\zeta_0}|_Q \rightarrow E_{\zeta_1}|_Q \quad \text{t.c.} \quad (\text{id}_Q, \psi_Q) : \zeta_1|_Q \rightarrow \zeta_2|_Q \quad \text{sia una } F\text{-equivalenza.}$$

Definiamo una relazione d'ordine su Ψ ponendo

$$(Q_1, \psi_{Q_1}) < (Q_2, \psi_{Q_2}) \iff Q_1 \subsetneq Q_2 \quad \text{e} \quad \psi_{Q_2} = \psi_{Q_1} \quad \text{su} \quad E_{\zeta_0}|_{Q_1}.$$

La famiglia Ψ è non vuota, perché contiene (N_{q-1}, ϕ_{q-1}) ed è induttiva perché ogni unione di celle Q con $N_{q-1} \subset Q \subset N_q$ è ancora un sotto- CW -complesso di M . Per il Lemma di Zorn Ψ contiene un elemento massimale (Q, ψ_Q) . Dal Lemma XXIV.6.1 segue facilmente che deve risultare $Q = N_q$. La tesi è conseguenza del fatto che gli N_q formano un ricoprimento fondamentale di M , e quindi gli $E_{\zeta_0}|_{N_q}$ un ricoprimento fondamentale di E_{ζ_0} . Possiamo quindi definire $\phi : E_{\zeta_0} \rightarrow E_{\zeta_1}$ ponendo $\phi = \phi_q$ su $E_{\zeta_0}|_{N_q}$. \square

XXIV.7. Fibrati universali

Sia \mathbf{G} un gruppo topologico ed F un \mathbf{G} -spazio fedele. Sia m un intero non negativo o $+\infty$.

DEFINIZIONE XXIV.7.1. Un F -fibrato di Steenrod $\zeta = (E_\zeta \xrightarrow{\pi_\zeta} B_\zeta)$ si dice *m -universale* se per ogni F -fibrato di Steenrod $\xi = (E_\xi \xrightarrow{\pi_\xi} B_\xi)$ la cui base B_ξ sia un CW -complesso di dimensione minore o uguale ad m esiste un'applicazione continua $f \in \mathcal{C}(B_\xi, B_\zeta)$ tale che $f^*(\zeta)$ sia equivalente a ξ .

Si verifica facilmente che

PROPOSIZIONE XXIV.7.2. *Condizione necessaria e sufficiente affinché un F -fibrato di Steenrod $\zeta = (E_\zeta \xrightarrow{\pi_\zeta} B_\zeta)$ sia m -universale è che il \mathbf{G} -fibrato principale associato $P(\zeta)$ sia m -universale. \square*

Possiamo quindi limitarci, nel seguito di questo paragrafo, a considerare \mathbf{G} -fibrati principali.

TEOREMA XXIV.7.3. *Sia $\zeta = (E_\zeta \xrightarrow{\pi_\zeta} B_\zeta)$ un \mathbf{G} -fibrato principale, il cui spazio totale E_ζ sia $(m-1)$ -connesso. Allora, per ogni \mathbf{G} -fibrato principale $\xi = (E_\xi \xrightarrow{\pi_\xi} B_\xi)$, la cui base sia un CW -complesso di dimensione minore o uguale ad m , esiste un'applicazione continua $f \in \mathcal{C}(B_\xi, B_\zeta)$ tale che ξ sia equivalente ad $f^*(\zeta)$.*

Questo teorema è conseguenza della

PROPOSIZIONE XXIV.7.4. *Siano ζ e ξ come nell'enunciato del Teorema XXIV.7.3. Se A è un sotto- CW -complesso di B_ξ ed $(f_A, \tilde{f}_A) : \xi|_A \rightarrow \zeta$ un morfismo di \mathbf{G} -fibrati principali, allora esiste un morfismo $(f, \tilde{f}) : \xi \rightarrow \zeta$ di \mathbf{G} -fibrati principali con $\tilde{f} = \tilde{f}_A$ su $\pi_\xi^{-1}(A)$.*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo fissata la struttura di CW -complesso di B_ξ . Dimostriamo per ricorrenza che è possibile definire, per ogni intero k con $0 \leq k \leq m$, un'estensione $(f_k, \tilde{f}_k) : \xi|_{A \cup S_k(B_\xi)} \rightarrow \zeta$ di $(f_A, \tilde{f}_A) : \xi|_A \rightarrow \zeta$.

Per l'argomento che utilizzeremo, è utile osservare che, per ogni intero $k \geq 0$ ed ogni sottoinsieme \mathbf{J} di \mathbf{K}_{k+1} , l'unione $A \cup S_k(B_\xi) \cup (\cup \mathbf{J})$ è ancora un sotto- CW -complesso di B_ξ .

Poiché $S_0(B_\xi) \setminus A$ è un sottospazio discreto, l'esistenza di (f_0, \tilde{f}_0) è banale. Sia $0 \leq k < m$; supponiamo di aver costruito l'estensione (f_k, \tilde{f}_k) .

Per ogni $\mathbf{J} \subset \mathbf{K}_{k+1}$ poniamo $A_{\mathbf{J}} = A \cup S_k(B_\xi) \cup (\cup \mathbf{J})$. Sia \mathcal{J} la famiglia delle $(\mathbf{J}, f_{\mathbf{J}}, \tilde{f}_{\mathbf{J}})$ che consistono di un sottoinsieme \mathbf{J} di \mathbf{K}_{k+1} e di un omomorfismo di \mathbf{G} -fibrati principali $(f_{\mathbf{J}}, \tilde{f}_{\mathbf{J}}) : \xi|_{A_{\mathbf{J}}} \rightarrow \zeta$ che coincide con (f_k, \tilde{f}_k) su $A \cup S_k(B_\xi) = A_0$. Introduciamo su \mathcal{J} l'ordinamento

$$(\mathbf{J}_1, f_{\mathbf{J}_1}, \tilde{f}_{\mathbf{J}_1}) < (\mathbf{J}_2, f_{\mathbf{J}_2}, \tilde{f}_{\mathbf{J}_2}) \iff \mathbf{J}_1 \subsetneq \mathbf{J}_2 \text{ ed } \tilde{f}_{\mathbf{J}_2}|_{\pi_\xi^{-1}(A_{\mathbf{J}_1})} = \tilde{f}_{\mathbf{J}_1}.$$

La famiglia \mathcal{J} è non vuota perché contiene (A_0, f_k, \tilde{f}_k) ed è induttiva. Per il Lemma di Zorn ammette un elemento massimale $(\mathbf{J}_0, f_{\mathbf{J}_0}, \tilde{f}_{\mathbf{J}_0})$. Supponiamo per assurdo che questo elemento massimale sia diverso da \mathbf{K}_{k+1} . Scriviamo per semplicità di notazione $A_{\mathbf{J}_0} = B$, $f_{\mathbf{J}_0} = g$ ed $\tilde{f}_{\mathbf{J}_0} = \tilde{g}$.

Dunque B è un sotto- CW -complesso di B_ξ che contiene $S_k(B_\xi)$, ed è definito un omomorfismo di \mathbf{G} -fibrati principali $(g, \tilde{g}) : \xi|_B \rightarrow \zeta$.

Per ipotesi, vi è almeno una cella $\mathbf{e} \in \mathbf{K}_{k+1}$ non contenuta in B . Sia $\phi_{\mathbf{e}} \in \mathcal{C}(D^{k+1}, M)$ la sua funzione caratteristica. Poiché $\bar{\mathbf{e}}$ è contrattile, la restrizione di ξ ad $\bar{\mathbf{e}}$ è banale. Fissiamo una trivializzazione $\lambda_{\bar{\mathbf{e}}} : \bar{\mathbf{e}} \times \mathbf{G} \rightarrow \pi_\xi^{-1}(\bar{\mathbf{e}})$ e consideriamo l'applicazione continua $\gamma \in \mathcal{C}(S^k, E_\zeta)$ definita dalla composizione

$$S^k \xrightarrow{\phi_{\mathbf{e}}} \partial e \xrightarrow{\lambda_{\bar{\mathbf{e}}}(\cdot, e_{\mathbf{G}})} \pi_\xi^{-1}(\partial e) \xrightarrow{\tilde{g}} E_\zeta.$$

Poiché abbiamo supposto che E_ζ fosse k -connesso, la γ si estende ad un'applicazione continua $\tilde{\gamma} \in \mathcal{C}(D^{k+1}, E_\zeta)$. La

$$\tilde{u}(\sigma) = \begin{cases} \tilde{g}(\sigma) & \text{se } \pi_\xi(\sigma) \in B, \\ \tilde{\gamma}(\phi_e^{-1}(p)) \cdot \lambda_e^{-1}(\sigma) & \text{se } p = \pi_\xi(\sigma) \in \mathbf{e}, \end{cases}$$

con $u = \pi_\zeta \circ \tilde{u}$, la (u, \tilde{u}) è un morfismo di \mathbf{G} -fibrati principali che estende (g, \tilde{g}) a $\xi|_{B \cup \mathbf{e}}$. Poiché $(\mathbf{J}_0 \cup \{\mathbf{e}\}, u, \tilde{u}) \in \mathcal{J}$ e

$$(\mathbf{J}_0, g, \tilde{g}) < (\mathbf{J}_0 \cup \{\mathbf{e}\}, u, \tilde{u}),$$

questo contraddice la massimalità di $(\mathbf{J}_0, g, \tilde{g})$. Ciò dimostra l'esistenza dell'estensione $(f_{k+1}, \tilde{f}_{k+1})$ e dunque, per ricorrenza, se $m < \infty$, dell'estensione $(f_m, \tilde{f}_m) = (f, \tilde{f})$. Se $m = \infty$, osserviamo che, dal momento che gli $A \cup \mathbf{S}_k(M)$ formano un ricoprimento fondamentale di M e gli $E_\xi|_{A \cup \mathbf{S}_k(M)}$ un ricoprimento fondamentale di E_ξ , la $(f, \tilde{f}) : \xi \rightarrow \zeta$ definita da $(f, \tilde{f}) = (f_k, \tilde{f}_k)$ su $\xi|_{A \cup \mathbf{S}_k(M)}$ è un omomorfismo di \mathbf{G} -fibrati principali. La dimostrazione è completa. \square

OSSERVAZIONE XXIV.7.5. Si verifica facilmente che la condizione che E_ζ sia $(m-1)$ -connesso è necessaria perché l'enunciato della Proposizione sia valido per ogni \mathbf{G} -fibrato principale ξ la cui base sia un CW -complesso di dimensione minore o uguale ad m . Infatti ogni applicazione continua $\phi \in \mathcal{C}(S^n, E_\zeta)$ definisce un \mathbf{G} -omomorfismo $(f_{S^{n-1}}, \tilde{f}_{S^{n-1}})$ del fibrato banale $S^n \times \mathbf{G} \rightarrow S^n$ in ζ , ove si ponga $\tilde{f}(x, a) = \phi(x)a$ per ogni $x \in S^n$ ed $a \in \mathbf{G}$. Un'estensione (f, \tilde{f}) di $(f_{S^{n-1}}, \tilde{f}_{S^{n-1}})$ ad un \mathbf{G} -omomorfismo del fibrato banale $D^{n+1} \times \mathbf{G} \rightarrow D^{n+1}$ in ζ definisce un'estensione $\tilde{f}(x, e_{\mathbf{G}})$ di ϕ ad un'applicazione continua da D^{n+1} in E_ζ .

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA XXIV.7.3. Fissiamo una cella $A = \{p_0\}$ di dimensione 0 di B_ξ e consideriamo l'applicazione che fa corrispondere al punto p_0 un qualsiasi punto z_0 di B_ζ . Fissati un punto $\sigma_0 \in \pi_\xi^{-1}(p_0)$ ed un punto $\tau_0 \in \pi_\zeta^{-1}(z_0)$, la $\sigma_0 a \rightarrow \tau_0 a$, per ogni $a \in \mathbf{G}$, definisce un morfismo di \mathbf{G} -fibrati principali $\xi|_{p_0} \rightarrow \zeta$. Per la Proposizione XXIV.7.4 esso si estende ad un omomorfismo di \mathbf{G} -fibrati principali $(f, \tilde{f}) : \xi \rightarrow \zeta$, che definisce l'equivalenza $\xi \simeq f^*(\zeta)$. \square

TEOREMA XXIV.7.6. Sia $\zeta = (E_\zeta \xrightarrow{\pi_\zeta} B_\zeta)$ un fibrato \mathbf{G} -principale il cui spazio totale E_ζ sia m -connesso. Sia M un CW -complesso di dimensione minore o uguale ad m e siano $f_0, f_1 \in \mathcal{C}(M, B_\zeta)$ due applicazioni continue. Se $f_0^*(\zeta)$ ed $f_1^*(\zeta)$ sono equivalenti, allora f_0 ed f_1 sono omotope.

DIMOSTRAZIONE. Siano $f_i^*(\zeta) = (E_i \xrightarrow{\pi_i} M)$ con

$$E_i = \{(p, \tau) \in M \times E_\zeta \mid f_i(p) = \pi_\zeta(\tau)\}, \quad \pi_i : E_i \ni (p, \tau) \rightarrow p \in M.$$

Gli omomorfismi standard $(f_i, \tilde{f}_i) : f_i^*(\zeta) \rightarrow \zeta$ sono definiti da $f_i(p, \tau) = \tau$ per ogni $(p, \tau) \in E_i$. Per ipotesi esiste un'equivalenza $(\phi, \tilde{\phi}) : f_1^*(\zeta) \rightarrow f_2^*(\zeta)$ di \mathbf{G} -fibrati principali, con $\phi(p) = p$ e $\tilde{\phi}(p, \tau) = (p, \hat{\phi}(p, \tau))$ per $(p, \tau) \in E_1$, ove $\hat{\phi} \in \mathcal{C}^\infty(E_1, E_\zeta)$ e $\hat{\phi}(p, \tau a) = \hat{\phi}(p, \tau)a$ per ogni $(p, \tau) \in E_1$ ed $a \in \mathbf{G}$.

Il prodotto $M \times [0, 1]$ è un CW -complesso di dimensione minore o uguale ad $(m+1)$. Sia $\varpi : M \times [0, 1] \rightarrow M$ la proiezione sul primo fattore e $\xi = \varpi^*(f_0^*(\zeta))$

l'immagine inversa su $M \times [0, 1]$ di $f_0^*(\zeta)$. Osserviamo che $A_i = M \times \{i\}$, per $i = 0, 1$, ed $A = A_0 \cup A_1$, sono sottospazi cellulari di $M \times [0, 1]$. Definiamo $(f_A, \tilde{f}_A) : \xi|_A \rightarrow \zeta$ ponendo

$$f_A(p, i) = f_i(p) \quad \text{se } p \in M, i = 0, 1, \text{ e}$$

$$\tilde{f}_A(p, i, \tau) = \begin{cases} \tilde{f}_1(p, \tau) & \text{se } (p, \tau) \in E_1, i = 0, \\ \tilde{f}_2(p, \hat{\phi}(p, \tau)) & \text{se } (p, \tau) \in E_1, i = 1. \end{cases}$$

Per la Proposizione XXIV.7.4 (f_A, \tilde{f}_A) si estende ad una $(f, \tilde{f}) : \xi \rightarrow \zeta$. In particolare, $f = \{f_i\} \in \mathcal{C}(M \times [0, 1], B_\zeta)$ definisce un'omotopia tra f_0 ed f_1 . \square

Come conseguenza dei Teoremi XXIV.7.3 e XXIV.7.6 abbiamo

TEOREMA XXIV.7.7. *Sia $\zeta = (E_\zeta \xrightarrow{\pi_\zeta} B_\zeta)$ un \mathbf{G} -fibrato principale il cui spazio totale E_ζ sia m -connesso ed M un CW-complesso di dimensione minore o uguale ad m . La corrispondenza*

$$\mathcal{C}(M, B_\zeta) \ni f \longrightarrow f^*(\zeta)$$

definisce per passaggio ai quozienti una bigezione tra l'insieme $\pi(M, B_\zeta)$ delle classi di omotopia di applicazioni continue da M in B_ζ e l'insieme dei \mathbf{G} -fibrati principali con base M , modulo equivalenza. \square

XXIV.8. Fibrati di Milnor

J. Milnor⁶ ha descritto una costruzione canonica di fibrati m -universali, che si basa sulle proprietà dei *giunti* di spazi topologici.

Giunto di spazi topologici. Ricordiamo la costruzione del *giunto* di due spazi topologici. Se A, B sono due spazi topologici non vuoti, consideriamo lo spazio vettoriale libero generato dall'unione disgiunta di A e B , ed indichiamo con $A * B$ l'insieme⁷

$$(24.8.1) \quad A * B = \{(1-t)a + tb \mid a \in A, b \in B, 0 \leq t \leq 1\}.$$

L'applicazione

$$\pi : A \times B \times [0, 1] \ni (a, b, t) \longrightarrow (1-t)a + tb \in A * B$$

è surgettiva e possiamo quindi considerare su $A * B$ la topologia quoziente: $A * B$ si ottiene da $A \times B \times [0, 1]$ identificando ad un punto ciascuno dei sottoinsiemi $\{a\} \times B \times 0$ ed $A \times \{b\} \times 1$. Il giunto $A * B$ è connesso per archi e contiene i sottospazi chiusi $\pi(A \times B \times \{0\})$, omeomorfo ad A , $\pi(A \times B \times \{1\})$ omeomorfo a B , $\pi(A \times B \times \{\frac{1}{2}\})$, omeomorfo ad $A \times B$. Identificheremo a volte nel seguito, per semplicità di scrittura, $A, B, A \times B$ ai corrispondenti sottospazi di $A * B$.

⁶John Milnor, *Construction of universal bundles, II*, Annals of Mathematics, (63) 1956, pp. 430-436.

⁷Supponiamo per semplicità di scrittura che A e B siano disgiunti. Altrimenti, dovremmo considerare l'unione disgiunta $A \sqcup B$ come il sottoinsieme di $(A \cup B) \times \{0, 1\}$ formato dalle coppie $(a, 0)$ con $a \in A$ e $(b, 1)$ con $b \in B$ e scrivere, in (24.8.1), $(1-t)(a, 0) + t(b, 1)$ invece di $(1-t)a + tb$.

Casi particolari sono il *cono di base* A , che è il giunto $A * D^0$ di A con l'insieme formato da un solo punto e la *sospensione di* A , che è il giunto $A * S^0$ di A con lo spazio formato da due punti.

La giunzione di spazi topologici è un'applicazione associativa: si verifica facilmente che, se A_1, A_2, A_3 sono tre spazi topologici, allora $(A_1 * A_2) * A_3$ è omeomorfo ad $A_1 * (A_2 * A_3)$. Potremo quindi indicare senza ambiguità con $A_1 * \cdots * A_n$ il giunto di n spazi topologici. Possiamo ancora scrivere

$$(24.8.2) \quad A_1 * \cdots * A_n = \{t_1 a_1 + \cdots + t_n a_n \mid a_i \in A_i, t_i \geq 0, t_1 + \cdots + t_n = 1\}.$$

Identificheremo A_i al sottospazio formato dai punti con $t_i = 1$. Vale la

PROPOSIZIONE XXIV.8.1. *Il giunto $A_1 * \cdots * A_n$ di n spazi topologici è $(n - 2)$ -connesso.*

Premettiamo il

LEMMA XXIV.8.2. *Se A_1 è connesso per archi ed $A_2 \neq \emptyset$, allora $A_1 * A_2$ è semplicemente connesso.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $f \in \mathcal{C}(S^1, A_1 * A_2)$. Possiamo scrivere f nella forma

$$f(s) = (1 - t(s))a_1(s) + t(s)a_2(s), \quad \text{con } t \in \mathcal{C}(S^1, [0, 1]), \\ a_1 \in \mathcal{C}(S^1 \setminus \{t(s) = 1\}), \quad a_2 \in \mathcal{C}(S^1 \setminus \{t(s) = 0\}).$$

Definiamo una funzione continua $b_1 \in \mathcal{C}(S^1, A_1)$ che coincida con a_1 quando $t(s) \leq \frac{1}{2}$. L'insieme $\{s \in S^1 \mid t(s) > \frac{1}{2}\}$ è unione, al più numerabile, di archi aperti $\widehat{s's''}$. Poiché A_1 è connesso per archi, possiamo trovare per ciascuno di essi un'applicazione continua $b_{\widehat{s's''}} \in \mathcal{C}(\widehat{s's''}, A_1)$ con $b_{\widehat{s's''}}(s') = a_1(s')$ e $b_{\widehat{s's''}}(s'') = a_1(s'')$. Definiamo allora

$$b_1(s) = \begin{cases} a_1(s) & \text{se } t(s) \leq \frac{1}{2}, \\ b_{\widehat{s's''}}(s) & \text{se } \widehat{s's''} \text{ è una componente connessa di } \{t(s) > \frac{1}{2}\}. \end{cases}$$

Poniamo

$$t(s, \tau) = \min\{1, (1 + \tau)t(s)\}, \quad f_\tau(s) = (1 - t(s, \tau))a_1(s) + t(s, \tau)a_2(s).$$

Poiché $t(s, \tau) = 0$ quando $t(s) = 0$ e $t(s, \tau) = 1$ quando $t(s) = 1$, la $f_\tau(s)$ è definita e continua su $S^1 \times [0, 1]$ e descrive perciò un'omotopia tra la f assegnata ed

$$f_1(s) = (1 - t_1(s))b_1(s) + t_1(s)a_2(s), \quad \text{con } t_1(s) = \min\{1, 2t(s)\}.$$

Poiché $b_1 \in \mathcal{C}(S^1, A_1)$, la

$$S^1 \times [0, 1] \ni (s, \tau) \longrightarrow (1 - \tau t_1(s))b_1(s) + \tau t_1(s)a_2(s) \in A_1 * A_2$$

è definita e continua e descrive un'omotopia di f_1 con un laccetto continuo f_2 a valori in A_1 . Fissiamo ora un punto $p_2 \in A_2$. La

$$S^1 \times [0, 1] \ni (s, \tau) \longrightarrow (1 - \tau)b_1(s) + \tau p_2 \in A_1 * A_2$$

è un'omotopia tra f_2 e un'applicazione costante. La dimostrazione è completa. \square

Indichiamo con $\tilde{H}_q(A)$ il q -esimo gruppo di omologia *ridotta* (a coefficienti in \mathbb{Z}) di A . È $H_q(A) = \tilde{H}_q(A)$ se $q > 0$ ed $H_0(A) = \tilde{H}_0(A) \oplus \mathbb{Z}$.

LEMMA XXIV.8.3. *Siano A_1 ed A_2 spazi topologici non vuoti e siano $k_1, k_2 \geq -1$ due interi per cui $\tilde{H}_q(A_i) = 0$ se $0 \leq q \leq k_i$, $i = 1, 2$. Allora $\tilde{H}_q(A_1 * A_2) = 0$ per $q \leq k_1 + k_2 + 2$.*

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che A_1 è un retratto di deformazione di $U_1 = A_1 * A_2 \setminus A_2$ ed A_2 un retratto di deformazione di $U_2 = A_1 * A_2 \setminus A_1$ e che $U_1 \cap U_2$ è omotopicamente equivalente ad $A \times B$. Otteniamo quindi la successione esatta di Mayer-Vietoris

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \tilde{H}_q(A_1 \times A_2) & \longrightarrow & \tilde{H}_q(A_1) \oplus \tilde{H}_q(A_2) & \longrightarrow & \tilde{H}_q(A_1 * A_2) \longrightarrow \\ & & \longrightarrow & & \longrightarrow & & \cdots \end{array}$$

Le inclusioni $A_i \rightarrow A_1 * A_2$ sono omotope ad applicazioni costanti e quindi dalla successione di Mayer-Vietoris ricaviamo le successioni esatte corte

$$0 \rightarrow \tilde{H}_{q+1}(A_1 * A_2) \longrightarrow \tilde{H}_q(A_1 \times A_2) \longrightarrow \tilde{H}_q(A_1) \oplus \tilde{H}_q(A_2) \rightarrow 0.$$

Per la formula di Künnet, se $\tilde{H}_q(A_i) = 0$ per $q \leq k_i$, otteniamo che $\tilde{H}_q(A_1 \times A_2) = 0$ per $q \leq k_1 + k_2 + 1$ e quindi $\tilde{H}_q(A_1 * A_2) = 0$ se $q \leq k_1 + k_2 + 2$. \square

Poiché per un teorema di Hurewicz⁸ uno spazio topologico semplicemente connesso A è k -connesso se e soltanto se $\tilde{H}_q(A) = 0$ per ogni $q \leq k$, otteniamo la

PROPOSIZIONE XXIV.8.4. *Se A_i è k_i -connesso, per $i = 1, 2$, allora $A_1 * A_2$ è $k_1 + k_2 + 2$ connesso.* \square

Da questa segue la Proposizione XXIV.8.1.

Consideriamo ora una successione $\{A_n\}_{n \geq 1}$ di spazi topologici non vuoti. Possiamo identificare il limite diretto (o induttivo)

$$J(\{A_n\}) = \operatorname{inj} \lim_{n \rightarrow \infty} A_1 * \cdots * A_n$$

con l'insieme

$$J(\{A_n\}) = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} t_i a_i \mid t_i \geq 0, \sum_{i=1}^{\infty} t_i = 1, \#\{i \mid t_i \neq 0\} < \infty, a_i \in A_i \right\}.$$

Per ogni n abbiamo un'inclusione naturale $\iota_n : A_1 * \cdots * A_n \hookrightarrow J(\{A_n\})$, che ci permette di considerare ogni giunto $A_1 * \cdots * A_n$ come un sottoinsieme di $J(\{A_n\})$.

⁸Witold Hurewicz (1904 -1956), matematico polacco. Dopo la formazione a Vienna, fu assistente di Brouwer ad Amsterdam dal 1928 al 1936. Si trasferì poi negli Stati Uniti. A lui si deve la definizione dei gruppi di omotopia di ordine superiore (1935-36), la successione esatta lunga delle fibrazioni e il teorema che mette in relazione omotopia ed omologia.

Sia M è uno spazio topologico. Ad ogni applicazione $f \in \mathcal{C}(S^n, M)$ corrisponde un omomorfismo $f_* : H_n(S^n) \simeq \mathbb{Z} \rightarrow H_n(M)$. L'immagine $f_*(1)$ dipende soltanto dalla classe di omotopia di f e definisce quindi un'applicazione $\lambda_n : \pi_n(M) \ni [f] \rightarrow f_*(1) \in H_n(M)$, che è un omomorfismo (*l'omomorfismo di Hurewicz*) per ogni $n \geq 1$. Poniamo $\pi_1^*(M) = \pi_1(M)/[\pi_1(M), \pi_1(M)]$ (*l'abelianizzato del gruppo fondamentale*), e $\pi_n^*(M) = \pi_n(M)$ se $n \geq 2$. Il Teorema di Hurewicz ci dice che:

Se $n \geq 1$ ed M è $(n-1)$ -connesso, allora l'applicazione $\lambda_n : \pi_n^*(M) \rightarrow H_n(M)$ è un isomorfismo.

Possiamo considerare su $J(\{A_n\})$ la topologia limite induttivo, per cui il ricoprimento $\{A_1 * \cdots * A_n\}_{n \geq 1}$ è chiuso e fondamentale. Un sottoinsieme E di $J(\{A_n\})$ è cioè chiuso se interseca ogni $A_1 * \cdots * A_n$ in un chiuso. Abbiamo

PROPOSIZIONE XXIV.8.5. *Se tutti gli spazi topologici A_n sono di Hausdorff, anche $J(\{A_n\})$ è di Hausdorff ed è uno spazio topologico ∞ -connesso.*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo due punti $a = \sum \tau_i a_i$ e $b = \sum \lambda_i b_i$ di $J(\{A_n\})$. Se $\tau_{i_0} \neq \lambda_{i_0}$ per qualche indice i_0 , allora $\{t_{i_0} < \frac{1}{2}(\tau_{i_0} + \lambda_{i_0})\}$ e $\{t_{i_0} > \frac{1}{2}(\tau_{i_0} + \lambda_{i_0})\}$ sono intorni disgiunti dei due punti. Se $\tau_i = \lambda_i$ per ogni i , allora $\tau_{i_0} > 0$ ed $a_{i_0} \neq b_{i_0}$ per un indice i_0 . Fissiamo quindi intorni disgiunti U_a ed U_b di a_{i_0} e b_{i_0} in A_{i_0} . Allora gli insiemi $\{t_{i_0} > 0, x_i \in U_a\}$ e $\{t_{i_0} > 0, x_i \in U_b\}$, ove abbiamo indicato con $\sum t_i x_i$ il generico punto di $J(\{A_n\})$, sono intorni aperti disgiunti di a e b in $J(\{A_n\})$.

Osserviamo ora che ogni compatto K di $J(\{A_n\})$ è contenuto in uno dei sottospazi $A_1 * \cdots * A_n$. Infatti, se così non fosse, potremmo trovare una successione $\{x^{(n)}\}$ di punti di K con $x^{(n)} \notin A_1 * \cdots * A_n$ per ogni intero positivo n . Questa successione sarebbe chiusa e discreta, perché ogni sua sottosuccessione interseca ciascun $A_1 * \cdots * A_n$ al più in un numero finito di punti. Ma $\{\{x^{(\nu)} \mid \nu > 0\} \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$ è allora una famiglia di chiusi con la proprietà dell'intersezione finita che ha intersezione vuota. Abbiamo ottenuto una contraddizione che dimostra che K è contenuto in uno dei sottospazi $A_1 * \cdots * A_n$.

Da questa osservazione segue la tesi. Infatti, se $f \in \mathcal{C}(S^n, J(\{A_n\}))$, allora $f(S^n)$ è contenuta in $A_1 * \cdots * A_\nu$, per qualche $\nu \geq n + 2$. Per la Proposizione XXIV.8.1 $A_1 * \cdots * A_\nu$ è n -connesso, e quindi f è omotopa ad un'applicazione costante. \square

Costruzione del fibrato standard. Se \mathbf{G} è un gruppo topologico, possiamo definire un'azione di \mathbf{G} sul giunto

$$J^n(\mathbf{G}) = \underbrace{\mathbf{G} * \cdots * \mathbf{G}}_{n \text{ volte}}$$

di n copie di \mathbf{G} mediante

$$g \cdot (t_1 g_1 + \cdots + t_n g_n) = t_1(gg_1) + \cdots + t_n(gg_n).$$

La proiezione nel quoziente $\pi : J^n(\mathbf{G})/\mathbf{G}$ rispetto a quest'azione di gruppo definisce un \mathbf{G} -fibrato principale con spazio totale $(n - 2)$ -connesso.

DEFINIZIONE XXIV.8.6. Il fibrato $J^{n+2}(\mathbf{G}) \rightarrow J^{n+2}(\mathbf{G})/\mathbf{G}$ si dice il *fibrato di Milnor* con spazio totale n -connesso del gruppo topologico \mathbf{G} .

Come nel paragrafo precedente, possiamo considerare il limite diretto $J^\infty(\mathbf{G})$ dei giunti $J^n(\mathbf{G})$. Risulta definita un'azione di \mathbf{G} su $J^\infty(\mathbf{G})$, che sui sottospazi $J^n(\mathbf{G})$ coincide con quella precedentemente descritta. La proiezione nel quoziente

$$(24.8.3) \quad \mathfrak{M}(\mathbf{G}) = J^\infty(\mathbf{G}) \longrightarrow J^\infty(\mathbf{G})/\mathbf{G}$$

è un \mathbf{G} -fibrato principale con spazio totale ∞ -connesso.

DEFINIZIONE XXIV.8.7. Il fibrato (24.8.3) si dice il *fibrato universale* di Milnor del gruppo topologico \mathbf{G} .

Per il Teorema XXIV.7.7 abbiamo

TEOREMA XXIV.8.8. *Sia M un CW-complesso. La corrispondenza*

$$f \in \mathcal{C}(M, J^\infty(\mathbf{G})/\mathbf{G}) \longleftrightarrow f^*(\mathfrak{M}(\mathbf{G}))$$

definisce per passaggio ai quozienti una bigezione tra l'insieme $\pi(M, J^\infty(\mathbf{G})/\mathbf{G})$ delle applicazioni continue da M in $J^\infty(\mathbf{G})/\mathbf{G}$ modulo omotopia e l'insieme dei \mathbf{G} -fibrati principali con base M , modulo equivalenza. \square

Appendice: Gruppi classici

Gruppi lineari e loro algebre di Lie

Un *gruppo lineare* è un sottogruppo chiuso \mathbf{G} di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ (per qualche intero positivo n). In questo capitolo iniziamo lo studio della struttura dei gruppi lineari.

XXV.1. Algebre di Lie

DEFINIZIONE XXV.1.1. Si dice *algebra di Lie* su un campo \mathbb{k} un'algebra \mathfrak{g} su \mathbb{k} il cui prodotto ¹, che indichiamo con

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \ni (X, Y) \longrightarrow [X, Y] \in \mathfrak{g},$$

sia antisimmetrico e soddisfi l'*identità di Jacobi*:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}.$$

OSSERVAZIONE XXV.1.2. Se il prodotto in \mathfrak{g} è antisimmetrico, il primo membro dell'identità di Jacobi è un'applicazione trilineare alternata. Per verificare che \mathfrak{g} sia un'algebra di Lie sarà quindi sufficiente verificare

- (1) che $[X, X] = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}$
- (2) che l'identità di Jacobi valga per ogni terna di vettori distinti di una base di \mathfrak{g} come spazio vettoriale.

ESEMPIO XXV.1.3. Sia V un qualsiasi spazio vettoriale su un campo \mathbb{k} . Allora V è un'algebra di Lie con il prodotto

$$V \times V \ni (v_1, v_2) \longrightarrow 0 \in V.$$

Un'algebra di Lie in cui il prodotto di due qualsiasi elementi sia 0 si dice *abeliana*.

ESEMPIO XXV.1.4. Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{k} e sia $\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$ lo spazio vettoriale su \mathbb{k} di tutti gli endomorfismi lineari di V . Allora $\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$ è un'algebra di Lie su \mathbb{k} rispetto all'operazione di commutazione di endomorfismi \mathbb{k} -lineari:

$$\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V) \times \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V) \ni (X, Y) \longrightarrow [X, Y] = X \circ Y - Y \circ X \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V).$$

Abbiamo infatti, se $X, Y, Z \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$:

$$\begin{aligned} [X, [Y, Z]] &= X \circ (Y \circ Z - Z \circ Y) - (Y \circ Z - Z \circ Y) \circ X \\ &= X \circ Y \circ Z - X \circ Z \circ Y - Y \circ Z \circ X + Z \circ Y \circ X \end{aligned}$$

e analogamente

$$[Y, [Z, X]] = Y \circ Z \circ X - Y \circ X \circ Z - Z \circ X \circ Y + X \circ Z \circ Y,$$

¹Ricordiamo che un'algebra su un campo \mathbb{k} è il dato di uno spazio vettoriale A su \mathbb{k} e di un'applicazione bilineare $A \times A \ni (a, b) \longrightarrow a \cdot b \in A$.

$$[Z, [X, Y]] = Z \circ X \circ Y - Z \circ Y \circ X - X \circ Y \circ Z + Y \circ X \circ Z.$$

Sommando membro a membro, da queste tre uguaglianze otteniamo l'identità di Jacobi.

In particolare, $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{k}) = \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}^n)$ è un'algebra di Lie su \mathbb{k} rispetto all'operazione di commutazione di matrici:

$$\mathfrak{gl}_n(\mathbb{k}) \times \mathfrak{gl}_n(\mathbb{k}) \ni (X, Y) \longrightarrow [X, Y] = XY - YX \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{k}).$$

Se il campo \mathbb{k} è una estensione del campo \mathbb{F} , considereremo a volte $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{k})$ come un'algebra di Lie su \mathbb{F} per *restrizione del campo degli scalari*.

Un'applicazione lineare $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ tra due algebre di Lie \mathfrak{g} e \mathfrak{h} sullo stesso campo \mathbb{k} si dice un *omomorfismo di algebre di Lie* se

$$\phi([X, Y]) = [\phi(X), \phi(Y)] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Se \mathfrak{g} è un'algebra di Lie su \mathbb{k} e V uno spazio vettoriale su \mathbb{k} , si dice *rappresentazione lineare* di \mathfrak{g} in V un omomorfismo di algebre di Lie

$$\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V).$$

Se $\ker \phi = \{0\}$, la rappresentazione ϕ si dice *fedele*.

Una rappresentazione fedele permette di identificare \mathfrak{g} ad una sottoalgebra dell'algebra di Lie degli endomorfismi di uno spazio vettoriale.

ESEMPIO XXV.1.5. Sia A sia un'algebra associativa sul campo \mathbb{k} , con prodotto $A \times A \ni (a, b) \longrightarrow a \cdot b \in A$. Otteniamo su A una struttura di algebra di Lie su \mathbb{k} , che indichiamo con $A_{\mathfrak{L}}$, considerando su di essa il prodotto:

$$[a, b] = a \cdot b - b \cdot a \quad \forall a, b \in A.$$

Supponiamo che \mathfrak{g} sia un'algebra di Lie di dimensione finita N su un campo \mathbb{k} . Fissata una base E_1, \dots, E_N di \mathfrak{g} , si definiscono *costanti di struttura* dell'algebra \mathfrak{g} in tale base gli scalari $(c_{j,k}^i)_{1 \leq i, j, k \leq N}$ definiti da

$$[E_j, E_k] = \sum_{i=1}^N c_{j,k}^i E_i \quad \forall 1 \leq j, k \leq N.$$

Le costanti di struttura verificano le relazioni:

$$c_{j,k}^i = -c_{k,j}^i \quad (\text{antisimmetria})$$

$$\sum_{i=1}^N c_{j,k}^i c_{i,h}^r + c_{k,h}^i c_{i,j}^r + c_{h,j}^i c_{i,k}^r = 0 \quad (\text{identità di Jacobi}).$$

Viceversa, dato uno spazio vettoriale \mathfrak{g} su \mathbb{k} , una sua base E_1, \dots, E_N e coefficienti $(c_{j,k}^i)_{1 \leq i, j, k \leq N}$ che verificano queste relazioni, vi è un'unica struttura di algebra di Lie su \mathfrak{g} per cui tali coefficienti siano le costanti di struttura nella base E_1, \dots, E_N .

ESEMPIO XXV.1.6. Sia \mathbb{R}^3 lo spazio Euclideo di dimensione 3. Il *prodotto vettore*

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \ni (v, w) \longrightarrow v \times w \in \mathbb{R}^3$$

è definito dall'identità:

$$\det(v, w, z) = (v \times w|z) \quad \forall v, w, z \in \mathbb{R}^3,$$

dove abbiamo indicato con (v, w, z) la matrice 3×3 che ha come colonne i vettori v, w, z . Le regole di calcolo del prodotto vettore si esprimono nei vettori e_1, e_2, e_3 della base canonica mediante:

$$e_i \times e_i = 0, \quad e_i \times e_j = \epsilon(i, j, k)e_k$$

per ogni $i = 1, 2, 3$ ed ogni permutazione (i, j, k) di $\{1, 2, 3\}$. Lo spazio Euclideo \mathbb{R}^3 con il prodotto vettore è un'algebra di Lie reale. Infatti il prodotto vettore è antisimmetrico perché, scambiando le prime due colonne di una matrice, il determinante cambia segno. Infine, per verificare l'identità di Jacobi basta verificare che

$$e_1 \times (e_2 \times e_3) + e_2 \times (e_3 \times e_1) + e_3 \times (e_1 \times e_2) = 0$$

Questa relazione è banale perché ciascuno degli addendi a primo membro è uguale a zero.

In modo equivalente, possiamo identificare \mathbb{R}^3 allo spazio vettoriale reale formato dai quaternioni puramente immaginari. In questa identificazione, la parte reale e la parte immaginaria del prodotto di due quaternioni puramente immaginari sono rispettivamente il prodotto scalare e il prodotto vettore dei vettori corrispondenti.

Se a e b sono sottospazi vettoriali di un'algebra di Lie \mathfrak{g} sul campo \mathbb{k} , indichiamo con $[a, b]$ il sottospazio vettoriale generato dagli elementi $[X, Y]$ al variare di X in a e di Y in b . Poiché il prodotto è antisimmetrico, $[a, b] = [b, a]$.

Un sottospazio vettoriale a di \mathfrak{g} si dice una *sottoalgebra di Lie* di \mathfrak{g} se

$$[a, a] \subset a.$$

Un sottospazio vettoriale \mathfrak{h} di \mathfrak{g} si dice un *ideale dell'algebra di Lie* \mathfrak{g} se

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}.$$

Si verifica facilmente:

LEMMA XXV.1.7. *Se $\phi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ è un omomorfismo di algebre di Lie, allora $\ker \phi$ è un ideale di \mathfrak{g} .*

Se \mathfrak{h} è un ideale dell'algebra di Lie \mathfrak{g} , allora vi è un'unica struttura di algebra di Lie su $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ che renda la proiezione nel quoziente

$$\mathfrak{g} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$$

un omomorfismo di algebre di Lie.

Sia A un'algebra su un campo \mathbb{k} . Un endomorfismo \mathbb{k} -lineare

$$D: A \rightarrow A$$

si dice una *derivazione* di A se verifica l'identità di Leibnitz:

$$D(a \cdot b) = (Da) \cdot b + a \cdot (Db).$$

LEMMA XXV.1.8. *L'insieme $\text{Der}(A)$ di tutte le derivazioni di un'algebra A su \mathbb{k} è una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(A)$.*

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo innanzi tutto che $\text{Der}(A)$ è un sottospazio vettoriale di $\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(A)$ perché il prodotto $A \times A \ni (a, b) \rightarrow a \cdot b \in A$ è \mathbb{k} -bilineare.

Se $D_1, D_2 \in \text{Der}(A)$, abbiamo:

$$\begin{aligned} [D_1, D_2](a \cdot b) &= D_1(D_2a \cdot b + a \cdot D_2b) - D_2(D_1a \cdot b + a \cdot D_1b) \\ &= D_1D_2a \cdot b + D_2a \cdot D_1b + D_1a \cdot D_2b + a \cdot D_1D_2b \\ &\quad - D_2D_1a \cdot b - D_1a \cdot D_2b - D_2a \cdot D_1b - a \cdot D_2D_1b \\ &= (D_1D_2 - D_2D_1)a \cdot b + a \cdot (D_1D_2 - D_2D_1)b \\ &= [D_1, D_2]a \cdot b + a \cdot [D_1, D_2]b \end{aligned}$$

e quindi $\text{Der}(A)$ è un'algebra di Lie. □

Se A è un'algebra associativa, allora per ogni $a \in A$ l'applicazione

$$D_a : A \ni b \rightarrow a \cdot b - b \cdot a \in A$$

è una derivazione di A .

Si verifica facilmente che vale il seguente:

LEMMA XXV.1.9. *Sia A un'algebra associativa su \mathbb{k} . Allora l'applicazione*

$$A \ni a \rightarrow D_a \in \text{Der}(A)$$

è un omomorfismo dell'algebra di Lie $A_{\mathfrak{L}}$ nell'algebra di Lie $\text{Der}(A)$ delle derivazioni di A .

Data un'algebra di Lie \mathfrak{g} sul campo \mathbb{k} , ed un elemento $X \in \mathfrak{g}$, indichiamo con $\text{ad}(X)$ l'endomorfismo lineare

$$\text{ad}(X) : \mathfrak{g} \ni Y \rightarrow \text{ad}(X)Y = [X, Y] \in \mathfrak{g}.$$

TEOREMA XXV.1.10. *L'applicazione*

$$\text{ad} : \mathfrak{g} \ni X \rightarrow \text{ad}(X) \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g})$$

è una rappresentazione di \mathfrak{g} nell'algebra $\text{Der}(\mathfrak{g})$ delle derivazioni di \mathfrak{g} .

DIMOSTRAZIONE. L'applicazione ad è lineare perché il prodotto $[\cdot, \cdot]$ è bilineare. Dall'identità di Jacobi ricaviamo:

$$\begin{aligned} \text{ad}(X)[Y, Z] &= [X, [Y, Z]] \\ &= -[Y, [Z, X]] - [Z, [X, Y]] \\ &= [Y, \text{ad}(X)Z] + [\text{ad}(X)Y, Z] \end{aligned}$$

$$\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$$

e quindi $\text{ad}(X)$ è, per ogni $X \in \mathfrak{g}$, una derivazione dell'algebra \mathfrak{g} . Abbiamo inoltre

$$\begin{aligned} [\text{ad}(X), \text{ad}(Y)]Z &= \text{ad}(X)[Y, Z] - \text{ad}(Y)[X, Z] \\ &= [X, [Y, Z]] - [Y, [X, Z]] = [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] \\ &= -[Z, [X, Y]] = \text{ad}([X, Y])Z, \end{aligned} \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g},$$

e quindi ad è un omomorfismo di algebre di Lie. □

L'applicazione

$$\text{ad} : \mathfrak{g} \ni X \longrightarrow \text{ad}(X) \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g})$$

si dice la *rappresentazione aggiunta* di \mathfrak{g} .

Gli elementi dell'immagine $\text{Int}(\mathfrak{g}) = \text{ad}(\mathfrak{g})$ si dicono *derivazioni interne* di \mathfrak{g} .

Ogni algebra di Lie di dimensione finita su un campo \mathbb{k} si può identificare a una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{k})$ per qualche intero positivo n : infatti è stato dimostrato da I.D.Ado² nel caso di campi di caratteristica zero e K.Iwasawa³ nel caso generale che vale il seguente:

TEOREMA XXV.1.11 (Ado-Iwasawa). *Ogni algebra di Lie \mathfrak{g} di dimensione finita su un campo \mathbb{k} ammette una rappresentazione \mathbb{k} -lineare fedele.*

Nel seguito potremo quindi limitarci a considerare algebre di Lie \mathfrak{g} che sono sottoalgebre di $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{k})$.

XXV.2. Jacobiano dell'applicazione esponenziale

In questo paragrafo studieremo la relazione tra sottoalgebre di Lie di $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ e sottogruppi di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$. Dimostriamo innanzi tutto il seguente:

LEMMA XXV.2.1. *Per ogni $X, Y \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ valgono le seguenti formule di commutazione:*

- (1) (i) $\text{ad}(X)(XY) = X\text{ad}(X)Y.$
- (2) (ii) $X^k Y = YX^k + \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} \text{ad}^j(X) Y X^{k-j} \quad \forall k \geq 1.$
- (3) (iii) $YX^k = X^k Y + \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} (-1)^j X^{k-j} \text{ad}^j(X) Y \quad \forall k \geq 1.$

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo la (i). Abbiamo:

$$\text{ad}(X)(XY) = [X, XY] = X^2 Y - XYX = X\text{ad}(X)Y \quad \forall X, Y \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}).$$

La dimostrazione delle (ii) e (iii) sono simili. Mostriamo ad esempio che vale la (iii).

Ragioniamo per induzione sull'intero $k \geq 1$. Se $k = 1$, la

$$YX = XY - \text{ad}(X)Y \quad \forall X, Y \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$$

segue dalla definizione di ad . Fissiamo quindi un intero $m \geq 2$ e supponiamo che la formula (iii) valga per $k = m - 1$. Allora

$$\begin{aligned} YX^m &= YX^{m-1}X \\ &= X^{m-1}YX + \sum_{j=1}^{m-1} \binom{m-1}{j} (-1)^j X^{m-1-j} \text{ad}^j(X) YX \end{aligned}$$

² Ado, I. D. (1947), *The representation of Lie algebras by matrices*, Akademiya Nauk SSSR i Moskovskoe Matematicheskoe Obshchestvo. Uspekhi Matematicheskikh Nauk (in Russo) 2 (6)(1947), pp. 159-173, traduzione inglese in: Ado, I. D. (1949), *The representation of Lie algebras by matrices*, American Mathematical Society Translations 1949 (2): 21 pp.

³ Kenkichi Iwasawa, (1948), *On the representation of Lie algebras*, Japanese Journal of Mathematics 19 (1948), pp. 405-426,

$$\begin{aligned}
&= X^m Y - X^{m-1} \operatorname{ad}(X)Y + \sum_{j=1}^{m-1} \binom{m-1}{j} (-1)^j X^{m-j} \operatorname{ad}^j(X)Y \\
&\quad - \sum_{j=1}^{m-1} \binom{m-1}{j} (-1)^j X^{m-j-1} \operatorname{ad}^{j+1}(X)Y \\
&= X^m Y - X^{m-1} \operatorname{ad}(X)Y + (-1)^m \operatorname{ad}^m(X)Y \\
&\quad + \sum_{j=1}^{m-1} (-1)^j \left\{ \binom{m-1}{j} + \binom{m-1}{j-1} \right\} X^{m-j} \operatorname{ad}^j(X)Y - \binom{m-1}{1} X^{m-1} \operatorname{ad}(X)Y
\end{aligned}$$

perché i due endomorfismi $\operatorname{ad}(X)$ e $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \ni Y \rightarrow XY \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ commutano per la (i), da cui, tenuto conto della formula di somma dei binomiali:

$$\binom{m-1}{j} + \binom{m-1}{j-1} = \binom{m}{j},$$

otteniamo la (iii). □

TEOREMA XXV.2.2 (Formula dello Jacobiano). *L'applicazione esponenziale $\exp : \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ è differenziabile in ogni punto e il suo differenziale in $A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ è dato da:*

$$d \exp(A) : \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \ni X \rightarrow \frac{I - \exp(-\operatorname{ad}(A))}{\operatorname{ad}(A)} \exp(A)X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}),$$

ove

$$\frac{I - \exp(-\operatorname{ad}(A))}{\operatorname{ad}(A)} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{(h+1)!} \operatorname{ad}^h(A).$$

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo $A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$. Per ogni $X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ abbiamo:

$$\exp(A + X) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(A + X)^h}{h!}.$$

Ora, risulta:

$$(A + X)^h = A^h + \sum_{r=0}^{h-1} A^r X A^{h-r-1} + o(X).$$

Per la formula di commutazione (iii) abbiamo:

$$A^r X A^s = \sum_{j=0}^s (-1)^j \binom{s}{j} A^{h-j-1} \operatorname{ad}^j(A)X.$$

Sostituendo troviamo:

$$\begin{aligned}
\sum_{r+s=h-1} A^r X A^s &= \sum_{s=0}^{h-1} \sum_{j=0}^s (-1)^j \binom{s}{j} A^{h-j-1} \operatorname{ad}^j(A)X \\
&= \sum_{j=0}^{h-1} (-1)^j \left(\sum_{k=0}^{h-j-1} \binom{j+k}{j} \right) A^{h-j-1} \operatorname{ad}^j(A)X
\end{aligned}$$

$$= \sum_{j=0}^{h-1} (-1)^j \binom{h}{j+1} A^{h-j-1} \text{ad}^j(A)X.$$

Otteniamo perciò:

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h!} \sum_{r+s=h-1} A^r X A^s &= \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{h-1} \frac{A^{h-j-1}}{(h-j-1)!} \frac{(-1)^j \text{ad}^j(A)}{(j+1)!} X \\ &= \exp(A) \frac{I - \exp(-\text{ad}(A))}{\text{ad}(A)} X = \frac{I - \exp(-\text{ad}(A))}{\text{ad}(A)} \exp(A)X, \end{aligned}$$

e quindi:

$$\exp(A + X) = \exp(A) + \frac{I - \exp(-\text{ad}(A))}{\text{ad}(A)} \exp(A)X + O(|X|^2),$$

che dà la formula desiderata per il differenziale. \square

Ricordiamo il

TEOREMA XXV.2.3 (Teorema delle funzioni implicite). *Sia Ω un aperto di uno spazio vettoriale \mathbb{R}^n e sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ un'applicazione differenziabile di classe \mathcal{C}^k (con $1 \leq k \leq \omega$). Sia $x_0 \in \Omega$ un punto in cui*

$$df(x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

sia un isomorfismo lineare. Allora esiste un intorno aperto U di x_0 in Ω tale che $f(U)$ sia aperto in \mathbb{R}^n e

$$f|_U^{f(U)} : U \rightarrow f(U)$$

sia un omeomorfismo, con inversa $[f|_U^{f(U)}]^{-1}$ differenziabile di classe \mathcal{C}^k .

Un omeomorfismo tra due aperti di \mathbb{R}^n che sia differenziabile di classe \mathcal{C}^k (con $1 \leq k \leq \omega$) ed abbia inversa differenziabile di classe \mathcal{C}^k si dice un *diffeomorfismo di classe \mathcal{C}^k* .

Dal teorema delle funzioni implicite ricaviamo:

TEOREMA XXV.2.4. *L'applicazione $\exp : \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ definisce un diffeomorfismo di classe \mathcal{C}^∞ di un intorno aperto di 0 in $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ su un intorno aperto di e in $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$.*

DIMOSTRAZIONE. Infatti il differenziale di \exp in 0 è l'applicazione identica:

$$d \exp(0) : \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \ni X \rightarrow X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}).$$

\square

TEOREMA XXV.2.5 (Coordinate di seconda specie). *Siano V, W due sottospazi vettoriali reali di $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$, considerato come spazio vettoriale reale di dimensione $2n^2$, tali che*

$$V \oplus W = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}).$$

Allora possiamo trovare un intorno aperto U_1 di 0 in V e un intorno aperto U_2 di 0 in W tali che

$$U_1 \times U_2 \ni (X, Y) \rightarrow \exp(X) \exp(Y) \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$$

sia un diffeomorfismo di classe \mathcal{C}^ω su un intorno aperto di e in $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $X = X_1 + X_2 \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ con $X_1 \in V$ e $X_2 \in W$. Allora, per la formula dello Jacobiano,

$$\begin{aligned} \exp(X_1) \exp(X_2) &= (e + X_1 + O(\|X_1\|^2))(e + X_2 + O(\|X_2\|^2)) \\ &= e + X + O(\|X\|^2) \end{aligned}$$

e quindi l'applicazione

$$\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \ni X \longrightarrow \exp(X_1) \exp(X_2) \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$$

ha in 0 differenziale uguale all'identità. La tesi segue quindi dal teorema delle funzioni implicite. \square

PROPOSIZIONE XXV.2.6. *Sia U l'aperto di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ formato dalle matrici i cui autovalori sono contenuti nel disco $|\lambda - 1| < 1$. La serie*

$$(25.2.1) \quad \log(a) = \log(e + (a - e)) = - \sum_{h=1}^{\infty} \frac{(e - a)^h}{h}$$

converge in norma per ogni $a \in U$ ed uniformemente su tutti i compatti contenuti in U . Abbiamo $\exp(\log(a))$ per ogni $a \in U$.

DIMOSTRAZIONE. Possiamo scrivere a come una somma $a = S + N$, con S semisemplice (cioè diagonalizzabile) ed N nilpotente, con $[S, N] = SN - NS = 0$. Osserviamo che $a \in U$ se e soltanto se $S \in U$. Per $h \geq n$, abbiamo

$$(a - e)^h = \sum_{j=0}^n (S - e)^{h-j} N^j.$$

La tesi segue quindi dal fatto che ciascuna delle serie

$$\sum_{h=\max\{1, j\}}^{\infty} \frac{(e - S)^{h-j}}{h}$$

converge in norma se $S \in U$ ed uniformemente quando S varia in un compatto di U . Poiché gli elementi semisemplici formano un sottoinsieme denso di U e l'uguaglianza $\exp(\log(a)) = a$ è banalmente vera per gli elementi semisemplici, essa vale per tutti gli elementi di U . \square

OSSERVAZIONE XXV.2.7. Se a non ha autovalori reali negativi, allora la matrice $a(t) = I + t(a - I)$ è invertibile per ogni $t \in [0, 1]$ e possiamo calcolare l'integrale

$$\log a = \int_0^1 (I + t(a - I))^{-1} (a - I) dt.$$

Otteniamo così un diffeomorfismo analitico di U sull'aperto V di $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ delle matrici che non hanno autovalori la cui parte immaginaria sia multiplo dispari di π , che inverte l'esponenziale ed è uguale alla somma della serie (25.2.1) se gli autovalori di a sono contenuti nel disco $\{|\lambda - 1| < 1\}$.

Più in generale, se a è una qualsiasi matrice di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$, possiamo trovare un cammino $a(t) \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}))$ con $a(0) = e$ ed $a(1) = a$. Allora

$$A = \int_0^1 [a(t)]^{-1} [da(t)] \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \quad \text{ed} \quad \exp(A) = a.$$

LEMMA XXV.2.8. Se $A, B \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ allora

$$\exp(tA) \exp(tB) = \exp(t(A + B) + (t^2/2)[A, B]) + O(t^3), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

DIMOSTRAZIONE. Basta dimostrare che le due applicazioni

$$F_1 : \mathbb{R} \ni t \rightarrow \exp(tA) \exp(tB) \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}) \quad \text{ed}$$

$$F_2 : \mathbb{R} \ni t \rightarrow \exp(t(A + B) + (t^2/2)[A, B]) \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$$

assumono per $t = 0$ gli stessi valori ed hanno uguali, per $t = 0$, le loro derivate prime e seconde.

Abbiamo $F_1(0) = e = F_2(0)$. Inoltre:

$$\begin{aligned} F_1(t) &= (e + tA + (t^2/2)A^2 + O(t^3))(e + tB + (t^2/2)B^2 + O(t^3)) \\ &= e + t(A + B) + t^2(A^2/2 + AB + B^2/2) + O(t^3) \end{aligned}$$

ci dà

$$F_1'(0) = A + B, \quad F_1''(0) = A^2 + 2AB + B^2.$$

D'altra parte:

$$\begin{aligned} F_2(t) &= e + t(A + B) + (t^2/2)[A, B] + (1/2)(t(A + B) + (t^2/2)[A, B])^2 + O(t^3) \\ &= e + t(A + B) + (t^2/2)([A, B] + A^2 + AB + BA + B^2) + O(t^3) \\ &= e + t(A + B) + (t^2/2)(A^2 + 2AB + B^2) + O(t^3) \end{aligned}$$

e quindi anche

$$F_2'(0) = A + B, \quad F_2''(0) = A^2 + 2AB + B^2.$$

□

COROLLARIO XXV.2.9. Se $A, B \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$, allora

$$\exp(tA) \exp(tB) \exp(-tA) \exp(-tB) = \exp(t^2[A, B]) + O(t^3), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

XXV.3. Algebra di Lie di un gruppo lineare

Il Lemma XXV.2.8 e il Corollario XXV.2.9 ci permettono di esplicitare la relazione tra sottogruppi chiusi di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ e sottoalgebre di Lie reali di $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$.

TEOREMA XXV.3.1. Sia \mathbf{G} un sottogruppo chiuso di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$. Poniamo

$$\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid \exp(tX) \in \mathbf{G} \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Allora \mathfrak{g} è una sottoalgebra di Lie reale di $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$. Inoltre

$$\exp : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbf{G}$$

definisce un omeomorfismo di un intorno aperto di 0 in \mathfrak{g} su un intorno aperto di e in \mathbf{G} .

DIMOSTRAZIONE. È chiaro che, se $X \in \mathfrak{g}$, allora $tX \in \mathfrak{g}$ per ogni numero reale t . Dimostriamo ora che, se $X, Y \in \mathfrak{g}$, anche $X + Y \in \mathfrak{g}$. Abbiamo:

$$(\exp(tX/n) \exp(tY/n))^n \in \mathbf{G} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Per il lemma

$$\exp(tX/n) \exp(tY/n) = \exp(t(X + Y)/n + O(t^2/n^2))$$

e quindi

$$(\exp(tX/n) \exp(tY/n))^n = \exp(t(X + Y) + O(t^2/n)).$$

Passando al limite per $n \rightarrow \infty$, poiché \mathbf{G} è chiuso, troviamo $\exp(t(X + Y)) \in \mathbf{G}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Quindi $X + Y \in \mathfrak{g}$.

Per il Corollario XXV.2.9 otteniamo che, se $X, Y \in \mathfrak{g}$, allora

$$\mathbf{G} \ni [\exp(tX/n) \exp(tY/n) \exp(-tX/n) \exp(-tY/n)]^n = \exp(t^2[X, Y] + O(t^3/n)).$$

Passando al limite per $n \rightarrow \infty$, poiché abbiamo supposto che \mathbf{G} fosse chiuso, troviamo che $\exp(s[X, Y]) \in \mathbf{G}$ per ogni $s \geq 0$. Poiché \mathbf{G} è un gruppo, anche $\exp(-s[X, Y]) = (\exp(s[X, Y]))^{-1} \in \mathbf{G}$ e quindi $[X, Y] \in \mathfrak{g}$.

Sia \mathbf{G}' il sottogruppo di \mathbf{G} generato da

$$\exp(\mathfrak{g}) = \{\exp(X) \mid X \in \mathfrak{g}\}.$$

Dico che \mathbf{G}' è un intorno di e in \mathbf{G} . Se così non fosse, potremmo trovare una successione $\{g_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \mathbf{G} \setminus \mathbf{G}'$ tale che $g_\nu \rightarrow e$ per $\nu \rightarrow \infty$. Scegliamo un sottospazio vettoriale reale V di $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ complementare di \mathfrak{g} in $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$. Possiamo allora trovare intorni aperti U di 0 in \mathfrak{g} e U' di 0 in V tali che

$$U \times U' \ni (X, Y) \rightarrow \exp(X) \exp(Y) \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$$

sia un diffeomorfismo di classe \mathcal{C}^ω su un intorno W di e in $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$. In particolare, possiamo supporre, a meno di passare a una sottosuccessione estratta, che

$$g_\nu = \exp(X_\nu) \exp(Y_\nu) \quad \text{con} \quad X_\nu \in U, Y_\nu \in U', \forall \nu \in \mathbb{N}.$$

Abbiamo:

$$X_\nu \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad Y_\nu \rightarrow 0 \quad \text{per} \quad \nu \rightarrow \infty.$$

Inoltre, $Y_\nu \neq 0$ ed $\exp(Y_\nu) \in \mathbf{G}$ per ogni $\nu \in \mathbb{N}$. Sia m_ν un intero tale che

$$m_\nu \leq \|Y_\nu\|^{-1} < m_\nu + 1.$$

A meno di passare a una sottosuccessione, possiamo allora supporre che

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} m_\nu Y_\nu = Y \in V \setminus \{0\}.$$

Per ogni coppia di interi p, q con $q > 0$ poniamo

$$pm_\nu = qs_\nu + r_\nu \quad \text{con} \quad 0 \leq r_\nu < q.$$

Poiché

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} r_\nu Y_\nu = 0$$

otteniamo

$$\exp\left(\frac{p}{q}Y\right) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{pm_\nu}{q}Y_\nu\right) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} (\exp(Y_\nu))^{s_\nu} \in \mathbf{G}.$$

Quindi \mathbf{G} contiene gli elementi $\exp(tY)$ per ogni razionale positivo t . Poiché \mathbf{G} è chiuso, $\exp(tY) \in \mathbf{G}$ per ogni t reale non negativo, e poiché \mathbf{G} è un gruppo ciò vale anche per i t reali negativi. Abbiamo allora $Y \in \mathfrak{g}$, che contraddice la scelta di V . Ne segue che \mathbf{G}' è un intorno aperto di e in \mathbf{G} e quindi coincide con la componente connessa G_e dell'identità in \mathbf{G} . Inoltre, la dimostrazione mostra che l'esponenziale definisce un omeomorfismo dell'intorno aperto U di 0 in \mathfrak{g} sull'intorno aperto $W \cap \mathbf{G}$ dell'identità in \mathbf{G} . \square

Se \mathbf{G} è un sottogruppo chiuso di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$, chiamiamo

$$\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \mid \exp(tX) \in \mathbf{G} \quad \forall t \in \mathbb{R}\}$$

l'algebra di Lie del gruppo \mathbf{G} . La dimensione di \mathfrak{g} come spazio vettoriale reale si dice *dimensione* del gruppo \mathbf{G} .

TEOREMA XXV.3.2 (Rappresentazione aggiunta). *Sia \mathbf{G} un sottogruppo chiuso di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ e sia $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ la sua algebra di Lie. Allora*

$$\text{ad}(g)X = gXg^{-1} \in \mathfrak{g} \quad \forall g \in \mathbf{G}, \forall X \in \mathfrak{g}.$$

Per ogni $g \in \mathbf{G}$ l'applicazione

$$\text{ad}(g) : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

è un isomorfismo di algebre di Lie.

L'applicazione

$$\text{ad} : \mathbf{G} \ni g \longrightarrow \text{ad}(g) \in \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$$

è un omomorfismo di gruppi.

DIMOSTRAZIONE. Se $X \in \mathfrak{g}$ e $g \in \mathbf{G}$, abbiamo

$$\exp(tgXg^{-1}) = g \exp(tX)g^{-1} \in \mathbf{G} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

e quindi $\text{ad}(g)X \in \mathfrak{g}$. L'applicazione $\text{ad}(g) : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ è lineare.

Siano ora $g \in \mathbf{G}$ e $X, Y \in \mathfrak{g}$. Abbiamo:

$$\begin{aligned} [\text{Ad}(g)X, \text{Ad}(g)Y] &= (\text{Ad}(g)X)(\text{Ad}(g)Y) - (\text{Ad}(g)Y)(\text{Ad}(g)X) \\ &= (gXg^{-1})(gYg^{-1}) - (gYg^{-1})(gXg^{-1}) = g(XY - YX)g^{-1} = \text{Ad}(g)[X, Y] \end{aligned}$$

e quindi $\text{Ad}(g) : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ è un automorfismo dell'algebra di Lie \mathfrak{g} .

Infine, abbiamo:

$\text{Ad}(g_1) \circ \text{Ad}(g_2)X = g_1(g_2Xg_2^{-1})g_1^{-1} = (g_1g_2)X(g_1g_2)^{-1} = \text{Ad}(g_1g_2)X$
per ogni $X \in \mathfrak{g}$ ed ogni $g_1, g_2 \in \mathbf{G}$; questo dimostra che $\mathbf{G} \ni g \longrightarrow \text{Ad}(g) \in \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ è un omomorfismo di gruppi. \square

L'applicazione

$$\text{Ad} : \mathbf{G} \ni g \longrightarrow \text{Ad}(g) \in \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$$

si dice *rappresentazione lineare aggiunta* di \mathbf{G} .

XXV.4. Algebre di Lie dei gruppi lineari e dei gruppi lineari speciali

L'esponenziale di una qualsiasi matrice di $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n \times n}$ è una matrice invertibile. Quindi $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ è l'algebra di Lie del gruppo lineare $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$. L'applicazione esponenziale è in questo caso surgettiva (cf. Osservazione XXV.2.7).

Abbiamo poi:

TEOREMA XXV.4.1. *L'algebra di Lie del gruppo speciale lineare complesso $\mathbf{SL}_n(\mathbb{C})$ è*

$$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid \text{trac}(A) = 0\}.$$

L'algebra di Lie del gruppo lineare reale $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ è $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$.

L'algebra di Lie del gruppo lineare speciale reale $\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$ è

$$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid \text{trac}(A) = 0\}.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia A una matrice di $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ tale che $\det \exp(tA) = 1$ per ogni numero reale t . Allora $t \cdot \text{trac} A \in (2\pi)\mathbb{Z}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, e questo equivale al fatto che $\text{trac} A = 0$.

Se A è una matrice di $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ tale che $\exp(tA)$ sia reale per ogni $t \in \mathbb{R}$, allora anche $(d/dt) \exp(tA)|_{t=0} = A$ è una matrice reale.

Da queste osservazioni segue la tesi. \square

XXV.5. Endomorfismi semisemplici e decomposizione di Wedderburn

Denotiamo con $\mathcal{E}nd_{\mathbb{k}}(V)$ l'insieme degli endomorfismi \mathbb{k} -lineari di uno spazio vettoriale V su \mathbb{k} , con la struttura di algebra associativa data dal prodotto di composizione di endomorfismi. Scriveremo anche $\mathcal{E}nd_n(\mathbb{k})$ invece di $\mathcal{E}nd_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}^n)$.

DEFINIZIONE XXV.5.1. Un endomorfismo $A \in \mathcal{E}nd_{\mathbb{k}}(V)$ si dice *semisemplice*, o *completamente decomponibile* se ogni sottospazio A -invariante U di V ammette un complemento A -invariante W in V .

Questa condizione è equivalente al fatto che A sia diagonalizzabile in un'estensione algebrica di \mathbb{k} , ovvero che il suo polinomio minimo $\mu_A(\lambda)$ sia prodotto di fattori primi semplici in $\mathbb{k}[\lambda]$.

Questa caratterizzazione ci dà immediatamente:

PROPOSIZIONE XXV.5.2. *Sia $\rho : \mathcal{E}nd_{\mathbb{k}}(V) \rightarrow \mathcal{E}nd_{\mathbb{k}}(W)$ un omomorfismo di algebre associative. Allora ρ trasforma endomorfismi semisemplici (risp. nilpotenti) di V in endomorfismi semisemplici (risp. nilpotenti) di W .*

DIMOSTRAZIONE. Se $f \in \mathbb{k}[\lambda]$, allora $\rho(f(A)) = f(\rho(A))$ per ogni $A \in \mathcal{E}nd_{\mathbb{k}}(V)$. In particolare, se A è annullato da un polinomio di $\mathbb{k}[\lambda]$ che non ha fattori primi multipli, anche $\rho(A)$ è annullato da un polinomio di $\mathbb{k}[\lambda]$ privo di fattori primi multipli. Quindi $\rho(A)$ è semisemplice se A è semisemplice. È immediato che ρ trasformi endomorfismi nilpotenti in endomorfismi nilpotenti. \square

LEMMA XXV.5.3. *Siano $S_1, S_2 \in \mathcal{E}nd_{\mathbb{k}}(V)$ due endomorfismi diagonalizzabili. Se $[S_1, S_2] = S_1S_2 - S_2S_1 = 0$, allora S_1 ed S_2 possono essere diagonalizzate entrambe rispetto ad una stessa base.*

DIMOSTRAZIONE. Per ipotesi i polinomi minimi di S_1 ed S_2 sono prodotti di fattori di primo grado distinti. Sia $V_\lambda = \{v \in V \mid S_1 v = \lambda v\}$. Allora $S_2(V_\lambda) \subset V_\lambda$. È infatti $S_1(S_2 v) = S_2(\lambda v) = \lambda(S_2 v)$ se $v \in V_\lambda$. Il polinomio minimo della restrizione di S_2 a V_λ divide il polinomio minimo di S_2 . Esso è quindi un prodotto di fattori di primo grado distinti e perciò la restrizione di S_2 a V_λ è ancora diagonalizzabile.

Decomponiamo V nella somma diretta $V = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}$ degli autospazi relativi agli autovalori distinti $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ di S_1 . Per l'osservazione precedente è possibile trovare basi di $V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_k}$ di autovettori delle restrizioni di S_2 . Messe insieme, queste basi formano una base di V in cui gli endomorfismi S_1 ed S_2 si rappresentano entrambi mediante matrici diagonali. \square

LEMMA XXV.5.4. *Sia $\tilde{\mathbb{K}}$ un'estensione del campo \mathbb{K} .*

Un endomorfismo $S \in \mathcal{E}nd_{\mathbb{K}}(V)$ è semisemplice se e soltanto se la sua estensione $\tilde{S} = 1_{\tilde{\mathbb{K}}} \otimes_{\mathbb{K}} S \in \mathcal{E}nd_{\tilde{\mathbb{K}}}(\tilde{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} V)$ è semisemplice. \square

COROLLARIO XXV.5.5. *Se $S_1, S_2 \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ sono endomorfismi semisemplici. Se $[S_1, S_2] = S_1 S_2 - S_2 S_1 = 0$, allora anche $S_1 + S_2$ è semisemplice.*

DIMOSTRAZIONE. È facile conseguenza dei Lemmi XXV.5.3 e XXV.5.4. \square

PROPOSIZIONE XXV.5.6 (decomposizione di Wedderburn⁴). *Se \mathbb{K} ha caratteristica 0, allora ogni endomorfismo $A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ si decompone in modo unico nella forma*

$$A = A_s + A_n, \quad \text{con } A_s \text{ semisemplice, } A_n \text{ nilpotente, e } [A_s, A_n] = A_s A_n - A_n A_s = 0.$$

Inoltre $A_s, A_n \in \mathbb{K}[A]$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ e $\mu_A(\lambda) = f_1^{k_1}(\lambda) \cdots f_m^{k_m}(\lambda)$ la decomposizione del suo polinomio minimo nel prodotto di potenze di fattori primi distinti. Gli elementi nilpotenti dell'anello $\mathbb{K}[A]$ formano un suo ideale nilpotente che è principale e generato da $f(A) = f_1(A) \cdots f_m(A)$. Costruiamo la decomposizione per ricorrenza, mostrando che, per ogni intero $h = 0, 1, \dots, n$, possiamo trovare $A_h \in \mathbb{K}[A]$ tale che

$$A - A_h \in \mathfrak{n}, \quad f(A_h) \in \mathfrak{n}^h.$$

Per $h = 0$, possiamo scegliere $A_0 = A$. Supponiamo di aver costruito A_h per qualche $0 \leq h < n$. Cerchiamo A_{h+1} nella forma $A_h + X$, con $X \in \mathfrak{n}^h$. Poiché il campo ha caratteristica 0, possiamo utilizzare la derivazione di polinomi. Per la formula di Taylor è

$$f(A_{h+1}) = f(A_h + X) = f(A_h) + f'(A_h)X + Y, \quad \text{con } Y \in \mathfrak{n}^{h+1} \text{ se } X \in \mathfrak{n}^h.$$

Poiché f è un prodotto di primi semplici, f ed f' sono primi tra loro. La condizione che $f(A_h) \in \mathfrak{n}^h$ ci dice che il polinomio minimo di $f(A_h)$ può contenere solo i fattori primi f_1, \dots, f_m . Quindi $f'(A_h)$ è invertibile. Possiamo perciò trovare A_{h+1} ponendo $X = -[f'(A_h)]^{-1} f(A_h)$. Osserviamo che $X \in \mathfrak{n}^h$ perché $f(A_h) \in \mathfrak{n}^h$, ed $f(A_h)$ commuta con $[f'(A_h)]^{-1}$. Abbiamo così, con $A_s = A_n$ ed $A_n = A - A_n$,

⁴ Joseph Henry Maclagan Wedderburn (Forfar, 2 febbraio 1882 - Princeton, 9 ottobre 1948). Algebrista scozzese. Ha dimostrato che i corpi finiti sono campi ed un importante teorema sulla struttura degli anelli semisemplici.

la decomposizione cercata. Infatti $f(A_n) \in \mathfrak{n}^n = \{0\}$ e quindi f è il polinomio minimo di A_n , e dunque A_n è semisemplice, mentre, per ipotesi, $A_n = A - A_n \in \mathfrak{n}$ è nilpotente.

Se $A = A'_s + A'_n$ con A'_s semisemplice, A'_n nilpotente ed $[A'_s, A'_n] = 0$, allora A'_s ed A'_n commutano con A e quindi anche con le $A_s, A_n \in \mathbb{k}[A]$ costruite sopra. Quindi $A_s - A'_s$ è semisemplice ed $A_n - A'_n$ nilpotente e dall'uguaglianza $A_s - A'_s = A'_n - A_n$ segue allora che $A'_s = A_s$ ed $A'_n = A_n$. \square

XXV.6. Matrici triangolari

Indichiamo con

$$\mathbf{Z}_n^+(\mathbb{k}) = \left\{ \left(\begin{array}{cccccc} 1 & x_{1,2} & x_{1,3} & \cdots & x_{1,n} \\ & 1 & x_{2,3} & \cdots & x_{2,n} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & x_{n-1,n} \\ & & & & 1 \end{array} \right) \mid x_{i,j} \in \mathbb{k} \right\}$$

$\mathbf{Z}_n^+(\mathbb{k})$ il gruppo delle matrici triangolari superiori unipotenti di $\mathbb{k}^{n \times n}$, con coefficienti nel campo \mathbb{k} e con

$$\mathfrak{z}_n^+(\mathbb{k}) = \left\{ \left(\begin{array}{cccccc} 0 & x_{1,2} & x_{1,3} & \cdots & x_{1,n} \\ & 0 & x_{2,3} & \cdots & x_{2,n} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 0 & x_{n-1,n} \\ & & & & 0 \end{array} \right) \mid x_{i,j} \in \mathbb{k} \right\}$$

l'algebra di Lie delle matrici triangolari superiori nilpotenti con coefficienti in \mathbb{k} .

PROPOSIZIONE XXV.6.1. *Supponiamo \mathbb{k} abbia caratteristica zero. Allora*

$$\exp(X) = \sum_{h=0}^n \frac{1}{h!} X^h, \quad X \in \mathfrak{z}_n^+(\mathbb{k}) \quad e \quad \log(x) = -\sum_{h=1}^n \frac{1}{h} (e - x)^h, \quad x \in \mathbf{Z}_n^+(\mathbb{k})$$

sono funzioni polinomiali che definiscono una corrispondenza biunivoca tra $\mathfrak{z}_n^+(\mathbb{k})$ e $\mathbf{Z}_n^+(\mathbb{k})$. \square

COROLLARIO XXV.6.2. *Se \mathbb{k} è uguale ad \mathbb{R} o a \mathbb{C} , allora $\mathfrak{z}_n^+(\mathbb{k})$ è l'algebra di Lie di $\mathbf{Z}_n^+(\mathbb{k})$ e l'applicazione esponenziale $\exp : \mathfrak{z}_n^+(\mathbb{k}) \rightarrow \mathbf{Z}_n^+(\mathbb{k})$ un omeomorfismo.*

DIMOSTRAZIONE. Basta verificare che $\mathfrak{z}_n^+(\mathbb{k})$ è l'algebra di Lie di $\mathbf{Z}_n^+(\mathbb{k})$. Sia e^1, \dots, e^n la base duale della base canonica di \mathbb{k}^n . La condizione che $x \in \mathbf{Z}_n^+(\mathbb{k})$ si può scrivere nella forma $e^i(x(e_j)) = \delta_{i,j}$ se $i \geq j$. Se $X = (X_{i,j}) \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{k})$ ed $\exp(tX) \in \mathbf{Z}_n^+(\mathbb{k})$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, differenziando in $t = 0$ la $e^i(\exp(tX)(e_j)) = \delta_{i,j}$ per $i \geq j$, otteniamo che $X_{i,j} = \frac{d}{dt} e^i(\exp(tX)(e_j))|_{t=0} = 0$ se $i \geq j$. Viceversa, è chiaro che $\exp(\mathfrak{z}_n^+(\mathbb{k})) \subset \mathbf{Z}_n^+(\mathbb{k})$. Quindi $\mathfrak{z}_n^+(\mathbb{k})$ è l'algebra di Lie di $\mathbf{Z}_n^+(\mathbb{k})$ e la tesi segue dalla Proposizione XXV.6.1. \square

Indichiamo con

$$\mathbf{T}_n^+(\mathbb{k}) = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} & \cdots & x_{1,n} \\ & x_{2,2} & x_{2,3} & \cdots & x_{2,n} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & x_{n-1,n-1} & x_{n-1,n} \\ & & & & x_{n,n} \end{pmatrix} \mid x_{i,j} \in \mathbb{k}, \det x \neq 0 \right\}$$

il gruppo delle matrici triangolari superiori invertibili, con

$$\mathbf{ST}_n^+(\mathbb{k}) = \{x \in \mathbf{T}_n^+(\mathbb{k}) \mid \det x = 1\}$$

il suo sottogruppo formato da quelle con determinante uno. Consideriamo quindi le algebre di Lie delle matrici triangolari superiori e di quelle con traccia nulla a coefficienti in \mathbb{k} :

$$\mathfrak{t}_n^+(\mathbb{k}) = \left\{ \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} & \cdots & x_{1,n} \\ & x_{2,2} & x_{2,3} & \cdots & x_{2,n} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & x_{n-1,n-1} & x_{n-1,n} \\ & & & & x_{n,n} \end{pmatrix} \mid x_{i,j} \in \mathbb{k} \right\}$$

$$\mathfrak{st}_n^+(\mathbb{k}) = \{X \in \mathfrak{t}_n^+(\mathbb{k}) \mid \text{traccia}(X) = 0\}.$$

Indichiamo con $\Delta_n(\mathbb{k})$ il gruppo delle matrici diagonali invertibili con coefficienti in \mathbb{k} .

PROPOSIZIONE XXV.6.3. *Il gruppo $\mathbf{Z}_n^+(\mathbb{k})$ è un sottogruppo normale di $\mathbf{T}_n^+(\mathbb{k})$ ed abbiamo una decomposizione in prodotto diretto*

$$\mathbf{T}_n^+(\mathbb{k}) = \Delta_n(\mathbb{k}) \ltimes \mathbf{Z}_n^+(\mathbb{k}).$$

Ogni matrice semisemplice in $\mathbf{T}_n^+(\mathbb{k})$ è coniugata a una matrice di $\Delta_n(\mathbb{k})$ mediante un elemento di $\mathbf{Z}_n^+(\mathbb{k})$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $x = (x_{i,j}) \in \mathbf{T}_n^+(\mathbb{k})$ un endomorfismo semisemplice. Gli elementi $\lambda_i = x_{i,i}$ della sua diagonale principale sono i suoi autovalori. Osserviamo che e_1 è un autovettore di x corrispondente all'autovalore λ_1 . Possiamo completare $e_1 = e_1$ ad una base di autovettori $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ di x , con $x(\epsilon_i) = \lambda_i \epsilon_i$ ed $\epsilon_i - e_i \in \ell_{i-1}$ per $1 < i \leq n$, ove abbiamo posto $\ell_h = \langle \{e_j\}_{j \leq h} \rangle$ per $1 \leq h \leq n$.

Infatti, i sottospazi ℓ_h sono x -invarianti e la restrizione di x a ciascun ℓ_h è semisemplice. Quindi, per ogni $1 < i \leq n$ il sottospazio ℓ_{i-1} ha un complemento x -invariante W_i in ℓ_i . Il sottospazio W_i ha dimensione uno, è un sottospazio di autovettori relativi all'autovalore λ_i , e contiene un vettore della forma $\epsilon_i = e_i + \sum_{j < i} a_{j,i} e_j$.

Costruiamo una matrice a di $\mathbf{Z}_n^+(\mathbb{k})$, utilizzando i coefficienti $a_{i,j}$ così ottenuti quando $i < j$, e ponendo $a_{i,i} = 1$ per $i = 1, \dots, n$ ed $a_{i,j} = 0$ se $i > j$. Allora axa^{-1} è la matrice $x_\delta = \text{diag}(x_{1,1}, \dots, x_{n,n})$. Questo dimostra l'ultima affermazione dell' enunciato.

Per dimostrare la prima, fissiamo un qualsiasi elemento $x = (x_{i,j})$ di $\mathbf{T}_n^+(\mathbb{k})$. Sia $x_s + x_n$ la sua decomposizione di Wedderburn. Osserviamo che x_s e x_n sono matrici

triangolari superiori perché sono polinomi di x . Inoltre x_s è invertibile e la $x = x_s(e + x_s^{-1}x_n)$ è la decomposizione di x nel prodotto di un elemento semisemplice di $\mathbf{T}_n^+(\mathbb{k})$ e di un elemento unipotente $x'_n = e + x_s^{-1}x_n \in \mathbf{Z}_n^+(\mathbb{k})$. Abbiamo, per la prima parte della dimostrazione, $x'_n = ax_\delta a^{-1}$ con $x_\delta = \text{diag}(x_{1,1}, \dots, x_{n,n})$, per un elemento $a \in \mathbf{Z}_n^+(\mathbb{k})$. Allora

$$x = a^{-1}x_\delta a x'_n = x_\delta \left((x_\delta^{-1} a^{-1} x_\delta) a x'_n \right) = x_\delta x''_n, \quad \text{con } x_\delta \in \Delta_n(\mathbb{k}), x''_n \in \mathbf{Z}_n^+(\mathbb{k}).$$

La decomposizione è unica perché l'identità è l'unica matrice diagonale di $\mathbf{Z}_n^+(\mathbb{k})$. Questo completa la dimostrazione. \square

OSSERVAZIONE XXV.6.4. Abbiamo dimostrato che $\bigcup_{a \in \mathbf{Z}_n^+(\mathbb{k})} \text{ad}(a)(\Delta_n(\mathbb{k}))$ è l'insieme di tutti gli elementi semisemplici di $\mathbf{T}_n^+(\mathbb{k})$.

PROPOSIZIONE XXV.6.5. *Se \mathbb{k} è uguale a \mathbb{C} o a \mathbb{R} , allora $\mathbf{T}_n^+(\mathbb{k})$ ed $\mathbf{ST}_n^+(\mathbb{k})$ sono gruppi di Lie con algebre di Lie $\mathfrak{t}_n^+(\mathbb{k})$ ed $\mathfrak{st}_n^+(\mathbb{k})$, rispettivamente. I gruppi $\mathbf{T}_n^+(\mathbb{C})$ ed $\mathbf{ST}_n^+(\mathbb{C})$ sono connessi. I gruppi $\mathbf{T}_n^+(\mathbb{R})$ ed $\mathbf{ST}_n^+(\mathbb{R})$ non sono connessi se $n \geq 2$. L'applicazione esponenziale $\exp : \mathfrak{t}_n^+(\mathbb{k}) \rightarrow \mathbf{T}_n^+(\mathbb{k})$ ed $\exp : \mathfrak{st}_n^+(\mathbb{k}) \rightarrow \mathbf{ST}_n^+(\mathbb{k})$ sono surgettive sulle componenti connesse dell'identità.*

DIMOSTRAZIONE. Utilizzando la Proposizione XXV.6.3, ci riconduciamo allo studio dell'applicazione esponenziale sulle matrici diagonali. \square

COROLLARIO XXV.6.6. *L'applicazione $\exp : \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ è surgettiva.*

DIMOSTRAZIONE. Ogni matrice di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ è coniugata ad una matrice triangolare superiore. La tesi è quindi conseguenza della Proposizione XXV.6.5. \square

OSSERVAZIONE XXV.6.7. Le considerazioni svolte sopra si possono ripetere per matrici triangolari inferiori.

XXV.7. Sottogruppi di Lie del gruppo lineare

I gruppi lineari hanno una struttura naturale di *gruppi di Lie*, di dimensione uguale a quella della loro algebra di Lie. In questo paragrafo consideriamo sottogruppi di Lie, non necessariamente chiusi, del gruppo lineare.

Premettiamo alcune considerazioni di carattere generale.

XXV.7.1. Il teorema di Frobenius. Sia M una varietà differenziabile di dimensione m . Indichiamo con $\mathcal{E}(M)$ l'anello delle funzioni reali di classe \mathcal{C}^∞ definite su M e con $\mathfrak{X}(M) = \mathcal{C}^\infty(M, TM)$ l' $\mathcal{E}(M)$ -modulo dei campi di vettori di classe \mathcal{C}^∞ su M .

Una *distribuzione vettoriale* su M è un sotto- $\mathcal{E}(M)$ -modulo \mathcal{D} di $\mathfrak{X}(M)$. Per ogni punto $p \in M$ indichiamo con \mathcal{D}_p il sottospazio vettoriale di $T_p M$ formato dai valori in p dei campi di vettori di \mathcal{D} :

$$\mathcal{D}_p = \{X_p \mid X \in \mathcal{D}\}.$$

La sua dimensione si dice il *rango* di \mathcal{D} in p .

Una sottovarietà differenziabile connessa N di M si dice una *sottovarietà integrale* di \mathcal{D} se $T_p N \subset \mathcal{D}_p$ per ogni $p \in N$. Chiaramente una tale N non può avere in alcun suo punto p dimensione maggiore del rango della distribuzione \mathcal{D} in p .

Se $T_p N = \mathcal{D}_p$ per ogni punto $p \in N$ diciamo che N è una *sottovarietà integrale completa* di \mathcal{D} .

Vale il

TEOREMA XXV.7.1 (Frobenius⁵). *Sia \mathcal{D} una distribuzione vettoriale su X di rango costante n . Sono condizioni equivalenti:*

- (i) *per ogni punto p di M esiste un intorno aperto U di p in M e una sottovarietà differenziabile chiusa N di U che contiene p ed è una sottovarietà integrale completa di \mathcal{D} ;*
- (ii) *la distribuzione \mathcal{D} è formalmente integrabile, tale cioè che*

$$[\mathcal{D}, \mathcal{D}] \subset \mathcal{D}.$$

DIMOSTRAZIONE. (i) \Rightarrow (ii) Siano $X, Y \in \mathcal{D}$, sia $p \in M$ e sia N una sottovarietà integrale completa di \mathcal{D} passante per il punto p . Poiché le restrizioni di X e Y ad N sono per ipotesi campi di vettori tangenti ad N , anche il loro commutatore $[X, Y]$ è un campo di vettori tangente ad N . Questo dimostra che $[X, Y]_p \in \mathcal{D}_x$. Poiché questa proprietà è verificata per ogni $p \in M$, otteniamo che $[X, Y] \in \mathcal{D}$.

(ii) \Rightarrow (i) Dimostriamo, per induzione sul rango n della distribuzione \mathcal{D} , che per ogni punto p di M possiamo trovare un intorno aperto U di p e coordinate locali y^1, \dots, y^m in U tali che $\mathcal{D}|_U$ sia generata dalle derivate parziali rispetto alle prime n coordinate:

$$\mathcal{D}|_U = \mathcal{E}(U) \frac{\partial}{\partial y^1} + \dots + \mathcal{E}(U) \frac{\partial}{\partial y^n}.$$

Ciò è vero per $m = 1$. Fissiamo infatti coordinate locali x^1, \dots, x^m in un intorno U di p tali che \mathcal{D} sia generato in U dal campo di vettori:

$$X = \frac{\partial}{\partial x^1} + \sum_{j=2}^m a^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{\phi}^1(t) = 1 \\ \dot{\phi}^j(t) = a^j(\phi(t)) & \text{se } j = 2, \dots, m \\ \phi^1(0) = 0 \\ \phi^j(0) = x^j & \text{se } j = 2, \dots, m. \end{cases}$$

ha soluzione unica $\phi^i(t; x^2, \dots, x^m)$ per $|(x^2, \dots, x^m)|$ piccolo e la posizione:

$$x^i = \phi^i(y^1; y^2, \dots, y^n) \quad \text{per } i = 1, 2, \dots, m$$

definisce per il teorema delle funzioni implicite un nuovo sistema di coordinate con centro in p per cui $X = \partial/\partial y^1$.

Supponiamo ora $n > 1$ e la nostra asserzione valida per distribuzioni formalmente integrabili di rango minore di n . Possiamo fissare una carta coordinata con

⁵Ferdinand Georg Frobenius (Charlottenburg, 26 ottobre 1849 Berlino, 3 agosto 1917)

centro nel punto p assegnato, in modo che nelle coordinate locali x^1, \dots, x^m la distribuzione \mathcal{D} sia generata in U da campi di vettori della forma:

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{k=n+1}^n a_i^k \frac{\partial}{\partial x^k} \quad \text{per } i = 1, \dots, n.$$

Per la prima parte della dimostrazione possiamo ancora supporre che $a_1^k = 0$ in U per $k = m+1, \dots, n$, cioè $X_1 = \partial/\partial x^1$. L'integrabilità formale di \mathcal{D} ci dà allora $[X_i, X_j] = 0$ in U per ogni $i, j = 1, \dots, m$, e questa ci dice in particolare che

$$\partial a_i^k / \partial x^1 = 0 \quad \text{per } i = 2, \dots, m \quad k = m+1, \dots, n.$$

Perciò X_2, \dots, X_n generano in $U' = \{x' \in \mathbb{R}^{n-1} \mid |x^j| < R\}$ una distribuzione formalmente integrabile di rango $(m-1)$. Per l'ipotesi induttiva possiamo trovare nuove coordinate y^2, \dots, y^m tali che $X_j = \partial/\partial y^j$ per $j = 2, \dots, n$. Ponendo $y^1 = x^1$ abbiamo dimostrato la nostra asserzione.

Poiché nelle nuove coordinate abbiamo

$$X_i = \frac{\partial}{\partial y^i} \quad \text{per } i = 1, \dots, m,$$

otteniamo la sottovarietà integrale completa di \mathcal{D} passante per p nella forma

$$N \cap U = \{y^{k+1} = 0, \dots, y^n = 0\}.$$

□

XXV.7.2. Sottoalgebre di Lie di $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ e sottogruppi analitici.

Se $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$, indichiamo con \vec{A} il campo di vettori costante su $\mathbb{R}^{n \times n}$

$$\vec{A} = \sum_{ij} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_{ij}}.$$

Ad ogni matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ facciamo corrispondere il *campo di vettori invariante a sinistra* \underline{A} , definito su $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ da

$$\underline{A}_x = \sum_{i,j,h=1}^n x_{i,h} a_{h,j} \frac{\partial}{\partial x_{i,j}}, \quad \forall x = (x_{i,j}) \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}).$$

Il campo \underline{A} è il generatore infinitesimale del gruppo a un parametro di diffeomorfismi

$$\mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \ni (x, t) \longrightarrow x \exp(tA) \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}).$$

Si verifica che

$$[\underline{A}, \underline{B}] = [\underline{A}, \underline{B}], \quad \forall A, B \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}),$$

dove le parentesi a primo membro rappresentano la commutazione dei campi di vettori e quelle a secondo membro il commutatore di due endomorfismi lineari.

Otteniamo in questo modo un omomorfismo iniettivo di algebre di Lie:

$$\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \ni A \longrightarrow \underline{A} \in \mathfrak{X}(\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})).$$

I campi di vettori \underline{A} sono *invarianti a sinistra* su $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$: abbiamo cioè $L_{x*}(\underline{A}) = \underline{A}$ per ogni $A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ ed $x \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$.

Associamo a una sottoalgebra di Lie \mathfrak{g} di $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ la distribuzione vettoriale $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ su $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ generata dai campi di vettori \underline{A} al variare di A in \mathfrak{g} . La $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ è allora formalmente integrabile e per il teorema di Frobenius esisterà una sottovarietà integrale completa massimale \mathbf{G} di $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ che contiene l'identità I_n . Abbiamo:

TEOREMA XXV.7.2. *Se \mathfrak{g} è una sottoalgebra di Lie reale di $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$, allora la sottovarietà integrale massimale completa \mathbf{G} di $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ che contiene l'identità I_n è un sottogruppo del gruppo lineare $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$. Esso è il sottogruppo \mathbf{G} di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ generato dagli elementi $\exp(A)$ al variare di A in \mathfrak{g} .*

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che \mathbf{G} contiene $\overrightarrow{\exp(X)}$ per ogni $X \in \mathfrak{g}$, in quanto la curva $\mathbb{R} \ni t \rightarrow \exp(tX)$ è tangente a $\overrightarrow{\exp(tX)} \in \mathcal{D}_{\exp(tX)}(\mathfrak{g})$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Se fissiamo poi una coppia di elementi $X, Y \in \mathfrak{g}$, allora \mathbf{G} contiene anche $\overrightarrow{\exp(X)\exp(Y)}$ in quanto la curva $\mathbb{R} \ni t \rightarrow \exp(X)\exp(tY)$ è, per ogni $t \in \mathbb{R}$, tangente a $\overrightarrow{\exp(X)\exp(tY)} \in \mathcal{D}_{\exp(X)\exp(tY)}(\mathfrak{g})$, e contiene il punto $\exp(X)$ di \mathbf{G} . In modo analogo dimostriamo che \mathbf{G} contiene ogni prodotto finito $\exp(X_1) \cdots \exp(X_m)$ con $X_1, \dots, X_m \in \mathfrak{g}$ e quindi il sottogruppo \mathbf{G}' di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ generato da $\{\exp(X) \mid X \in \mathfrak{g}\}$.

Fissiamo ora un intorno aperto U di 0 in $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ tale che l'esponenziale definisca un omeomorfismo di U su $\exp(U)$. Sia $V = \exp(U \cap \mathfrak{g})$. Allora \mathbf{G}' è il sottogruppo di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ generato da V .

Per dimostrare che $\mathbf{G} = \mathbf{G}'$, consideriamo su \mathbf{G} la topologia di sottovarietà differenziabile di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, quella cioè per cui per ogni $g \in \mathbf{G}$ l'applicazione

$$U \cap \mathfrak{g} \ni X \rightarrow g \exp(X) \in gV$$

è un diffeomorfismo. È facile verificare allora che \mathbf{G}' è aperto e chiuso in \mathbf{G} e che quindi le due sottovarietà coincidono. \square

Occorre osservare che in generale la topologia di sottovarietà su \mathbf{G} che si considera nella dimostrazione del teorema è più fine della topologia di sottospazio topologico: le due topologie coincidono quando \mathbf{G} è un sottogruppo chiuso di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$.

DEFINIZIONE XXV.7.3. Il gruppo \mathbf{G} ottenuto nel teorema precedente, con la topologia di sottovarietà differenziabile di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, si dice il *sottogruppo (di Lie) analitico associato alla sottoalgebra di Lie \mathfrak{g} di $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$* .

Un sottogruppo \mathbf{G} del gruppo lineare $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ che abbia al più un numero finito di componenti connesse e la cui componente connessa dell'identità \mathbf{G}_e sia un sottogruppo analitico di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ si dirà un *sottogruppo di Lie del gruppo lineare $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$* .

Ad esempio, il sottogruppo analitico \mathbf{G} di $\mathbf{GL}(4, \mathbb{R})$ corrispondente all'algebra di Lie $\mathfrak{g} = \mathbb{R}A$ con

$$A = \begin{pmatrix} & -1 & & \\ 1 & & & \\ & & \pi & \\ & & & -\pi \end{pmatrix}$$

è la curva:

$$\mathbf{G} = \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} \cos t & -\sin t & & \\ \sin t & \cos t & & \\ & & \cos(\pi t) & -\sin(\pi t) \\ & & \sin(\pi t) & \cos(\pi t) \end{array} \right) \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$$

che è densa nel sottogruppo chiuso:

$$\overline{\mathbf{G}} = \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} \cos t & -\sin t & & \\ \sin t & \cos t & & \\ & & \cos s & -\sin s \\ & & \sin s & \cos s \end{array} \right) \middle| t, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Osserviamo che possiamo sempre considerare $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ come un sottogruppo chiuso del gruppo lineare reale $\mathbf{GL}(2n, \mathbb{R})$. La discussione che abbiamo sopra sviluppato per semplicità nel caso di sottoalgebre di Lie reali dell'algebra di Lie $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$, si può facilmente ripetere nel caso di sottogruppi di Lie reali di $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$.

Abbiamo:

PROPOSIZIONE XXV.7.4. *Siano $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2$ sottogruppi analitici del gruppo lineare $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, con algebre di Lie \mathfrak{g}_1 e \mathfrak{g}_2 rispettivamente. Allora: $\mathbf{G}_1 \subset \mathbf{G}_2$ se e soltanto se $\mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}_2$.*

OSSERVAZIONE XXV.7.5. Un sottogruppo di Lie \mathbf{G} di un gruppo lineare $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ è un gruppo topologico con la topologia τ di sottospazio. La sua topologia τ_{Lie} di *sottogruppo di Lie* è comunque completamente determinata: essa è la meno fine tra le topologie localmente connesse che sono più fini di quella di sottospazio: sono aperti nella topologia τ_{Lie} tutte le componenti connesse degli aperti della topologia τ . Questi aperti connessi formano una base di τ_{Lie} .

L'algebra di Lie \mathfrak{g} di un sottogruppo di Lie \mathbf{G} del gruppo lineare $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ è caratterizzata, come nel caso dei sottogruppi chiusi, da:

$$\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid \exp(tX) \in \mathbf{G} \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Gruppi lineari compatti

Esamineremo in questo capitolo la struttura dei principali gruppi lineari compatti. Ricordiamo la loro definizione:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(n) &= \{a \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}) \mid a^* a = I_n\} \quad (\text{gruppo unitario}) \\ \mathbf{SU}(n) &= \mathbf{U}(n) \cap \mathbf{SL}_n(\mathbb{C}) \quad (\text{gruppo speciale unitario}) \\ \mathbf{O}(n) &= \{a \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t a a = I_n\} \quad (\text{gruppo ortogonale}) \\ \mathbf{SO}(n) &= \mathbf{O}(n) \cap \mathbf{SL}_n(\mathbb{R}) \quad (\text{gruppo speciale ortogonale}) \\ \mathbf{Sp}(n) &= \{a \in \mathbf{U}(2n) \mid {}^t a J a = J\} \quad \left(\begin{array}{l} \text{gruppo simplettico compatto,} \\ \text{o unitario quaternionico, o iper-unitario} \end{array} \right) \end{aligned}$$

ove I_n è la matrice unità $n \times n$ e si è posto:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Vale il

TEOREMA XXVI.0.6. *Se \mathbf{G} è un gruppo lineare compatto e \mathfrak{g} la sua algebra di Lie, l'applicazione esponenziale $\mathfrak{g} \ni X \rightarrow \exp(X) \in \mathbf{G}$ ha come immagine la componente connessa \mathbf{G}_e dell'identità di \mathbf{G} .*

In questo capitolo non daremo la dimostrazione generale di questo teorema, ma ne illustreremo la validità per ciascuno dei gruppi lineari compatti considerati.

XXVI.1. Proprietà topologiche di $\mathbf{U}(n)$

LEMMA XXVI.1.1. *Ogni matrice di $\mathbf{U}(n)$ è diagonalizzabile in una base ortonormale di \mathbb{C}^n . I suoi autovalori hanno tutti modulo uguale a 1.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $u \in \mathbf{U}(n)$. Poiché il campo \mathbb{C} è algebricamente chiuso, u ha almeno un autovalore $\lambda_1 \in \mathbb{C}$, con autovettore ϵ_1 che possiamo prendere di norma unitaria: $\|\epsilon_1\| = 1$. Da $1 = \|\epsilon_1\|^2 = \|u(\epsilon_1)\|^2 = \|\lambda_1 \epsilon_1\|^2 = |\lambda_1|^2$ ricaviamo che $|\lambda_1| = 1$, cioè $\bar{\lambda}_1 = \lambda_1^{-1}$. Se $v \in \epsilon_1^\perp$, allora

$$(u(v)|\epsilon_1) = \lambda^{-1}(u(v)|u(\epsilon_1)) = \lambda^{-1}(v|\epsilon_1) = 0.$$

Quindi $u(\epsilon_1^\perp) = \epsilon_1^\perp$ e la restrizione di u all'iperpiano ϵ_1^\perp è ancora un'applicazione unitaria su uno spazio vettoriale complesso di dimensione $n - 1$. Per ricorrenza otteniamo che u è diagonalizzabile in una base ortonormale. \square

TEOREMA XXVI.1.2. Il gruppo $\mathbf{U}(n)$ è un sottogruppo chiuso, compatto e connesso per archi di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$. La sua algebra di Lie $\mathfrak{u}(n)$ è

$$(26.1.1) \quad \mathfrak{u}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid X + X^* = 0\}$$

ed ha dimensione reale n^2 . L'applicazione esponenziale

$$(26.1.2) \quad \mathfrak{u}(n) \ni X \rightarrow \exp(X) \in \mathbf{U}(n)$$

è surgettiva.

DIMOSTRAZIONE. L'applicazione $\phi : \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}) \ni a \rightarrow a^*a \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ è continua e quindi $U(n) = \phi^{-1}(e)$ è un chiuso, contenuto nel compatto $\{a \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}) \mid \|a\| = 1\}$ e perciò compatto.

Abbiamo già osservato che $[\exp(A)]^* = \exp(A^*)$ per ogni $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$. Fissata $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, l'applicazione:

$$\alpha_A : \mathbb{R} \ni t \rightarrow \exp(tA^*) \exp(tA) = [\exp(tA)]^* \exp(tA) \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$$

è differenziabile e

$$\alpha'_A(t) = \exp(tA^*) (A^* + A) \exp(tA) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Quindi: se $A \in \mathfrak{u}(n)$, allora $\alpha_A(t) = I_n$ per ogni $t \in \mathbb{R}$; in particolare $A^* + A = \alpha'_A(0) = 0$. Viceversa, se $A^* + A = 0$, allora $\alpha'_A(t) = 0$; quindi $\alpha_A(t)$ è costante ed uguale ad I_n e perciò A appartiene all'algebra di Lie $\mathfrak{u}(n)$ di $\mathbf{U}(n)$.

Dimostriamo ora che l'applicazione $\exp : \mathfrak{u}(n) \rightarrow \mathbf{U}(n)$ è surgettiva. Fissiamo $u \in \mathbf{U}(n)$. Per il Lemma XXVI.1.1, possiamo trovare una base ortonormale di \mathbb{C}^n , e quindi una matrice $a \in \mathbf{U}(n)$, tale che

$$aua^{-1} = aua^* = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\theta_3} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{i\theta_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & e^{i\theta_n} \end{pmatrix}.$$

Allora, posto

$$A = \begin{pmatrix} i\theta_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & i\theta_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\theta_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & i\theta_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & i\theta_n \end{pmatrix}$$

abbiamo $A \in \mathfrak{u}(n)$ e quindi $uAu^* \in \mathfrak{u}(n)$ e

$$\exp(uAu^*) = u \exp(A) u^* = a.$$

Essendo immagine dello spazio vettoriale $\mathfrak{u}(n)$ mediante l'applicazione continua \exp , il gruppo $\mathbf{U}(n)$ è connesso per archi. \square

XXVI.2. Il gruppo speciale unitario

L'applicazione

$$\mathbf{U}(n) \ni u \rightarrow \det u \in \mathbf{S}^1 \subset \mathbb{C}$$

è un omomorfismo continuo del gruppo unitario nel gruppo moltiplicativo \mathbf{S}^1 dei numeri complessi di modulo 1. Il suo nucleo

$$\mathbf{SU}(n) = \{u \in \mathbf{U}(n) \mid \det u = 1\}$$

è un sottogruppo chiuso normale di $\mathbf{U}(n)$, che si dice *gruppo unitario speciale* di ordine n .

TEOREMA XXVI.2.1. *L'algebra di Lie di $\mathbf{SU}(n)$ è la sottoalgebra di Lie $\mathfrak{su}(n)$ di $\mathfrak{u}(n)$, formata dalle matrici di $\mathfrak{u}(n)$ che hanno traccia nulla:*

$$\mathfrak{su}(n) = \{X \in \mathfrak{u}(n) \mid \text{trac}(X) = 0\}.$$

L'applicazione

$$\mathfrak{su}(n) \ni X \rightarrow \exp(X) \in \mathbf{SU}(n)$$

è surgettiva. Il gruppo $\mathbf{SU}(n)$ ha dimensione reale $n^2 - 1$. Esso è compatto e connesso per archi.

DIMOSTRAZIONE. La prima affermazione segue dalla formula: $\det(\exp(X)) = e^{\text{trac}(X)}$. Infatti, se $X \in \mathfrak{su}(n)$, da $\exp(tX) \in \mathbf{SU}(n)$ per ogni numero reale t , segue che:

$$\begin{cases} X + X^* = 0 \\ \text{trac}(tX) = t \cdot \text{trac}(X) = 2k\pi i \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \text{con } k = k(t) \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

La seconda relazione implica che $\text{trac}(X) = 0$.

Sia ora $u \in \mathbf{SU}(n)$. Allora possiamo trovare $a \in \mathbf{U}(n)$ tale che

$$a u a^{-1} = a u a^* = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\theta_3} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{i\theta_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & e^{i\theta_n} \end{pmatrix}.$$

La condizione $\det u = 1$ dà allora

$$\exp(i(\theta_1 + \dots + \theta_n)) = 1$$

e quindi

$$e^{i\theta_n} = \exp(-i(\theta_1 + \dots + \theta_{n-1})).$$

Posto

$$U = \begin{pmatrix} i\theta_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & i\theta_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\theta_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & i\theta_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -i(\theta_1 + \dots + \theta_{n-1}) \end{pmatrix}$$

abbiamo $U \in \mathfrak{su}(n)$ e quindi $aUa^* = aUa^{-1} \in \mathfrak{su}(n)$ per l'invarianza della traccia rispetto al coniugio in $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ e

$$\exp(aUa^*) = a \exp(U)a^* = u.$$

L'applicazione $\mathfrak{u}(n) \ni X \rightarrow \text{itrac}(X) \in \mathbb{R}$ è un funzionale lineare non identicamente nullo su $\mathfrak{u}(n)$ e quindi $\mathfrak{su}(n)$ ha dimensione $n^2 - 1$. Il gruppo $\mathbf{SU}(n)$ è compatto perché è un sottogruppo chiuso di $\mathbf{U}(n)$ e connesso per archi perché immagine continua, mediante l'applicazione esponenziale, della propria algebra di Lie $\mathfrak{su}(n)$. \square

XXVI.3. I gruppi $\mathbf{O}(n)$ ed $\mathbf{SO}(n)$

Il gruppo $\mathbf{O}(n)$ (*gruppo ortogonale di ordine n*) è il gruppo delle isometrie lineari e $\mathbf{SO}(n)$ (*gruppo speciale ortogonale o gruppo delle rotazioni di ordine n*) quello delle isometrie lineari di determinante 1 dello spazio Euclideo \mathbb{R}^n .

Osserviamo che $\mathbf{SO}(n)$ è un sottogruppo normale di indice 2 di $\mathbf{O}(n)$. Poiché $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ è un sottogruppo chiuso di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$, anche $\mathbf{O}(n)$ e $\mathbf{SO}(n)$ sono sottogruppi chiusi di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$.

I gruppi $\mathbf{O}(n)$ e $\mathbf{SO}(n)$ sono compatti, in quanto valgono le:

$$\mathbf{O}(n) = \mathbf{U}(n) \cap \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad \mathbf{SO}(n) = \mathbf{U}(n) \cap \mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$$

e quindi $\mathbf{O}(n)$ e $\mathbf{SO}(n)$ sono sottogruppi chiusi del gruppo compatto $\mathbf{U}(n)$.

TEOREMA XXVI.3.1. *I due gruppi $\mathbf{O}(n)$ ed $\mathbf{SO}(n)$ hanno la stessa algebra di Lie*

$$\mathfrak{o}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid X + {}^tX = 0\}.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia X un elemento dell'algebra di Lie $\mathfrak{o}(n)$ di $\mathbf{O}(n)$. Poiché $\exp(tX) \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) \cap \mathbf{U}(n)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, il determinante di $\exp(tX)$ sarà reale e di modulo 1. Poiché il determinante di una matrice reale è positivo, avremo allora:

$$\det(\exp(tX)) = e^{t \cdot \text{trac}(X)} = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

e quindi

$$\exp(tX) \in \mathbf{SO}(n) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

dimostra che $\mathbf{O}(n)$ e $\mathbf{SO}(n)$ hanno la stessa algebra di Lie. Abbiamo poi

$$I_n = {}^t(\exp(tX)) \exp(tX) = \exp(t \cdot {}^tX) \exp(tX) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Poiché

$$\frac{d}{dt} \left[{}^t(\exp(tX)) \exp(tX) \right] = \exp(t \cdot {}^tX) ({}^tX + X) \exp(tX) \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

la condizione ${}^tX + X = 0$ è necessaria e sufficiente affinché $X \in \mathfrak{o}(n)$. \square

TEOREMA XXVI.3.2. *L'applicazione*

$$\mathfrak{o}(n) \ni X \rightarrow \exp(X) \in \mathbf{SO}(n)$$

è surgettiva.

DIMOSTRAZIONE. Per ogni rotazione $a \in \mathbf{SO}(n)$, possiamo trovare una decomposizione di \mathbb{R}^n in somma diretta di sottospazi a -invarianti e due a due ortogonali

$$\mathbb{R}^n = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_m$$

tale che ogni sottospazio V_j abbia dimensione minore o uguale a 2 e la restrizione di a ai sottospazi V_j della decomposizione che hanno dimensione 1 sia l'identità.

Su ciascuno dei sottospazi V_j di dimensione 2 la a definisce una rotazione dello spazio Euclideo \mathbb{R}^2 . Sarà quindi sufficiente dimostrare che

$$\mathfrak{o}(2) \ni X \rightarrow \exp(X) \in \mathbf{SO}(2)$$

è surgettiva. Un elemento di $\mathfrak{o}(2)$ è una matrice della forma

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché

$$A(\theta)^{2h} = \begin{pmatrix} (-1)^h \theta^{2h} & 0 \\ 0 & (-1)^h \theta^{2h} \end{pmatrix} \quad \text{ed} \quad A(\theta)^{2h+1} = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^{h+1} \theta^{2h+1} \\ (-1)^h \theta^{2h+1} & 0 \end{pmatrix}$$

otteniamo

$$\exp(A(\theta)) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Ciò dimostra che $\exp : \mathfrak{o}(2) \rightarrow \mathbf{SO}(2)$ è surgettiva. La dimostrazione è completa. \square

TEOREMA XXVI.3.3. $\mathbf{SO}(n)$ è un gruppo compatto e connesso per archi di dimensione $n(n-1)/2$. Il gruppo $\mathbf{O}(n)$ è unione di due componenti connesse, omeomorfe a $\mathbf{SO}(n)$.

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo già osservato che i gruppi $\mathbf{SO}(n)$ e $\mathbf{O}(n)$ sono compatti, in quanto sottogruppi chiusi di $\mathbf{U}(n)$. Inoltre $\mathbf{SO}(n)$ è connesso per archi perché immagine mediante l'esponenziale dello spazio vettoriale $\mathfrak{o}(n)$. Questo ha dimensione $n(n-1)/2$, in quanto le matrici di $\mathfrak{o}(n)$ sono le matrici antisimmetriche e queste si parametrizzano con i coefficienti che sono al di sopra della diagonale principale.

In quanto immagine dell'algebra di Lie di $\mathbf{O}(n)$ mediante l'applicazione esponenziale, $\mathbf{SO}(n)$ è la componente connessa dell'identità in $\mathbf{O}(n)$. La moltiplicazione a sinistra per la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{O}(n)$$

è un omeomorfismo di $\mathbf{SO}(n)$ su $\mathbf{O}(n) \setminus \mathbf{SO}(n)$ e quindi $\mathbf{O}(n)$ ha esattamente due componenti connesse, omeomorfe ad $\mathbf{SO}(n)$. \square

Osserviamo che $\mathbf{SO}(1)$ è un punto, mentre l'applicazione

$$\mathbf{SO}(2) \ni a \rightarrow a(e_1) \in S^1 = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid \|v\|^2 = 1\}$$

definisce un omeomorfismo di $\mathbf{SO}(2)$ su S^1 .

XXVI.4. L'omomorfismo canonico $SU(2) \rightarrow SO(3)$

Diamo qui una versione indipendente da quella in §II.1.

Le algebre di Lie $\mathfrak{o}(3)$ e $\mathfrak{su}(2)$ sono algebre di Lie di dimensione reale 3.

Abbiamo

$$\mathfrak{o}(3) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & -z \\ -y & z & 0 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

e

$$\mathfrak{su}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} ix & y + iz \\ -y + iz & -ix \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Poniamo

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$B_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad B_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Allora A_1, A_2, A_3 formano una base di $\mathfrak{o}(3)$ e B_1, B_2, B_3 una base di $\mathfrak{su}(2)$ e il prodotto di Lie delle due algebre è descritto nelle due basi dalle tabelle:

$$\begin{aligned} [A_j, A_h] &= A_k, \quad [B_j, B_h] = B_k \\ \iff (j, h, k) &\text{ è una permutazione positiva di } \{1, 2, 3\}. \end{aligned}$$

Le due algebre sono quindi isomorfe e isomorfe all'algebra di Lie definita su \mathbb{R}^3 dal prodotto vettore.

Indichiamo con

$$s : \mathfrak{o}(3) \rightarrow \mathfrak{su}(2)$$

l'isomorfismo di algebre di Lie che fa corrispondere ad $A_j \in \mathfrak{o}(3)$ l'elemento $B_j \in \mathfrak{su}(2)$.

Per descrivere una rappresentazione di $SU(2)$ nel gruppo delle rotazioni di \mathbb{R}^3 , introduciamo l'isomorfismo \mathbb{R} -lineare:

$$\lambda : \mathbb{R}^3 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} ix & y + iz \\ -y + iz & -ix \end{pmatrix} \in \mathfrak{su}(2).$$

Abbiamo

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \mid (\alpha, \beta) \in S^3 \right\} \simeq S^3 \subset \mathbb{C}^2.$$

Facciamo operare $SU(2)$ su $\mathfrak{su}(2)$ mediante la rappresentazione aggiunta:

$$SU(2) \times \mathfrak{su}(2) \ni (u, X) \rightarrow \text{Ad}(u)X = uXu^{-1} \in \mathfrak{su}(2).$$

L'isomorfismo λ ci permette di definire una rappresentazione lineare

$$\rho : SU(2) \rightarrow GL_3(\mathbb{R})$$

mediante

$$\rho(u)v = \lambda^{-1}(\text{ad}(u)\lambda(v)) \quad \forall v \in \mathbb{R}^3.$$

LEMMA XXVI.4.1. Per ogni $u \in \mathbf{SU}(2)$, è $\rho(u) \in \mathbf{SO}(3)$.

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che

$$|v|^2 = \det \lambda(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^3.$$

Abbiamo perciò

$$|\rho(u)v|^2 = \det(u\lambda(v)u^{-1}) = \det \lambda(v) = |v|^2 \quad \forall v \in \mathbb{R}^3.$$

□

TEOREMA XXVI.4.2. L'applicazione

$$\rho : \mathbf{SU}(2) \rightarrow \mathbf{SO}(3)$$

è un omomorfismo di gruppi surgettivo. Il suo nucleo è il sottogruppo normale

$$\{\pm I_2\} \subset \mathbf{SU}(2).$$

DIMOSTRAZIONE. Siano $a, b \in \mathbf{SU}(2)$. Allora

$$\begin{aligned} \rho(a) \circ \rho(b)v &= \rho(a)(\lambda^{-1} \text{Ad}(b)\lambda(v)) \\ &= \lambda^{-1} \circ \text{Ad}(a) \circ \lambda \circ \lambda^{-1} \text{Ad}(b)\lambda(v) \\ &= \lambda^{-1} \circ \text{Ad}(a) \circ \text{Ad}(b)\lambda(v) \\ &= \lambda^{-1} \circ \text{Ad}(ab)\lambda(v) \\ &= \rho(ab)v \quad \forall v \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Ciò dimostra che ρ è un omomorfismo. Calcoliamone il nucleo. Esso è formato dalle trasformazioni $u \in \mathbf{SU}(2)$ tali che

$$\text{Ad}(u)X = X \quad \forall X \in \mathfrak{su}(2),$$

cioè

$$[u, X] = uX - Xu = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{su}(2).$$

Scrivendo queste identità con $X = B_j$, ($j = 1, 2, 3$), si ottiene, per $u = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$:

$$\beta = 0, \quad \alpha = \pm 1.$$

Per completare la dimostrazione, basta osservare che la trasformazione $\rho : \mathbf{SU}(2) \rightarrow \mathbf{SO}(3)$ può essere definita dal diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{su}(2) & \xrightarrow{\text{exp}} & \mathbf{SU}(2) \\ s \uparrow & & \downarrow \rho \\ \mathfrak{o}(3) & \xrightarrow{\text{exp}} & \mathbf{SO}(3). \end{array}$$

Da questo diagramma otteniamo immediatamente che ρ è surgettiva in quanto

$$\rho \circ \text{exp}|_{\mathfrak{su}(2)} \circ \mathbf{s}^{-1} = \text{exp}|_{\mathfrak{o}(3)}$$

è surgettiva.

□

TEOREMA XXVI.4.3. *Il gruppo topologico $\mathbf{SO}(3)$ è omeomorfo allo spazio proiettivo \mathbb{RP}^3 .*

DIMOSTRAZIONE. Il quoziente iniettivo della rappresentazione $\rho : \mathbf{SU}(2) \rightarrow \mathbf{SO}(3)$ dà un omeomorfismo

$$\mathbf{SU}(2)/\{\pm I_2\} \rightarrow \mathbf{SO}(3).$$

Il quoziente $\mathbf{SU}(2)/\{\pm I_2\}$ è omeomorfo al quoziente di $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ rispetto alla mappa antipodale

$$S^3 \ni \xi \rightarrow -\xi \in S^3$$

e quindi allo spazio proiettivo \mathbb{RP}^3 . \square

OSSERVAZIONE XXVI.4.4. L'omomorfismo canonico $\mathbf{SU}(2) \rightarrow \mathbf{SO}(3)$ ha un importante significato fisico: il fattore $1/2$ che compare nell'isomorfismo $\mathfrak{su}(2)$ tra l'algebra di Lie delle matrici 3×3 antisimmetriche e l'algebra di Lie $\mathfrak{so}(3)$ delle matrici antihermitiane 2×2 a traccia nulla si può interpretare come uno *spin*.

XXVI.4.1. Angoli di Eulero. Per ricavare la surgettività dell'applicazione $\rho : \mathbf{SU}(2) \rightarrow \mathbf{SO}(3)$ possiamo utilizzare la rappresentazione di $\mathbf{SO}(3)$ mediante gli *angoli di Eulero*. Consideriamo gli omomorfismi

$$\tau, \sigma : S^1 \rightarrow \mathbf{SO}(3)$$

definiti da

$$\tau(e^{i\phi}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}, \quad \sigma(e^{i\theta}) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$$

(rotazioni intorno all'asse x e rotazioni intorno all'asse y).

LEMMA XXVI.4.5. *L'applicazione*

$$\alpha : S^1 \times S^1 \times S^1 \ni (e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, e^{i\theta_3}) \rightarrow \tau(e^{i\theta_1}) \circ \sigma(e^{i\theta_2}) \circ \tau(e^{i\theta_3}) \in \mathbf{SO}(3)$$

è surgettiva.

DIMOSTRAZIONE. Sia e_1, e_2, e_3 la base canonica di \mathbb{R}^3 . Un'applicazione $a \in \mathbf{SO}(3)$ è completamente determinata dall'immagine dei vettori e_1, e_2 . Poniamo $\epsilon_j = a(e_j)$ per $j = 1, 2$. Poiché $|\epsilon_1| = 1$, abbiamo per opportuni $\phi, \psi \in \mathbb{R}$:

$$\epsilon_1 = \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \phi \sin \psi \\ \cos \phi \sin \psi \end{pmatrix}$$

(coordinate polari in \mathbb{R}^3). Una base ortogonale di ϵ_1^\perp è data dai vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \phi \\ -\sin \phi \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -\sin \psi \\ \sin \phi \cos \psi \\ \cos \phi \cos \psi \end{pmatrix}.$$

Quindi $\epsilon_2 = v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta$ per un opportuno $\theta \in \mathbb{R}$. Chiaramente

$$a = \alpha(e^{-i\phi}, e^{i\psi}, e^{i\theta}).$$

□

OSSERVAZIONE XXVI.4.6. In generale gli angoli di Eulero si riferiscono a una scelta di ϕ, ψ, θ con $0 \leq \psi < \pi$ e $0 \leq \phi, \theta < 2\pi$.

Definiamo ora

$$\hat{\tau}, \hat{\sigma} : S^1 \rightarrow \mathbf{SU}(2)$$

mediante

$$\hat{\tau}(e^{i\phi}) = \begin{pmatrix} e^{i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi/2} \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}(e^{i\theta}) = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix}.$$

Sia

$$\hat{\alpha} : S^1 \times S^1 \times S^1 \ni (e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, e^{i\theta_3}) \rightarrow \hat{\tau}(e^{i\theta_1}) \circ \hat{\sigma}(e^{i\theta_2}) \circ \hat{\tau}(e^{i\theta_3}) \in \mathbf{SU}(2).$$

Otteniamo allora il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} S^1 \times S^1 \times S^1 & \xrightarrow{=} & S^1 \times S^1 \times S^1 \\ \hat{\alpha} \downarrow & & \downarrow \alpha \\ \mathbf{SU}(2) & \xrightarrow{\rho} & \mathbf{SO}(3). \end{array}$$

XXVI.5. Il gruppo unitario simplettico $\mathbf{Sp}(n)$

Abbiamo definito il gruppo $\mathbf{Sp}(n)$ come il gruppo di tutte le matrici complesse unitarie a di ordine $2n$ che soddisfano ${}^t a J a = J$, ove $J = \begin{pmatrix} & I_n \\ -I_n & \end{pmatrix}$.

Il gruppo $\mathbf{Sp}(n)$ si può identificare al gruppo delle matrici $n \times n$ a coefficienti quaternioni che preservano il prodotto scalare canonico di \mathbb{H}^n .

Ricordiamo che il corpo (non commutativo) \mathbb{H} dei quaternioni di Hamilton si può identificare all'anello associativo delle matrici 2×2 a coefficienti complessi della forma $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}$ con $z, w \in \mathbb{C}$. Un numero complesso z si rappresenta con la matrice $\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{pmatrix}$. Indichiamo con j la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Possiamo allora scrivere il quaternione \mathbf{q} mediante:

$$\mathbf{q} = z + wj = z + j\bar{w}.$$

Il prodotto di due quaternioni si può esprimere mediante:

$$(z_1 + w_1 j) \cdot (z_2 + w_2 j) = (z_1 z_2 - w_1 \bar{w}_2) + (z_1 w_2 + w_1 \bar{z}_2) j \quad \forall z_1, z_2, w_1, w_2 \in \mathbb{C}.$$

Questa formula si ricava immediatamente da:

$$jz = \bar{z}j \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad \text{e} \quad j^2 = -1.$$

Il coniugato di un quaternione (corrispondente all'aggiunta della matrice con cui è definito) è dato da:

$$\overline{z + wj} = \bar{z} - wj.$$

Indichiamo con σ l'isomorfismo:

$$\sigma : \mathbb{C}^{2n} \ni (z^h, w^h)_{1 \leq h \leq n} \longrightarrow (z^h + j w^h)_{1 \leq h \leq n} \in \mathbb{H}^n$$

e con

$$\varsigma : \mathbb{C}^{2n} \ni (z^h, w^h) \rightarrow (\bar{z}^h, \bar{w}^h) \in \mathbb{C}^{2n}$$

il coniugio. Allora, indicando con $(\cdot j)$ la moltiplicazione a destra di un vettore di \mathbb{H}^n per il quaternionione j , abbiamo:

$$\sigma^{-1} \circ (\cdot j) \circ \sigma = -J \circ \varsigma = \begin{pmatrix} & -I_n \\ I_n & \end{pmatrix} \circ \varsigma.$$

Consideriamo una matrice $B = C + jD = (C_{hk} + jD_{hk})_{1 \leq h, k \leq n}$ con coefficienti $C_{hk} + jD_{hk} \in \mathbb{H}$, $C_{hk}, D_{hk} \in \mathbb{C}$. Se $u = v + jw \in \mathbb{H}^n$, con $v, w \in \mathbb{C}^n$, abbiamo

$$Bu = (Cv - \bar{D}w) + j(Dv + \bar{C}w).$$

Ad essa risulta dunque associata una $\tilde{B} \in \mathbb{C}^{(2n) \times (2n)}$ rappresentata dalla matrice:

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} C & D \\ -\bar{D} & \bar{C} \end{pmatrix}.$$

Le matrici di questa forma sono tutte e sole le matrici $2n \times 2n$ complesse A che soddisfano la:

$$(*) \quad AJ = J\bar{A}.$$

Esse formano una sottoalgebra di Lie reale di $\mathfrak{gl}_{2n}(\mathbb{C})$, che si indica con $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{H})$. Gli elementi invertibili di $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{H})$ formano il *gruppo lineare di ordine n sui quaternioni*, che indichiamo con $\mathbf{GL}_n(\mathbb{H})$.

Consideriamo ora un elemento $g \in \mathbf{Sp}(n)$. Esso è rappresentato da una matrice complessa unitaria $(2n) \times (2n)$, che verifica ${}^t g J g = J$. Poiché ${}^t g = \bar{g}^{-1}$, sostituendo otteniamo (*).

Abbiamo perciò un'inclusione naturale: $\mathbf{Sp}(n) \hookrightarrow \mathbf{GL}_n(\mathbb{H})$.

Possiamo quindi caratterizzare $\mathbf{Sp}(n)$ come il gruppo delle trasformazioni \mathbb{H} -lineari (a destra) su \mathbb{H}^n , che lasciano invariato il prodotto scalare sui quaternioni:

$$(**) \quad (u_1 | u_2)_{\mathbb{H}} = \sum_{h=1}^n u_1^h \bar{u}_2^h.$$

Se scriviamo le componenti u_l^h nella forma $v_l^h + jw_l^h$ con $v_l^h, w_l^h \in \mathbb{C}$ per $l = 1, 2$, troviamo per il prodotto scalare sui quaternioni l'espressione:

$$\begin{aligned} (u_1 | u_2)_{\mathbb{H}} &= \sum_{h=1}^n v_1^h \bar{v}_2^h + \bar{w}_1^h w_2^h + j \sum_{h=1}^n w_1^h \bar{v}_2^h - \bar{v}_1^h w_2^h \\ &= \begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ w_1 \end{pmatrix}^* I_{2n} \begin{pmatrix} \bar{v}_2 \\ w_2 \end{pmatrix} + \left[{}^t \begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ w_1 \end{pmatrix} J \begin{pmatrix} \bar{v}_2 \\ w_2 \end{pmatrix} \right] j, \end{aligned}$$

da cui segue che $\mathbf{Sp}(n, \mathbb{C})$ consiste esattamente delle matrici di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{H})$ che preservano il prodotto (**).

TEOREMA XXVI.5.1. *Per ogni intero $n \geq 1$ il gruppo $\mathbf{Sp}(n)$ è compatto e connesso per archi. La sua algebra di Lie è*

$$\mathfrak{sp}(n) = \{X \in \mathfrak{sl}(2n, \mathbb{C}) \mid {}^t X J + J X = 0, X^* + X = 0\}.$$

L'esponenziale definisce un'applicazione surgettiva

$$\exp : \mathfrak{sp}(n) \rightarrow \mathbf{Sp}(n).$$

DIMOSTRAZIONE. $\mathbf{Sp}(n)$ è compatto perché è un sottospazio chiuso di $\mathbf{U}(2n)$, che è compatto.

La caratterizzazione della sua algebra di Lie $\mathfrak{sp}(n)$ si ottiene con argomenti simili a quelli utilizzati in precedenza: si osserva che $\mathfrak{sp}(n) \subset \mathfrak{u}(2n)$ e che, posto $\gamma(t) = \exp(t'X) J \exp(tX)$, risulta:

$$\gamma'(t) = \exp(t'X) (J'X + XJ) \exp(tX).$$

Da questa si ottiene facilmente che la condizione $J'X + XJ = 0$ è necessaria e sufficiente affinché una $X \in \mathfrak{u}(2n)$ appartenga a $\mathfrak{sp}(n)$. Moltiplicando a sinistra per J e calcolando la traccia troviamo che $\text{trac } X = 0$ (e quindi $X \in \mathfrak{su}(2n)$) e moltiplicando a destra e a sinistra per J troviamo la condizione equivalente $'XJ + JX = 0$.

Osserviamo infine che per ogni $g \in \mathbf{Sp}(n)$ possiamo trovare $a \in \mathbf{Sp}(n)$ tale che

$$(*) \quad a g a^{-1} = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & e^{i\theta_n} & & \\ & & & e^{-i\theta_1} & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & e^{-i\theta_n} \end{pmatrix}.$$

Sia infatti λ_1 un autovalore di g e sia v_1 un suo autovettore con $|v_1| = 1$. Abbiamo allora:

$$a(J\bar{v}_1) = J\bar{a}v_1 = J(\bar{\lambda}_1 v_1) = \bar{\lambda}_1(J\bar{v}_1).$$

Ragionando per ricorrenza, troviamo una base ortonormale di \mathbb{C}^{2n} della forma:

$$v_1, \dots, v_n, J(v_1), \dots, J(v_n).$$

I suoi vettori formano le colonne della matrice $a \in \mathbf{Sp}(n)$ per cui $a^{-1}ga$ ha la forma diagonale (*).

La matrice

$$X = a^{-1} \begin{pmatrix} i\theta_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & i\theta_n & & \\ & & & -i\theta_1 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -i\theta_n \end{pmatrix} a$$

appartiene a $\mathfrak{sp}(n)$ ed $\exp(X) = g$.

Ciò dimostra la surgettività dell'esponenziale e quindi il fatto che $\mathbf{Sp}(n)$ è connesso per archi. \square

XXVI.6. Sfere e gruppi compatti

Sia \mathbb{k} uno dei corpi $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ e indichiamo con e_1, e_2, \dots, e_n la base canonica di \mathbb{k}^n . Possiamo allora identificare $\mathbf{O}(n-1)$ (risp. $\mathbf{SO}(n-1), \mathbf{U}(n-1), \mathbf{SU}(n-1), \mathbf{Sp}(n-1)$) al sottogruppo di $\mathbf{O}(n)$ (risp. $\mathbf{SO}(n), \mathbf{U}(n), \mathbf{SU}(n), \mathbf{Sp}(n)$) delle trasformazioni che lasciano fisso il vettore e_n . Abbiamo allora i seguenti omeomorfismi:

TEOREMA XXVI.6.1.

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(1) &\simeq \mathbf{SO}(2) \simeq S^1 \\ \mathbf{SU}(2) &\simeq \mathbf{Sp}(1) \simeq S^3 \\ \mathbf{O}(n)/\mathbf{O}(n-1) &\simeq \mathbf{SO}(n)/\mathbf{SO}(n-1) \simeq S^{n-1} \quad (n > 1) \\ \mathbf{U}(n)/\mathbf{U}(n-1) &\simeq \mathbf{SU}(n)/\mathbf{SU}(n-1) \simeq S^{2n-1} \quad (n > 1) \\ \mathbf{Sp}(n)/\mathbf{Sp}(n-1) &\simeq S^{4n-1} \quad (n > 1) \end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. Dim In ciascuno dei casi l'omeomorfismo cercato è il quoziente iniettivo dell'applicazione $g \rightarrow g(e_n)$. \square

TEOREMA XXVI.6.2. Per ogni $n \geq 2$ il gruppo $\mathbf{U}(n)$ è omeomorfo al prodotto topologico $\mathbf{SU}(n) \times S^1$.

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con $D_n(\lambda)$ la matrice $n \times n$:

$$D_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Definiamo allora l'omeomorfismo cercato mediante:

$$\mathbf{SU}(n) \times S^1 \ni (g, \lambda) \rightarrow D_n(\lambda) g \in \mathbf{U}(n);$$

il suo inverso è dato da:

$$\mathbf{U}(n) \ni g \rightarrow (D_n(1/\det g) g, \det g) \in \mathbf{SU}(n) \times S^1.$$

\square

Abbiamo le successioni esatte di omotopia dei fibrati:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \cdots & \rightarrow & \pi_2(S^n) & \longrightarrow & \\ & & & & & & \\ \longrightarrow & \pi_1(\mathbf{SO}(n)) & \longrightarrow & \pi_1(\mathbf{SO}(n+1)) & \longrightarrow & \pi_1(S^n) & \longrightarrow \mathbf{1} \\ & & & & & & \\ & & & \cdots & \longrightarrow & \pi_2(S^{2n+1}) & \longrightarrow \\ \longrightarrow & \pi_1(\mathbf{SU}(n)) & \longrightarrow & \pi_1(\mathbf{SU}(n+1)) & \longrightarrow & \pi_1(S^{2n+1}) & \longrightarrow \mathbf{1} \\ & & & & & & \\ & & & \cdots & \longrightarrow & \pi_2(S^{3n+1}) & \longrightarrow \\ \longrightarrow & \pi_1(\mathbf{Sp}(n)) & \longrightarrow & \pi_1(\mathbf{Sp}(n+1)) & \longrightarrow & \pi_1(S^{3n+1}) & \longrightarrow \mathbf{1} \end{array}$$

da cui si deduce:

TEOREMA XXVI.6.3. I gruppi $\mathbf{SU}(n)$ e $\mathbf{Sp}(n)$ sono semplicemente connessi per ogni $n \geq 1$. Per ogni $n \geq 2$ il gruppo $\mathbf{SO}(n)$ non è semplicemente connesso e $\pi_1(\mathbf{SO}(2)) \simeq \mathbb{Z}$, $\pi_1(\mathbf{SO}(n)) \simeq \mathbb{Z}_2$ per ogni $n \geq 3$.

XXVI.7. Rivestimenti e gruppo degli spinori

TEOREMA XXVI.7.1. *Se \mathbf{G} è un gruppo topologico connesso e localmente connesso per archi, allora il gruppo fondamentale $\pi_1(\mathbf{G})$ è commutativo.*

Sia $\hat{\mathbf{G}} \xrightarrow{\pi} \mathbf{G}$ un rivestimento connesso di \mathbf{G} . Fissato un punto $\hat{e} \in \pi^{-1}(e)$, vi è un'unica struttura di gruppo topologico su $\hat{\mathbf{G}}$ per cui \hat{e} sia l'identità di $\hat{\mathbf{G}}$ e π sia un omomorfismo di gruppi topologici.

DIMOSTRAZIONE. Se $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow \mathbf{G}$ sono cammini continui con $\alpha(0) = \alpha(1) = \beta(0) = \beta(1) = e$, consideriamo l'applicazione continua:

$$F : [0, 1] \times [0, 1] \ni (t, s) \rightarrow \alpha(t) \cdot \beta(s) \in \mathbf{G}.$$

Allora

$$(\alpha \cdot \beta)(t) = \begin{cases} F(2t, 0) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ F(1, 2t - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

e

$$(\beta \cdot \alpha)(t) = \begin{cases} F(0, 2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ F(2t - 1, 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

e possiamo definire un'omotetia tra $\alpha \cdot \beta$ e $\beta \cdot \alpha$ mediante:

$$G(s, t) = \begin{cases} F((1-s)2t, 2st) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ F((1-s) + s(2t-1), s + (1-s)(2t-1)) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Ciò dimostra che $\pi_1(\mathbf{G})$ è un gruppo abeliano.

Sia ora $\pi : \hat{\mathbf{G}} \rightarrow \mathbf{G}$ un rivestimento connesso di \mathbf{G} . Osserviamo che $\hat{\mathbf{G}}$ è connesso per archi.

Per ogni $\hat{g} \in \hat{\mathbf{G}}$ indichiamo con $\pi_1(\hat{\mathbf{G}}, \hat{g})$ il gruppo fondamentale di $\hat{\mathbf{G}}$ con punto base \hat{g} . Dimostriamo innanzitutto il seguente:

LEMMA XXVI.7.2. *Sia $g \in \mathbf{G}$ e sia $\hat{g} \in \pi^{-1}(g)$. Allora per ogni $\xi \in \pi_*(\pi_1(\hat{\mathbf{G}}, \hat{e}))$ risulta $L_{g*}(\xi) \in \pi_*(\pi_1(\hat{\mathbf{G}}, \hat{g}))$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\hat{\alpha} : [0, 1] \rightarrow \hat{\mathbf{G}}$ un laccetto con $\hat{\alpha}(0) = \hat{\alpha}(1) = \hat{e}$ e poniamo $\alpha = \pi \circ \hat{\alpha}$. Dobbiamo dimostrare che il laccetto $L_g \circ \alpha : [0, 1] \ni t \rightarrow L_g(\alpha(t)) \in \mathbf{G}$, si rialza a un laccetto di punto iniziale \hat{g} .

Sia $\hat{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \hat{\mathbf{G}}$ un cammino continuo con estremi \hat{e} e \hat{g} e sia $\gamma = \pi \circ \hat{\gamma}$. Consideriamo l'applicazione continua:

$$[0, 1] \times [0, 1] \ni (t, s) \rightarrow G(t, s) = \gamma(s) \cdot \alpha(t) \in \mathbf{G}.$$

Essa si rialza ad un'applicazione continua $\hat{G}(t, s)$ e $t \rightarrow \hat{G}(t, 1)$ rialza $L_g \circ \alpha$. Per dimostrare che questo è un laccetto, consideriamo l'insieme A degli $s \in [0, 1]$ tali che $\hat{G}(0, s) = \hat{G}(1, s)$. Esso contiene 0, è chiuso perché $\hat{\mathbf{G}}$ è uno spazio di Hausdorff, ed è aperto perché $\pi \circ \hat{G}(0, s) = \gamma(s) = \pi \circ \hat{G}(1, s)$ e $\hat{\mathbf{G}} \xrightarrow{\pi} \mathbf{G}$ è un rivestimento. Coincide quindi con $[0, 1]$: in particolare $\hat{G}(0, 1) = \hat{G}(1, 1)$ e $t \rightarrow \hat{G}(t, 1)$ è un laccetto. \square

CONCLUSIONE DELLA DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 7.1

Siano \hat{g}_1 e \hat{g}_2 due elementi di $\hat{\mathbf{G}}$ e siano $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2 : [0, 1] \rightarrow \hat{\mathbf{G}}$ cammini continui con $\hat{\alpha}_i(0) = \hat{\beta}_i(0) = \hat{e}$, $\hat{\alpha}_i(1) = \hat{\beta}_i(1) = \hat{g}_i$, per $i = 1, 2$. Poniamo $\alpha_i = \pi \circ \hat{\alpha}_i$, $\beta_i = \pi \circ \hat{\beta}_i$ ($i = 1, 2$). Consideriamo i cammini continui $\alpha : [0, 1] \ni t \rightarrow \alpha_1(t)\alpha_2(t) \in \mathbf{G}$ e $\beta : [0, 1] \ni t \rightarrow \beta_1(t)\beta_2(t) \in \mathbf{G}$ e siano $\hat{\alpha} : [0, 1] \rightarrow \hat{\mathbf{G}}$ e $\hat{\beta} : [0, 1] \rightarrow \hat{\mathbf{G}}$ i loro rialzamenti con punto iniziale \hat{e} . Dimostriamo che $\hat{\alpha}(1) = \hat{\beta}(1)$. A questo scopo osserviamo che

$$F(t, s) = \begin{cases} \alpha_1(t+st) \cdot \alpha_2(t-st) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha_1(s+t-st) \cdot \alpha_2(t+st-s) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

è un'omotetia tra α e

$$\alpha' = \alpha_1 \cdot (L_{g_1} \circ \alpha_2) = \begin{cases} \alpha_1(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g_1 \cdot \alpha_2(2t-1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Se indichiamo con $\hat{\alpha}'$ il rilevamento di α' con punto iniziale \hat{e} , avremo quindi $\hat{\alpha}'(1) = \hat{\alpha}(1)$. Analogamente, posto

$$\beta' = \beta_1 \cdot (L_{g_1} \circ \beta_2) = \begin{cases} \beta_1(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g_1 \cdot \beta_2(2t-1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

i rilevamenti $\hat{\beta}$ e $\hat{\beta}'$ di β e β' con punto iniziale \hat{e} hanno lo stesso punto finale in $\hat{\mathbf{G}}$.

Osserviamo ora che i punti finali di $\hat{\alpha}$ e di $\hat{\beta}$ sono i punti finali dei rialzamenti dei cammini $L_{g_1} \circ \alpha_2$ e $L_{g_1} \circ \beta_2$ con punto iniziale \hat{g}_1 . Questi coincidono perché $(L_{g_1} \circ \alpha_2) \cdot (L_{g_1} \circ \beta_2)^{-1} = L_{g_1} \circ (\alpha_2 \cdot \beta_2^{-1})$ è l'immagine mediante la traslazione a sinistra per g_1 del laccetto $\alpha_2 \cdot \beta_2^{-1}$, che per ipotesi è immagine mediante π di un laccetto in $\hat{\mathbf{G}}$ di punto iniziale \hat{e} . Per il Lemma XXVI.7.2, esso è allora l'immagine di un laccetto di punto iniziale \hat{g}_1 in $\hat{\mathbf{G}}$.

Possiamo quindi definire:

$$\hat{g}_1 \hat{g}_2 = \hat{\alpha}(1)$$

in quanto la definizione non dipende dalla scelta dei cammini α_1 e β_1 che congiungono \hat{e} ai punti \hat{g}_1, \hat{g}_2 rispettivamente.

Si verifica poi senza difficoltà che con questa definizione di prodotto $\hat{\mathbf{G}}$ è un gruppo topologico con unità \hat{e} e che $\pi : \hat{\mathbf{G}} \rightarrow \mathbf{G}$ è un omomorfismo di gruppi. \square

Il rivestimento universale di $\mathbf{SO}(n)$, per $n \geq 3$, è un gruppo topologico che si indica con $\mathbf{Spin}(n)$ e si dice il *gruppo degli spinori di ordine n* . Il rivestimento $\mathbf{Spin}(n) \xrightarrow{\pi} \mathbf{SO}(n)$ è a due fogli ed è un omomorfismo di gruppi. Osserviamo che $\mathbf{Spin}(3) \simeq \mathbf{SU}(2)$.

La lista di Cartan dei gruppi classici

Un *gruppo di Lie* è un gruppo topologico separato localmente isomorfo¹ ad un sottogruppo di Lie del gruppo lineare reale.

La sua *algebra di Lie* \mathfrak{g} si identifica all'algebra di Lie del corrispondente sottogruppo di Lie del gruppo lineare.

Ogni gruppo di Lie \mathbf{G} con un numero finito di componenti connesse è diffeomorfo ad una varietà prodotto $\mathbf{K} \times \mathbb{R}^k$, ove \mathbf{K} è un sottogruppo di Lie compatto massimale di \mathbf{G} . In questo capitolo introduciamo i gruppi lineari classici della lista di Cartan e per ciascuno di essi descriviamo questa decomposizione.

Per una presentazione opportuna di \mathbf{G} come gruppo lineare, cioè come sottogruppo chiuso di $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$, il sottogruppo compatto massimale \mathbf{K} sarà l'intersezione $\mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)$ di \mathbf{G} con il gruppo delle matrici unitarie.

XXVII.1. Decomposizione di Cartan dei gruppi classici

Ricordiamo che, l'algebra di Lie di un sottogruppo di Lie \mathbf{G} di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ è

$$\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \mid \exp(tX) \in \mathbf{G}, \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

DEFINIZIONE XXVII.1.1. Un sottogruppo \mathbf{G} del gruppo lineare $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ si dice *pseudoalgebrico* se può essere definito mediante un sistema di equazioni:

$$(*) \quad f_1(x, x^*) = 0, \dots, f_N(x, x^*) = 0$$

dove f_1, \dots, f_N sono polinomi a coefficienti reali delle parti reali e immaginarie dei coefficienti di $x \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$.

I sottogruppi pseudoalgebrici sono ovviamente chiusi.

I gruppi classici della lista di Cartan che introdurremo nel paragrafo seguente sono tutti pseudoalgebrici e chiusi per aggiunta. Utilizzando il Teorema II.13.5, potremo quindi rappresentarli come prodotti del loro sottogruppo compatto massimale $\mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)$ e di uno spazio euclideo. Ricordiamo l'enunciato:

TEOREMA XXVII.1.2. Sia \mathbf{G} un sottogruppo pseudoalgebrico di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$, con algebra di Lie $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$. Se

$$(27.1.1) \quad x^* \in \mathbf{G}, \quad \forall x \in \mathbf{G},$$

¹ \mathbf{G} è un gruppo di Lie se esiste un sottogruppo di Lie \mathbf{G}' di un gruppo lineare $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ e un omeomorfismo $\phi : U \rightarrow U'$ di un intorno dell'identità di \mathbf{G} su un intorno dell'identità U' di \mathbf{G}' tale che, se $g_1, g_2, g_1g_2 \in U$, allora $\phi(g_1g_2) = \phi(g_1)\phi(g_2)$.

allora l'applicazione

$$(27.1.2) \quad (\mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)) \times (\mathfrak{g} \cap \mathfrak{p}(n)) \ni (u, X) \longrightarrow u \exp(X) \in \mathbf{G},$$

ove $\mathfrak{p}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid X^* = X\}$ è lo spazio vettoriale delle matrici Hermitiane, è un omeomorfismo.

Nello studiare i gruppi classici $\mathbf{G} \subset \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ della lista di Cartan seguiremo quindi il procedimento seguente:

- (1) verificheremo che esso contenga l'aggiunto di ogni suo elemento;
- (2) calcoleremo l'insieme $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{p}(n)$ delle matrici Hermitiane contenute nella sua algebra di Lie \mathfrak{g} ;
- (3) studieremo il sottogruppo compatto $\mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)$.

Osserviamo ancora che l'algebra di Lie di $\mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)$ è $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{u}(n)$ e che l'applicazione esponenziale

$$\mathfrak{g} \cap \mathfrak{u}(n) \ni X \rightarrow \exp(X) \in \mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)$$

ha come immagine la componente connessa dell'identità in $\mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)$. Abbiamo infatti

TEOREMA XXVII.1.3 (Cartan-Weyl-Hopf). *Sia \mathbf{G} un sottogruppo compatto e connesso di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$, con algebra di Lie \mathfrak{g} . Allora*

$$\mathfrak{g} \ni X \longrightarrow \exp(X) \in \mathbf{G}$$

è surgettiva.

Non diamo qui la dimostrazione di questo teorema ², la cui validità è stata verificata per ciascuno dei gruppi classici compatti e connessi: $\mathbf{SO}(n)$, $\mathbf{U}(n)$, $\mathbf{SU}(n)$ e $\mathbf{Sp}(n)$.

Osserviamo infine che $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{p}(n)$ è invariante per l'azione aggiunta degli elementi di $\mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)$.

XXVII.2. Alcuni gruppi di matrici e le loro algebre di Lie

Nel capitolo precedente abbiamo esaminato i gruppi classici compatti della lista di Cartan. Completiamo ora la *lista di Cartan* dando l'elenco dei gruppi classici non compatti, con le loro algebre di Lie.

- (1) $\mathbf{U}(p, q)$ è il gruppo delle matrici complesse $a \in \mathbf{GL}_{p+q}(\mathbb{C})$ che soddisfano $a^* K a = K$ per una matrice Hermitiana simmetrica K di segnatura (p, q) . Ad esempio, possiamo prendere $K = \begin{pmatrix} I_p & \\ & -I_q \end{pmatrix}$. La sua algebra di Lie è

$$\mathfrak{u}(p, q) = \{X \in \mathfrak{gl}_{p+q}(\mathbb{C}) \mid X^* K + K X = 0\}.$$

²Possiamo introdurre su \mathbf{G} una metrica Riemanniana invariante per le traslazioni a destra e a sinistra; allora le geodetiche per l'origine sono tutti e soli i sottogruppi a un parametro di \mathbf{G} . La tesi segue allora dal fatto che l'identità e di \mathbf{G} si può congiungere a un qualsiasi punto $g \in \mathbf{G}$ mediante una geodetica $\gamma : [0, 1] \ni t \rightarrow \exp(tX) \in \mathbf{G}$ di lunghezza minima per cui $\gamma(0) = e$ e $\gamma(1) = g$.

- (2) $\boxed{\mathbf{SU}(p, q)}$ è il gruppo delle matrici complesse $a \in \mathbf{U}(p, q)$ con determinante 1: $\mathbf{SU}(p, q) = \mathbf{U}(p, q) \cap \mathbf{SL}_{p+q}(\mathbb{C})$. L'algebra di Lie corrispondente è

$$\mathfrak{su}(p, q) = \{X \in \mathfrak{u}(p, q) \mid \text{traccia}(X) = 0\} = \mathfrak{u}(p, q) \cap \mathfrak{sl}_{p+q}(\mathbb{C}).$$

- (3) $\boxed{\mathbf{SU}^*(2n)}$ è il gruppo delle matrici ³ $a \in \mathbf{SL}_{2n}(\mathbb{C})$ tali che

$$aJ = J\bar{a}$$

dove \bar{a} è la matrice i cui coefficienti sono i coniugati dei coefficienti di a e J è una matrice reale antisimmetrica di rango $2n$. Ad esempio possiamo fissare $J = \begin{pmatrix} & I_n \\ -I_n & \end{pmatrix}$. La sua algebra di Lie è:

$$\mathfrak{su}^*(2n) = \{X \in \mathfrak{sl}_{2n}(\mathbb{C}) \mid XJ = J\bar{X}\}.$$

- (4) $\boxed{\mathbf{SO}(n, \mathbb{C})}$ è il gruppo delle matrici a di $\mathbf{SL}_n(\mathbb{C})$ che lasciano invariata una matrice simmetrica non degenera Q :

$$\mathbf{SO}(n, \mathbb{C}) = \{a \in \mathbf{SL}_n(\mathbb{C}) \mid a^\dagger Qa = Q\}.$$

La sua algebra di Lie è:

$$\mathfrak{so}(n, \mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) \mid X^\dagger Q + QX = 0\}.$$

- (5) $\boxed{\mathbf{SO}(p, q)}$ è il gruppo delle matrici reali $a \in \mathbf{SL}_{p+q}(\mathbb{R})$ tali che $a^\dagger Ka = K$ per una matrice reale simmetrica $K \in \mathbb{R}^{(p+q) \times (p+q)}$ di segnatura (p, q) . La corrispondente algebra di Lie è:

$$\mathfrak{o}(p, q) = \{X \in \mathfrak{sl}_{p+q}(\mathbb{R}) \mid X^\dagger K + KX = 0\}.$$

- (6) $\boxed{\mathbf{SO}^*(2n)}$ è il gruppo delle matrici $a \in \mathbf{SO}(2n, \mathbb{C})$ tali che $a^*Ja = J$, ovvero $a = -J\bar{a}J$, ove J è la matrice $J = \begin{pmatrix} & I_n \\ -I_n & \end{pmatrix}$. Osserviamo che $a \rightarrow -J\bar{a}J$ è un'involuzione in $\mathbb{C}^{(2n) \times (2n)}$. Quindi il gruppo lineare $\mathbf{SO}^*(2n)$ è una *forma reale* di $\mathbf{SO}(2n, \mathbb{C})$. L'algebra di Lie corrispondente è:

$$\mathfrak{so}^*(2n) = \{X \in \mathfrak{so}(2n, \mathbb{C}) \mid X^*J + JX = 0\}.$$

- (7) $\boxed{\mathbf{Sp}(n, \mathbb{C})}$ è il gruppo delle matrici $a \in \mathbf{GL}_{2n}(\mathbb{C})$ tali che $a^\dagger Ja = J$ per una matrice antisimmetrica $J \in \mathfrak{M}(2n, \mathbb{C})$ di rango $2n$. La corrispondente algebra di Lie è:

$$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}_{2n}(\mathbb{C}) \mid X^\dagger J + JX = 0\}.$$

- (8) $\boxed{\mathbf{Sp}(n, \mathbb{R})}$ è il gruppo delle matrici $a \in \mathbf{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ tali che $a^\dagger Ja = J$ per una matrice antisimmetrica $J \in \mathbb{R}^{(2n) \times (2n)}$, di rango $2n$. La corrispondente algebra di Lie è:

$$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R}) = \{X \in \mathfrak{gl}_{2n}(\mathbb{R}) \mid X^\dagger J + JX = 0\}.$$

³Questo gruppo si può indicare anche mediante $\mathbf{SL}_n(\mathbb{H})$ e la corrispondente algebra di Lie mediante $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{H})$.

- (9) $\boxed{\mathbf{Sp}(p, q)}$ è il gruppo delle matrici $a \in \mathbf{Sp}(n, \mathbb{C})$ (con $p + q = n$) tali che $a^* K a = K$ per una matrice Hermitiana K di segnatura $(2p, 2q)$ che commuta con J . Se $J = \begin{pmatrix} & I_n \\ -I_n & \end{pmatrix}$, possiamo fissare ad esempio

$$K = \begin{pmatrix} I_p & & & \\ & -I_q & & \\ & & I_p & \\ & & & -I_q \end{pmatrix}.$$

La corrispondente algebra di Lie è:

$$\mathfrak{sp}(p, q) = \{X \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C}) \mid X^* K + KX = 0\}.$$

Osserviamo che $\mathbf{Sp}(n) = \mathbf{Sp}(n, 0) = \mathbf{Sp}(0, n) = \mathbf{Sp}(n, \mathbb{C}) \cap \mathbf{U}(2n)$.

XXVII.3. I gruppi $\mathbf{U}(p, q)$ e $\mathbf{SU}(p, q)$

Fissiamo $K = I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & \\ & -I_q \end{pmatrix}$ e poniamo $n = p + q$.

LEMMA XXVII.3.1. Se $g \in \mathbf{U}(p, q)$, allora $g^* \in \mathbf{U}(p, q)$.

DIMOSTRAZIONE. Per la definizione del gruppo $\mathbf{U}(p, q)$, abbiamo

$$g^* I_{p,q} = I_{p,q} g^{-1}.$$

Da questa otteniamo, passando alle inverse:

$$g I_{p,q} = (g^*)^* I_{p,q} = I_{p,q} (g^*)^{-1}$$

e quindi $g^* \in \mathbf{U}(p, q)$. □

LEMMA XXVII.3.2. $\mathbf{U}(p, q) \cap \mathbf{U}(n) \cong \mathbf{U}(p) \times \mathbf{U}(q)$.

DIMOSTRAZIONE. Scriviamo un elemento $g \in \mathbf{U}(p, q) \cap \mathbf{U}(n)$ nella forma

$$g = \begin{pmatrix} a & c \\ d & b \end{pmatrix}$$

con matrici a di tipo $p \times p$, b di tipo $q \times q$, c di tipo $p \times q$, d di tipo $q \times p$. Poiché $g \in \mathbf{U}(p, q)$, abbiamo

$$a^* a - d^* d = I_p, \quad a^* c = d^* b, \quad b^* b - c^* c = I_q.$$

Essendo $g \in \mathbf{U}(n)$, abbiamo anche:

$$a^* a + d^* d = I_p, \quad a^* c + d^* b = 0, \quad b^* b + c^* c = I_q.$$

Da queste uguaglianze ricaviamo

$$c = 0, \quad d = 0$$

da cui segue la tesi. □

COROLLARIO XXVII.3.3. $\mathbf{SU}(p, q) \cap \mathbf{U}(n)$ è omeomorfo al prodotto topologico $\mathbf{SU}(p) \times \mathbf{SU}(q) \times S^1$.

DIMOSTRAZIONE. Se $\sigma \in \mathbb{C}$, per ogni intero positivo h indichiamo con $D_h(\sigma)$ la matrice diagonale $h \times h$:

$$D_h(\sigma) = \begin{pmatrix} \sigma & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

L'applicazione

$$\mathbf{SU}(p) \times \mathbf{SU}(q) \times S^1 \ni (a, b, \sigma) \longrightarrow \begin{pmatrix} D_p(\sigma)a & 0 \\ 0 & D_q(\sigma^{-1})b \end{pmatrix} \in \mathbf{SU}(p, q) \cap \mathbf{U}(n)$$

è continua e bigettiva e dunque un omeomorfismo perché i due spazi sono compatti di Hausdorff. \square

TEOREMA XXVII.3.4. $\mathbf{SU}(p, q)$ è omeomorfo al prodotto topologico $\mathbf{SU}(p) \times \mathbf{SU}(q) \times S^1 \times \mathbb{C}^{pq}$. $\mathbf{U}(p, q)$ è omeomorfo al prodotto topologico $\mathbf{SU}(p, q) \times S^1$. I due gruppi sono pertanto connessi per archi ma non compatti se $pq \neq 0$.

DIMOSTRAZIONE. Calcoliamo l'intersezione $\mathfrak{u}(p, q) \cap \mathfrak{p}(n)$. Scriviamo $X \in \mathfrak{u}(p, q) \cap \mathfrak{p}(n)$ nella forma $X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^* & X_{22} \end{pmatrix}$ con $X_{11} \in \mathfrak{p}(p)$, $X_{22} \in \mathfrak{p}(q)$ e X_{12} matrice complessa di tipo $p \times q$. Allora:

$$\begin{aligned} 0 &= X^* I_{p,q} + I_{p,q} X \\ &= X I_{p,q} + I_{p,q} X \\ &= \begin{pmatrix} 2X_{11} & 0 \\ 0 & 2X_{22} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Quindi

$$\mathfrak{u}(p, q) \cap \mathfrak{p}(n) = \mathfrak{su}(p, q) \cap \mathfrak{p}(n) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & X_{12} \\ X_{12}^* & 0 \end{pmatrix} \mid X_{12} \in \mathfrak{M}(p \times q, \mathbb{C}) \right\}$$

La tesi è perciò conseguenza dei lemmi precedenti e del Teorema V.1.1. \square

XXVII.4. I gruppi $\mathbf{Sp}(n, \mathbb{C})$ e $\mathbf{SU}^*(2n)$

LEMMA XXVII.4.1. Se $g \in \mathbf{Sp}(n, \mathbb{C})$, allora $g^* \in \mathbf{Sp}(n, \mathbb{C})$.

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo

$${}^t g J g = J$$

e dunque

$$J g = g^{-1 \dagger} J$$

da cui, passando alle inverse:

$$g^{-1} J = J g^\dagger.$$

Passando ai coniugati, otteniamo:

$$\bar{g}^{-1} J = J g^*$$

da cui

$$g^{*\dagger} J g^* = J$$

e dunque $g^* \in \mathbf{Sp}(n, \mathbb{C})$. \square

TEOREMA XXVII.4.2. $\mathbf{Sp}(n, \mathbb{C})$ è omeomorfo a $\mathbf{Sp}(n) \times \mathbb{R}^{n(2n+1)}$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $g \in \mathbf{Sp}(n, \mathbb{C})$. Possiamo decomporre g in modo unico nella forma:

$$g = ab \quad \text{con} \quad a \in \mathbf{Sp}(n, \mathbb{C}) \cap \mathbf{U}(2n) \quad \text{e} \quad b \in \mathbf{Sp}(n, \mathbb{C}) \cap \mathbf{P}_+(2n).$$

La b si può rappresentare in modo unico come esponenziale di una matrice $B \in (\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C}) \cap \mathfrak{p}(2n))$. Scriviamo B nella forma

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{12}^* & B_{22} \end{pmatrix}$$

con B_{hk} matrici complesse $n \times n$, B_{11} e B_{22} Hermitiane. Da $B^\dagger J + JB = 0$ otteniamo allora le uguaglianze:

$$\begin{aligned} B_{11} &= -B_{22}^\dagger \\ B_{12} &= B_{12}^\dagger. \end{aligned}$$

La matrice B è dunque della forma

$$(*) \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ \bar{B}_{12} & -\bar{B}_{11} \end{pmatrix}$$

con B_{11} Hermitiana e B_{12} simmetrica. Le matrici Hermitiane della forma (*) formano uno spazio vettoriale reale L di dimensione $n^2 + n(n+1) = n(2n+1)$ e dunque la tesi segue dall'omeomorfismo del Teorema V.1.1:

$$\mathbf{Sp}(n) \times L \ni (a, B) \longrightarrow a \exp(B) \in \mathbf{Sp}(n, \mathbb{C}).$$

□

TEOREMA XXVII.4.3. Il gruppo $\mathbf{SU}^*(2n)$ è omeomorfo a $\mathbf{Sp}(n) \times \mathbb{R}^{2n^2-n-1}$.

DIMOSTRAZIONE. Ricordiamo che $g \in \mathbf{SU}^*(2n)$ se $g \in \mathbf{SL}_{2n}(\mathbb{C})$ e

$$Jg = \bar{g}J.$$

Ne segue che, se $g \in \mathbf{SU}^*(2n) \cap \mathbf{U}(2n)$ abbiamo

$${}^t g J g = J$$

e dunque $g \in \mathbf{Sp}(n)$.

Si verifica immediatamente che $g^* \in \mathbf{SU}^*(2n)$ se $g \in \mathbf{SU}^*(2n)$ e dunque possiamo ripetere il ragionamento fatto nella dimostrazione del teorema precedente, decomponendo g mediante

$$g = ab \quad \text{con} \quad a \in \mathbf{SU}^*(2n) \cap \mathbf{U}(2n) \quad \text{e} \quad b \in \mathbf{SU}^*(2n) \cap \mathbf{P}(2n).$$

La b è l'esponenziale di una matrice Hermitiana B in $\mathfrak{su}^*(2n)$: questo è lo spazio vettoriale reale L di dimensione $2n^2 - n - 1$ delle matrici della forma:

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ -\bar{B}_{12} & \bar{B}_{11} \end{pmatrix}$$

con B_{11} matrice $n \times n$ Hermitiana con traccia nulla e B_{12} matrice $n \times n$ complessa antisimmetrica: ${}^t B_{12} = -B_{12}$. Per il Teorema V.1.1 otteniamo un omeomorfismo:

$$\mathbf{Sp}(n) \times L \ni (a, B) \longrightarrow a \exp(B) \in \mathbf{SU}^*(2n),$$

che dimostra la tesi. □

XXVII.5. I gruppi $\mathbf{SO}(n, \mathbb{C})$ e $\mathbf{SO}^*(2n)$

TEOREMA XXVII.5.1. $\mathbf{SO}(n, \mathbb{C})$ è omeomorfo a $\mathbf{SO}(n) \times \mathbb{R}^{(n^2-n)/2}$.

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo in primo luogo che l'aggiunta g^* di un elemento g di $\mathbf{SO}(n, \mathbb{C})$ è ancora un elemento del gruppo. Infatti le equazioni che definiscono il gruppo sono:

$$\det(g) = 1, \quad g^\dagger g = I.$$

Quindi, poiché anche $gg^\dagger = I$:

$$\det(g^*) = \overline{\det(g)} = 1 \quad \text{e} \quad {}^t g^* g^* = (g^\dagger g)^* = I.$$

Un elemento g di $\mathbf{SO}(n, \mathbb{C}) \cap \mathbf{U}(n)$ soddisfa

$$g^\dagger = g^{-1} = g^*$$

e dunque è una matrice a coefficienti reali. Otteniamo perciò:

$$\mathbf{SO}(n, \mathbb{C}) \cap \mathbf{U}(n) = \mathbf{SO}(n).$$

Decomponiamo $g \in \mathbf{SO}(n, \mathbb{C})$ in modo unico mediante

$$g = ab \quad \text{con} \quad a \in \mathbf{SO}(n, \mathbb{C}) \cap \mathbf{U}(n) \quad \text{e} \quad b \in \mathbf{SO}(n, \mathbb{C}) \cap \mathbf{P}(n).$$

Gli elementi di $\mathbf{SO}(n, \mathbb{C}) \cap \mathbf{P}(n)$ sono tutti e soli gli esponenziali delle matrici dello spazio vettoriale reale L di dimensione $(n^2 - n)/2$:

$$L = \{B \mid B \text{ Hermitiana e } B^\dagger = -B\} = i \cdot \mathfrak{o}(n)$$

cioè delle matrici a coefficienti puramente immaginari antisimmetriche. La tesi segue dal Teorema V.1.1. \square

TEOREMA XXVII.5.2. $\mathbf{SO}^*(2n)$ è omeomorfo a $\mathbf{U}(n) \times \mathbb{R}^{n^2-n}$.

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo in primo luogo che il gruppo $\mathbf{SO}^*(2n) \cap \mathbf{U}(2n)$ è isomorfo, come gruppo topologico, a $\mathbf{U}(n)$. Infatti, per un elemento g di tale gruppo, valgono le equazioni:

$$g^\dagger g = I, \quad g^* J g = J, \quad g^* g = I, \quad \det(g) = 1.$$

La prima e la terza di queste equazioni ci dicono che g è una matrice reale di $\mathbf{SO}(2n)$. La seconda ci dice allora che g commuta con J e dunque è \mathbb{C} -lineare per la struttura complessa su \mathbb{R}^{2n} definita da J . Si verifica facilmente che, se definiamo l'isomorfismo \mathbb{R} -lineare $\sigma : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}^n$ mediante

$$\sigma(e_k) = e_k \quad \text{per} \quad 1 \leq k \leq n \quad \text{e} \quad \sigma(Je_k) = \sigma(e_{k+n}) = ie_k$$

l'applicazione

$$\mathbf{SO}^*(2n) \cap \mathbf{U}(2n) \ni g \longrightarrow \sigma \circ g \circ \sigma^{-1} \in \mathbf{U}(n)$$

è un isomorfismo di gruppi topologici. Per concludere la dimostrazione, osserviamo che il gruppo $\mathbf{SO}^*(2n)$ è chiuso rispetto all'aggiunzione e dunque, dalla decomposizione

$$g = ab \quad \text{con} \quad a \in \mathbf{SO}^*(2n) \cap \mathbf{U}(2n) \quad \text{e} \quad b \in \mathbf{SO}^*(2n) \cap \mathbf{P}(2n).$$

Troviamo allora che $b = \exp(B)$ dove $B \in \mathfrak{so}^*(2n) \cap \mathfrak{p}(2n)$ è univocamente determinata come un elemento dello spazio vettoriale reale L di dimensione $n^2 - n$ delle matrici:

$$B = i \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & -X \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad X, Y \in \mathfrak{o}(n).$$

L'omeomorfismo cercato segue dal Teorema V.1.1. □

XXVII.6. I gruppi $\mathbf{Sp}(p, q; \mathbb{C})$

TEOREMA XXVII.6.1. *Abbiamo l'omeomorfismo*

$$\mathbf{Sp}(p, q) \cong \mathbf{Sp}(p) \times \mathbf{Sp}(q) \times \mathbb{R}^{4pq}.$$

DIMOSTRAZIONE. Ricordiamo che il gruppo $\mathbf{Sp}(p, q; \mathbb{C})$ è caratterizzato dalle equazioni:

$$g^\dagger J g = J \quad \text{e} \quad g^* \begin{pmatrix} I_{p,q} & \\ & I_{p,q} \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} I_{p,q} & \\ & I_{p,q} \end{pmatrix}.$$

Come abbiamo visto in precedenza, possiamo considerare un elemento g dell'intersezione $\mathbf{Sp}(p, q; \mathbb{C}) \cap \mathbf{U}(2n) \subset \mathbf{Sp}(n)$ come un elemento di $\mathbf{GL}(n, \mathbb{H})$. Scriviamo \tilde{g} per la matrice a coefficienti quaternioni corrispondente a g . Troviamo allora: se $g \in \mathbf{Sp}(p, q; \mathbb{C})$, allora

$$\begin{aligned} \tilde{g}^* \tilde{g} &= I \\ \tilde{g}^* I_{p,q} g &= I_{p,q}. \end{aligned}$$

Si ottiene quindi

$$\tilde{g} = \begin{pmatrix} g_1 & \\ & g_2 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad g_1 \in \mathbf{Sp}(p), \quad g_2 \in \mathbf{Sp}(q).$$

D'altra parte abbiamo al solito l'invarianza di $\mathbf{Sp}(p, q; \mathbb{C})$ rispetto all'aggiunzione. Dal Teorema V.1.1 otteniamo un omeomorfismo

$$\mathbf{Sp}(p) \times \mathbf{Sp}(q) \times L \ni (g_1, g_2, B) \longrightarrow \begin{pmatrix} g_1 & \\ & g_2 \end{pmatrix} \exp(B) \in \mathbf{Sp}(p, q; \mathbb{C})$$

ove in questo caso $L = \mathfrak{p}(p, q; \mathbb{C}) \cap \mathfrak{p}(2n)$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione $4pq$ di matrici Hermitiane. Le matrici di L hanno la forma:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & B_{12} & 0 & B_{14} \\ B_{12}^* & 0 & {}^t B_{14} & 0 \\ 0 & \bar{B}_{14} & 0 & -\bar{B}_{12} \\ B_{14}^* & 0 & -{}^t B_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

con B_{12} e B_{14} matrici complesse di tipo $p \times q$. □

XXVII.7. I gruppi $\mathbf{SO}(p, q)$

TEOREMA XXVII.7.1. *Siano p, q due interi positivi con $p + q = n$. Allora il gruppo $\mathbf{SO}(p, q)$ è omeomorfo a $\{-1, 1\} \times \mathbf{SO}(p) \times \mathbf{SO}(q) \times \mathbb{R}^{pq}$.*

DIMOSTRAZIONE. Ragioniamo come nella dimostrazione dei teoremi precedenti. Ricaviamo in primo luogo che $\mathbf{SO}(p, q) \cap \mathbf{U}(n)$ è formato dalle matrici:

$$g = \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix}$$

con $g_1 \in \mathbf{O}(p)$, $g_2 \in \mathbf{O}(q)$ e $\det(g_1) \cdot \det(g_2) = 1$.

Quindi abbiamo l'omeomorfismo:

$$\mathbf{SO}(p, q) \cap \mathbf{U}(n) \cong \{-1, 1\} \times \mathbf{SO}(p) \times \mathbf{SO}(q).$$

D'altra parte $\mathbf{SO}(p, q) \cap \mathbf{P}(n)$ è l'immagine iniettiva mediante l'applicazione esponenziale delle matrici

$$B = \begin{pmatrix} 0 & B_{12} \\ {}^t B_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

ove B_{12} è una matrice reale $p \times q$. Concludiamo utilizzando il Teorema V.1.1. \square

CAPITOLO XXVIII

Algebre di Lie

Raccogliamo in questo capitolo alcune delle definizioni generali e delle proprietà più importanti delle algebre di Lie astratte.

XXVIII.1. Nozioni fondamentali

Sia \mathbb{k} un campo. Un'algebra di Lie su \mathbb{k} è uno spazio vettoriale \mathfrak{g} su \mathbb{k} su cui è assegnata un'operazione binaria (*commutatore*):

$$(28.1.1) \quad \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \ni (X, Y) \longrightarrow [X, Y] \in \mathfrak{g}$$

che gode delle seguenti proprietà:

$$(28.1.2) \quad \text{l'operazione } (X, Y) \rightarrow [X, Y] \text{ è } \mathbb{k}\text{-bilineare,}$$

$$(28.1.3) \quad [X, X] = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g},$$

$$(28.1.4) \quad [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$$

(IDENTITÀ DI JACOBI).

OSSERVAZIONE XXVIII.1.1. Osserviamo che (28.1.3) implica che

$$(28.1.5) \quad [X, Y] = -[Y, X] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$$

e le due condizioni sono equivalenti se \mathbb{k} ha caratteristica $\neq 2$.

ESEMPIO XXVIII.1.2. Sia V uno spazio vettoriale sul campo \mathbb{k} . Se poniamo $[v, w] = 0$ per ogni $v, w \in V$, questo prodotto definisce su V una struttura di algebra di Lie.

In generale

DEFINIZIONE XXVIII.1.3. Chiamiamo algebra di Lie *abeliana* o *commutativa* un'algebra di Lie \mathfrak{g} in cui il commutatore di due qualsiasi elementi sia nullo.

Dati due sottospazi vettoriali $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ di un'algebra di Lie \mathfrak{g} , indichiamo con $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$ il sottospazio vettoriale di \mathfrak{g} generato dai vettori della forma $[X, Y]$ con $X \in \mathfrak{A}$, $Y \in \mathfrak{B}$.

Per la (28.1.5), abbiamo $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] = [\mathfrak{B}, \mathfrak{A}]$.

DEFINIZIONE XXVIII.1.4. Un sottoinsieme \mathfrak{a} di \mathfrak{g} si dice una *sottoalgebra di Lie* di \mathfrak{g} se è un sottospazio vettoriale di \mathfrak{g} e $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a}$; un *ideale* di \mathfrak{g} se è una sottoalgebra ed inoltre $[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{a}$.

Osserviamo che $\{0\}$ e \mathfrak{g} sono ideali (banali) di \mathfrak{g} .

LEMMA XXVIII.1.5. Se α, β sono ideali di \mathfrak{g} , anche $\alpha + \beta$ e $[\alpha, \beta]$ sono ideali di \mathfrak{g} .

LEMMA XXVIII.1.6. Sono ideali di \mathfrak{g} sono il suo centro $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ e il suo derivato $\mathfrak{g}^{(1)}$, definiti da

$$(28.1.6) \quad Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, Y] = 0 \quad \forall Y \in \mathfrak{g}\},$$

$$(28.1.7) \quad \mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}].$$

LEMMA XXVIII.1.7. Se α è una sottoalgebra di Lie di \mathfrak{g} , il suo normalizzatore in \mathfrak{g}

$$(28.1.8) \quad N_{\mathfrak{g}}(\alpha) = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, Y] \in \alpha \quad \forall Y \in \alpha\}$$

è ancora una sottoalgebra di Lie di \mathfrak{g} : essa contiene α ed è la più grande sottoalgebra di \mathfrak{g} che contiene α come ideale.

Analogamente il centralizzatore di α in \mathfrak{g}

$$(28.1.9) \quad C_{\mathfrak{g}}(\alpha) = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, Y] = 0 \quad \forall Y \in \alpha\}$$

è una sottoalgebra di Lie di \mathfrak{g} .

DEFINIZIONE XXVIII.1.8. Siano $\mathfrak{f}, \mathfrak{g}$ due algebre di Lie sullo stesso campo \mathbb{k} . Un'applicazione $\phi : \mathfrak{f} \rightarrow \mathfrak{g}$ si dice un *morfismo di algebre di Lie* se è \mathbb{k} -lineare e soddisfa inoltre:

$$(28.1.10) \quad \phi([X, Y]) = [\phi(X), \phi(Y)] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{f}.$$

LEMMA XXVIII.1.9. Sia $\phi : \mathfrak{f} \rightarrow \mathfrak{g}$ un morfismo di algebre di Lie su \mathbb{k} . Allora $\phi(\mathfrak{f})$ è una sottoalgebra di Lie di \mathfrak{g} e $\ker \phi$ è un ideale di \mathfrak{f} .

LEMMA XXVIII.1.10. Se α è un ideale dell'algebra di Lie \mathfrak{g} , allora vi è un'unica struttura di algebra di Lie sul quoziente \mathfrak{g}/α che renda la proiezione naturale $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\alpha$ un morfismo di algebre di Lie.

DEFINIZIONE XXVIII.1.11. Con questa struttura \mathfrak{g}/α si dice l'*algebra di Lie quoziente* di \mathfrak{g} rispetto all'ideale α .

DEFINIZIONE XXVIII.1.12. Un'algebra di Lie \mathfrak{g} si dice *semplice* se non è commutativa e non contiene ideali non banali.

XXVIII.2. Algebre di Lie lineari, derivazioni, rappresentazione aggiunta

Sia V uno spazio vettoriale sul campo \mathbb{k} . Lo spazio vettoriale $\text{End}_{\mathbb{k}}(V)$ di tutti gli endomorfismi \mathbb{k} -lineari di V è un'algebra di Lie con il prodotto definito da

$$(28.2.1) \quad [A, B] = A \circ B - B \circ A \quad \forall A, B \in \text{End}_{\mathbb{k}}(V).$$

Con la struttura di algebra di Lie, esso si indica con $\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$. Se $V = \mathbb{k}^n$, scriviamo $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{k})$ invece di $\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}^n)$. Ogni sottoalgebra di un'algebra di Lie $\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$ si dice un'*algebra di Lie lineare*.

Un teorema di Ado-Iwasawa dice che ogni algebra di Lie di dimensione finita è isomorfa a un'algebra di Lie lineare.

Esempi importanti di algebre di Lie lineari sono i seguenti, ove $V = \mathbb{k}^n$, $1 \leq n < \infty$:

- (A $_{\ell}$) $\mathfrak{sl}(\ell + 1, \mathbb{k}) = \{X \in \mathfrak{gl}(\ell + 1, \mathbb{k}) \mid \text{tr}(X) = 0\}$;
 (B $_{\ell}$) $\mathfrak{so}(\ell, \ell + 1; \mathbb{k})$: trasformazioni antisimmetriche rispetto a una forma bilineare simmetrica con indice di Witt ℓ in uno spazio vettoriale di dimensione dispari $n = 2\ell + 1$; qui dobbiamo supporre che \mathbb{k} abbia caratteristica $\neq 2$;
 (C $_{\ell}$) $\mathfrak{sp}(\ell, \mathbb{k})$: trasformazioni simpletiche, cioè che soddisfano

$$a(X(v), w) + a(v, X(w)) = 0 \quad \forall v, w \in V$$

per una forma alternata non degenera a su uno spazio vettoriale V di dimensione pari $n = 2\ell$ su un campo \mathbb{k} di caratteristica $\neq 2$;

- (D $_{\ell}$) $\mathfrak{so}(\ell, \ell; \mathbb{k})$: trasformazioni antisimmetriche rispetto a una forma bilineare simmetrica con indice di Witt ℓ in uno spazio vettoriale di dimensione pari $n = 2\ell$; anche qui dobbiamo supporre che caratteristica(\mathbb{k}) $\neq 2$;
- l'algebra $\mathfrak{t}_+(n, \mathbb{k})$ delle matrici triangolari superiori a coefficienti in \mathbb{k} ;
 - l'algebra $\mathfrak{n}_+(n, \mathbb{k})$ delle matrici triangolari superiori a coefficienti in \mathbb{k} con diagonale principale nulla;
 - l'algebra $\mathfrak{t}_-(n, \mathbb{k})$ delle matrici triangolari inferiori a coefficienti in \mathbb{k} ;
 - l'algebra $\mathfrak{n}_-(n, \mathbb{k})$ delle matrici triangolari inferiori a coefficienti in \mathbb{k} con diagonale principale nulla;
 - l'algebra $\mathfrak{d}(n, \mathbb{k})$ delle matrici diagonali a coefficienti in \mathbb{k} .

Notiamo che

$$\begin{aligned} \mathfrak{t}_+(n, \mathbb{k}) &= \mathfrak{n}_+(n, \mathbb{k}) \oplus \mathfrak{d}(n, \mathbb{k}), \\ \mathfrak{n}_+(n, \mathbb{k}) &= [\mathfrak{t}_+(n, \mathbb{k}), \mathfrak{t}_+(n, \mathbb{k})], \\ \mathfrak{t}_-(n, \mathbb{k}) &= \mathfrak{n}_-(n, \mathbb{k}) \oplus \mathfrak{d}(n, \mathbb{k}), \\ \mathfrak{n}_-(n, \mathbb{k}) &= [\mathfrak{t}_-(n, \mathbb{k}), \mathfrak{t}_-(n, \mathbb{k})]. \end{aligned}$$

Sia \mathfrak{A} un'algebra su \mathbb{k} , con prodotto $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \ni (a, b) \rightarrow a \cdot b \in \mathfrak{A}$.

DEFINIZIONE XXVIII.2.1. Una *derivazione* di \mathfrak{A} è un'applicazione \mathbb{k} -lineare $D : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ che soddisfa l'*identità di Leibniz*:

$$(28.2.2) \quad D(a \cdot b) = (D(a)) \cdot b + a \cdot (D(b)) \quad \forall a, b \in \mathfrak{A}.$$

Indichiamo con $\text{Der}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{A})$ l'insieme delle derivazioni di \mathfrak{A} .

Si verifica facilmente che

LEMMA XXVIII.2.2. $\text{Der}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{A})$ è una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{A})$ e quindi un'algebra di Lie lineare.

Consideriamo in particolare l'algebra di Lie delle derivazioni di una \mathbb{k} -algebra di Lie \mathfrak{g} .

LEMMA XXVIII.2.3. Fissato $X \in \mathfrak{g}$, l'applicazione

$$(28.2.3) \quad \text{ad}_{\mathfrak{g}}(X) : \mathfrak{g} \ni Y \longrightarrow [X, Y] \in \mathfrak{g}$$

è \mathbb{k} -lineare ed è una derivazione.

DIMOSTRAZIONE. Verifichiamo l'identità di Jacobi:

$$\begin{aligned} \text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)([Y, Z]) &= [X, [Y, Z]] = -[Y, [Z, X]] - [Z, [X, Y]] \\ &= [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]] \\ &= [\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)(Y), Z] + [Y, \text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)(Z)] \quad \forall Y, Z \in \mathfrak{g}. \end{aligned}$$

□

DEFINIZIONE XXVIII.2.4. Le derivazioni della forma $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)$, al variare di X in \mathfrak{g} , si dicono *derivazioni interne* di \mathfrak{g} .

LEMMA XXVIII.2.5. L'applicazione

$$(28.2.4) \quad \text{ad}_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \ni X \longrightarrow \text{ad}_{\mathfrak{g}}(X) \in \text{Der}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g})$$

è un morfismo di algebre di Lie. Le derivazioni interne formano un ideale dell'algebra di Lie $\text{Der}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g})$.

DIMOSTRAZIONE. Infatti, se $D \in \text{Der}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g})$ e $X \in \mathfrak{g}$ abbiamo, per ogni $Y \in \mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned} [D, \text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)](Y) &= D([X, Y]) - [X, D(Y)] \\ &= [D(X), Y] + [X, D(Y)] - [X, D(Y)] \\ &= \text{ad}_{\mathfrak{g}}(D(X))(Y). \end{aligned}$$

Quindi

$$(28.2.5) \quad [D, \text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)] = \text{ad}_{\mathfrak{g}}(D(X)) \quad \forall D \in \text{Der}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g}), \quad \forall X \in \mathfrak{g}$$

dimostra che $[\text{Der}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g}), \text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})] \subset \text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$. □

DEFINIZIONE XXVIII.2.6. La (28.2.4) si dice *rappresentazione aggiunta* di \mathfrak{g} .

LEMMA XXVIII.2.7. Il nucleo della rappresentazione aggiunta è il centro $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ di \mathfrak{g} .

DEFINIZIONE XXVIII.2.8. Gli elementi di $\text{Der}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g})$ che non appartengono ad $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ si dicono *derivazioni esterne* di \mathfrak{g} .

L'ideale delle derivazioni interne di \mathfrak{g} si indica anche con $\text{int}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g})$.

Un ideale di \mathfrak{g} è un suo sottospazio vettoriale che è trasformato in sé da tutte le derivazioni interne.

DEFINIZIONE XXVIII.2.9. Un ideale \mathfrak{a} di \mathfrak{g} si dice *caratteristico* se è trasformato in sé da tutte le derivazioni di \mathfrak{g} .

LEMMA XXVIII.2.10. Il centro $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ e il derivato $\mathfrak{g}^{(1)}$ sono ideali caratteristici di \mathfrak{g} .

DIMOSTRAZIONE. Infatti, se $D \in \text{Der}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g})$, abbiamo

$$\begin{aligned} [D(X), Y] = D([X, Y]) - [X, D(Y)] = 0, \quad \forall X \in Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}), \forall Y \in \mathfrak{g} \\ \implies D(Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})) \subset Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D([X, Y]) = [D(X), Y] + [X, D(Y)] \in \mathfrak{g}^{(1)}, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g} \\ \implies D(\mathfrak{g}^{(1)}) \subset \mathfrak{g}^{(1)}. \end{aligned}$$

□

Osserviamo che, se \mathfrak{g} è semplice, allora il morfismo $\text{ad}_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{int}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g})$ è un isomorfismo: quindi

PROPOSIZIONE XXVIII.2.11. *Ogni algebra di Lie semplice è isomorfa in modo naturale ad un'algebra di Lie lineare.*

ESEMPIO XXVIII.2.12. Sia M una varietà differenziabile di dimensione m . Lo spazio $\mathcal{E}(M; \mathbb{R})$ delle funzioni differenziabili di classe \mathcal{C}^{∞} , a valori reali, definite su M è un'algebra reale per il prodotto di funzioni. L'algebra di Lie reale $\text{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{E}(M, \mathbb{R}))$ è l'algebra $\mathfrak{X}(M)$ dei campi di vettori (di classe \mathcal{C}^{∞}) su M .

XXVIII.3. Rappresentazioni lineari

Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie sul campo \mathbb{k} .

DEFINIZIONE XXVIII.3.1. Una *rappresentazione lineare* di \mathfrak{g} è il dato di uno spazio vettoriale V sul campo \mathbb{k} e di un morfismo di algebre di Lie

$$(28.3.1) \quad \rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V).$$

In questo caso diciamo anche che V , con la struttura data dall'operazione:

$$(28.3.2) \quad \mathfrak{g} \times V \ni (X, v) \longrightarrow \rho(X)(v) \in V$$

è un \mathfrak{g} -modulo.

Quando ciò non provochi confusione, scriveremo anche $X \cdot v$ oppure Xv invece di $\rho(X)(v)$.

La rappresentazione aggiunta, discussa nel paragrafo precedente, è un esempio di rappresentazione.

Un altro esempio di rappresentazione lineare è la *rappresentazione banale*: dato un qualsiasi spazio vettoriale V su \mathbb{k} si fa corrispondere ad ogni X di \mathfrak{g} l'endomorfismo nullo di V .

Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie di dimensione finita su \mathbb{k} e (28.3.1) una sua rappresentazione lineare di dimensione finita.

DEFINIZIONE XXVIII.3.2. Diciamo che ρ (o il corrispondente \mathfrak{g} -modulo V) è *riducibile* se esiste un sotto- \mathfrak{g} -modulo proprio non banale W di V ; altrimenti la ρ si dice *irriducibile* o *semplice*.

Diciamo che ρ (o il corrispondente \mathfrak{g} -modulo V) è *decomponibile* se V è somma diretta di due sotto- \mathfrak{g} -moduli W_1, W_2 non banali: $V = W_1 \oplus W_2$ con $W_1, W_2 \neq \{0\}$. È *indecomponibile* se non è decomponibile.

Infine, diciamo che ρ (o il \mathfrak{g} -modulo V) è *completamente riducibile* o *completamente decomponibile* o *semisemplice* se V è somma diretta di sotto- \mathfrak{g} -moduli semplici.

Vale il:

TEOREMA XXVIII.3.3 (Lemma di Schur). *Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie di dimensione finita n su \mathbb{k} e $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$ una sua rappresentazione lineare di dimensione finita irriducibile. Se $A \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$ è diversa da 0 e soddisfa:*

$$(28.3.3) \quad [A, \rho(X)] = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g},$$

allora è un endomorfismo semisemplice invertibile.

Se \mathbb{k} è algebricamente chiuso, allora A è un multiplo dell'identità.

In generale, il commutatore di $\rho(\mathfrak{g})$ in $\text{End}_{\mathbb{k}}(V)$

$$(28.3.4) \quad \mathbb{K}_{\rho} = \{A \in \text{End}_{\mathbb{k}}(V) \mid [A, \rho(\mathfrak{g})] = 0\}$$

è un corpo (non necessariamente commutativo) ed è un'estensione di dimensione finita di \mathbb{k} .

DIMOSTRAZIONE. Poiché $A \neq 0$, lo spazio vettoriale V ha dimensione positiva. Sia p un fattore primo del polinomio minimo di A e poniamo

$$V_p = \bigcup_{h \in \mathbb{N}} \ker p(A)^h, \quad W = \ker p(A).$$

Allora W e V_p sono sottospazi \mathfrak{g} -invarianti di V , di dimensione positiva, con $W \subset V_p$. Per l'irriducibilità di ρ , deve essere $W = V_p = V$ e questo dimostra che A è semisemplice e il suo spettro contiene un solo ideale primo di $\mathbb{k}[x]$.

Per la prima parte della dimostrazione ogni elemento diverso da 0 di \mathbb{K}_{ρ} è invertibile e quindi \mathbb{K}_{ρ} è un corpo. \square

OSSERVAZIONE XXVIII.3.4. Se $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ è il campo dei numeri complessi e (28.3.1) una rappresentazione irriducibile di \mathfrak{g} , allora $\mathbb{K}_{\mathfrak{g}} \simeq \mathbb{C}$.

OSSERVAZIONE XXVIII.3.5. Se $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ è il campo dei numeri reali, il commutatore \mathbb{K}_{ρ} per una rappresentazione irriducibile $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(V)$ di \mathfrak{g} può essere \mathbb{R} , \mathbb{C} , oppure \mathbb{H} . Le rappresentazioni irriducibili di un'algebra di Lie reale si dividono quindi nei tipi *reale*, *complesso*, *quaternionico*.

Ad esempio, le rappresentazioni naturali di

$$\begin{aligned} \mathfrak{o}(n) &\subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}), \\ \mathfrak{u}(n) &\subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \subset \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{R}), \\ \mathfrak{sp}(n) &\subset \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{C}) \subset \mathfrak{gl}(4n, \mathbb{R}), \end{aligned}$$

sono rispettivamente di tipo reale, complesso e quaternionico.

Per distinguere i diversi casi, si considera la *complessificazione* $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$ di \mathfrak{g} e la corrispondente rappresentazione complessa $\tilde{\rho} : \tilde{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{C}}(\tilde{V})$, dove $\tilde{V} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$ è la complessificazione dello spazio vettoriale reale V .

La ρ è reale se $\tilde{\rho}$ è irriducibile.

Altimenti la $\tilde{\rho}$ si decompone nella somma diretta di due rappresentazioni complesse irriducibili: se esse sono isomorfe, allora la ρ è di tipo quaternionico; se esse non sono isomorfe, allora la ρ è di tipo complesso.

Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie di dimensione finita \mathbb{k} e $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$ una rappresentazione lineare di dimensione finita. Allora anche la

$$(28.3.5) \quad \rho^* : \mathfrak{g} \ni X \rightarrow -{}^t\rho(X) \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V^*),$$

ove $V^* = \text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, \mathbb{k})$ è il duale dello spazio vettoriale V , è una rappresentazione lineare di dimensione finita.

DEFINIZIONE XXVIII.3.6. La (28.3.5) si dice la rappresentazione *controgradiente*, o *duale*, di ρ .

A due rappresentazioni lineari di dimensione finita $\rho_V : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$, $\rho_W : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(W)$ possiamo associare il loro *prodotto tensoriale*

$$(28.3.6) \quad \rho_V \otimes \rho_W : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V \otimes_{\mathbb{k}} W),$$

definito da

$$\begin{aligned} \rho_V \otimes \rho_W(X)(v \otimes w) &= \rho_V(X)(v) \otimes w + v \otimes \rho_W(X)(w) \\ &\quad \forall X \in \mathfrak{g}, \quad \forall v \in V, \quad \forall w \in W. \end{aligned}$$

Utilizzando la rappresentazione controgradiente e l'identificazione dello spazio $\text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W)$ con il prodotto tensoriale $W \otimes V^*$, si ottiene la rappresentazione

$$(28.3.7) \quad \rho_{\text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W)} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(\text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W))$$

definita da

$$(28.3.8) \quad \begin{aligned} \rho_{\text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W)} &= \rho_W(X) \circ A - A \circ \rho_V(X) \\ &\quad \forall X \in \mathfrak{g}, \quad \forall A \in \text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W). \end{aligned}$$

In particolare la ρ_V induce una rappresentazione $\rho_{\text{End}_{\mathbb{k}}(V)}$ su $\text{End}_{\mathbb{k}}(V)$ definita da

$$(28.3.9) \quad \begin{aligned} \rho_{\text{End}_{\mathbb{k}}(V)}(X)(A) &= \rho_V(X) \circ A - A \circ \rho_V(X) \\ &\quad \forall X \in \mathfrak{g}, \quad \forall A \in \text{End}_{\mathbb{k}}(V). \end{aligned}$$

XXVIII.4. Forme invarianti

Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie su \mathbb{k} .

DEFINIZIONE XXVIII.4.1. Una forma bilineare $\beta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{k}$ si dice *invariante* se soddisfa

$$(28.4.1) \quad \beta([X, Y], Z) + \beta(Y, [X, Z]) = 0, \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}.$$

Una forma bilineare $\beta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{k}$ si dice *completamente invariante* se soddisfa

$$(28.4.2) \quad \beta(D(X), Y) + \beta(X, D(Y)) = 0, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}, \quad \forall D \in \text{Der}(\mathfrak{g}).$$

ESEMPIO XXVIII.4.2. L'applicazione

$$(28.4.3) \quad \beta(X, Y) = \text{traccia}(XY), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{k})$$

è una forma bilineare simmetrica, invariante su $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{k})$.

Abbiamo infatti

$$\begin{aligned} \text{traccia}([X, Y]Z) &= \text{traccia}(XYZ) - \text{traccia}(YXZ) \\ &= \text{traccia}(YZX) - \text{traccia}(YXZ) = -\text{traccia}(Y[X, Z]). \end{aligned}$$

Dalla discussione dell'Esempio XXVIII.4.2 otteniamo subito:

PROPOSIZIONE XXVIII.4.3. *Se $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$ è una rappresentazione lineare di dimensione finita di \mathfrak{g} , allora*

$$(28.4.4) \quad \kappa_V(X, Y) = \text{traccia}(\rho(X)\rho(Y)), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$$

è una forma bilineare invariante su \mathfrak{g} . □

DEFINIZIONE XXVIII.4.4. Se \mathfrak{g} ha dimensione finita, la forma invariante

$$(28.4.5) \quad \kappa_{\mathfrak{g}}(X, Y) = \text{traccia}(\text{ad}(X)\text{ad}(Y)), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$$

si dice la *forma di Killing* di \mathfrak{g} .

LEMMA XXVIII.4.5. *Supponiamo che \mathfrak{g} abbia dimensione finita. Se α è un ideale di \mathfrak{g} , allora la forma di Killing κ_{α} di α è la restrizione ad α della forma di Killing $\kappa_{\mathfrak{g}}$ di \mathfrak{g} .*

DIMOSTRAZIONE. Se infatti scegliamo una base E_1, \dots, E_n di \mathfrak{g} per cui E_1, \dots, E_m sia una base di α , le trasformazioni $\text{ad}(X)$, con $X \in \alpha$, hanno matrici associate

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

con A matrice $m \times m$, e matrici nulle 0 di tipi $m \times (n - m)$, $(n - m) \times m$ ed $(n - m) \times (n - m)$. Poiché la A è la matrice di $\text{ad}_{\alpha}(X)$ nella base E_1, \dots, E_m , la tesi segue facilmente. □

PROPOSIZIONE XXVIII.4.6. *Supponiamo che \mathfrak{g} abbia dimensione finita. La sua forma di Killing è completamente invariante.*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus \text{Der}(\mathfrak{g})$. Possiamo definire su $\tilde{\mathfrak{g}}$ una struttura di algebra di Lie con il prodotto definito dalle:

$$\begin{cases} \llbracket X, Y \rrbracket = [X, Y] & \text{se } X, Y \in \mathfrak{g}, \\ \llbracket D, X \rrbracket = D(X) & \text{se } X \in \mathfrak{g}, D \in \text{Der}(\mathfrak{g}), \\ \llbracket D_1, D_2 \rrbracket = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1 & \text{se } D_1, D_2 \in \text{Der}(\mathfrak{g}). \end{cases}$$

Poiché \mathfrak{g} è allora un ideale di $\tilde{\mathfrak{g}}$, la tesi segue dalla Proposizione XXVIII.4.3 e dal Lemma XXVIII.4.5. □

XXVIII.5. Automorfismi

Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie su \mathbb{k} .

DEFINIZIONE XXVIII.5.1. Un automorfismo α di \mathfrak{g} è un isomorfismo dell'algebra di Lie \mathfrak{g} con se stessa. Con il prodotto di composizione, gli automorfismi dell'algebra di Lie \mathfrak{g} formano un gruppo, che indicheremo con $\text{Aut}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g})$.

DEFINIZIONE XXVIII.5.2. Un elemento X dell'algebra di Lie \mathfrak{g} si dice *ad-nilpotente* se $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)$ è nilpotente.

Se il campo \mathbb{k} ha caratteristica 0, ed $X \in \mathfrak{g}$ è ad-nilpotente possiamo definire l'*esponenziale* di $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)$ mediante:

$$(28.5.1) \quad \exp(\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X))^h}{h!}.$$

Poiché abbiamo supposto X ad-nilpotente, la somma a secondo membro della (28.5.1) contiene solo un numero finito di termini non nulli. Essa definisce quindi un'applicazione \mathbb{k} -lineare su \mathfrak{g} , che è un automorfismo di \mathfrak{g} .

Più in generale vale il:

LEMMA XXVIII.5.3. *Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie sul campo \mathbb{k} di caratteristica 0 e D una derivazione nilpotente di \mathfrak{g} . Allora*

$$(28.5.2) \quad \exp(D) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{D^h}{h!}$$

è un automorfismo di \mathfrak{g} .

DIMOSTRAZIONE. Vale la formula di Leibnitz:

$$D^n([X, Y]) = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} [D^m(X), D^{n-m}(Y)] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \exp(D)([X, Y]) &= \sum_{h=0}^{\infty} \frac{D^h([X, Y])}{h!} \\ &= \sum_{h', h''=0}^{\infty} \frac{1}{h'! h''!} [D^{h'}(X), D^{h''}(Y)] \\ &= [\exp(D)(X), \exp(D)(Y)], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}, \end{aligned}$$

ove tutte le sommatorie hanno significato perché contengono soltanto un numero finito di termini non nulli.

Infine $\exp(D)$ è invertibile ed $\exp(D)^{-1} = \exp(-D)$ mostra che anche l'inversa è un morfismo dell'algebra di Lie \mathfrak{g} in sé. \square

DEFINIZIONE XXVIII.5.4. Gli automorfismi che sono composizione di un numero finito di automorfismi della forma $\exp(\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X))$, con X elemento ad-nilpotente di \mathfrak{g} , si dicono *elementari*.

Indicheremo con $\text{Aut}_e(\mathfrak{g})$ il gruppo degli automorfismi elementari di \mathfrak{g} .

LEMMA XXVIII.5.5. *Il gruppo $\text{Aut}_e(\mathfrak{g})$ degli automorfismi elementari di \mathfrak{g} è un sottogruppo normale di $\text{Aut}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g})$.*

DIMOSTRAZIONE. Infatti, se $X \in \mathfrak{g}$ è un elemento ad-nilpotente ed $\alpha \in \text{Aut}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g})$, allora $\alpha(X)$ è ancora un elemento ad-nilpotente di \mathfrak{g} e

$$\alpha \circ \exp(\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)) \circ \alpha^{-1} = \exp(\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\alpha(X))).$$

□

XXVIII.6. Algebre di Lie risolubili

Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie di dimensione finita su \mathbb{k} .

DEFINIZIONE XXVIII.6.1. La sequenza decrescente di ideali

$$(28.6.1) \quad \mathfrak{g} = D^0\mathfrak{g} \supset D^1\mathfrak{g} \supset \cdots \supset D^h\mathfrak{g} \supset D^{h+1}\mathfrak{g} \supset \cdots$$

definita da

$$(28.6.2) \quad \begin{cases} D^0\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \\ D^{m+1}\mathfrak{g} = [D^m\mathfrak{g}, D^m\mathfrak{g}] \quad \forall m \geq 0. \end{cases}$$

si dice *serie derivata* di \mathfrak{g} .

DEFINIZIONE XXVIII.6.2. Diciamo che \mathfrak{g} è *risolubile* se $D^n\mathfrak{g} = \{0\}$ per qualche intero non negativo n .

Ad esempio, l'algebra $\mathfrak{t}(n, \mathbb{k})$ delle matrici triangolari superiori con coefficienti nel campo \mathbb{k} è un'algebra di Lie risolubile.

TEOREMA XXVIII.6.3. *Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie di dimensione finita su \mathbb{k} .*

- (1) *Se \mathfrak{g} è risolubile, allora ogni sottoalgebra \mathfrak{a} di \mathfrak{g} è risolubile ed ogni immagine di \mathfrak{g} mediante un morfismo di algebre di Lie è un'algebra di Lie risolubile.*
- (2) *Se \mathfrak{a} è un ideale risolubile di \mathfrak{g} e l'algebra quoziente $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ è risolubile, allora \mathfrak{g} è risolubile.*
- (3) *Se $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ sono ideali risolubili di \mathfrak{g} , allora $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ è un ideale risolubile di \mathfrak{g} .*

DEFINIZIONE XXVIII.6.4. In particolare, ogni algebra di Lie \mathfrak{g} di dimensione finita contiene un ideale risolubile massimale rispetto all'inclusione. Esso si dice il *radicale* di \mathfrak{g} e si indica con $\text{rad}(\mathfrak{g})$.

XXVIII.7. Algebre di Lie semisemplici

DEFINIZIONE XXVIII.7.1. Un'algebra di Lie di dimensione finita \mathfrak{g} per cui sia $\text{rad}(\mathfrak{g}) = \{0\}$ si dice *semisemplice*.

Osserviamo che l'algebra quoziente $\mathfrak{g}/\text{rad}(\mathfrak{g})$ è semisemplice.

Vale il fondamentale risultato:

TEOREMA XXVIII.7.2 (Decomposizione di Levi-Malcev). *Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie di dimensione finita. Allora \mathfrak{g} contiene una sottoalgebra semisemplice \mathfrak{l} tale che*

$$(28.7.1) \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \text{rad}(\mathfrak{g})$$

DEFINIZIONE XXVIII.7.3. Una sottoalgebra semisemplice \mathfrak{l} di \mathfrak{g} per cui valga la (28.7.1) si dice una *sottoalgebra di Levi* di \mathfrak{g} .

XXVIII.8. Algebre di Lie nilpotenti

Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie di dimensione finita sul campo \mathbb{k} . Si dice *serie centrale discendente* di \mathfrak{g} la sequenza di ideali di \mathfrak{g}

$$(28.8.1) \quad \mathfrak{g} = C^0\mathfrak{g} \supset C^1\mathfrak{g} \supset \cdots \supset C^h\mathfrak{g} \supset C^{h+1}\mathfrak{g} \supset \cdots$$

definiti per ricorrenza da:

$$(28.8.2) \quad \begin{cases} C^0\mathfrak{g} = \mathfrak{g}, \\ C^{h+1}\mathfrak{g} = [C^h\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \end{cases} \quad \text{per } h \geq 0.$$

Diciamo che \mathfrak{g} è *nilpotente* se $C^n\mathfrak{g} = \{0\}$ per qualche intero non negativo n . Poiché $D^m\mathfrak{g} \subset C^m\mathfrak{g}$ per ogni $m \in \mathbb{N}$, un'algebra di Lie nilpotente è anche risolubile.

L'algebra di Lie lineare $\mathfrak{n}(n, \mathbb{k})$ è un esempio di algebra di Lie nilpotente.

TEOREMA XXVIII.8.1. *Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie di dimensione finita su \mathbb{k} .*

- (1) *Se \mathfrak{g} è nilpotente, allora ogni sottoalgebra di Lie di \mathfrak{g} ed ogni immagine di \mathfrak{g} mediante un morfismo di algebre di Lie è nilpotente.*
- (2) *\mathfrak{g} è nilpotente se e soltanto se $\mathfrak{g}/Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ è nilpotente.*
- (3) *Se $\mathfrak{g} \neq \{0\}$ ed è nilpotente, allora $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$.*

DIMOSTRAZIONE. La (1) e la (2) sono immediate. Per la (3) osserviamo che se \mathfrak{g} è nilpotente ed h è il più grande intero non negativo per cui $C^h\mathfrak{g} \neq \{0\}$, allora $C^h\mathfrak{g} \subset Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$. \square

XXVIII.9. Il teorema di Engel

LEMMA XXVIII.9.1. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su \mathbb{k} . Se $A \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$ è nilpotente, allora anche $\text{ad}_{\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)}(A)$ è nilpotente.*

DIMOSTRAZIONE. Siano L_A e R_A gli endomorfismi di $\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$ definiti rispettivamente da:

$$\begin{cases} L_A(X) = A \circ X & \forall X \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V) \\ R_A(X) = X \circ A & \forall X \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V). \end{cases}$$

Chiaramente L_A ed R_A sono nilpotenti e commutano tra loro. Quindi anche

$$\text{ad}_{\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)}(A) = L_A - R_A$$

è nilpotente. \square

TEOREMA XXVIII.9.2. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita $n \geq 1$ su \mathbb{k} . Sia \mathfrak{a} una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$ formata da elementi nilpotenti. Allora esiste un vettore $v \in V \setminus \{0\}$ tale che $A(v) = 0$ per ogni $A \in \mathfrak{a}$.*

DIMOSTRAZIONE. Ragioniamo per induzione su $m = \dim_{\mathbb{k}}(\alpha)$. Se $m \leq 1$, la tesi è banalmente vera. Supponiamo quindi $m > 1$ e il teorema valido per algebre di Lie di dimensione $< m$ di endomorfismi nilpotenti di uno spazio vettoriale di dimensione finita.

Sia \mathfrak{b} , con $\{0\} \subsetneq \mathfrak{b} \subsetneq \alpha$, una sottoalgebra di Lie di α . Per il Lemma XXVIII.9.1, $\text{ad}_{\alpha}(\mathfrak{b})$ è un'algebra di Lie di endomorfismi nilpotenti di α . Per passaggio al quoziente, gli elementi di \mathfrak{b} definiscono un'algebra di Lie di endomorfismi nilpotenti di α/\mathfrak{b} . Per l'ipotesi induttiva esiste allora $A \in \alpha \setminus \mathfrak{b}$ tale che $[\mathfrak{b}, A] \subset \mathfrak{b}$. In particolare $N_{\alpha}(\mathfrak{b}) \supsetneq \mathfrak{b}$.

Scegliamo ora la sottoalgebra \mathfrak{b} massimale tra le sottoalgebre di Lie propriamente contenute in α . Per le considerazioni precedenti deve essere $N_{\alpha}(\mathfrak{b}) = \alpha$ e quindi \mathfrak{b} è un ideale di α . Consideriamo il morfismo di algebre di Lie $\pi : \alpha \rightarrow \alpha/\mathfrak{b}$. Se α/\mathfrak{b} avesse dimensione maggiore di 1, l'immagine inversa $\pi^{-1}(l)$ di una retta l di α/\mathfrak{b} sarebbe una sottoalgebra di α con $\mathfrak{b} \subsetneq \pi^{-1}l \subsetneq \alpha$. Questo è assurdo per la massimalità di \mathfrak{b} e quindi $\dim_{\mathbb{k}} \alpha/\mathfrak{b} = 1$.

Dunque, se $A \in \alpha \setminus \mathfrak{b}$, abbiamo

$$\alpha = \mathfrak{b} \oplus \mathbb{k}A.$$

Sia $W = \{v \in V \mid B(v) = 0, \forall B \in \mathfrak{b}\}$. Per l'ipotesi induttiva $\dim_{\mathbb{k}} W > 0$. Inoltre, poiché \mathfrak{b} è un ideale di α , abbiamo $A(W) \subset W$. Infatti $B(A(w)) = A(B(w)) + [B, A](w) = 0$ per ogni $w \in W$ e $B \in \mathfrak{b}$. La restrizione di A a W è ancora nilpotente e quindi esiste $v \in W \setminus \{0\}$ tale che $A(v) = 0$. Questo implica che $X(v) = 0$ per ogni $X \in \alpha$. La dimostrazione è completa. \square

Dal Teorema XXVIII.9.2 si ottiene il

TEOREMA XXVIII.9.3 (Engel). *Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie di dimensione finita su \mathbb{k} . Condizione necessaria e sufficiente affinché \mathfrak{g} sia nilpotente è che tutti i suoi elementi siano ad-nilpotenti.*

DIMOSTRAZIONE. La necessità è ovvia. Per dimostrare la sufficienza ragioniamo per ricorrenza su $m = \dim_{\mathbb{k}} \mathfrak{g}$. Se $m \leq 1$ non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo $m > 1$. Per il teorema precedente esiste $X \in \mathfrak{g} \setminus \{0\}$ tale che $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(Y)(X) = 0$ per ogni $Y \in \mathfrak{g}$. In particolare $X \in Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$. Osserviamo a questo punto che $\alpha = \mathfrak{g}/Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ ha dimensione $< m$ ed ogni elemento di α è ad-nilpotente. Per l'ipotesi induttiva α è nilpotente e questo implica che \mathfrak{g} è nilpotente. \square

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita n su \mathbb{k} . Una *bandiera completa* in V è una successione di sottospazi vettoriali di V :

$$(28.9.1) \quad \begin{cases} V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n \\ \text{con } \dim_{\mathbb{k}} V_i = i \text{ per } 0 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Vale il seguente:

TEOREMA XXVIII.9.4. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su \mathbb{k} e sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie di endomorfismi nilpotenti di V . Allora esiste una bandiera completa $\{V_i\}_{0 \leq i \leq n}$ tale che $X(V_i) \subset V_{i-1}$ per ogni $1 \leq i \leq n$.*

DIMOSTRAZIONE. Se $\dim_{\mathbb{k}} V = 0$ non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo quindi $\dim_{\mathbb{k}}(V) = n > 0$ e il teorema vero per algebre di Lie nilpotenti di endomorfismi di uno spazio vettoriale di dimensione $< n$ su \mathbb{k} . Per il Teorema XXVIII.9.2, esiste $v_1 \in V \setminus \{0\}$ tale che $X(v_1) = 0$ per ogni $X \in \mathfrak{g}$. Sia $V_1 = \mathbb{k} \cdot v_1$ e consideriamo la rappresentazione ρ di \mathfrak{g} su $W = V/V_1$ ottenuta per passaggio al quoziente. Sia $\pi : V \rightarrow W$ la proiezione nel quoziente. Poiché $\rho(\mathfrak{g})$ consiste di endomorfismi nilpotenti di W , esiste per l'ipotesi induttiva una bandiera completa $\{W_i\}_{0 \leq i \leq n-1}$ di W tale che $\rho(X)(W_i) \subset W_{i-1}$. Otteniamo allora la bandiera completa $\{V_i\}_{0 \leq i \leq n}$ desiderata aggiungendo a $\{0\} = V_0$ e a $V_1 = \mathbb{k} \cdot v_1$ i sottospazi $V_i = \pi^{-1}(W_{i-1})$ per $2 \leq i \leq n$. \square

Applicando questo risultato alla rappresentazione aggiunta otteniamo:

TEOREMA XXVIII.9.5. *Se \mathfrak{g} è un'algebra di Lie nilpotente, allora esiste una successione di ideali di \mathfrak{g} :*

$$\mathfrak{a}_0 = \{0\} \subset \mathfrak{a}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{a}_{m-1} \subset \mathfrak{a}_m = \mathfrak{g}$$

tale che, per ogni $1 \leq h \leq m$, l'algebra di Lie $\mathfrak{a}_h/\mathfrak{a}_{h-1}$ sia abeliana e di dimensione uno.

TEOREMA XXVIII.9.6. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo \mathbb{k} e sia \mathfrak{g} una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$ formata da endomorfismi nilpotenti. Allora \mathfrak{g} è un'algebra di Lie nilpotente.*

DIMOSTRAZIONE. Sia infatti $\{V_i\}_{0 \leq i \leq n}$ una bandiera completa tale che $X(V_i) \subset V_{i-1}$ per $1 \leq i \leq n$, per ogni $X \in \mathfrak{g}$. Scegliamo una base e_1, \dots, e_n di V tale che $e_i \in V_i \setminus V_{i-1}$. In tale base ogni elemento di \mathfrak{g} si rappresenta con una matrice di $n(n, \mathbb{k})$. Da questa osservazione segue la tesi. \square

LEMMA XXVIII.9.7. *Se \mathfrak{g} è un'algebra di Lie nilpotente di dimensione finita ed \mathfrak{a} un ideale di \mathfrak{g} , allora $\mathfrak{a} \cap Z_{\mathfrak{g}} \neq \{0\}$.*

DIMOSTRAZIONE. Facciamo operare \mathfrak{g} su \mathfrak{a} mediante la rappresentazione aggiunta. Tutti gli $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)|_{\mathfrak{a}}$, per $X \in \mathfrak{g}$, sono nilpotenti e quindi esiste $A \in \mathfrak{a}$ tale che $[\mathfrak{g}, A] = \{0\}$. È quindi $A \in \mathfrak{a} \cap Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$. \square

XXVIII.10. Il Teorema di Lie

TEOREMA XXVIII.10.1. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita $n > 0$ su un campo \mathbb{k} , di caratteristica 0 e algebricamente chiuso. Sia \mathfrak{g} una sottoalgebra di Lie risolubile di $\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$. Esiste allora un vettore $v \in V \setminus \{0\}$ tale che*

$$(28.10.1) \quad \forall A \in \mathfrak{g} \quad \exists \lambda(A) \in \mathbb{k} \quad \text{tale che} \quad A(v) = \lambda(A)v.$$

DIMOSTRAZIONE. Ragioniamo per induzione su $m = \dim_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g})$. La tesi è banale se $m \leq 1$. Supponiamo quindi $m > 1$ ed il teorema vero per algebre risolubili, di dimensione minore di m , di endomorfismi lineari di uno spazio di dimensione finita positiva sul campo \mathbb{k} .

Osserviamo che \mathfrak{g} contiene un ideale \mathfrak{a} di codimensione 1: a questo scopo basta scegliere \mathfrak{a} uguale a un qualsiasi iperpiano di \mathfrak{g} contenente $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Per l'ipotesi induttiva, esiste una forma lineare $\lambda : \mathfrak{a} \rightarrow \mathbb{k}$ tale che il sottospazio

$$W = \{v \in V \mid \forall A \in \mathfrak{a}, \exists \lambda_v(A) \in \mathbb{k} \text{ tale che } A(v) = \lambda_v(A)v\}$$

abbia dimensione positiva.

Dimostriamo ora che $X(W) \subset W$ per ogni $X \in \mathfrak{g}$. Siano $w \in W$ ed $X \in \mathfrak{g}$. Se $Y \in \mathfrak{a}$ abbiamo:

$$Y(X(w)) = X(Y(w)) + [Y, X](w) = \lambda_w(Y)(X(w)) + \lambda_w([Y, X])(w).$$

Basterà quindi dimostrare che $\lambda_w([X, Y]) = 0$ per ogni $X \in \mathfrak{g}$ ed $Y \in \mathfrak{a}$. Fissiamo $X \in \mathfrak{g}$ e $w \in W$. Sia k il più grande intero non negativo tale che

$$(28.10.2) \quad w, X(w), \dots, X^k(w)$$

siano linearmente indipendenti. Indichiamo con W_i il sottospazio vettoriale di dimensione i generato da $w, X(w), \dots, X^{i-1}(w)$, per $1 \leq i \leq k+1$ e poniamo $W_0 = \{0\}$. Ogni $Y \in \mathfrak{a}$ lascia i sottospazi W_i invarianti e quindi la sua restrizione a W_{k+1} si scrive come una matrice triangolare superiore nella base (28.10.2). Verifichiamo, per ricorrenza su $i = 0, \dots, k$ che

$$(28.10.3) \quad w_{i,Y} = Y(X^i(w)) - \lambda_w(Y)X^i(w) \in W_i \quad \forall Y \in \mathfrak{a},$$

per $i = 0, \dots, k$.

Per $i = 0$ questo è conseguenza della definizione di W . Supponiamo ora che la (28.10.3) valga per $i = h$, con $0 \leq h < k$ e dimostriamo che vale per $i = h+1$. Abbiamo:

$$\begin{aligned} Y(X^{h+1}(w)) &= Y(X(X^h(w))) \\ &= XY(X^h(w)) - [X, Y](X^h(w)) \\ &= X(\lambda_w(Y)X^h(w) + w_{h,Y}) - \lambda_w([X, Y])X^h(w) - w_{h,[X,Y]} \\ &= \lambda_w(Y)X^{h+1}(w) + X(w_{h,Y}) - \lambda_w([X, Y])X^h(w) - w_{h,[X,Y]} \\ &= \lambda_w(Y)X^{h+1}(w) + w_{h+1,Y} \end{aligned}$$

e $w_{h+1,Y} \in W_{h+1}$ perché $X(w_{h,Y}) \in X(W_h) \subset W_{h+1}$, $X^h(w) \in W_{h+1}$ e $w_{h,[X,Y]} \in W_h \subset W_{h+1}$. In particolare, per ogni Y possiamo considerare la traccia $\text{tr}_{W_{k+1}}(Y)$ della restrizione di Y a W_{k+1} e

$$\text{tr}_{W_{k+1}}(Y) = (k+1)\lambda_w(Y).$$

Ora, anche X opera su W_{k+1} e la traccia della restrizione a W_{k+1} del commutatore $[X, Y]$ è nulla. Da

$$0 = \text{tr}_{W_{k+1}}([X, Y]) = (k+1)\lambda_w([X, Y])$$

segue che $\lambda_w([X, Y]) = 0$ perché \mathbb{k} ha caratteristica zero.

Quindi W è \mathfrak{g} -invariante. Se $A \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{a}$, abbiamo $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathbb{k}A$. Osserviamo che, essendo \mathbb{k} algebricamente chiuso, $W \ni w \rightarrow A(w) \in W$ ha un autovettore $v \in W \setminus \{0\}$. Tale $v \neq 0$ soddisfa la tesi del teorema. \square

Come corollario del Teorema XXVIII.10.1, otteniamo il TEOREMA DI LIE:

TEOREMA XXVIII.10.2 (Lie). *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita n su un campo algebricamente chiuso \mathbb{k} di caratteristica 0. Sia \mathfrak{g} un'algebra risolubile di endomorfismi di V . Allora esiste una bandiera completa $\{V_i\}_{0 \leq i \leq n}$ di V tale che $A(V_i) \subset V_i$ per ogni $A \in \mathfrak{g}$.*

Se \mathfrak{g} è un'algebra di Lie risolubile (di dimensione finita su un campo \mathbb{k} algebricamente chiuso di caratteristica zero) e $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$ una sua rappresentazione lineare di dimensione finita, $\rho(\mathfrak{g})$ è risolubile e quindi stabilizza una bandiera completa di V . Applicando questa osservazione alla rappresentazione aggiunta di \mathfrak{g} otteniamo:

TEOREMA XXVIII.10.3. *Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie risolubile di dimensione finita n su un campo \mathbb{k} algebricamente chiuso di caratteristica zero. Allora esiste una catena di ideali*

$$(28.10.4) \quad \{0\} = \mathfrak{a}_0 \subset \mathfrak{a}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{a}_{n-1} \subset \mathfrak{a}_n = \mathfrak{g}$$

di \mathfrak{g} con $\dim_{\mathbb{k}}(\mathfrak{a}_i) = i$ per $i = 0, 1, \dots, n-1, n$.

Vale il seguente risultato relativo al cambiamento del campo di base:

LEMMA XXVIII.10.4. *Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie di dimensione finita su un campo \mathbb{k} . Sia $\tilde{\mathbb{k}}$ un'estensione del campo \mathbb{k} . Sia $\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathbb{k}} \otimes_{\mathbb{k}} \mathfrak{g}$ l'algebra di Lie di dimensione finita su $\tilde{\mathbb{k}}$ ottenuta per estensione $\tilde{\mathbb{k}}$ -bilineare del commutatore di \mathfrak{g} . Allora*

- (1) $\tilde{\mathfrak{g}}$ è risolubile se e soltanto se \mathfrak{g} è risolubile.
- (2) $\tilde{\mathfrak{g}}$ è nilpotente se e soltanto se \mathfrak{g} è nilpotente.

Utilizzando il lemma, dimostriamo il seguente:

TEOREMA XXVIII.10.5. *Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie di dimensione finita su un campo \mathbb{k} di caratteristica zero. L'algebra \mathfrak{g} è risolubile se e soltanto se il suo ideale derivato $\mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ è nilpotente.*

DIMOSTRAZIONE. Chiaramente, se $\mathfrak{g}^{(1)}$ è nilpotente, \mathfrak{g} è risolubile. Dimostriamo il viceversa.

Per il lemma precedente, possiamo supporre che il campo \mathbb{k} sia algebricamente chiuso: infatti, detta $\tilde{\mathbb{k}}$ la chiusura algebrica di \mathbb{k} e posto $\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathbb{k}} \otimes_{\mathbb{k}} \mathfrak{g}$, abbiamo $\tilde{\mathfrak{g}}^{(1)} = \tilde{\mathbb{k}} \otimes_{\mathbb{k}} \mathfrak{g}^{(1)}$.

Sia dunque \mathbb{k} algebricamente chiuso; sia $\{\mathfrak{a}_i\}_{0 \leq i \leq n}$ una catena crescente di ideali di \mathfrak{g} con $\dim_{\mathbb{k}} \mathfrak{a}_i = i$. Fissiamo una base X_1, \dots, X_n di \mathfrak{g} con $X_i \in \mathfrak{a}_i \setminus \mathfrak{a}_{i-1}$ per $1 \leq i \leq n$. Per ogni $X \in \mathfrak{g}$, l'endomorfismo $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)$ si rappresenta nella base X_1, \dots, X_n mediante una matrice di $t(n, \mathbb{k})$. Poiché $\text{ad}_{\mathfrak{g}}([X, Y]) = [\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X), \text{ad}_{\mathfrak{g}}(Y)]$ per ogni $X, Y \in \mathfrak{g}$, gli elementi di $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}^{(1)})$ si rappresentano nella base X_1, \dots, X_n come matrici di $n(n, \mathbb{k})$ e sono quindi nilpotenti. Ne segue che $\mathfrak{g}^{(1)}$ è nilpotente per il teorema di Engel. \square

Come corollario deduciamo il seguente:

TEOREMA XXVIII.10.6. *Sia \mathfrak{g} è un'algebra di Lie risolubile su un campo \mathbb{k} di caratteristica zero. Allora possiamo costruire una successione crescente di sottoalgebre di \mathfrak{g}*

$$\{0\} = \mathfrak{a}_0 \subset \mathfrak{a}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{a}_{m-1} \subset \mathfrak{a}_m = \mathfrak{g},$$

tali che, per ogni h con $1 \leq h \leq m$, \mathfrak{a}_{h-1} sia un ideale in \mathfrak{a}_h ed il quoziente $\mathfrak{a}_h/\mathfrak{a}_{h-1}$ sia un'algebra di Lie abeliana di dimensione uno.

DIMOSTRAZIONE. Siano $m = \dim_{\mathbb{k}} \mathfrak{g}$, $m' = \dim_{\mathbb{k}} \mathfrak{g}^{(1)}$ e $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{g}^{(1)}$ la proiezione nel quoziente. Poiché $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}^{(1)}$ è abeliana, se

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{m-m'} = \mathfrak{g}/\mathfrak{g}^{(1)}$$

è una qualsiasi bandiera completa, le $\mathfrak{a}_h = \pi^{-1}(V_{h-m'})$, per $h = m', \dots, m$ sono sottoalgebre di \mathfrak{g} di dimensione h . Ciascuna è un ideale di codimensione uno nella successiva e $\mathfrak{a}_h/\mathfrak{a}_{h-1}$ è abeliana di dimensione uno per $h = m' + 1, \dots, m$.

Per concludere la dimostrazione basta osservare che $\mathfrak{a}_{m'} = \mathfrak{g}^{(1)}$ è un'algebra di Lie nilpotente e quindi per il teorema di Engel contiene una sequenza di ideali

$$\{0\} = \mathfrak{a}_0 \subset \mathfrak{a}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{a}_{m'-1} \subset \mathfrak{a}_{m'} = \mathfrak{g}^{(1)},$$

tali che $\mathfrak{a}_h/\mathfrak{a}_{h-1}$ sia un'algebra di Lie abeliana di dimensione uno, per $h = 1, \dots, m'$. \square

Osserviamo che, a differenza del caso in cui avevamo supposto che \mathbb{k} fosse algebricamente chiuso, qui non possiamo in generale ottenere che gli \mathfrak{a}_h siano ideali in \mathfrak{g} , ma soltanto ciascuno un ideale nella successiva sottoalgebra \mathfrak{a}_{h+1} di \mathfrak{g} .

XXVIII.11. Il più grande ideale di nilpotenza di una rappresentazione

Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie su un campo \mathbb{k} .

LEMMA XXVIII.11.1. *Sia \mathfrak{a} un ideale di \mathfrak{g} e $\rho_V : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$ una rappresentazione lineare irriducibile, di dimensione finita, di \mathfrak{g} , tale che, per ogni $X \in \mathfrak{a}$, $\rho_V(X)$ sia nilpotente su V . Allora $\rho_V(\mathfrak{a}) = \{0\}$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $W = \{v \in V \mid \rho_V(X)(v) = 0, \forall X \in \mathfrak{a}\}$. Per il teorema di Engel, $W \neq \{0\}$. D'altra parte, poiché \mathfrak{a} è un ideale, W è un sottospazio $\rho_V(\mathfrak{g})$ -invariante di V . Per l'irriducibilità, $W = V$. \square

LEMMA XXVIII.11.2. *Sia $\rho_V : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$ una rappresentazione lineare di \mathfrak{g} , e sia*

$$(28.11.1) \quad \{0\} = W_0 \subset W_1 \subset \cdots \subset W_\nu = V$$

una sua serie di Jordan-Hölder¹. Per un ideale \mathfrak{a} di \mathfrak{g} sono equivalenti

- (1) *per ogni $X \in \mathfrak{a}$, $\rho_V(X)$ è un endomorfismo nilpotente di V ;*
- (2) *$\rho(X)(W_h) \subset W_{h-1}$ per ogni $X \in \mathfrak{a}$ ed ogni $h = 1, \dots, \nu$.*

¹Ogni sottospazio W_h è $\rho_V(\mathfrak{g})$ -invariante e le rappresentazioni indotte sui quozienti W_h/W_{h-1} sono irriducibili.

DIMOSTRAZIONE. L'implicazione (2) \Rightarrow (1) è ovvia. Mostriamo che vale anche l'implicazione opposta.

Sia α un ideale di \mathfrak{g} tale che $\rho_V(\alpha)$ sia un'algebra di endomorfismi nilpotenti di V .

Per tutte le rappresentazioni $\rho_{W_h/W_{h-1}}$ indotte dalla ρ_V per passaggio al quoziente gli endomorfismi di $\rho_{W_h/W_{h-1}}(\alpha)$ sono nilpotenti su W/W_{h-1} . Poiché le rappresentazioni $\rho_{W_h/W_{h-1}}$ sono irriducibili, per il lemma precedente $\rho_{W_h/W_{h-1}}(X) = 0$ per ogni $X \in \alpha$, e ciò equivale alla (2). \square

Sia $\rho_V : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$ una rappresentazione lineare di \mathfrak{g} , e sia (28.11.1) una sua serie di Jordan-Hölder. L'insieme

$$(28.11.2) \quad \mathfrak{n}_V = \{X \in \mathfrak{g} \mid \rho_V(X)(W_h) \subset W_{h-1}, \forall h = 1, \dots, \nu\}$$

è un ideale di \mathfrak{g} , che non dipende dalla particolare scelta della serie di Jordan-Hölder utilizzata nella sua definizione.

DEFINIZIONE XXVIII.11.3. L'ideale \mathfrak{n}_V definito dalla (28.11.2) si dice il *più grande ideale di nilpotenza* della rappresentazione ρ_V .

XXVIII.12. Il radicale nilpotente e il nilradicale

In tutto questo paragrafo supporremo che il campo \mathbb{k} abbia caratteristica zero. Tutte le algebre di Lie considerate saranno algebre di Lie su \mathbb{k} di dimensione finita.

DEFINIZIONE XXVIII.12.1. Si dice *radicale nilpotente* dell'algebra di Lie \mathfrak{g} l'intersezione $\text{nil}(\mathfrak{g})$ dei nuclei delle sue rappresentazioni lineari irriducibili di dimensione finita.

LEMMA XXVIII.12.2. Sia $V \neq \{0\}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita su \mathbb{k} e \mathfrak{g} una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$. Supponiamo che V sia un \mathfrak{g} -modulo irriducibile. Se α è un ideale abeliano di \mathfrak{g} , allora $\alpha \cap \mathfrak{g}^{(1)} = \{0\}$.

DIMOSTRAZIONE. Sia \mathcal{A} la sottoalgebra unitaria (commutativa) di $\text{End}_{\mathbb{k}}(V)$ generata da $\mathbf{1}_V$ ed α . Dimostriamo che

se \mathfrak{b} è un ideale di \mathfrak{g} contenuto in α e $\text{tr}_V(AB) = 0$ per ogni $A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathfrak{b}$, allora $\mathfrak{b} = \{0\}$.

Abbiamo infatti, se $B \in \mathfrak{b}$,

$$\text{tr}_V(B^n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > 0,$$

e quindi ogni elemento $B \in \mathfrak{b}$ è nilpotente. Per il teorema di Engel,

$$W = \bigcap_{B \in \mathfrak{b}} \ker B \neq \{0\}.$$

Poiché \mathfrak{b} è un ideale di \mathfrak{g} abbiamo

$$B(X(v)) = X(B(v)) - [X, B](v) = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}, \forall B \in \mathfrak{b}, \quad \forall v \in W.$$

Quindi W è \mathfrak{g} -invariante e perciò $W = V$ in quanto avevamo supposto che V fosse un \mathfrak{g} -modulo irriducibile. Ciò implica che $\mathfrak{b} = \{0\}$.

Possiamo applicare questo risultato a $\mathfrak{b} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{a}]$. Infatti: se $X \in \mathfrak{g}$, $Y \in \mathfrak{a}$ ed $A \in \mathcal{A}$, otteniamo:

$$\mathrm{tr}_V([X, Y]A) = \mathrm{tr}_V(XYA - YXA) = \mathrm{tr}_V(XYA - XAY) = \mathrm{tr}_V(X[Y, A]) = 0$$

perch'è \mathcal{A} è una sottoalgebra commutativa di $\mathrm{End}_{\mathbb{k}}(V)$. Quindi $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] = 0$. Da ciò segue che gli endomorfismi di \mathfrak{g} commutano con quelli di \mathcal{A} . Fissiamo quindi $X, Y \in \mathfrak{g}$ ed $A \in \mathcal{A}$. Abbiamo:

$$\mathrm{tr}_V([X, Y]A) = \mathrm{tr}_V(X[Y, A]) = 0$$

perché $[Y, A] = 0$. Quindi $\mathrm{tr}_V(ZA) = 0$ per ogni $Z \in \mathfrak{g}^{(1)}$, $A \in \mathcal{A}$. Applicando quindi le considerazioni svolte all'inizio della dimostrazione all'ideale $\mathfrak{g}^{(1)} \cap \mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}$, otteniamo che $\mathfrak{g}^{(1)} \cap \mathfrak{a} = \{0\}$. \square

Dal Lemma XXVIII.12.2 otteniamo la seguente caratterizzazione del radicale nilpotente:

TEOREMA XXVIII.12.3. *Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie di dimensione finita sul campo \mathbb{k} di caratteristica zero. Allora*

$$(28.12.1) \quad \mathrm{nil}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}^{(1)} \cap \mathrm{rad}(\mathfrak{g}).$$

DIMOSTRAZIONE. Ogni funzionale lineare $\lambda : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{k}$ che si annulla su $\mathfrak{g}^{(1)}$ definisce una rappresentazione unidimensionale, e quindi irriducibile, di \mathfrak{g} . Quindi $\mathrm{nil}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}^{(1)}$.

Consideriamo la rappresentazione aggiunta di \mathfrak{g} . Possiamo determinare una sequenza di sottospazi vettoriali $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ -invarianti di \mathfrak{g} :

$$\mathfrak{g}_0 = \{0\} \subset \mathfrak{g}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_m = \mathfrak{g}$$

tali che la rappresentazione indotta su ciascuno dei quozienti $\mathfrak{g}_h/\mathfrak{g}_{h-1}$, per $1 \leq h \leq m$, sia irriducibile. In particolare $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(X)$ è nilpotente per ogni $X \in \mathrm{nil}(\mathfrak{g})$, in quanto $[X, \mathfrak{g}_h] \subset \mathfrak{g}_{h-1}$ per ogni $h = 1, \dots, m$ se $X \in \mathrm{nil}(\mathfrak{g})$. Per il teorema di Engel $\mathrm{nil}(\mathfrak{g})$ è un ideale nilpotente di \mathfrak{g} e quindi è contenuto in $\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$.

Abbiamo quindi ottenuto l'inclusione

$$\mathrm{nil}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}^{(1)} \cap \mathrm{rad}(\mathfrak{g}).$$

Per dimostrare l'inclusione opposta, consideriamo una qualsiasi rappresentazione lineare irriducibile di dimensione finita $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$.

Sia $k \geq 0$ il più piccolo numero naturale tale che $\rho(D^{k+1}\mathrm{rad}(\mathfrak{g})) = \{0\}$. Poniamo $\mathfrak{g}' = \rho(\mathfrak{g})$ ed $\mathfrak{a} = \rho(D^k\mathrm{rad}(\mathfrak{g}))$. Allora V è un \mathfrak{g}' -modulo irriducibile ed \mathfrak{a} un ideale abeliano di \mathfrak{g}' . Per il Lemma XXVIII.12.2,

$$\rho(\mathfrak{g}^{(1)} \cap D^k\mathrm{rad}(\mathfrak{g})) \subset D\mathfrak{g}' \cap \mathfrak{a} = \{0\}.$$

Se fosse $k > 0$, avremmo $D^k\mathrm{rad}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}^{(1)}$ e quindi $\rho(D^k\mathrm{rad}(\mathfrak{g})) = \rho(\mathfrak{g}^{(1)} \cap D^k\mathrm{rad}(\mathfrak{g})) = \{0\}$ contraddirebbe la scelta di k . Deve essere perciò $k = 0$ e quindi $\rho(\mathfrak{g}^{(1)} \cap \mathrm{rad}(\mathfrak{g})) = \{0\}$. Dunque $\ker \rho \supset \mathfrak{g}^{(1)} \cap \mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ per ogni rappresentazione ρ irriducibile di dimensione finita: la dimostrazione è completa. \square

COROLLARIO XXVIII.12.4. *Il radicale nilpotente $\mathrm{nil}(\mathfrak{g})$ è un ideale caratteristico di \mathfrak{g} .*

COROLLARIO XXVIII.12.5. *Se \mathfrak{g} è risolubile, allora il suo radicale nilpotente coincide con il suo ideale derivato $\mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.*

Per ogni rappresentazione semplice di dimensione finita $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$ di un'algebra di Lie risolubile \mathfrak{g} , la $\rho(\mathfrak{g})$ è commutativa e la sottoalgebra associativa di $\text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ generata dall'identità I_V e da $\rho(\mathfrak{g})$ è un'estensione algebrica di \mathbb{K} .

DIMOSTRAZIONE. Poiché \mathfrak{g} coincide con il proprio radicale \mathfrak{r} , abbiamo $\text{nil}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}^{(1)} \cap \mathfrak{r} = \mathfrak{g}^{(1)}$. Quindi $[\rho(\mathfrak{g}), \rho(\mathfrak{g})] = \rho([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = \{0\}$ e $\rho(\mathfrak{g})$ è commutativa. La sottoalgebra associativa \mathbb{K}_{ρ} di $\text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ generata da $\rho(\mathfrak{g})$ e da I_V è quindi un'algebra commutativa in cui ogni elemento diverso da zero è invertibile per il lemma di Schur. Quindi \mathbb{K}_{ρ} è un campo. Poiché è uno spazio vettoriale di dimensione finita su \mathbb{K} , esso ne è un'estensione algebrica. \square

COROLLARIO XXVIII.12.6. *Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie su \mathbb{K} , con radicale \mathfrak{r} . Allora i seguenti insiemi sono uguali:*

- (1) *il più grande ideale nilpotente di \mathfrak{g} ;*
- (2) *il più grande ideale nilpotente di \mathfrak{r} ;*
- (3) *l'insieme degli $X \in \mathfrak{r}$ tali che $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)$ sia nilpotente;*
- (4) *l'insieme degli $X \in \mathfrak{r}$ tali che $\text{ad}_{\mathfrak{r}}(X)$ sia nilpotente.*

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ gli ideali descritti rispettivamente nei punti (1), (2), (3) (4). Abbiamo chiaramente $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b} \subset \mathfrak{c} \subset \mathfrak{d}$. Poiché $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{r}$ per ogni $X \in \mathfrak{r}$, vale anche l'inclusione $\mathfrak{d} \subset \mathfrak{c}$ e quindi $\mathfrak{c} = \mathfrak{d}$. Per dimostrare che i quattro ideali sono uguali basterà quindi verificare che $\mathfrak{c} \subset \mathfrak{a}$. Consideriamo la rappresentazione aggiunta di \mathfrak{r} in \mathfrak{g} e sia

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{m-1} \subset V_m = \mathfrak{g}$$

una serie di Jordan-Hölder per $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})$, cioè una catena massimale di sottospazi vettoriali $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})$ -invarianti di \mathfrak{g} . Indichiamo con ρ_h la rappresentazione indotta sul quoziente V_h/V_{h-1} dalla restrizione a \mathfrak{r} della rappresentazione aggiunta. Poiché essa è irriducibile, abbiamo $\rho_h(X) = 0$ per ogni $X \in \mathfrak{r}$ per cui $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)$ è nilpotente. Quindi $\mathfrak{d} = \bigcap_h \ker \rho_h$ è un ideale nilpotente di \mathfrak{g} e quindi è contenuto in \mathfrak{a} . \square

DEFINIZIONE XXVIII.12.7. L'ideale \mathfrak{n} formato dagli elementi $\text{ad}_{\mathfrak{g}}$ -nilpotenti del radicale \mathfrak{r} di \mathfrak{g} si dice il *nilradicale* o il *più grande ideale nilpotente* di \mathfrak{g} .

COROLLARIO XXVIII.12.8. *Il nilradicale di \mathfrak{g} è un suo ideale caratteristico.*

Se indichiamo con \mathfrak{n}_0 il radicale nilpotente² $\text{nil}(\mathfrak{g})$ di \mathfrak{g} , abbiamo la catena di inclusioni

$$\mathfrak{g} \supset \mathfrak{r} \supset \mathfrak{n} \supset \mathfrak{n}_0.$$

XXVIII.13. Automorfismi speciali

PROPOSIZIONE XXVIII.13.1. *Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie su un campo \mathbb{K} di caratteristica zero e siano \mathfrak{n} il suo ideale nilpotente massimale ed \mathfrak{n}_0 il suo radicale nilpotente. Allora*

$$\text{Aut}_{\mathfrak{n}} = \{\exp(X) \mid X \in \mathfrak{n}\} \quad \text{ed} \quad \text{Aut}_{\mathfrak{n}_0} = \{\exp(X) \mid X \in \mathfrak{n}_0\}$$

² Anche l'inclusione $\mathfrak{n}_0 \subset \mathfrak{n}$ può essere propria. Ad esempio, se \mathfrak{g} è un'algebra di Lie abeliana, abbiamo $\mathfrak{n} = \mathfrak{g}$ e $\mathfrak{n}_0 = \{0\}$.

sono sottogruppi normali di $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ contenuti in $\text{Aut}_e(\mathfrak{g})$.

DIMOSTRAZIONE. Basta osservare che sia \mathfrak{n} che \mathfrak{n}_0 sono ideali caratteristici di \mathfrak{g} , cioè invarianti per automorfismi di \mathfrak{g} . \square

DEFINIZIONE XXVIII.13.2. Gli elementi di $\text{Aut}_{\mathfrak{n}_0}(\mathfrak{g})$ si dicono *automorfismi speciali* di \mathfrak{g} .

Vale la seguente precisazione del Teorema XXVIII.7.2:

TEOREMA XXVIII.13.3. *Se \mathfrak{l} , \mathfrak{l}' sono due sottoalgebre di Levi di un'algebra di Lie \mathfrak{g} su un campo \mathbb{k} di caratteristica zero, allora esiste un automorfismo speciale $a \in \text{Aut}_{\mathfrak{n}_0}(\mathfrak{g})$ tale che $\mathfrak{l}' = a(\mathfrak{l})$.*

Appendice: Complementi sulle connessioni

Espressioni in coordinate

XXIX.1. Espressione in coordinate delle equazioni di struttura

Ricordiamo che i tensori di *torsione* $T \in \mathfrak{T}^{1,2}(M)$ e di *curvatura* $R \in \mathfrak{T}^{1,3}(M)$ sono definiti da:

$$(29.1.1) \quad T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

$$(29.1.2) \quad R(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]} \\ \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Fissiamo un riferimento (X_1, \dots, X_m) su un aperto U di M e consideriamo i simboli di Christoffel e le componenti dei tensori di torsione e di curvatura definiti da:

$$(29.1.3) \quad \nabla_{X_i} X_j = \sum_{k=1}^m \Gamma_{i,j}^k X_k,$$

$$(29.1.4) \quad T(X_i, X_j) = \sum_{k=1}^m T^k_{i,j} X_k,$$

$$(29.1.5) \quad R(X_i, X_j) X_h = \sum_{k=1}^n R^k_{h,i,j} X_k.$$

Definiamo delle 1-forme $\omega^i, \omega_j^i \in \Omega^1(U)$ (per $1 \leq i, j \leq m$) mediante:

$$(29.1.6) \quad \omega^i(X_j) = \delta_j^i, \quad \omega_j^i = \sum_{k=1}^m \Gamma_{k,j}^i \omega^k.$$

Le forme ω_j^i determinano a loro volta i simboli di Christoffel e quindi la connessione lineare.

Diamo una descrizione più intrinseca delle forme ω^i e ω_j^i . Il dato del sistema di riferimento (X_1, \dots, X_n) definisce una forma differenziale

$$(29.1.7) \quad B\omega = (\omega^1, \dots, \omega^n) \in \Omega^1(U, \mathbb{R}^m).$$

La differenziazione affine definisce allora una forma $B\Omega = (\omega_j^i) \in \Omega^1(U, \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}))$ tale che

$$(29.1.8) \quad B\omega(\nabla_X Y) = d[B\omega(Y)](X) + B\Omega(Y)X.$$

Se X'_1, \dots, X'_n è un altro sistema di riferimento in U , le forme $B\omega' \in \Omega^1(U, \mathbb{R}^m)$ e $B\Omega' \in \Omega^1(U, \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}))$ ad esso associate sono legate alle $(B\omega, B\Omega)$ del precedente riferimento dalle *equazioni di gauge*:

$$(29.1.9) \quad \begin{cases} B\omega = aB\omega' & \text{con } a \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbf{GL}(m, \mathbb{R})), \\ \Omega' = a^{-1} \circ da + a^{-1} \circ B\Omega \circ a = a^{-1} \circ da + \text{Ad}(a^{-1})(\Omega). \end{cases}$$

TEOREMA XXIX.1.1 (Equazioni di struttura di Cartan). *Le forme ω_j^i soddisfano:*

$$(29.1.10) \quad d\omega^i = -\sum_{k=1}^m \omega_k^i \wedge \omega^k + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^m T^i_{j,k} \omega^j \wedge \omega^k$$

$$(29.1.11) \quad d\omega_j^i = -\sum_{k=1}^m \omega_k^i \wedge \omega_j^k + \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^m R^i_{j,h,k} \omega^h \wedge \omega^k.$$

DIMOSTRAZIONE. Definiamo i coefficienti $c_{i,j}^k$ mediante :

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^m c_{i,j}^k X_k.$$

Useremo nel seguito la convenzione secondo cui indici uguali in alto e in basso si intendono sommati su tutto il loro insieme di definizione. Abbiamo dunque:

$$d\omega^i(X_j, X_k) = X_j(\omega^i(X_k)) - X_k(\omega^i(X_j)) - \omega^i([X_j, X_k]) = -c_{j,k}^i.$$

Abbiamo poi :

$$\begin{aligned} T(X_j, X_k) &= \nabla_{X_j} X_k - \nabla_{X_k} X_j - [X_j, X_k] \\ &= \Gamma_{j,k}^i X_i - \Gamma_{k,j}^i X_i - c_{j,k}^i X_i, \end{aligned}$$

cioè

$$T^i_{j,k} = \Gamma_{j,k}^i - \Gamma_{k,j}^i - c_{j,k}^i$$

e quindi :

$$\begin{aligned} &(-\omega_h^i \wedge \omega^h + T^i_{h,\ell} \omega^h \wedge \omega^\ell)(X_j, X_k) \\ &= -\omega_k^i(X_j) + \omega_j^i(X_k) + \frac{1}{2} (T^i_{j,k} - T^i_{k,j}) \\ &= -\Gamma_{j,k}^i + \Gamma_{k,j}^i + \frac{1}{2} ((\Gamma_{j,k}^i - \Gamma_{k,j}^i - c_{j,k}^i) - (\Gamma_{k,j}^i - \Gamma_{j,k}^i - c_{k,j}^i)) \\ &= -c_{j,k}^i \end{aligned}$$

e quindi abbiamo verificato la (29.1.10).

Per i coefficienti del tensore di curvatura abbiamo l'espressione:

$$(29.1.12) \quad R^i_{j,h,k} = (X_h \Gamma_{k,j}^i) - (X_k \Gamma_{h,j}^i) + \Gamma_{k,j}^\ell \Gamma_{h,\ell}^i - \Gamma_{h,j}^\ell \Gamma_{k,\ell}^i - c_{h,k}^\ell \Gamma_{\ell,j}^i.$$

A partire dalla formula per le componenti della curvatura, la verifica della (29.1.11) è analoga a quella della (29.1.10). \square

In un riferimento X_1, \dots, X_n su un aperto U di M possiamo associare ai tensori di torsione e di curvatura le *forme di torsione e di curvatura* mediante :

$$(29.1.13) \quad T = \left(\sum_{j,k=1}^m T^i_{j,k} \omega^j \wedge \omega^k \right)_{i=1, \dots, n} \in \Omega^2(U, \mathbb{R}^m),$$

$$(29.1.14) \quad R = \left(\sum_{h,k=1}^m R^i_{j,h,k} \omega^h \wedge \omega^k \right)_{h,k=1, \dots, n} \in \Omega^2(U, \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})),$$

dove, se V è uno spazio vettoriale reale, $\Lambda^p(U, V)$ è lo spazio delle p -forme differenziali alternate a valori in V .

Le equazioni di struttura si scrivono allora utilizzando le forme di torsione e di curvatura mediante¹ :

$$(29.1.15) \quad \begin{cases} d\omega = -\Omega \wedge \omega + \frac{1}{2}T \\ d\Omega = -\Omega \wedge \Omega + \frac{1}{2}R. \end{cases}$$

Supponiamo che il sistema di riferimento X_1, \dots, X_n sia definito su un intorno normale U_p del punto $p \in M$ e consideriamo l'applicazione differenziabile, definita in un intorno aperto V di 0 in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$:

$$(29.1.16) \quad \Phi : V \ni (t; a^1, \dots, a^m) \rightarrow \exp_p(ta^1 X \dots, ta^m X_n) \in U_p.$$

Abbiamo allora, per forme $\bar{\omega}^i, \bar{\omega}_j^i$ definite su V che sono combinazioni lineari a coefficienti \mathcal{C}^∞ di da^1, \dots, da^m :

$$(29.1.17) \quad \begin{cases} \Phi^* \omega^i = a^i dt + \bar{\omega}^i \\ \Phi^* \omega_j^i = \bar{\omega}_j^i \\ 1 \leq i, j \leq n \end{cases}$$

Vale la:

PROPOSIZIONE XXIX.1.2. *Indicando ancora con $T^i_{j,k}$ ed $R^i_{j,h,k}$ i loro rialzamenti a V , le forme $\bar{\omega}^i$ e $\bar{\omega}_j^i$ soddisfano il sistema differenziale:*

$$(29.1.18) \quad \begin{cases} \frac{\partial \bar{\omega}^i}{\partial t} = da^i + a^k \bar{\omega}_k^i + T^i_{h,k} a^h \bar{\omega}^k, & \bar{\omega}^i(0, a^1, \dots, a^m) = 0 \\ \frac{\partial \bar{\omega}_j^i}{\partial t} = R^i_{j,h,k} a^j \bar{\omega}^k, & \bar{\omega}_j^i(0, a^1, \dots, a^m) = 0. \end{cases}$$

In particolare, se il tensore di curvatura è nullo, le forme $\bar{\omega}_j^i$ sono costanti. Se anche la torsione è nulla, l'esponenziale definisce una trasformazione affine di un intorno di 0 in $T_p M$ su un intorno normale di p in M .

XXIX.2. Espressioni locali

In questo paragrafo ricaveremo diverse espressioni locali per il simboli di Christoffel ed i tensori di curvatura per la connessione di Levi-Civita di una metrica Riemanniana g su M .

Espressione in coordinate locali. Siano x^1, \dots, x^m coordinate locali in un aperto U di M e poniamo

$$g_{i,j} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \quad 1 \leq i, j \leq m.$$

¹Si può dare una formulazione intrinseca delle equazioni di struttura definendo forme $\tilde{\omega}, \tilde{\Omega}, \tilde{T}$ ed \tilde{R} sul fibrato principale $\mathfrak{F}(M)$ dei sistemi di riferimento di M .

Per la (6.8.5) i simboli di Christoffel della connessione di Levi-Civita si esprimono in funzione dei coefficienti $g_{i,j}$. Abbiamo infatti

$$2\Gamma_{i,j}^\ell g_{\ell,k} = \frac{\partial g_{j,k}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{i,k}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{i,j}}{\partial x^k}.$$

Indicando con $g^{i,j}$ i coefficienti della matrice inversa della $(g_{i,j})_{i,j=1,\dots,m}$, otteniamo

$$(29.2.1) \quad \Gamma_{i,j}^k = \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^m g^{k,\ell} \left(\frac{\partial g_{j,\ell}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{i,\ell}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{i,j}}{\partial x^\ell} \right).$$

L'assenza di torsione equivale al fatto che i simboli di Christoffel, calcolati in un sistema di coordinate locali, siano simmetrici rispetto ai due indici in basso.

Espressione in un riferimento ortonormale. Sia $(X_1, \dots, X_m) \in \Gamma(U, \mathbf{O}(M))$ un sistema di riferimento ortonormale in un aperto U di M . Poiché le $g(X_i, X_j) = \delta_{i,j}$ sono costanti, i simboli di Christoffel nel riferimento (X_1, \dots, X_m) soddisfano:

$$(29.2.2) \quad \Gamma_{i,j}^k = \frac{1}{2}(c_{i,j}^k + c_{k,i}^j + c_{k,j}^i) = -\Gamma_{i,k}^j, \quad \text{ove } [X_i, X_j] = c_{i,j}^k X_k,$$

e l'uguaglianza $\Gamma_{i,j}^k = -\Gamma_{i,k}^j$ è conseguenza del fatto che i coefficienti $c_{j,k}^i$ sono antisimmetrici rispetto agli indici in basso.

Per scrivere le *forme di Christoffel* utilizziamo il co-riferimento $(\theta^1, \dots, \theta^m)$ associato ad (X_1, \dots, X_m) . Le forme $\theta^1, \dots, \theta^m \in \mathcal{Q}^1(U)$ sono caratterizzate da $\theta^i(X_j) = \delta_j^i$ per $1 \leq i, j \leq m$, di modo che

$$g = \sum_{i=1}^m (\theta^i)^2 = \sum_{i=1}^m \theta^i \otimes \theta^i.$$

La forma di Christoffel $\omega_U = (\omega_k^j)$ è quindi a valori in $\mathfrak{o}(m)$ e le equazioni di struttura danno

$$(29.2.3) \quad \begin{cases} d\theta^i + \sum_{j=1}^m \omega_j^i \wedge \theta^j = 0, \\ d\omega_j^i + \sum_{k=1}^m \omega_k^i \wedge \omega_j^k = \sum_{h,k=1}^m R_{j,h,k}^i \theta^h \wedge \theta^k, \end{cases}$$

ove $\sum_{j,k=1}^m R_{j,h,k}^i \theta^h \wedge \theta^k$ è il tensore di curvatura.

Forma polare. Fissiamo un punto $p_0 \in M$ e sia U un intorno suo intorno normale. Possiamo supporre che, per un $r > 0$,

$$\exp_{p_0} : N_{p_0}(r) = \{x \in T_{p_0}M \mid \|x\|_g < r\} \longrightarrow U$$

sia un diffeomorfismo.

Fissiamo una base ortonormale (e_1, \dots, e_m) in $T_{p_0}M$ e costruiamo una sezione $\sigma_U \in \Gamma(U, \mathbf{O}(M))$ mediante il trasporto parallelo di (e_1, \dots, e_m) lungo le geodetiche:

$$\sigma_U(\exp_{p_0}(x)) = (d\exp_{p_0}(x)(e_1), \dots, d\exp_{p_0}(x)(e_m)).$$

Poniamo poi

$$(29.2.4) \quad \bar{\theta} = (\bar{\theta}^i)_{1 \leq i \leq m} = \sigma_U^* \theta, \quad \bar{\omega} = (\bar{\omega}_j^i)_{1 \leq i, j \leq m} = \sigma_U^* \omega,$$

ove θ ed ω sono, rispettivamente, la forma canonica e la forma di Cartan della connessione di Levi-Civita Γ .

Per calcolare queste forme in modo esplicito, introduciamo coordinate polari in N_0 , ponendo, per le componenti v^i di $v \in T_{p_0}M$,

$$v^i = x^i t, \quad 1 \leq i \leq m, \quad \sum_{i=1}^m (x^i)^2 = 1.$$

LEMMA XXIX.2.1. *Abbiamo:*

$$(29.2.5) \quad \bar{\theta}^i = x^i dt + \phi^i, \quad \text{con } \phi^i \text{ indipendente da } dt,$$

$$(29.2.6) \quad \text{gli } \bar{\omega}_j^i \text{ sono indipendenti da } dt,$$

$$(29.2.7) \quad d\phi^i = -(dx^i + \sum_{j=1}^m \bar{\omega}_j^i x^j) \wedge dt + \dots,$$

$$(29.2.8) \quad d\bar{\omega}_j^i = -\sum_{h,k=1}^m \bar{R}_{j,h,k}^i x^h \phi^k \wedge dt + \dots$$

dove i puntini stanno per forme indipendenti da dt ed $\bar{R}_{j,h,k}^i$ sono le componenti del tensore di curvatura nel riferimento σ_U .

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo la (29.2.5). Per provare che ϕ^i è indipendente da dt è sufficiente verificare che, se $\gamma_x = \exp_{p_0}(tx)$ è la geodetica uscente da p_0 con velocità x , allora $\bar{\theta}^i(\dot{\gamma}_x) = x^i$. Osserviamo che, per la definizione della forma canonica,

$$\theta\left(\frac{d}{dt}\tilde{\gamma}_x\right) = \bar{\theta}(\dot{\gamma}_x) = \tilde{\gamma}_x(t)^{-1}(\dot{\gamma}_x(t)),$$

ove $\tilde{\gamma}_x$ è il rialzamento orizzontale di γ_x a partire dal punto (e_1, \dots, e_m) . Poiché $\tilde{\gamma}_x$ è orizzontale e $\dot{\gamma}_x$ parallelo lungo γ_x , ne segue che $\bar{\theta}(\dot{\gamma}_x)$ è costante. Il suo valore in 0 è x e dunque $\bar{\theta}^i(\dot{\gamma}_x) = x^i$ per ogni t .

Poiché $\tilde{\gamma}_x$ e $\dot{\gamma}_x$ sono paralleli lungo la geodetica γ_x , abbiamo

$$\bar{\omega}_j^i(\dot{\gamma}_x) = \omega_j^i\left(\frac{d}{dt}\tilde{\gamma}_x\right) = 0,$$

perché $\tilde{\gamma}_x$ è orizzontale, e questo ci dà la (29.2.6).

Poiché la connessione di Levi-Civita ha torsione nulla, abbiamo

$$d\theta = -\omega \wedge \theta.$$

Quindi

$$d\phi^i = -dx^i \wedge dt - d\bar{\theta}^i = -(dx^i + \sum_{j=1}^m \bar{\omega}_j^i x^j) \wedge dt + \dots$$

ove i puntini stanno per una forma indipendente da dt , in quanto

$$d\bar{\theta} = d\sigma_U^* \theta = \sigma_U^* d\theta = -\sigma_U^*(\omega \wedge \theta) = \bar{\omega} \wedge \bar{\theta}$$

e, per le (29.2.5), (29.2.6),

$$\sum_{j=1}^m \bar{\omega}_j^i \wedge \bar{\theta}^j = \sum_{j=1}^m \bar{\omega}_j^i x^j dt + \dots,$$

ove i puntini stanno per una forma indipendente da dt .

Dalle equazioni di struttura, abbiamo

$$d\bar{\theta}^i = d(x^i dt + \phi^i) = \sum_{j=1}^m \bar{\omega}_j^i \wedge (x^j dt + \phi^j),$$

$$d\bar{\omega}_j^i = -\sum_{k=1}^m \bar{\omega}_k^i \wedge \bar{\omega}_j^k + \bar{\Omega}_j^i,$$

ove

$$\bar{\Omega}_j^i = \sum_{h,k=1}^m \bar{R}_{j,h,k}^i \bar{\theta}^h \wedge \bar{\theta}^k,$$

da cui sostituendo l'espressione di θ^i in (29.2.5) si ottiene la (29.2.8). \square

PROPOSIZIONE XXIX.2.2. *Abbiamo, per il tensore della metrica, l'espressione*

$$(29.2.9) \quad g = dt \otimes dt + \sum_{i=1}^m \phi^i \otimes \phi^i.$$

DIMOSTRAZIONE. Poiché σ_U è un riferimento ortonormale, abbiamo

$$g = \sum_{i=1}^m \bar{\theta}^i \otimes \bar{\theta}^i.$$

Da questa risulta

$$g = dt \otimes dt + \sum_{i=1}^m \phi^i \otimes \phi^i + \sum_{i,j=1}^m x^i (\phi^i \otimes dt + dt \otimes \phi^i).$$

Dobbiamo verificare che l'ultima sommatoria a secondo membro è nulla. Poiché $\phi^i = 0$ in p_0 , basterà dimostrare che la forma $\sum_{i=1}^m x^i \phi^i$ è indipendente da t . Abbiamo

$$\begin{aligned} d\left(\sum_{i=1}^m x^i \phi^i\right) &= -\sum_{i=1}^m x^i d\phi^i \\ &= \sum_{i=1}^m x^i (dx^i + \sum_{j=1}^m \bar{\omega}_j^i x^j) \wedge dt + \dots, \end{aligned}$$

dove al solito i puntini indicano una forma indipendente da dt . Abbiamo $\sum_{i,j} \bar{\omega}_j^i x^i x^j = 0$ perché la matrice $\bar{\omega}_j^i$ è antisimmetrica. Poi, da $\sum_{j=1}^m |x^j|^2 = 1$ abbiamo $\sum_{j=1}^m x^j dx^j = 0$. Quindi il differenziale della forma $\eta = \sum_{i=1}^m x^i \phi^i$ è indipendente da dt e, dal momento che η non contiene dt , ciò significa che la forma è costante rispetto a t . Questo completa la dimostrazione. \square

XXIX.3. Forme e simboli di Christoffel

Supponiamo fissata su M una connessione lineare Γ , con forma di Cartan ω .

XXIX.3.1. Forme di Christoffel. Ad un atlante di trivializzazione $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \sigma_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ di $L(M)$ sono associate le *forme di Christoffel*²

$$(29.3.1) \quad \omega_\alpha = \sigma_\alpha^* \omega \in \Omega^2(U_\alpha, \mathfrak{gl}_m(\mathbb{R}))$$

PROPOSIZIONE XXIX.3.1. *Abbiamo:*

$$(29.3.2) \quad \nabla_X Y = \sigma_\alpha(X(\sigma_\alpha^{-1} Y) + \omega_\alpha(X)(\sigma_\alpha^{-1} Y)) \quad \text{su } U_\alpha, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

²Vedi il §IV.6 del Capitolo IV

XXIX.3.2. Espressioni dei simboli di Christoffel in coordinate locali. Ad una carta locale (U, x) di M , con $x = (x^1, \dots, x^m)$, associamo il sistema di riferimento $(\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^m)$.

La corrispondente trivializzazione locale di $L(M)$ su U fa corrispondere ad un riferimento $\sigma = (X_1, \dots, X_m)$ la matrice $(x_j^i) \in \mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$ per cui

$$X_j = \sum_{i=1}^m x_j^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad j = 1, \dots, m.$$

Indichiamo con (X^i) l'inversa della matrice (x_j^i) . Abbiamo cioè

$$\sum_{h=1}^m x_h^i X^j = \delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Siano e_1, \dots, e_m i vettori della base canonica di \mathbb{R}^m .

LEMMA XXIX.3.2. *La forma canonica $\theta \in \Omega^1(L(M), \mathbb{R}^m)$ si esprime nelle coordinate locali mediante*

$$(29.3.3) \quad \theta = \sum \theta^i e_i, \quad \text{con } \theta^i = \sum_{j=1}^m X_j^i dx^j. \quad \square$$

Indichiamo con E_j^i la base canonica di $\mathfrak{gl}_m(\mathbb{R})$. La E_j^i è la matrice il cui unico coefficiente diverso da 0, ed uguale ad 1, è quello della i -esima riga e j -esima colonna.

La forma di Cartan della connessione lineare Γ si scrive nella forma

$$(29.3.4) \quad \omega = \sum_{i,j=1}^m \omega_j^i E_i^j, \quad \text{con } \omega_j^i \in \Omega^1(\mathbb{L}_U).$$

Consideriamo $\sigma_U = (\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^m)$ come una sezione di $\Gamma(U, L(M))$, e consideriamo la relativa forma di Christoffel $\omega_U = \sigma_U^* \omega \in \Omega(U, \mathfrak{gl}_m(\mathbb{R}))$. Essa definisce m^3 funzioni $\Gamma_{j,k}^i$ su U , tali che

$$(29.3.5) \quad \omega_U = \sum_{i,k=1}^m \left(\sum_{j=1}^m \Gamma_{j,k}^i dx^j \right) E_i^k.$$

DEFINIZIONE XXIX.3.3. Le funzioni $\Gamma_{j,k}^i \in \mathcal{C}^\infty(U)$ si dicono le *componenti dei simboli di Christoffel* di Γ nella carta locale x^1, \dots, x^m .

Le equazioni di gauge danno per i simboli di Christoffel

PROPOSIZIONE XXIX.3.4. *Se $\bar{\Gamma}_{\beta,\gamma}^\alpha$ sono i simboli di Christoffel di Γ in un'altra carta locale y^1, \dots, y^m su U , abbiamo*

$$(29.3.6) \quad \bar{\Gamma}_{\beta,\gamma}^\alpha = \sum_{i,j,k=1}^m \Gamma_{j,k}^i \frac{\partial x^j}{\partial y^\beta} \frac{\partial x^k}{\partial y^\gamma} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 x^i}{\partial y^\beta \partial y^\gamma} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}. \quad \square$$

La forma di Cartan della connessione Γ si esprime anch'essa per mezzo dei simboli di Christoffel. Abbiamo infatti

PROPOSIZIONE XXIX.3.5. *La forma di Cartan della connessione Γ si esprime, nelle coordinate locali (x^i, x^j) , mediante*

$$(29.3.7) \quad \omega = \sum_{i,j=1}^m \omega_j^i E_i^j, \quad \text{con } \omega_j^i = \sum_{k=1}^m X_k^i (dx_j^k + \sum_{h,\ell} \Gamma_{h,\ell}^k x_j^\ell dx^h). \quad \square$$

La derivazione covariante si esprime per mezzo dei simboli di Christoffel:

PROPOSIZIONE XXIX.3.6. *Indicando con ∇_i la derivata covariante rispetto al campo di vettori $\partial/\partial x^i$, abbiamo*

$$(29.3.8) \quad \nabla_i \frac{\partial}{\partial x^j} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^m \Gamma_{i,j}^k \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad \forall i, j = 1, \dots, m. \quad \square$$

DEFINIZIONE XXIX.3.7. Definiamo le componenti $T_{j,h}^i \in \mathcal{C}^\infty(U)$ della torsione ed $R_{j,h,k}^i \in \mathcal{C}^\infty(U)$ della curvatura di Γ rispetto alle coordinate locali x^1, \dots, x^m mediante

$$(29.3.9) \quad T\left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^h}\right) = \sum_{i=1}^m T_{j,h}^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$(29.3.10) \quad R\left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^h}\right) \frac{\partial}{\partial x^k} = \sum_{i=1}^m R_{j,h,k}^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

PROPOSIZIONE XXIX.3.8. *Le componenti della torsione e della curvatura di Γ si esprimono, per mezzo dei simboli di Christoffel in una carta locale x^1, \dots, x^m in $U \subset M$, mediante le formule*

$$(29.3.11) \quad T_{j,h}^i = \Gamma_{j,h}^i - \Gamma_{h,j}^i,$$

$$(29.3.12) \quad R_{j,h,k}^i = \frac{\partial \Gamma_{h,k}^i}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{j,k}^i}{\partial x^h} + \sum_{\ell=1}^m (\Gamma_{j,\ell}^i \Gamma_{h,k}^\ell - \Gamma_{h,\ell}^i \Gamma_{j,k}^\ell).$$

XXIX.3.3. Espressioni rispetto a sistemi di riferimento arbitrari. Un sistema di riferimento (X_1, \dots, X_m) su un aperto U di M determina funzioni $\Gamma_{j,h}^i \in \mathcal{C}^\infty(U)$ tali che

$$(29.3.13) \quad \nabla_{X_i} X_j = \sum_{k=1}^m \Gamma_{i,j}^k X_k \quad \text{per } i, j = 1, \dots, m.$$

DEFINIZIONE XXIX.3.9. I coefficienti $\Gamma_{i,j}^k$ definiti dalla (29.3.13) si dicono i *simboli di Christoffel* di ∇ nel sistema di riferimento (X_1, \dots, X_m) .

Ogni campo di vettori $Y \in \mathfrak{X}(U)$ è combinazione lineare a coefficienti in $\mathcal{C}^\infty(U)$ dei campi del sistema di riferimento:

$$Y = \sum_{i=1}^m \phi^i X_i.$$

Le sue derivate covarianti rispetto ai campi di riferimento X_1, \dots, X_m sono allora:

$$(29.3.14) \quad \nabla_{X_i} Y = \sum_{k=1}^m \left(X_i(\phi^k) + \sum_{j=1}^m \Gamma_{i,j}^k \phi^j \right) X_k.$$

Siano $\bar{\Gamma}_{i,j}^k \in \mathcal{C}^\infty(U)$ i simboli di Christoffel di Γ in un altro riferimento (Y_1, \dots, Y_m) su U . È $Y_i = \sum_{j=1}^m a_i^j X_j$, con $(a_i^j) \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbf{GL}(n, \mathbb{R}))$. Indichiamo con (A_i^j) l'inversa della matrice (a_i^j) .

Vale allora la formula di trasformazione per i simboli di Christoffel:

$$(29.3.15) \quad \bar{\Gamma}_{i,j}^k = \sum_{r,s,t=1}^m \Gamma_{r,s}^t a_i^r a_j^s A_t^k + \sum_{t=1}^m A_t^k Y_i(a_j^t) \quad \text{per } i, j, k = 1, \dots, m.$$

Se $X_i = \partial/\partial x^i$ e $Y_i = \partial/\partial y^i$ questa formula si riduce alla (29.3.6); infatti le matrici (a_j^i) ed (A_j^i) sono in questo caso gli Jacobiani dei cambiamenti di coordinate.

Un diffeomorfismo $\Phi : M \rightarrow M$ definisce un isomorfismo $\Phi_* : \mathfrak{X}(M) \ni X \rightarrow X^\Phi \in \mathfrak{X}(M)$ che fa corrispondere ad un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$ il campo di vettori

$$X^\Phi(p) = d\Phi_{\Phi^{-1}(p)}(X_{\Phi^{-1}(p)}) \quad \text{per ogni } p \in M.$$

Il pullback di Γ mediante Φ è una nuova connessione lineare Γ^Φ su M . La corrispondente derivazione covariante ∇^Φ è definita da

$$(29.3.16) \quad \nabla_X^\Phi Y = \left(\nabla_{X^\Phi} Y^\Phi \right)^{\Phi^{-1}} \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

PROPOSIZIONE XXIX.3.10. *Un diffeomorfismo $\Phi : M \rightarrow M$ è una trasformazione affine per la connessione ∇ se $\nabla^\Phi = \nabla$.*