April 10, 2014

TGBD(5) - FORMA D'INTERSEZIONE E TOPOLOGIA - SUPERFICI

Useremo le notazioni e i risultati delle dispense [TGBD(3,4)].

Sia S una superficie liscia, compatta, chiusa, connessa, munita della forma di intersezione

$$\beta : H_1(S;\mathbb{Z}/2) \times H_1(S;\mathbb{Z}/2) \to \mathbb{Z}/2 \ .$$

La forma è bilineare, simmetrica, abbiamo giustificato in vari modi che è non singolare e la sua classe di isometria è un invariante topologico di S. Vogliamo mostrare che β (confusa spesso con la sua classe di isometria) contiene praticamente tutte le informazioni topologiche rilevanti. Confonderemo anche ogni superficie S con la sua classe di diffeomorfismo. Indicheremo con $\#$ la somma connessa.

Lemma 0.1. *(a) S^2 è l'unica superficie S tale che $H_1(S;\mathbb{Z}/2) = 0$; il piano proiettivo reale $\mathbf{P}^2$ è l'unica superficie S tale che $\dim H_1(S;\mathbb{Z}/2) = 1$; inoltre $(H_1(\mathbf{P}^2;\mathbb{Z}/2), \beta) = U$.*
(b) Ogni classe di isometria di FBS non singolare su $\mathbb{Z}/2$ è realizzata da qualche (S, β).
(c) S è orientabile se e solo se β è totalmente isotropa.

Dim. (a) La condizione di nullità omologica implica che S ammette una decomposizione in manici formata da un solo 0-manico e un solo 2 manico. Quindi S è una 2-sfera "torta" e quindi una vera sfera perché della forma $S = S^2\#S^2 = S^2$. In modo analogo nell'altro caso si realizza che $S = \mathbf{P}^2\#S^2 = \mathbf{P}^2$.
(b) Sappiamo già che $\mathbf{P}^2$ realizza U. Il toro $T = S^1 \times S^1$ realizza il piano iperbolico H. Rispetto all'operazione di somma-connessa $\#$, abbiamo che se $S = S_1\#S_2$ allora $\beta = \beta_1 \perp \beta_2$. Dunque ogni rU è realizzato da $r\mathbf{P}^2$, ogni rH da rT.
(c) β non è orientabile se e solo se esiste una curva c in S che ha intorno tubolare N isomorfo a un nastro di Möbius e (ricordando che ogni classe $a \in H_1(S;\mathbb{Z}/2)$ si rappresenta per mezzo di una curva connessa su S) questo succede se e solo se esiste a tale che $\beta(a, a) = 1$.

□

1. Classificazione delle superfici

Vogliamo dimostrare:

Proposizione 1.1. *Siano (S, β) e (S', β') due superfici compatte, chiuse, connesse munite delle rispettive forme di intersezione. Allora i seguenti fatti sono tra loro equivalenti*

1. *S e S' sono diffeomorfe.*
2. *Le forme β e β' sono isometriche.*
3. $\dim H_1(S;\mathbb{Z}/2) = \dim H_1(S';\mathbb{Z}/2)$ *e entambe β e β' (non) sono totalmente isotropre.*
4. $\dim H_1(S;\mathbb{Z}/2) = \dim H_1(S';\mathbb{Z}/2)$ *e entambe S e S' (non) sono orientabili.*

Dim. L'equivalenza tra (2) e (3) segue dalla classificazione delle FBS su $\mathbb{Z}/2$; quella tra (3) e (4) segue dal Lemma 0.1. Resta da dimostrare (2) $\Rightarrow$ (1). Distinguiamo i due casi.

• **(Caso totalmente isotropo.)** Sia (S, β) tale che $\beta = rH$. Sia c una curva connessa in S tale che $a = [c] \neq 0 \in H_1(S;\mathbb{Z}/2)$. Quindi c non sconnette S e un suo intorno tubolare N è un anello ($N = c \times I$) perché $\beta(a, a) = 0$. Esiste allora una curva "duale" c' che interseca c trasversalmente in un solo punto. Anche $a' = [c'] \neq 0$ e un suo intorno tubolare è un anello N'. Si verifica che (a meno di diffeomorfismi) $N \cup N' = T \setminus \mathrm{Int}D^2$. Quindi $S = T\#S'$ ed anche β' è totalmente isotropa, cioè $\beta' = (r - 1)H$. Per induzione si conclude che $S = rT$.

• **(Caso non totalmente isotropo.)** Supponiamo che esista $a \in H_1(S;\mathbb{Z}/2)$, $\beta(a, a) = 1$. Allora $a = [c]$, dove c è connessa e un suo intorno tubolare è un nastro di Möbius. Allora $S = \mathbf{P}^2\#S'$. Ci sono due possibilità:
(i) anche β' non è totalmente isotropa, allora si può concludere per induzione che $S = r\mathbf{P}^2$.
(ii) La forma β' è totalmente isotropa e quindi $S = \mathbf{P}^2\#rT$. Ricordiamo che per le FBS su $\mathbb{Z}/2$ non vale la cancellazione di Witt, infatti

$$U \perp H = 3U \ .$$

Vogliamo dimostrare il corrispettivo topologico di questa uguaglianza:

$$\mathbf{P}^2 \# T = 3\mathbf{P}^2$$

da cui seguirà che $S = r\mathbf{P}^2$. Consideriamo in T due curve duali c e c' come sopra che si intersecano in x_0. Rimuoviamo da T la parte interna di un piccolo 2-disco D^2 di centro x_0, e incolliamo lungo il bordo un nastro di Möbius N, ottenendo così $T\#\mathbf{P}^2$. Denotiamo con γ la curva "cuore" di N. I due archi chiusi $c \cap (T \setminus \mathrm{Int} D^2)$ e $c \cap (T \setminus \mathrm{Int} D^2)$ possono essere estesi in $N \subset T\#\mathbf{P}^2$ a formare due curve semplici chiuse $\tilde{c}$ e $\tilde{c}'$ rispettivamente che hanno le seguenti proprietà:

- Entrambe $\tilde{c}$ e $\tilde{c}'$ sono curve duali di γ.
- $\tilde{c}$ e $\tilde{c}'$ ammettono intorni tubolari disgiunti ($N' \cap N" = \emptyset$) che sono entrambi nastri di Möbius.

Dunque $(T^2\#\mathbf{P}^2) \setminus (N' \cup N")$ ha due componenti di bordo; indichiamo con Z la superficie chiusa ottenuta incollando due 2-dischi lungo questo bordo. Allora $T^2\#\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}^2\#Z\#\mathbf{P}^2$. Si verifica facilmente che $\dim H_1(Z;\mathbb{Z}/2) = 1$, quindi $Z = \mathbf{P}^2$ ed abbiamo finito.

□

Osservazioni 1.2. La classificazione si estende facilmente alle superfici (connesse) compatte con bordo aggiungendo il numero delle componenti connesse del bordo per ottenere ancora sistemi completi di invarianti.

2. Gruppi di bordismo 2-dimensionali

Indichiamo con $\mathcal{M}_2$ l'insieme delle classi di diffeomorfismo di superfici compatte e chiuse, non necessariamente connesse. $\mathcal{M}_2$ munito dell'operazione $\sqcup$ data dall'unione disgiunta è un semigruppo abeliano. Diciamo che $S \in \mathcal{M}_2$ è un bordo, se esiste una 3-varietà compatta W tale che $\partial W = S$. Osserviamo che per ogni S, $S \sqcup S$ è un bordo (basta prendere $W = S \times I$). Diciamo che S e S' sono *cobordanti* se $S \sqcup S'$ è un bordo. Indichiamo η_2 il quoziente di $\mathcal{M}_2$ rispetto a questa relazione di equivalenza. Allora l'operazione passa al quoziente e rende η_2 un gruppo abeliano, detto il *gruppo di* 2*-bordismo differenziabile non orientato*. Se ci restringiamo alle superfici orientate e raffiniamo la nozione di bordo richiedendo che W sia orientata e che induca su $S = \partial W$ la pre-assegnata orientazione (in questo caso abbiamo che $-S \sqcup S$ è un bordo, dove $-S$ denota la stessa superficie munita però dell'orientazione opposta), otteniamo Ω_2, *gruppo di* 2*-bordismo differenziabile orientato*. Si noti che $T = -T$ (cioè esiste un diffeomorfismo del toro in se stesso che inverte l'orientazione).
Per la definizione dei gruppi di Witt $\mathcal{W}(\mathbb{Z}/2)$ e $\mathcal{W}_0(\mathbb{Z}/2)$ rimandiamo a [FBS]. Sappiamo che $\mathcal{W}_0(\mathbb{Z}/2) = 0$, mentre si ha l'isomorfismo $r_2 : \mathcal{W}(\mathbb{Z}/2) \to \mathbb{Z}/2$ che associa ad ogni FBS ϕ la riduzione mod(2) del suo rango. Indichiamo con $\mathcal{M}_2^c$ il sottoinsieme di $\mathcal{M}_2$ formato dalle superfici connesse, munito della struttura di semigruppo datta dalla somma-connessa. Abbiamo l'omomorfismo di semigruppi

$$\rho : (\mathcal{M}_2^c, \#) \to (\mathcal{I}(\mathbb{Z}/2), \perp)$$

che associa ad ogni S la sua forma di intersezione β. Grazie al Lemma 0.1 ρ è surgettivo. Abbiamo:

Proposizione 2.1. *(1) L'omomorfismo di semigruppi ρ induce un isomorfismo*

$$\rho : \eta_2 \to \mathcal{W}(\mathbb{Z}/2) \ .$$

L'isomorfismo ottenuto per composizione

$$\chi_2 = r_2 \circ \rho : \eta_2 \to \mathbb{Z}/2$$

associa ad ogni classe di bordismo la riduzione mod(2) *della caratteristica di Eulero-Poincaré di un qualsiasi rappresentante. η_2 è generato da $\mathbf{P}^2$.*
(2) Restrigendo il discorso alle superfici orientate e alle forme totalmente isotrope, otteniamo l'dentificazione

$$\Omega_2 = \mathcal{W}_0(\mathbb{Z}/2) = 0 \ .$$

Dim. (1) Si verifica che se S_1 e S_2 sono connesse, allora $S_1\#S_2$ e $S_1 \sqcup S_2$ sono cobordanti. Dunque per definire η_2 possiamo restringerci a $\mathcal{M}_2^c$ e sostituire $\perp$ con $\#$. Per dimostrare che l'applicazione passa al quoziente ed è iniettiva, basta mostrare che per ogni S connessa, S è un bordo se e solo se la sua forma β è neutra. Dimostriamo che se $S = \partial W$ è un bordo, allora $\chi_2(S) = 0$. Infatti,

consideriamo la 3-varietà chiusa $D(W)$ ottenuta incollando due copie di W lungo i bordi per mezzo di $\mathrm{Id} : S \to S$. Come per tutte le varietà chiuse di dimensione dispari, la dualità di Poincaré implica che $\chi(D(W)) = 0$. Poiché
$$\chi(S) = 2\chi(W) - \chi(D(W))$$
si conclude che $\chi(S)$ è pari. Dunque $\mathbf{P}^2$ non è un bordo. Poiché T e $2\mathbf{P}^2$ sono bordi, segue dalla classificazione che S è un bordo se e solo se è sia della forma $S = mT$, sia $S = 2m\mathbf{P}^2$. Si conclude ricordando [FBS] che β è neutra se e solo se è sia della forma $\beta = mH$, sia $\beta = 2mU$. Il punto (2) si ottiene con argomenti analoghi.

□

3. Osservazioni sparse

• Abbiamo ottenuto il calcolo di η_2 (e Ω_2) come corollario del teorema di classificazione. Vogliamo qui ottenere lo stesso risultato in modo diretto. Data una superficie compatta chiusa connessa S, fissiamo una decomposizione in manici ordinata di S con un solo 0-manico un solo 2 manico e un certo numero k di 1-manici (sappiamo che $\chi(S) = 2-k$). Quindi, partendo da $(S_0 = D^2, \partial D^2)$, si ha una successione di superfici $(S_j, \partial S_j)$, $j = 1, \dots k$, ottenute attaccando un 1-manico a $(S_{j-1}, \partial S_{j-1})$, per concludere con $(S = S_{k+1}, \emptyset)$. Consideriamo la 3-varietà prodotto $W = S \times [0, 1]$. Sulla copia $S' = S \times \{1\}$ di S, consideriamo la famiglia di curve due a due disgiunte (e non necessariamente connesse) $\{\partial S_j\}_{j=0,\dots,k}$. Tutte queste curve hanno intorni tubolari prodotto $N_j \simeq \partial S_j \times I \subset S'$. Fissiamo un sistema di tali intorni due a due disgiunti, e attacchiamo a W lungo ogni N_j un 2-manico. Otteniamo così una 3-varietà W' tale che $\partial W' = S \times \{0\} \sqcup S$" dove S" ha $k + 2$ componenti connesse ciascuna associata ad un manico della decomposizione di S. E' facile vedere che una componente C associata agli 0 e 2 manici è diffeomorfa a S^2. Per le componenti associate agli 1-manici ci sono due possibilità:

1. Partendo da un anello $A := S^1 \times [0, 1]$, si attacca un 1-manico lungo $S^1 \times \{1\}$ in modo che il risultato sia orientabile; allora la superficie risultante è un pantalone P, cioè D^2 dal cui interno sono state rimosse le parti inderne di due dischi disgiunti. Allora la componente C di S' corrispondente si ottiene incollando un disco D^2 lungo ogni componente di ∂P. In effetti $C = S^2$. Lo stesso risultato finale si ottiene considerando l'attaccamento duale dell'1-manico.
2. Partendo da un anello $A := S^1 \times [0, 1]$, si attacca un 1-manico lungo $S^1 \times \{1\}$ in modo che il risultato sia non-orientabile; allora la superficie risultante è un nastro di Möbius M la componente C di S' corrispondente si ottiene incollando un disco D^2 lungo ∂M. Dunque $C = \mathbf{P}^2$.

Risulta allora che ogni S è cobordante con l'unione disgiunta di $h \geq 0$ copie di $\mathbf{P}^2$, dunque η_2 è ciclico generato da $\mathbf{P}^2$ che non è un bordo per quanto già visto sopra. Poiché l'attaccamento di 2-manici non modifica la proprietà di essere orientabile, se S è orientabile anche W, W', S' sono orientabili. Quindi in tal caso tutte le componenti C di S' sono 2-sfere, S' è un bordo ed infine anche S lo è. Abbiamo così riottenuto che $\Omega_2 = 0$. Sempre nella situazione orientabile, sia W" ottenuta da W' riempiendo ogni componente C di S' con una 3-palla D^3. Per costruzione W" si ottiene da W incollando un po' di 2-manici e un po' di 3-manici. Considerando la decomposizione duale si vede che W si ottiene da W" partendo da un po' di 0-manici e attaccando un po' di 1-manici. Con l' argomento abituale di cancellazione di coppie (H_0, H_1) di manici geometricamente complementari, si può supporre che ci sia un solo 0-manico. Dunque $W" = \mathcal{H}_g$ è un "corpo con g-manici" (per qualche $g \geq 0$) (un "handlebody") e $S = \partial\mathcal{H}_g \simeq gT$. Dunque abbiamo riottenuto la classificazione delle superfici almeno nel caso orientabile. Si noti che il meccanismo di questo approccio è interessante:

Partendo da una decomposizione in manici 2-dimensionale, si produce una decomposizione in manici 3-dimensionale in modo che la superficie data viva sul bordo. In un certo senso il bordo fabbrica il suo "bulk".

• La classificazione ottenuta contiene in modo ovvio (ma che vale la pena di essere messo in evidenza) una classificazione più debole "a meno di stabilizzazioni":

Date due superfici (compatte chiuse connesse, come al solito) S e S' esistono $h, h' \geq 0$ tali che $S\#h\mathbf{P}^2$ e $S'\#h'\mathbf{P}^2$ sono diffeomorfe. Se S e S' sono orientabili, allora esistono $h, h' \geq 0$ tali che $S\#hT$ e $S'\#h'T$ sono diffeomorfe.

• La classificazione stabile acquista un sapore particolare se riletta in un contesto *algebrico reale*. Ogni superficie S ammette un *modello algebrico proiettivo reale* cioè è diffeomorfa ad una superficie algebrica non singolare di qualche spazio proiettivo reale $\mathbf{P}^n$. Nel caso di $h\mathbf{P}^2$, $h \geq 0$ tali modelli si possono ottenere "scoppiando" ("blow-up algebrico") la sfera unitaria S^2 in h punti distinti. Questi modelli risultano essere anche "razionali" cioè contengono un aperto di Zariski isomorfo ad un aperto di Zariski di $\mathbf{P}^2$. Lo scoppiamento di uno o più punti può essere fatto anche nel contesto DIFF ("blow-up differenziale") ed è equivalente a fare la somma connessa con una o più copie di $\mathbf{P}^2$. Dunque la classificazione stabile può essere riletta dicendo che a meno di scoppiamenti (DIFF) di punti, ogni superficie compatta ammette un modello algebrico reale razionale non singolare. E' naturale chiedersi se ammette un modello algebrico razionale senza bisogno di scoppiare punti. La risposta è positiva, ma al prezzo di non richiedere che il modello sia non singolare (e lavorando a meno di omeomorfismo invece che diffeomorfismi). Preso un modello algebrico razionale non singolare X di $S\#h\mathbf{P}^2$, è possibile tornare su S effettuando un "blow-down algebrico" che ripristini topologicamente (a meno di omeomorfismi) S munito di una struttura algebrica razionale che può essere singolare nei punti di S che erano stati inizialmente scoppiati (in modo DIFF). Ci si può allora chiedere se l'apparizione di queste singolarità sia accidentale (dovuta alla tecnica usata); invece è intrinsecamente ineliminabile perchè un classico risultato di A. Comessatti dice che le uniche superfici algebrice reali razionali non singolari sono (a meno di diffeomorfismi) S^2, T e $\mathbf{P}^2$.