April 16, 2014

(X, G)-SUPERFICI

1. Introduzione

In questa nota consideriamo diversi esempi di (X, G)-superfici. Per semplicità supponiamo che le nostre superfici sono anche orientate, per cui lavoreremo con i corrispondenti gruppi G^+ che preservano l'orientazione.

2. Alcuni modelli 2-dimensionali

I modelli principali che consideriamo sono

- $(X, G^+) = (\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2 \rtimes S0(2, \mathbb{R}))$ cioè il modello della geometria euclidea ("piatta").
- $(X, G^+) = (\mathbb{H}^2, \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2))$ cioè il modello della geometria iperbolica piana (a curvatura negativa costante uguale a -1). Useremo liberamente i diversi modelli del piano iperbolico (disco di Poincaré D^2, semipiano superiore π^+, iperboloide $\mathcal{I}$).

I diversi modelli di $\mathbb{H}^2$ stabiliscono anche collegamenti con altre strutture geometriche (in senso lato) 2 e 3-dimensionali.

• Consideriamo la sfera di Riemann, cioè la retta proiettiva complessa:

$$S^2 = P^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \ .$$

Si può dimostrare che il gruppo delle trasformazioni proiettive di $P^1(\mathbb{C})$ coincidono con il gruppo degli automorfismi complessi (cioè biolomofi) della superficie di Riemann S^2. Inoltre questo gruppo è isomorfo a

$$PGL(2, \mathbb{C}) = PSL(2, \mathbb{C})$$

e la sua azione su

$$P^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

si esprime in forma di *omografia* sulla coordinata z della carta affine $\mathbb{C}$:

$$z \to [A]z := \frac{az + b}{cz + d}$$

dove A è la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

I modelli $X = D^2, \pi^+$ di $\mathbb{H}^2$ possono essere considerati come aperti di $\mathbb{C} \subset S^2$, e risulta che in entrambi i casi

$$\mathrm{Isom}^+(X) = PGL(2, \mathbb{C})_X := \{f \in PGL(2, \mathbb{C});\ f(X) = X\}$$

e si può mostrare che questo gruppo coincide con il gruppo degli automorfismi biolomorfi dell'aperto $X \subset \mathbb{C}$. Si realizza che

$$PGL(2, \mathbb{C})_{\pi^+} = PSL(2, \mathbb{R}) \ .$$

In questo modo abbiamo stabilito un legame tra la geometria iperbolica e la geometria olomorfa di una variabile complessa (a volte detta anche *geometria conforme*).

Inoltre, via l'inclusione dei gruppi di trasformazioni, una struttura di $(\mathbb{H}^2, \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2))$-varietà su una qualsiasi superficie S può essere interpretata come un caso particolare di struttura di $(P^1(\mathbb{C}), PGL(2, \mathbb{C}))$-varietà.

Identificando $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$ come al solito ($z = x + iy$), si vede che il gruppo delle isometrie euclidee dirette $\mathbb{R}^2 \rtimes S0(2, \mathbb{R})$ agisce su $\mathbb{C}$ via trasformazioni della forma

$$z \to az + b;\ a, b \in \mathbb{C},\ |a| = 1 \ .$$

Identificando $\mathbb{C}$ con la carta affine di $P^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, si realizza che $\mathbb{R}^2 \rtimes S0(2, \mathbb{R})$ è un sottogruppo del gruppo

$$PGL(2, \mathbb{C})_{\mathbb{C}} = \{f \in PGL(2, \mathbb{C});\ f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}\}$$

delle traformazioni proiettive (omografie) che lasciano $\mathbb{C}$ invariante che corrispondono a matrici invertibili della forma
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
e che in ultima analisi non è altro che il gruppo delle trasformazioni affini complesse di $\mathbb{C}$, $\mathrm{Aff}(\mathbb{C})$. Si può dimostrare anche in questo caso che $\mathrm{Aff}(\mathbb{C})$ coincide con il gruppo degli automorfismi biolomorfi di $\mathbb{C}$.
Dunque ogni struttura localmente euclidea su una qualsiasi superficie S può essere considerata come una particolare $(\mathbb{C}, \mathrm{Aff}(\mathbb{C}))$-struttura.

• Se consideriamo il modello dell'iperboloide $\mathcal{I}$ di $\mathbb{H}^2$, si ha un legame diretto tra la geometria iperbolica e la geometria Lorentziana $2+1$ "piatta" che ha come modello lo spazio di Minkowski
$$(M^{2+1}, \mathbb{R}^3 \rtimes SO(2,1,\mathbb{R}))$$
dove $\mathbb{R}^3 \rtimes SO(2,1,\mathbb{R}))$ è il sottogruppo del gruppo delle trasformazioni affini
$$\mathrm{Aff}^+(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^3 \rtimes GL^+(3,\mathbb{R})$$
detto *gruppo di Lorentz/Poincaré*. Risulta che
$$\mathrm{Isom}^+(\mathcal{I}) = (\mathbb{R}^3 \rtimes SO(2,1,\mathbb{R}))_{\mathcal{I}} \ .$$

2.1. **Sul teorema di uniformizzazione.** Prima abbiamo stabilito un legame tra la geometria piatta o iperbolica in due dimensioni con la geometria olomorfa (conforme). Questo vale anche per la geometria sferica $(S^2, \mathrm{Isom}^+(S^2))$. Infatti il gruppo delle isometrie dirette della sfera unitaria $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ è uguale a
$$\mathrm{Isom}^+(S^2) = SO(3,\mathbb{R})_{S^2}$$
e questo è in modo evidente un sottogruppo del gruppo delle trasformazioni proiettive di $S^2 = P^1(\mathbb{C})$. Questo legame è molto profondo come conseguenza del cosiddetto (difficile) *Teorema di uniformizzazione* che ci limitiamo ad enunciare

Teorema 2.1. *Sia X una superficie di Riemann connessa e semplicemente connessa. Allora X è biolomorfa ad uno ed uno solo dei modelli $S^2 = P^1(\mathbb{C})$, D^2, $\mathbb{C}$.*

Consideriamo una superficie di Riemann S (connessa) cioè una 1-varietà complessa con un atlante (massimale) olomorfo. Un suo rivestimento universale
$$p : \tilde{S} \to S$$
è un morfismo localmente biolomorfo, e $\tilde{S}$ è una superficie di Riemann semplicemente connessa, quindi biolomorfa ad uno dei modelli $X = D^2, \mathbb{C}, P^1(\mathbb{C})$. Il gruppo degli automorfismi del rivestimento è allora un sottogruppo Γ del gruppo $G := \mathrm{Aut}(X)$ degli automorfismi biolomorfi di X. Quindi $S = X/\Gamma$. Ma noi sappiamo chi sono questi gruppi di automorfismi . Ne segue che S è rispettivamente (e in modo esclusivo) una
$$(\mathbb{H}^2, \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2)),\ (\mathbb{C}, \mathrm{Aff}(\mathbb{C})),\ (P^1(\mathbb{C}), PGL(2,\mathbb{C}))$$
superficie *completa*. Il discorso può essere invertito, così che:

Abbiamo stabilito una sostanziale equivalenza tra lo studio di queste particolari (X,G)-superfici complete *e lo studio delle superfici di Riemann.*

Questa corrispondenza è particolarmente interessante nel caso della geometria iperbolica e si riflette in molti aspetti specifici di questa geometria che risulta essere completamente determinata dalla misura degli angoli (per esempio due triangoli iperbolici sono congruenti se e solo se hanno gli stessi angoli).

Nel caso euclideo (piatto) passando dalla geometria euclidea a quella conforme dobbiamo ammettere la possibilità di *riscalare* la metrica (triangoli euclidei simili non sono congruenti). Questo corrisponde proprio all'estensione del gruppo delle isometrie euclidee piane al gruppo di tutte le trasformazioni affini complesse di $\mathbb{C}$.

Considerazioni topologiche permettono di concludere che S^2 è la sola superficie di Riemann che ammette S^2 come rivestimento universale e che quindi S^2 è la sola superficie orientabile che ammette una geometria localmente sferica.

Segnaliamo infine che l' "equivalenza" tra i diversi tipi di struttura determinata dal teorema di uniformizzazione è in buona misura *implicita*, cioè è spesso difficile o non noto come tradurre fenomeni che si manifestano in un contesto (per esempio quello conforme) in un altro contesto in linea di principio equivalente (per esempio quello della geometria iperbolica).

3. (X, G)-SUPERFICI COMPLETE

Ci concentreremo sui modelli $(X, G) = (\mathbb{H}^2, \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2))$ e $(X, G) = (\mathbb{C}, \mathrm{Aff}(\mathbb{C}))$ che alla luce della discussione precedente è l'estensione conforme della geometria euclidea. Allora ogni (X, G)-superficie completa S è della forma X/Γ dove Γ è isomorfo al gruppo fondamentale di S, ed agisce su X in modo libero e con orbite discrete. Analizziamo intanto chi sono gli elementi di G che non hanno punti fissi su X.

• Se $G = \mathrm{Aff}(\mathbb{C})$, $z = az + b$, se e solo se $(1 - a)z = b$. Quindi non ci sono punti fissi se e solo se $a = 1$, cioè la trasformazione è una traslazione. Dunque Γ come sopra è necessariamente un gruppo di traslazioni, in particolare è commutativo. Nel caso elementare in cui G è ciclico generato da una sola traslazione τ, a meno di coniugazione con elementi di G, possiamo supporre che $\tau(z) = z + 1$. Dunque $\mathbb{C}/G = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$ è un cilindro piatto di area infinita. In effetti tutti i semicilindri intorno a $\pm\infty$ sono di area infinita. Un "dominio fondamentale" per l'azione di G su $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ è una striscia del tipo $[x_0, x_0 + 1) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$.

• Se $G = \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$, allora $g \in G$ ha un punto fisso su $\mathbb{H}^2$ se e solo se g è di tipo ellittico. Se G è generato da un unico elemento di tipo parabolico τ, a meno di coniugazioni con elementi di G, possiamo supporre che, nel modello π^+, $\tau(z) = z + 1$. Quindi π^+/G è ancora topologicamente un cilindro $\simeq S^1 \times \mathbb{R}$. Questo è "laminato" da geodetiche complete asintotiche all'infinito in un punto "cuspidale". L'area totale è infinita, mentre ogni semicilindro intorno al punto cuspidale è di area finita, il complementare è a forma di "tromba infinita". Un "dominio fondamentale" per l'azione di G su $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ è una striscia del tipo $[x_0, x_0 + 1) \times \mathbb{R}^+ \subset \pi^+$. Se G è generato da un unico elemento di tipo iperbolico τ, a meno di coniugazioni con elementi di G, possiamo supporre che, nel modello π^+, $\tau(z) = \lambda z$, per qualche $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Quindi la geodetica r invariante per τ è la semiretta verticale che ha punti all'infinito $0, \infty$. G agisce su r come una traslazione di spostamento uguale a $|\log(\lambda)|$ Un dominio fondamentale D per l'azione di G su π^+ si ottiene nel modo seguente: si considerino due punti $x_0, x_1 := \tau(x_0)$ su r. Per ogni $x \in [x_0, x_1) \subset r$, sia r_x la geodetica passanti per x e ortogonale a r. Allora $D = \cup_x r_x$. L'immagine di r in π^+/G è una geodetica semplice e chiusa σ di lunghezza $|\log(\lambda)|$. π^+/G è ancora topologicamente un cilindro $\simeq S^1 \times \mathbb{R}$, con entrambi i semicilindri $\pi^+/G \setminus \sigma$ a forma di tromba infinita.

3.1. **Superfici compatte (e non).** Abbiamo visto che Il toro $T \simeq S^1 \times S^1$ ammette strutture euclidee e quindi $(\mathbb{C}, \mathrm{Aff}(\mathbb{C}))$-strutture. L'esempio base è $\mathbb{C}/\Gamma$ dove $\Gamma \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ è generato dalle due traslazioni $z \to z + 1$, $z \to z + i$.

Abbiamo visto che ogni superficie di genere $g \geq 2$ (quindi di caratteristica $\chi < 0$) $T_g = \#_g T$, ammette strutture iperboliche. Un modo di costruire un esempio è condiderare nel modello del disco di Poincaré D^2 un $4g$-gono geodetico regolare con somma degli angoli interni uguale a 2π ed eseguire le identificazioni delle coppie di lati che producono (topologicamente) T_g per mezzo di elementi di $\mathrm{Isom}^+(D^2)$. Un altro modo è fissare una *decomposizione in* $2(g - 1)$ *pantaloni* di T_g per mezzo di un sistema di $3(g - 1)$ curve semplici disgiunte su T_g. Fissare poi un altro sistema di curve semplici che suddivide ogni pantalone in due esagoni. Dunque T_g si può ottenere (topologicamente) incollando lungo coppie di lati un sistema di mattonelle esagonali. Si osserva che in ogni vertice di questa pavimentazione incidono esattamente quattro mattonelle. Si considerano allora $4(g - 1)$ copie dell'esagono iperbolico geodetico regolare ad *angoli retti* e si eseguono le identificazioni dei lati per mezzo di isometrie iperboliche.

Come conseguenza della formula di Gauss-Bonnet per le strutture iperboliche o euclidee su superfici compatte, sappiamo anche che T non ammette strutture iperboliche mentre T_g non ammette strutture piatte. Riotteniamo questo risultato (ed altre informazioni) ragionando sui rispettivi gruppi di isometrie.

• Se $S = \mathbb{H}^2/\Gamma$ è una superficie iperbolica compatta allora ogni $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \neq 1$, è di tipo iperbolico. Infatti per compattezza abbiamo che esiste un $r > 0$ tale che per ogni $x \in S$ la palla $B(x, r) \subset S$ è isometrica alla palla $B(0, r) \subset \mathbb{H}^2$. Se γ fosse di tipo parabolico esisterebbe $x \in \mathbb{H}^2$ tale che la distanza tra x e γx sarebbe $< r/3$. Allora la proiezione in S dell'arco geodetico di $\mathbb{H}^2$ che unisce x e γx sarebbe un laccio in S tutto contenuto in una palla contraibile e questo non è possibile perché $\gamma \neq 1$.

• Siano $g \neq g'$ due isometrie di tipo iperbolico tali che $gg' = g'g$. Sia r la geodetica invariante per g. Allora $g'g(r) = g'(r) = gg'(r)$. Quindi $g'(r)$ è una geodetica invariante per g, quindi necessariamente $g'(r) = r$. Ne segue che poiché commutano, g e g' hanno la stessa geodetica invariante e la restrizione dell'azione su r è data da due traslazioni $t \to t + a$, $t \to t + b$ $a \neq b \in \mathbb{R}$, cioè $b = \alpha a$, $\alpha \neq 1$. Se $\alpha = p/q$ è razionale, allora $qg' = pg$ e non possono generare un sottogruppo isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Se α è irrazionale l'azione del gruppo generato su r non ha orbite discrete.

• Combinando le osservazioni precedenti si ha che se $S = \mathbb{H}^2/\Gamma$ è compatta, allora Γ (quindi il gruppo fondamentale di S) non è commutativo, anzi più precisamente il suo centro è banale $Z(\Gamma) = \{1\}$.

• Se $S = \mathbb{H}^2/\Gamma$ non è compatta possono essere presenti in Γ sia elementi di tipo parabolico sia di tipo iperbolico. Per esempio $S = T \setminus \{\text{punto}\}$ ha gruppo fondamentale $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. Una struttura iperbolica completa su S si ottiene incollando due a due i lati opposti di un quadrilatelo iperbolico geodetico ideale (cioè con tutti i 4 vertici all'infinito) mediante isometrie iperboliche. In questo modo si ottiene $S = \mathbb{H}^2/\Gamma$ dove Γ è generato da due isometrie di tipo iperbolico e contiene un elemento di tipo parabolico (corrispondente ad un laccio che circonda la cuspide di S).

4. Spazi di parametri per le (X, G)-superfici

Vogliamo capire intanto come sono fatte tutte le $(\mathbb{C}, \mathrm{Aff}(\mathbb{C}))$ strutture sul toro T. Fissiamo un sistema ausiliario di generatori γ_1, γ_2 del gruppo fondamentale, che è isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Per ogni struttura completa $S = \mathbb{C}/\Gamma$, γ_1, γ_2 generano il gruppo di traslazioni Γ. Usando argomenti simili ai precedenti si realizza che i vettori di traslazione devono essere $\mathbb{R}$-linearmente indipendenti. A meno di coniugazione per elementi di $\mathrm{Aff}(\mathbb{C})$, possiamo assumere che $\gamma_1(z) = z + 1$, $\gamma_2(z) = z + w$, dove $w \in \pi^+$. Quindi avendo fissato l'insieme di generatori del gruppo fondamentale ogni struttura su T è individuata univocamente da un elemento del semipiano superiore. Cosa succede se cambiamo la scelta dell'insieme dei generatori? Si realizza che un tale "cambiamento di base" su $\mathbb{Z}^2$ è determinato da una matrice $A \in SL(2, \mathbb{Z})$, per cui $(\gamma_1, \gamma_2) = A(\gamma_1', \gamma_2')$. Ne segue che i rispettivi parametri delle strutture su T sono legati dalla trasformazione di π^+ data dall'omografia

$$w' = \frac{aw + b}{cw + d} .$$

In altre parole, lo "spazio dei parametri" delle $(\mathbb{C}, \mathrm{Aff}(\mathbb{C}))$-strutture sul toro T ha in modo naturale una struttura di superficie iperbolica; ogni scelta di generatori del gruppo fondamentale determina una carta (a valori l'intero semipiano superiore) di un $(\pi^+, PSL(2, \mathbb{R}))$ atlante, il cambiamento di carta è espresso per mezzo di una omografia associata ad una matrice in $SL(2, \mathbb{Z})$. Prendendo il corrispondente atlante massimale, si realizza facilmente che si tratta proprio dello stesso piano iperbolico $\mathbb{H}^2$. D'altra parte, il gruppo $SL(2, \mathbb{Z})$ agisce su π^+ (in modo non libero ma con orbite discrete) e possiamo considerare il quoziente $\pi^+/SL(2, \mathbb{Z})$ come una sorta di ulteriore spazio di parametri più raffinato. Il primo spazio di parametri è noto come lo spazio di Teichmüller $\tau(T)$ mentre il secondo come lo spazio dei moduli $\mathcal{M}(T)$.

Consideriamo adesso tutte le strutture iperboliche su $S = T_g$, $g \geq 2$. Premettiamo la seguente osservazione. Siano $p : \tilde{S} \to S$ il rivestimento universale di S puntato in x_0 e $[\alpha] \in \pi_1(S, x_0)$ che agisce come un automorfismo non banale del rivestimento. Fissiamo $y \in \tilde{S}$ e un arco τ che unisce y e $[\alpha]y$. Allora $p \circ \tau$ è un laccio in S puntato in $p(y)$ che è *liberamente omotopo* a α, cioè tramite un'omotopia tra lacci che dimentica i punti base. Supponiamo ora di avere fissato una struttura iperbolica $S = \mathbb{H}^2/\Gamma$. Allora $[\alpha]$ diventa una isometria di tipo iperbolico con un unica geodetica invariante r. Allora, applicando la precedente osservazione, vediamo che la proiezione di r in S è un laccio geodetico γ_α, liberamente omotopo a α.

Invece di fissare un sistema di generatori del gruppo fondamentale come fatto prima nel caso del toro, fissiamo adesso una decomposizione in pantaloni di T_g. Consideriamo il sistema di curve semplici C_i che determinano la decomposizione. Fissato un punto base x_i in ogni curva, un punto base x_0 in T_g e un arco γ_i che unisce x_0 con x_i, otteniamo un sistema di lacci $\gamma_i C_i \bar{\gamma}_i$ che rappresentano elementi $[\alpha_i]$ di $\pi_1(T_g, x_0)$. Applicando ripetutamente l'osservazione precedente otteniamo una famiglia di lacci geodetici γ_i liberamente omotopi agli α_i e quindi alle curve C_i. Vale la seguente

Proposizione 4.1. *Se la famiglia di curve C_i determina una decomposizione in pantaloni di S, allora la famiglia γ_i è formata da curve geodetice semplici chiuse due a due disgiunte in $\mathbb{H}^2/\Gamma$.*

Dunque una volta munita la superficie topologica S (equipaggiata di una fissata decomposizione in pantaloni) di una struttura iperbolica $S = \mathbb{H}^2/\Gamma$, allora

(1) Anche la decomposizione in pantaloni viene realizzata per mezzo di una famiglia di geodetiche semplici e chiuse γ_i.
(2) $S = \mathbb{H}^2/\Gamma$ si ottiene incollando per mezzo di isometrie pantaloni iperbolici con bordo geodetico lungo coppie di geodetiche di bordo di uguale lunghezza.
(3) Le lunghezze l_i delle geodetiche γ_i costituiscono parametri geometrici della struttura iperbolica data.

Si può dimostrare che:

Proposizione 4.2. *(1) Per ogni $3(g-1)$-upla di lunghezze $L = \{l_i\}$ esiste una struttura iperbolica "privilegiata" $S = \mathbb{H}^2/\Gamma^0_L$ tale che per ogni i, l_i è la lunghezza della corrispondente geodetica γ^0_i.*
(2) Per ogni $3(g-1)$-upla di lunghezze $L = \{l_i\}$ e ogni struttura $\mathbb{H}^2/\Gamma$ che realizza tali lunghezze, i due incollamenti di pantaloni lungo γ_i e γ^0_i rispettivamente differiscono per una isometria ρ_i di tipo iperbolico che agisce sulla geodetica invariante come una traslazione del tipo $t \to t + t_i$ per qualche $t_i \in \mathbb{R}$. Questi parametri di traslazione t_i *sono parametri geometrici della struttura (relativamente a quella base per la quale $t^0_i = 0$).*
(3) Fissati arbitrariamente i sistemi di parametri L e $T = \{t_i\}$, esiste un' unica struttura $\mathbb{H}^2/\Gamma$ che realizza L e tale che T consiste dei parametri di traslazione rispetto alla struttura base $\mathbb{H}^2/\Gamma^0_L$.

Relativamente al punto (1), per dimostrare l'esistenza di una struttura che realizza L basta dimostrare che per ogni terna di lunghezze esiste un pantalone iperbolico con bordo geodetico con componenti di bordo con quelle assegnate lunghezze. Basterà poi incollare (in un modo arbitrario) questi pantaloni lungo coppie di componenti di bordo di uguale lunghezza, secondo lo schema della decomposizione in pantaloni di S. Il fatto che ne esista una "privilegiata" allude ai seguenti fatti più fini: fissata una terna di lunghezze esiste un *unico* pantalone iperbolico con bordo geodetico che realizza quelle lunghezze e questo contiene un' unica famiglia di archi geodetici ortogonali al bordo che producono una suddivisione del pantalone in due esagoni iperbolici con bordo geodetico e angoli retti. Allora la struttura privilegiata è quella per cui l'incollamento dei pantaloni induce una pavimentazione di tutta $S = \mathbb{H}^2/\Gamma^0_L$ per mezzo di esagoni iperbolici ad angoli retti, con esattamente 4 esagoni incidenti in ogni vertice della pavimentazione. L'esempio descritto all'inizio è una caso particolare in cui tutti gli esagoni sono regolari.

Si può riassumere la discussione precedente dicendo che, fissata una decomposizione in pantaloni (topologica) di S, è individuato uno spazio dei parametri delle strutture iperboliche su S uguale a

$$(\mathbb{R}^+)^{3g-3} \times \mathbb{R}^{3g-3}$$

dove una struttura è univocamente determinata da una coppia (L, T) di sistemi di lunghezze e di parametri di traslazione (relativamente alle strutture base). Cambiando la decomposizione in pantaloni si ottiene un'altra "carta" per questo spazio di parametri; dunque abbiamo un atlante per la struttura intrinseca di tale spazio. I cambiamenti di carta sono piuttosto complicati, ma risultano essere, per esempio, analitici reali. Dunque questo spazio intrinseco di parametri (detto lo *spazio di Teichmüller*

$\tau(S)$) ha una struttura di varietà analitica reale diffeomorfa a $\mathbb{R}^{6g-6}$. Il quoziente del gruppo dei diffeomorfismi di S che preservano l'orientazione modulo il sottogruppo di quelli omotopi all'identità

$$\mathrm{Mod}(S) = \mathrm{Diff}^{+}(S)/\mathrm{Diff}^{0}(S)$$

è detto il *gruppo modulare* di S. Questo agisce (in modo non libero ma con orbite discrete) su $\tau(S)$ e il suo quoziente

$$\mathcal{M}(S) = \tau(S)/\mathrm{Mod}(S)$$

è detto lo *spazio dei moduli* delle strutture iperboliche su S (equivalentemente delle strutture di superficie di Riemann) ed è di grande importanza sia in molte branche della matematica sia per certi filoni della fisica teorica.