March 24, 2014

TGBD(2) - TRIANGOLAZIONI E DECOMPOSIZIONI IN MANICI

La categoria delle *varietà poliedrali* (PL) è in qualche modo intermedia tra TOP e DIFF. Ci limiteremo a richiamarne alcuni aspetti.

1. Complessi simpliciali, poliedri, applicazioni e varietà poliedrali

Un n-*simplesso geometrico* $\Delta(X)$ in $\mathbb{R}^s$ $(s \geq n)$ è l'inviluppo convesso di un insieme di $n+1$ punti X (non ordinati) affinemente indipendenti. In altre parole $\Delta(X)$ è formato dalle combinazioni affini $\sum_{x\in X} t_x x$ tali che $\sum_{x\in X} t_x = 1$ e per ogni x, $0 \leq t_x \leq 1$. Un n-*simplesso combinatorio* è un n-*simplesso geometrico* $\Delta(X)$ dove i punti di $X = \{x_0, \dots, x_n\}$ sono ordinati. Lo n-*simplesso combinatorio standard* è $\Delta_n = \Delta(\{e_0, \dots, e_n\})$ dove gli e_j formano la base standard di $\mathbb{R}^{n+1}$.
La $(n-1)$-*faccia* di $\Delta(X)$ opposta al *vertice* $x \in X$ è lo $(n-1)$-simplesso $\Delta(X \setminus \{x\})$. Se $\Delta(X)$ è combinatorio, anche le sue $(n-1)$-facce lo sono mediante l'ordinamento indotto. Si può iterare la nozione di faccia ottenendo così le k-facce (iterate) di $\Delta(X)$ per ogni $0 \leq k \leq n+1$, dove tutto il simplesso è l'unica faccia di dimensione massima e i vertici sono le 0-facce.
Un *complesso simpliciale geometrico (combinatorio) finito* di dimensione n è una famiglia $\mathcal{K}$ di k-simplessi geometrici (combinatori) di $\mathbb{R}^s$ $(s \geq n)$ tale che

1. $\mathcal{K}$ è chiusa rispetto alle facce iterate.
2. Due simplessi di $\mathcal{K}$ possono intersecarsi solo lungo una faccia (iterata) in comune (nel caso combinatorio anche gli ordinamenti devono coincidere).
3. n è la dimensione massima al variare dei simplessi di $\mathcal{K}$.

Dato un complesso (non staremo a specificare se geometrico o combinatorio) $\mathcal{K}$, l'unione dei suoi simplessi $|\mathcal{K}|$ è detto il *supporto* di $\mathcal{K}$ ed eredita la struttura topologica "lineare a pezzi" di $\mathbb{R}^s$. Diciamo che $\mathcal{K}$ ha *dimensione pura* n se ogni simplesso di $\mathcal{K}$ è faccia di almeno un n-simplesso di $\mathcal{K}$. Diciamo che il complesso $\mathcal{H}$ suddivide $\mathcal{K}$ (scrivereno $\mathcal{H} \lhd \mathcal{K}$) se hanno lo stesso supporto ($|\mathcal{H}| = |\mathcal{K}|$) e ogni simplesso di $\mathcal{H}$ è contenuto in un simplesso di $\mathcal{K}$. Vale:

Lemma 1.1. *Se $\mathcal{K}$ e $\mathcal{K}'$ hanno lo stesso supporto allora ammettono suddivisioni comuni (esiste $\mathcal{H}$ tale che $\mathcal{H} \lhd \mathcal{K}$ e $\mathcal{H} \lhd \mathcal{K}'$).*

Un *poliedro* (compatto) P è un sottospazio di qualche $\mathbb{R}^s$ per il quale esiste un complesso simpliciale finito $\mathcal{K}$ tale che $P = |\mathcal{K}|$; $\mathcal{K}$ è detta una triangolazione di P. Se $P = |\mathcal{K}|$ e $P' = |\mathcal{K}'|$ sono due poliedri, una applicazione continua $f : P \to P'$ è *simpliciale* rispetto alle triangolazioni date se per ogni simplesso σ di $\mathcal{K}$, $f(\sigma)$ è un simplesso di $\mathcal{K}'$ e la restrizione di f a σ è un'applicazione affine. $f : P \to P'$ si dice *poliedrale* se esistono suddivisioni di $\mathcal{K}$ e $\mathcal{K}'$ rispettivamente, tali che f è simpliciale rispetto a queste triangolazioni più fini. Esiste una naturale nozione di *isomorfismo poliedrale* tra poliedri. Se $P = |\mathcal{K}|$ e $\mathcal{K}$ è un n-complesso, allora ponendo $\dim P = n$ è ben definita la dimensione di P che è un invariante per isomorfismi poliedrali. Analogamente anche la nozione di "dimensione pura" è ben definita per i poliedri.
Una n-*varietà poliedrale chiusa* M è un poliedro di dimensione pura n tale che per ogni $x \in M$ esiste un intorno poliedrale U di x in M tale che la coppia (U, x) è polidralmente isomorfa a (Δ_n, b) dove b indica il baricentro. Esiste una naturale nozione di varietà poliedrale con bordo, dove ora il modello locale intorno ai punti di bordo è (Δ_n, b') dove b' è il baricentro della faccia opposta a e_n. Il bordo di una n-varietà poliedrale è una $(n-1)$-varietà chiusa.

2. Triangolazioni lisce a pezzi

Quindi oltre a TOP e DIFF abbiamo questa categoria di varietà poliedrali PL. Esistono naturali applicazioni di dimenticanza

$$\delta_n : \mathcal{M}_n^{PL} \to \mathcal{M}_n^{TOP}$$

rispetto alle quali porsi problemi analoghi a quelli per le d_n da DIFF a TOP. Lo studio delle relazioni tra DIFF e PL porta a profondi e difficili problemi relativi da una parte all'esistenza e/o unicità di "allisciamenti delle varietà poliedrali" , dall'altra all'esistenza e/o unicità (a meno di isomorfismi poliedrali) di "triangolazioni delle varietà lisce". Al solito le risposte dipendono dalla dimensione. Ci limiteremo a richiamare solo un aspetto relativamente più facile e che vale in ogni dimensione, tenendo fede all'assunto di centralità di DIFF nella nostra discussione.
Sia M una n-varietà liscia compatta. Una *triangolazione liscia a pezzi* di M è un omeomorfismo

$$f : P = |\mathcal{K}| \to M$$

dove $P \subset \mathbb{R}^s$ è una n-varietà poliedrale triangolata dal complesso simpliciale $\mathcal{K}$ e la restrizione di f ad ogni simplesso σ di $\mathcal{K}$ è un embedding liscio in M (cioè è la restrizione a σ di un embedding in M di un intorno aperto di σ nel sottospazio affine di $\mathbb{R}^s$ generato da σ).
Vale il seguente teorema

Proposizione 2.1. *(1) Ogni n-varietà compatta liscia M ammette triangolazione liscie a pezzi.*
(2) Se (P_1, f_1) e (P_2, f_2) sono due triangolazioni lisce a pezzi di M, allora P_1 e P_2 sono isomorfe come varietà poliedrali.

Possiamo dunque dire che ogni varietà liscia compatta ha una struttura canonica (a meno di isomorfismi poliedrali) di varietà poliedrale data appunto dalle triangolazioni lisce a pezzi. Quando sarà utile potremo utilizzare su M argomenti di tipo poliedrale/simpliciale. D'altra parte la natura liscia a pezzi di queste triangolazioni permetterà di applicare all'embedding di $\mathcal{K}$ in M argomenti DIFF, quali per esempio l'esistenza di opportuni sistemi di intorni tubolari della facce.

2.1. **Classi fondamentali simpliciali.** Un esempio di quanto detto prima è la possibilità di trattare le classi fondamentali di M nel contesto dell'omologia simpliciale. Supponiamo per esempio che M sia compatta chiusa orientata di classe fondamentale $[M]$. Fissiamo una triangolazione liscia a pezzi $f : |\mathcal{K}| \to M$, richiedendo che $\mathcal{K}$ sia combinatorio. Dunque ogni n-simplesso σ di $\mathcal{K}$ ha i vertici orientati. Questo permette di associare alla triangolazione n catene della forma

$$C = \sum_\sigma \epsilon_\sigma f \circ p_\sigma$$

dove ogni $\epsilon_\sigma = \pm 1$ è un segno e $p_\sigma : \Delta_n \to \sigma$ è la parametrizzazione affine che manda vertici in vertici rispettando l'ordine. Allora esiste un'unica distribuzione di segni per cui C è un ciclo e $[C] = [M]$. Infatti, considerando ogni n-simplesso embedded in M, il corrispondente segno "giusto" è uguale a 1 se e solo se l'orientazione del simplesso indotta da quella di M e l'orientazione associata all'ordine dei vertici coincidono.

3. Decomposizione in manici

Data una n-varietà liscia compatta con bordo $(M, \partial M)$ sappiamo cosa vuol dire attaccare un manico di indice λ a M lungo ∂M. Il risultato è una nuova varietà $(M', \partial M')$ ben definita a meno di diffeomorfismi. Sia ora M liscia compatta e chiusa. Allora una *decomposizione in manici di M* significa ottenere M (a meno di diffeomorfismi) in modo induttivo nel modo seguente: si parte con $((M_0, \partial M_0)$ formata da un numero finito di 0-manici, cioè di n-palle chiuse. Si avrà poi una sequenza finita di varietà $(M_j, \partial M_j)$, $0 \leq j \leq k$ che termina con $(M_k, \partial M_k) \simeq (M, \emptyset)$ e tale che $(M_{j+1}, \partial M_{j+1})$ si ottiene attaccando un manico di indice λ_j a $(M_j, \partial M_j)$ lungo $\partial M_j)$. Si noti che non ci sono restrizioni su ogni indice λ_j. Ci sono varianti di questa nozione. La più generaleù è la seguente. Supponiamo che M abbia bordo che organizziamo nella forma $\partial M = V_0 \cup V_1$, dove ogni V_j è unione di componenti connesse del bordo. Allora una decomposizione in manici di (M, V_0) inizia con $(V_0 \times [0,1], V_0 \times \{0,1\})$, ed è formalmente come prima, con la differenza che termina con $(M, \partial M)$ e gli attaccamenti non toccano mai $V_0 \times \{0\}$. Vale

Proposizione 3.1. *Ogni varietà compatta liscia (per semplicità chiusa) ammette decomposizioni in manici.*

Dim. **(Cenni.)** Ci sono due modi di ottenere questo risultato. Uno consiste nel considerare una triangolazione liscia a pezzi $\mathcal{K}$ embedded in M. Questa porta una naturale struttura di CW complesso di M in cui le 0-celle sono i vertici, le 1-celle sono gli 1-simplessi ecc. con le evidenti funzioni di attaccamento. Allora una decomposizione in manici si ottiene ingrassando in modo induttivo le celle di questo CW complesso per mezzo di un opportuno sistema di intorni tubolari. Quindi si partirà con un sistema di intorni tubolari dei vertici, cioè con una famiglia finita di n-palle. L'intersezione degli 1-simplessi con il complementare delle palle aperte produce una 1 sottovarietà propria e possiamo considerare un sistema di intorni tubolari che si incollano sui bordi delle n-palle, ecc. Si noti che in questo modo i manici di un dato indice si attaccano simultamemente e gli indici dei manici sono crescenti.
Un altro approccio è via le funzioni di Morse; la teoria di Morse associa ad ogni funzione di Morse generica f (cioè con punti critici che prendono valori distinti) una decomposizione in manici tale che ogni punto critico di indice λ "porta" un λ-manico. I manici si attaccano successivamente per valori critici crescenti and ogni passaggio attraverso un valore critico. In DIFF cè in effetti una sorta di "dizionario fedele" tra teoria di Morse e la teoria delle decomposizioni in manici (si vedano per esempio i due libri di Milnor [Morse theory] e [Lectures on h-cobordism].

□

Adotteremo prevalentemente l'approccio via decomposizioni in manici (accettando di avere giustificato che ne esistono). Un vantaggio è per esempio che molti aspetti di questo approccio valgono sostanzialmente "verbatim" anche nel contesto delle varietà poliedrali.

Ogni decomposizione in manici ammette una *decomposizione duale* in cui i manici si attaccano nell'ordine inverso, ogni k-manico "diventa" un $n-k$ manico, ogni cuore diventa un cocuore ecc. In termini di funzioni di Morse, questo equivale a scambiare f con $-f$.

Una decomposizione in manici si dice *ordinata* se i manici si attaccano con valori degli indici non decrescenti. Ad ogni decomposizione in manici ordinata è associato un CW complesso omotopicamente equivalente alla varietà; in un certo senso si tratta dell'operazione inversa mediante la quale abbiamo ingrassato il CW complesso naturalmente associato ad una triangolazione per ottenere una decomposizione in manici. In generale Le celle del CW complesso saranno i cuori dei manici della decomposizione, le funzioni di attaccamento (nei due contesti sono compatibili) e l' equivalenza di omotopia è ottenuta combinando le retrazioni dei manici sui rispettivi cuori.

Modificazioni delle decomposizioni in manici. Ci sono due modi di modificare una data decomposizione in manici (senza modificare il risultato finale a meno di diffeomorfismi).

- **(Scivolamento dei manici)**. Questo significa che al momento di attaccare un manico H_k possiamo modificare l'applicazione di incollamento dell' a-tubo a meno di isotopia.
- **Cancellazione o inserimento di coppie di manici geometricamente complementari**. Supponiamo che nella decomposizione in manici si attaccano successivamente due manici del tipo $\dots H_k \cup H_{k+1} \dots$. Allora la b-sfera di H_k e la a-sfera di H_{k+1} sono sottovarietà del bordo della varietà ottenuta attaccando i manici fino a H_k (incluso) e hanno dimensioni complementari. Diciamo allora che i due manici sono *geometricamente complementari* se le due sfere si intersecano trasversalmente esattamente in un solo punto. Si realizza (non è completamente banale) che attaccare complessivamente $(H_k \cup H_{k+1})$ lungo il bordo della varietà ottenuta attaccando i manici fino a H_{k-1} produce lo stesso risultato di attaccare una n-palla D^n mediante un embedding di un disco $D^{n-1} \subset \partial D^n$. Quindi l'attaccamento del complesso dei due manici non modifica niente (a meno di diffeomorfismi) e i due manici geometricamente complementari possono essere eliminati dalla decomposizione in manici di M. In modo inverso possiamo sempre inserire in una decomposizione coppie di manici geometricamente complementari.

La combinazione di queste due manipolazioni definisce una relazione di equivalenza sulle decomposizioni in manici di una data varietà M; esse sono lo strumento principale per "semplificare" o "arrangiare" (rispetto a scopi che possono variare caso per caso) queste decomposizioni. Per esempio valgono i seguenti risultati:

Data una decomposizione in manici di M (compatta chiusa) a meno di scivolamenti di manici possiamo "riordinare" la decomposizione in modo che i manici si attacchino secondo indici non decrescenti. Possiamo anche ottenere che i manici di un dato indice si attacchino simultaneamente su zone di attaccamento disgiunte.

L'idea della dimostrazione è la seguente: a meno di isotopia possiamo supporre che la b-sfera e la a-sfera rispettivamente di due manici successivi siamo trasverse (nel bordo di cui sono entrambe sottovarietà). Dati due manici attaccati l'uno dopo l'altro, se l'indice del secondo è minore o uguale di quello del primo, allora le due sfere in questione sono disgiunte. Dunque il tubo di attaccamento intorno alla a-sfera è contenuto nel complementare di un intorno tubolare della b-sfera. Usando l'unicità a meno di isotopia degli intorni tubolari, possiamo far scivolare la zona di attaccamento intorno alla a-sfera fuori del b-tubo del primo manico.

Ogni n-varietà M compatta e chiusa ammette decomposizioni in manici con un solo 0 manico e un solo n-manico.

Partendo da una decomposizione ben ordinata, possiamo eliminare un certo numero di coppie $H_0 \cup H_1$ di manici geometricamente complementari, rimanendo con un solo H_0. Per trattare gli n-manici basta considerare la decomposizione duale. Per esempio in ogni dimensione ≤ 4 la sfera S^4 è l'unica varietà liscia che ammette una decomposizione con solo due manici (vedi la discussione in [TGBD(1)] sulle sfere torte.
In dimensione 3, prendendo una decomposizione ordinata con un solo 0 (risp. 3) manico otteniamo una presentazione di ogni 3-varietà compatta chiusa e orientabile come ottenuta per mezzo di incollamento lungo il bordo di due corpi con manici ottenuti l'uno attaccando simultaneamene 1-manici all'unico 0-manico, l'altro in modo analogo lavorando con la decomposizione duale. Tale presentazione di ogni varietà chiusa e orientabile è detto uno *spezzamento di Heegaard*.
Un altro caso particolarmente importate in dimensione bassa è l'attacamento di 2-manici $D^2 \times D^2$ in dimensione 4 (contesto orientato). Descriviamo in particolare come cambia il bordo 3-dimensionale ∂M di M dopo avere attaccato un tale 2-manico. La zona di attaccamento e data da un intorno tubolare banalizzato $U \simeq D^2 \times S^1$ di un nodo K in ∂M. Tale banalizzazione determina una longitudine γ parallela a K sul bordo di U. Per ottenere il nuovo bordo $\partial M'$, si rimuove la parte interna di U e si attacca lungo il bordo torico così ottenuto il toro solido $S^1 \times D^2$ per mezzo della restrizione della funzione di attaccamento del manico; questa invia un meridiano $\{p\} \times S^1$ sulla longitudine γ. Il bordo $\partial M'$ della 4-varietà ottenuta per attaccamento di un 2-manico si dice allora ottenuto da ∂M per *chirurgia di Dehn longitudinale*.
Esercizi. Se K è un nodo che borda un 2-disco in una carta di ∂M, allora K ha una longitudine privilegiata γ_0 data da un collare di K nel disco. Ogni altra longitudine γ_n è classificata a meno di isotopia da un intero n, cioè il suo numero di allacciamento con K.
(1) Mostrare che se la longitudine associata all'attaccamento di un 2-manico lungo K è $\gamma_{\pm 1}$, allora $\partial M'$ è diffeomorfa a ∂M, mentre $M' = M \# \pm \mathbb{C}P^2$.
(2) Mostrare che se la longitudine è γ_0 allora $\partial M' = \partial M \#(S^1 \times S^2)$.
(3) Mostrare che se ∂M è connesso e si attacca un 1-manico (contesto orientato) allora $\partial M' = \partial M \#(S^1 \times S^2)$.

Un corollario delle osservazioni precedenti è il seguente:

Corollario 3.2. *Una 3-varietà orientabile connessa V è il bordo di una 4 varietà orientabile se e solo se V è il bordo di una 4-varietà ottenuta attaccando 2-manici disgiunti alla 4-palla D^4 (quindi se e solo se V si ottiene via un sistema di chirurgie longitudinali lungo le componenti di un link in S^3).*

Dim. Una implicazione è evidente. Viceversa, sia $\partial W = V$. Possiamo supporre che W è connessa. Consideriamo una decomposizione in manici ordinata di W con un solo 0-manico e senza 4-manici. Consideriamo il risultato parziale ottenuto attaccando gli 1-manici. Senza modificare il bordo ottenuto (ma in generale modificando la 4-varietà), usando l'esercizio precedente possiamo barattare ogni 1-manico con un 2-manico. Dunque esiste W', tale che $\partial W' = V$ e W' ammette una decomposizione senza 1-manici. Lavorando in modo analogo con la decomposizione duale, possiamo barattare anche i

3-manici con 2-manici. Dunque alla fine abbiamo ottenuto W" tale che ∂V e che ammette ammette una decomposizione con solo 2-manici.

$\square$