Corso di "LOGICA MATEMATICA"
Indice degli argomenti svolti.

DOCENTE: Alessandro Berarducci
Anno di corso: 2009-2010

Avvertenza: Tenere d'occhio la mia pagina web per aggiornamenti
http://www.dm.unipi.it/ berardu/

Argomenti principali. Teoremi di correttezza, completezza, e compattezza, sia per il calcolo proposizionale che per il calcolo dei predicati (= logica del primo ordine). Teoremi di Lowenheim-Skolem verso l'alto e verso il basso. Teorie complete.

Funzioni primitive ricorsive, funzioni calcolabili, insiemi ricorsivi, insiemi ricorsivamente enumerabili. Teorema di Post. Problemi indecidibili. Indecidibilità del problema della fermata. Funzione universale e teorema smn. Predicato di Kleene. Caratterizzazioni equivalenti degli insiemi ricorsivamente enumerabili. Secondo teorema del punto fisso.

Teorie formali per l'aritmetica: aritmetica di Robinson, aritmetica di Peano del primo e secondo ordine. Esistenza di modelli non-standard. Rappresentabilità delle funzioni calcolabili nell'aritmetica di Robinson e (in senso più forte) nell'aritmetica di Peano. Lemma di diagonalizzazione. Primo teorema di incompletezza di Gödel. Teorie ω-coerenti. Teorema di Rosser. Secondo teorema di incompletezza di Gödel. Relazioni tra calcolabilità e logica del primo ordine: una teoria completa e ricorsivamente assiomatizzabile è decidibile. Ogni teoria coerente decidibile ha una estensione completa decidibile. L'aritmetica di Robinson è essenzialmente indecidibile. Interpretazioni tra teorie. Teorema di Church: il calcolo dei predicati con almeno un simbolo di funzione binaria è indecidible.

Elenco dettagliato degli argomenti.

Calcolo proposizionale. Sintassi: Linguaggio (= insieme delle variabili proposizionali), formule. Semantica: modelli booleani, verità di una formula in un modello. Tautologie (formule vere in tutti i modelli). Teorie proposizionali. Conseguenza logica. Regole di inferenza. Teorie coerenti. Teorie complete. (Nota: non confondere la completezza di una teoria con la completezza delle regole di inferenza.) (Nota: la completezza dipende in modo essenziale non solo dagli assiomi ma anche dal linguaggio.) Caratterizzazione delle teorie coerenti proposizionali come quelle teorie che hanno un unico modello proposizionale. Teorema di correttezza. Teorema di completezza. Dimostrazione del teorema di completezza nel caso numerabile con il lemma di König e nel caso generale con il lemma di Zorn. Teorema di compattezza proposizionale.

Calcolo dei predicati (o logica del primo ordine). Sintassi: Linguaggio, Termini, Formule, Sostituzioni, Termini sostituibili. Semantica: L-strutture, semantica di Tarski (verità di una formula in una L-struttura). Formule logicamente valide (vere in tutte le L-strutture). Una formula della forma $\forall x\varphi(x) \to \varphi(t)$ è logicamente valida se il termine t è sostituibile (in particolare se è chiuso). Ogni istanza di una tautologia è logicamente valida. Conseguenza logica. Regole di inferenza. Regole per l'uguaglianza. Esempi di dimostrazioni formali. Dimostrazioni per assurdo. Regole per trovare la forma normale prenessa (portare i quantificatori all'inizio della formula). Teorema di correttezza. Teorie coerenti, complete, deduttivamente chiuse. Una teoria coerente massimale è completa. Il viceversa vale per le teorie deduttivamente chiuse. Teorie di Henkin (per le quali, data una formula $\varphi(x)$, esiste un termine chiuso t per il quale si dimostra $\exists x\varphi(x) \to \varphi(t)$). Lemma di Lindenbaum (ogni teoria coerente ha una estensione coerente e completa nello stesso linguaggio). Espansione del linguaggio con costanti di Henkin: ogni teoria coerente ha una estensione coerente e di Henkin. Esempi: la teoria del campo ordinato dei numeri reali non è di Henkin. La teoria dei numeri naturali (con zero, successore, somma e prodotto) è di Henkin. Teorema di completezza per il calcolo dei predicati. Teorema di compattezza. Teorema di Lowenheim Skolem verso il basso. (Nella forma più semplice dice che una teoria coerente con un linguaggio numerabile ha un modello al più numerabile.) Esempio: ZFC se coerente ha un modello numerabile. La teoria dei numeri reali ha un modello numerabile. Teorema di Lowenheim Skolem verso l'alto. (Nella forma più semplice dice che se per ogni intero n la teoria T ha modelli di cardinalità $> n$, allora T ha un modello infinito. Inoltre se T ha un modello infinito ne ha di cardinalità arbitrariamente alta.) Teorie categoriche. Teorie α-categoriche.

La classe Mod(T) dei modelli di una teoria T. La teoria completa Th(M) di una data L-struttura M. La teoria Th(K) delle formule vere in ogni L-struttura della classe K. Una teoria è completa se e solo se coincide con la teoria completa di uno qualsiasi dei suoi modelli. Equivalenza tra due teorie: due teorie nello stesso linguaggio sono equivalenti se e solo se hanno gli stessi teoremi, e ciò avviene se e solo se hanno gli stessi modelli.

Esercizi: La teoria dei grafi ciclici ha un modello non ciclico. La teoria dei grafi connessi ha un modello non connesso. La teoria completa dei numeri naturali ha un modello numerabile non-standard (ovvero non isomorfo ai numeri naturali).

Calcolabilità. Funzioni calcolabili. Insiemi ricorsivi. Insiemi ricorsivamente enumerabili. Teorema di Post. Tesi di Church: ogni funzione intuitivamente calcolabile è formalmente calcolabile (in una qualsiasi delle sue varie accezioni equivalenti: mu-ricorsiva, calcolabile con una macchina a registri, etc.). Funzioni primitive ricorsive. Simulazione della ricursione primitiva e della minimalizzazione con una macchina a registri. Le funzioni ricorsive (e/o ricorsive primitive) sono stabili per minimalizzazione limitata e ricursione sul decordo dei valori. I precicati ricorsivi (e/o primitivi ricorsivi) sono stabili per connettivi booleani e quantificatori limitati. Esempio: l'insieme dei numeri primi è primitivo ricorsivo, così come la funzione che lo enumera in ordine crescente. Funzione di Ackermann. Indecidibilità del problema della fermata. Altri problemi indecidibili. Calcolabilità su domini diversi dai numeri naturali: codifiche. Funzione universale. Teorema smn. Caratterizzazioni equivalenti degli insiemi ricorsivamente enumerabili. Secondo teorema del punto fisso. Applicazioni: la funzione di Ackermann è mu-ricorsiva.

Aritmetica di Robinson Q. Aritmetica di Peano PA. Incompletezza di Q (Q non dimostra che ogni numero è pari o dispari). Completezza di Q rispetto alle formule con quantificatori limitati. Le formule Σ^0_1 vere nel modello standard sono dimostrabili in Q. (Nota: Gli insiemi ricorsivamente enumerabili sono tutti e soli gli insiemi definibili nel modello standard da una formula Σ^0_1.) Codifica delle successioni usando il teorema cinese dei resti: funzione beta di Godel. Rappresentazione dell'esponenziale e del fattoriale in Q. Ogni funzione calcolabile è binumerata in Q da una formula Σ^0_1. L'insieme dei teoremi di una teoria ricorsivamente assiomatizzata è ricorsivamente enumerabile. Se inoltre la teoria è completa, l'insieme dei teoremi è ricorsivo. (Le stesse conclusioni valgono indebolendo l'ipotesi che l'insieme degli assiomi sia ricorsivo: basta che sia ricorsivamente enumerabile.) Aritmetizzazione della sintassi. La funzione sostituzione è primitiva ricorsiva. Lemma di diagonalizzazione. Primo teorema di Gödel. Teorie omega coerenti. Secondo teorema di Gödel. Teorema di Rosser. L'aritmetica di Robinson è essenzialmente indecidibile. Una teoria completa ricorsivamente assiomatizzata è decidibile. Una teoria $\aleph_0$-categorica in un linguaggio numerabile è completa. Completezza della teoria degli ordini lineari densi senza estremi. Interpretazioni tra teorie. Indecidibilità del calcolo dei predicati con almeno un simbolo di predicato binario.