Indice degli argomenti svolti nel corso: Teoria degli Insiemi

DOCENTE: Alessandro Berarducci
Anno di corso: 2009-2010

Avvertenza: Tenere d'occhio la mia pagina web per aggiornamenti, consigli per l'esame, etc. Data una occhiata anche al registro delle lezioni consultabile su http://unimap.unipi.it/cercapersone/cercapersone.php e segnalatemi eventuali inesattezze o lacune.

Risultati principali. Usando il modello L dei costruibili si dimostrano i seguenti risultati. Se ZF è coerente lo è anche ZF + V=L. Inoltre ZF + V=L dimostra AC e GCH. Quindi se ZF è corente lo è anche ZFC (= ZF+ AC), e anche ZFC + GCH. Usando il forcing abbiamo visto che se ZFC è corente lo è anche ZFC + non GCH. Inoltre se ZF è coerente lo è anche ZF + i reali non sono bene ordinabili. Per quest'ultimo risultato abbiamo usato sia il forcing che gli insiemi ordinal-definable (OD, HOD, e la versione relative HOD(A)), ma abbiamo omesso alcune verifiche tra cui il fatto che HOD(A) verifica ZF.

Dove studiare. Gli argomenti trattati si trovano sul Kunen, capitoli 1, 3, 4, 5, 6, 7 oppure sugli appunti disponibili presso la copisteria Book Binders. Si tratta delle fotocopie di due quaderni con pagine numerate. Il primo quaderno va da p.1 a p. 154, il secondo quaderno va da p. 155 a p. 300. Il programma svolto comprende le pagine 1–101 (costruibili), e le pagine 155 – 207 (forcing). Alcune parti sono state svolte svolte a lezione in ordine diverso che negli appunti.

Qui sotto trovate l'indice dettagliato degli argomenti nell'ordine in cui sono stati svolti con il riferimento alle pagine degli appunti. Si veda il registro delle lezioni per sapere in quale data sono stati svolti gli argomenti.

Indice dettagliato degli argomenti. Assiomi di ZFC. Gerarchia di Von Neumann (p. 3-sgg.). Transitività degli $R(\alpha)$. Rango di un insieme ben fondato (p. 6). La classe degli insiemi ben fondati è transitiva (p.6). Definizione ricorsiva del rango (p.8). Gli ordinali in $R(\alpha)$ sono gli ordinali minori di α (p.9). Cardinalità degli $R(\alpha)$ (p.10). Relazioni ben fondate (p. 10). Assioma di fondazione (p. 11). Chiusura transitiva di un insieme (p. 11) (serve l'assioma dell'infinito). Chiusura transitiva di una relazione localmente piccola (p. 13). Induzione e ricursione per relazioni ben fondate localmente piccole (p. 14-sgg.) (serve l'assioma di rimpiazzamento). Collasso di Mostowski (p. 17). Assolutezza delle formule con quantificatori limitati (p. 29). Verifica di vari assiomi di ZFC negli $R(\alpha)$. $R(\omega+\omega)$ verifica tutti gli assiomi di ZFC tranne lo schema di rimpiazzamento (p. 23-sgg.). Se

α è inaccessibile $R(\alpha)$ è un modello di ZFC (p. 27). Gli $H(\alpha)$ (p. 44-sgg., solo cenni). Teorema di riflessione (p. 51). Assolutezza delle definizioni ricorsive (p. 42). Assolutezza della funzione rango (p. 44). Parti definibili di un insieme (p. 70). Insiemi costruibili (p. 70). Transitività degli $L(\alpha)$ (p. 71). La classe L dei costruibili è un modello di ZFC (p. 74). $V = L$ implica GCH (p. 89). Formalizzazione della semantica di Tarski e assolutezza della relazione di soddisfacibilità (verità di una formula in un modello) (p. 78). Assolutezza di $x = L(\alpha)$. L è un modello di $ZF + V = L$. ll buon ordine definibile dell'universo degli insiemi costruibili, e sua assolutezza (p. 85). L verifica l'assioma della scelta. I costruibili sono il minimo modello interno transitivo che contiene tutti gli ordinali (p. 80).

Introduzione al forcing. (p. 128-sgg.). Filtri generici. P-nomi. Il modello $M[G]$, estensione di M tramite il filtro generico G. Combinatoria infinita. Insiemi club e stazionari (p. p. 91-sgg.). Lemma del Delta-sistema (p. 157). L'insieme parzialmente ordinato che aggiunge lambda reali generici ha la ccc. (p. 156). Preservazione dei cardinali (p. 160). Indipendenza dell'ipotesi del continuo in ZFC (p. 155-sgg.) (con alcuni lemmi posposti, vedi Assiomi 1,2,3,4, p. 142-sgg.). L'algebra di Boole degli aperti regolari di uno spazio topologico (p. 180-sgg.). Completezza dell'algebra degli aperti regolari (p. 181). Definibilità del forcing (p. 190). Teorema del forcing (ciò che è vero è forzato) (p. 196). $M[G]$ è un modello di ZFC (p. 196-sgg.). Anticatene massimali e filtri generici. Teorema sulla esistenza dei P-nomi (maximal principle) (p. 204). Insiemi ordinal-definable (p. 59 sgg.). Un modello di ZF in cui i reali non sono bene ordinabili (p. 163-sgg.).