Corso di teoria dei modelli

Alessandro Berarducci

22 Aprile 2010. Revised 5 Oct. 2010

Indice

1 Introduzione **2**

2 Linguaggi del primo ordine **3**
2.1 Linguaggi e strutture . . . 3
2.2 Morfismi . . . 4
2.3 Termini e loro interpretazione in una struttura . . . 6
2.4 Formule e loro interpretazione in una struttura . . . 7

3 Teorie e modelli **9**
3.1 Conseguenze logiche di una teoria . . . 9
3.2 Teorie deduttivamente chiuse . . . 10
3.3 Teorie complete . . . 11
3.4 Espansioni del linguaggio . . . 12
3.5 Esercizi . . . 12

4 Compattezza **13**
4.1 Insiemi di Hintikka . . . 13
4.2 Teorema di compattezza . . . 15
4.3 Esercizi . . . 17

5 Teoremi di Lowenheim-Skolem **18**
5.1 Lowenheim-Skolem verso l'alto: forma debole . . . 18
5.2 Immersioni elementari . . . 18
5.3 Löweinheim - Skolem verso l'alto: forma forte . . . 19
5.4 Lowenheim-Skolem verso il basso . . . 20
5.5 Completezza delle teorie κ-categoriche . . . 20
5.6 Amalgamazione di immersioni elementari . . . 21

6 Isomorfismi parziali **21**
6.1 Isomorfismi parziali ed ω-categoricità . . . 21
6.2 Esempi ed esercizi . . . 23
6.3 Il caso non numerabile . . . 23

7 Tipi **24**
7.1 Tipi di una teoria 24
7.2 Esercizi 25

8 Eliminazione dei quantificatori **25**
8.1 Tipi senza quantificatori 26
8.2 Criterio per l'eliminazione dei quantificatori e per la completezza 27
8.3 Esempi ed esercizi 28

9 Saturazione **28**
9.1 Catene elementari 28
9.2 Modelli saturi 29
9.3 Va e vieni in modelli ω-saturi 32
9.4 Eliminazione dei quantificatori per gli ordini discreti 32

10 Applicazioni alla teoria dei campi **33**
10.1 Campi algebricamente chiusi 33
10.2 Campi reali chiusi 35

11 Dimensione **36**
11.1 Chiusura algebrica 36
11.2 Strutture fortemente minimali 36
11.3 Dimensione in strutture fortemente minimali 37

12 Rango di Morley **38**

13 Modelli primi **40**
13.1 Modelli di termini 40
13.2 Omissione di tipi 41
13.3 Topologia sullo spazio dei tipi 43
13.4 Modelli atomici 43
13.5 Teorie ω-categoriche 45

14 Teorema di Morley **46**
14.1 Indiscernibili 46
14.2 Teorie ω-stabili e teorie totalmente trascendenti 48
14.3 Modelli costruibili 49

1 Introduzione

Scopo del corso è di fornire una introduzione alla teoria dei modelli e alle sue prime applicazioni fino ad arrivare al teorema di categoricità di Morley.

Assumiamo noti i concetti insiemistici fondamentali, le tavole di verità dei connettivi booleani $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$ e il significato intuitivo dei quantificatori $\forall$, $\exists$ secondo la logica classica. Un buon test per il possesso di questi prerequisiti è il seguente.

Esercizio 1.1. Stabilire se l'enunciato

$$\exists x \in M(P(x) \to \forall y \in M\ P(y))$$

sia sempre vero per ogni insieme M e per ogni predicato unario P su M.

2 Linguaggi del primo ordine

2.1 Linguaggi e strutture

Definizione 2.1. La *segnatura* di un linguaggio del primo ordine è un insieme L di simboli (possibilmente anche vuoto) divisi in tre categorie, simboli di costante, simboli di funzione, e simboli di relazione, dove ad ogni simbolo è associato un numero naturale detto "arietà" del simbolo (che servirà ad indicare il numero degli argomenti a cui va applicato il simbolo)[1]. L'arietà di ogni simbolo di costante è zero, mentre le arietà dei simboli di funzione e di relazione sono arbitrari interi positivi. Alternativamente possiamo non distinguere tra simboli di funzione e constante e considerare i simboli di costante come simboli di funzione di arietà zero.

`struttura` **Definizione 2.2.** Sia L una segnatura. Una *L-struttura* M consiste di:

1. Un insieme non vuoto $dom(M)$ detto *dominio* (oppure *universo*) della struttura.
2. Una corrispondenza[2] $c \mapsto c_M$ che associa ad ogni simbolo di costante c di L un elemento $c_M \in dom(M)$, detto interpretazione del simbolo c in M.
3. Una corrispondenza $f \mapsto f_M$ che associa ad ogni simbolo di funzione f di L di arietà n, una funzione $f_M : dom(M)^n \to dom(M)$, detta interpretazione del simbolo f in M.
4. Una corrispondenza $R \mapsto R_M$ che associa ad ogni simbolo di relazione R di L di arietà n, una relazione $R_M \subseteq dom(M)^n$, detta interpretazione del simbolo R in M.

Esempio 2.3. Un grafo $G = (V_G, E_G)$ è dato da un insieme non vuoto V_G di *vertici* dotato di una relazione binaria E_G. Esso può essere visto come una L-struttura (con dominio V_G) nella segnatura $L = \{E\}$, dove E è un simbolo di relazione binaria.

Quando non ci sia rischio di confusione useremo la stessa notazione per indicare sia la struttura che il suo dominio (ad esempio scriveremo $G = (G, E_G)$, dove G indica sia il grafo che l'insieme dei suoi vertici).

[1] Una possibile formalizzazione in termini insiemistici è la seguente: un simbolo è una terna ordinata (a, i, n) dove a è il nome del simbolo, $i \in \{1, 2, 3\}$ indica se si tratti di un simbolo di costante, funzione o relazione, n è l'arietà.

[2] Usiamo la parola 'corrispondenza' come sinonimo di 'funzione'.

Esempio 2.4. Un anello ordinato $M = (M, 0_M, 1_M, +_M, \cdot_M, <_M)$ è un struttura nella segnatura $L = \{0, 1, +, \cdot, <\}$, dove $0, 1$ sono simboli di costante, $+, \cdot$ sono simboli di funzioni binarie, $<$ è un simbolo di relazione binaria, e i simboli $0, 1, +, \cdot, <$ sono intepretati in modo da soddisfare gli assiomi degli anelli ordinati.

Per semplicità talvolta ometteremo i sottoindici e useremo la stessa notazione per i simboli e la loro interpretazione. Ad esempio l'anello degli interi viene in genere indicato con $(\mathbb{Z}, 0, 1, +, \cdot)$.

Esercizio 2.5. Un multigrafo è un insieme V di *vertici* dove ogni coppia di vertici $\{a, b\}$ può essere connessa da zero, uno o più *archi*. Si trovi un modo di descrivere i multigrafi come L-strutture in una opportuna segnatura L.

2.2 Morfismi

Definizione 2.6. Un *isomorfismo* $\phi\colon A \to B$ tra due L-strutture A e B è dato da una mappa iniettiva e suriettiva $\phi\colon dom(A) \to dom(B)$ che preserva le costanti le funzioni e le relazioni di L. Più precisamente:

1. se c è un simbolo di costante, allora $\phi(c_A) = c_B$;
2. se f è un simbolo di funzione di arietà n e $a_1, \dots, a_n, a \in dom(A)$, allora $f_A(a_1, \dots, a_n) = a$ se e solo se $f_B(\phi(a_1), \dots, \phi(a_n)) = \phi(a)$. Equivalentemente: $\phi(f_A(a_1, \dots, a_n)) = f_B(\phi(a_1), \dots, \phi(a_n))$.
3. se R è un simbolo di relazione di arietà n e $a_1, \dots, a_n \in dom(A)$, allora $(a_1, \dots, a_n) \in R_A$ se e solo se $(\phi(a_1), \dots, \phi(a_n)) \in R_B$.

Esempio 2.7. Sia L una segnatura con un simbolo di relazione binario f. Sia $(\mathbb{R}; +)$ la L-struttura avente come dominio i numeri reali e in cui f è interpretato come la funzione somma, e sia $(\mathbb{R}^{>0}, \cdot)$ la L-struttura avente come dominio i numeri reali positivi e in cui f è interpretato come la funzione prodotto. Allora la funzione esponenziale $x \mapsto e^x$ è un isomorfismo da $(\mathbb{R}, +)$ a $(\mathbb{R}^{>0}, \cdot)$.

Esercizio 2.8. Trovare un isomorfismo tra il gruppo additivo $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +, 0)$ degli interi modulo 6 e il gruppo moltiplicativo $((\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*, \cdot, 1)$ degli interi diversi da zero modulo 7 (entrambi considerati come strutture in una segnatura con un simbolo di operazione binaria per l'operazione gruppale e un simbolo di costante per l'elemento neutro).

Definizione 2.9. Il concetto di *immersione* si ottiene da quello di isomorfismo rinunciando alla richiesta che ϕ sia suriettiva. Una immersione è dunque un isomorfismo verso la sua immagine.

Definizione 2.10. Date due L-strutture A e B diciamo che A è una *sottostruttura* di B se $dom(A) \subseteq dom(B)$ e la funzione di inclusione $i\colon dom(A) \to dom(B)$ è una immersione. Ciò significa che i simboli di costante sono intepretati nello stesso modo in A e in B, e i simboli di funzione e relazione sono interpretati in

A come la restrizione agli elementi di A delle funzioni e relazioni che intepretano gli stessi simboli in B. Ad esempio l'anello degli interi $\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}, 0, 1, +, -, \cdot)$ è una sottostruttura dell'anello dei reali $(\mathbb{R}, 0, 1, +, -, \cdot)$. Per indicare che A è una sottostruttura di B scriviamo $A \subseteq B$.

Il concetto di omomorfismo si ottiene indebolendo il concetto di isomorfismo come segue.

Definizione 2.11. Un *omomorfismo* $\phi\colon A \to B$ tra due L-strutture A e B è dato da una mappa $\phi\colon dom(A) \to dom(B)$ tale che:

1. se c è un simbolo di costante, allora $\phi(c_A) = c_B$;
2. se f è un simbolo di funzione di arietà n e $a_1, \ldots, a_n \in dom(A)$, allora $\phi(f_A(a_1, \ldots, a_n)) = f_B(\phi(a_1), \ldots, \phi(a_n))$;
3. se R è un simbolo di relazione di arietà n, $a_1, \ldots, a_n \in dom(A)$, e $(a_1, \ldots, a_n) \in R_A$, allora $(\phi(a_1), \ldots, \phi(a_n)) \in R_B$.

Si osservi che un isomorfismo è un morfismo biunivoco la cui funzione inversa è essa stessa un morfismo.

Esempio 2.12. Sia $\mathbb{Z}$ l'anello degli interi e sia $\mathbb{Z}/(n)$ l'anello degli interi modulo n (entrambi considerati come strutture nella segnatura $L = \{0, 1, +, -, \cdot\}$). La funzione che manda un intero x nella sua classe resto modulo n costituisce un omomorfismo da $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z}/(n)$ che non è nè un isomorfismo né una immersione.

Esempio 2.13. Un morfismo tra due ordini totali $(A, <_A)$ e $(B, <_B)$ è una funzione crescente: $a_1 < a_2$ implica $f(a_1) < f(a_2)$. Per un isomorfismo vale la doppia implicazione.

Osservazione 2.14. Osserviamo che in strutture relazionali (ovvero in una segnatura senza senza simboli di funzione e costante) ogni sottoinsieme non vuoto determina una sottostruttura (ad esempio un sottoinsieme di un ordine lineare è un ordine lineare con l'ordine indotto), mentre per strutture con funzioni o costanti questo in genere non accade.

Affinché un sottoinsieme non vuoto $X \subset dom(B)$ del dominio di una struttura B determini una sottostruttura di B occorre (e basta) che X contenga l'interpretazione dei simboli di costante della segnatura (se ve ne sono) e che sia chiuso rispetto alla interpretazione dei simboli di funzione. Se questa condizione è verificata c'è un unica sottostruttura di B avente X come dominio, e possiamo quindi per abuso di linguaggio identificare il sottoinsieme con la sottostruttura.

Osservazione 2.15. Il concetto di sottostruttura, così come quello di morfismo, dipende in modo essenziale dalla scelta della segnatura. Ad esempio $(\mathbb{N}, +, 0)$ è una sottostruttura di $(\mathbb{Z}, +, 0)$ ma non è un sottogruppo nel senso usuale dell'algebra (non è chiuso rispetto alla funzione sottrazione). Per fare in modo che le sottostrutture dei gruppi siano gruppi, dobbiamo mettere nella segnatura anche un simbolo per l'inversa della operazione gruppale.

Consideriamo ora la segnatura $L = \{+, -, \cdot, 0, 1\}$ degli anelli. Ogni sottostruttura A di un anello B è essa stessa un anello. Tuttavia se A è un campo, non è detto che B sia un campo. Per esserlo deve essere chiuso per la funzione $1/x$. Si noti che non possiamo mettere nella segnatura un simbolo per la funzione $1/x$ perché tale funzione è indefinita per $x = 0$ e nella segnatura ammettiamo solamente simboli per funzioni definite sull'intero dominio della struttura (ovviamente si potrebbe convenire che $1/0 = 0$, ma ciò sarebbe in contrasto con l'uso comune).

2.3 Termini e loro interpretazione in una struttura

Per definire l'insieme dei termini (e delle formule), oltre ai simboli della segnatura L, dobbiamo fissare un insieme infinito di simboli V chiamati *variabili*.

Definizione 2.16. Definiamo induttivamente l'insieme $Ter_L(V)$ degli L-*termini* (con variabili da V) come il più piccolo insieme di espressioni tale che:

1. Ogni variabile $x \in V$ è un L-termine;
2. ogni simbolo di costante di L è un L-termine;
3. se $t_1, \dots, t_n$ sono L-termini, e f è un simbolo di funzione di arietà n della segnatura L, allora $f(t_1, \dots, t_n)$ è un L-termine.

Un termine in cui non occorrano variabili viene detto *termine chiuso*.

Si noti che se la segnatura L non contiene simboli di costante, allora non ci sono L-termini chiusi, e se la segnatura non contiene nè simboli di costante nè simboli di funzione allora gli unici L-termini sono le variabili. Osserviamo che i simboli di relazione della segnatura non contribuiscono alla formazione dei termini.

Esempio 2.17. Consideriamo la segnatura $L = \{0, 1, +, \cdot, \leq\}$, dove $0, 1$ sono simboli di costante, $+, \cdot$ sono simboli per funzioni binarie, $\leq$ è un simbolo di relazione binario. Esempi di L-termini sono $0, 0+1, z \cdot ((x+y)+1)$, dove x, y, z sono variabili e per semplicità abbiamo usato la notazione infissa xfy anzichè $f(x, y)$ quando f è un simbolo di funzione binaria (cioè quando f è $\cdot$ o $+$).

t-parametri

Definizione 2.18. Data una L-struttura M, un *termine con parametri da M* è una coppia (t, v), che indicheremo anche $t(v)$, costituita da un L-termine t e da una funzione v - detta valutazione - che assegna ad alcune variabili degli elementi di M. Se $\{x_1, \dots, x_n\}$ è un insieme finito di variabili distinte, e v è la valutazione che assegna alla variabile x_i il valore $a_i \in M$, scriveremo $t(a_1/x_1, \dots, a_n/x_n)$ per $t(v)$. Qualora sia chiaro dal contesto a quali variabili $x_1, \dots, x_n$ ci si riferisca, scriveremo $t(a_1, \dots, a_n)$ invece di $t(a_1/x_1, \dots, a_n/x_n)$.

Un termine con parametri $t(a_1/x_1, \dots, a_n/x_n)$ viene detto chiuso se l'insieme delle variabili occorrenti in t è incluso in $\{x_1, \dots, x_n\}$. Per indicare che t è un L-termine le cui variabili sono incluse in $\{x_1, \dots, x_n\}$ talvolta scriveremo $t(x_1, \dots, x_n)$ invece di t.

Esempio 2.19. Sia $L = \{0, 1, +, \cdot\}$ e sia $\mathbb{R}$ la L-struttura dei numeri reali. L'espressione $(x+y)+1$ è un L-termine (senza parametri). La coppia costituita da t e dalla funzione che assegna alla variabile x il valore $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ è un L-termine con parametri (che per semplicità denoteremo $(\sqrt{2} + y) + 1$).

Definizione 2.20. (Interpretazione dei termini) Sia t un L-termine e sia v una valutazione il cui dominio include le variabili di t. Definiamo induttivamente $M(t(v)) \in dom(M)$ nel modo seguente:

1. Se x è una variabile e v è una valutazione che associa a x il valore $a \in M$, allora $M(x(v)) = a$;

2. Se c è un simbolo di costante di L, allora $M(c(v)) = c_M$;

3. Se t è della forma $f(t_1, \dots, t_n)$, allora $M(t(v)) = f_M(M(t_1(v)), \dots, M(t_n(v)))$.

2.4 Formule e loro interpretazione in una struttura

Passiamo ora a definire l'insieme delle L-formule. Oltre ai simboli fino ad ora introdotti faremo uso dei simboli $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ per i connettivi booleani, i simboli $\exists$ e $\forall$ per i quantificatori esistenziale e universale, il simbolo $=$ per l'uguaglianza, e le parentesi.

Definizione 2.21. L'insieme delle L-formule è definito induttivamente come il più piccolo insieme di espressioni tale che:

1. Se R è un simbolo di relazione di L di arietà n e $t_1, \dots, t_n$ sono degli L-termini, allora $R(t_1, \dots, t_n)$ è una L-formula.

2. Se α e β sono L-formule, allora $(\neg\alpha)$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$ sono L-formule.

3. Se α è una L-formula e x è una variabile, allora $(\forall x \alpha)$ e $(\exists x \alpha)$ sono L-formule.

4. Per ogni coppia di termini s, t, l'espressione $(s = t)$ è una L-formula.

Si una distinguere tra linguaggi con uguaglianza e senza uguaglianza. Per questi ultimi la clausola 4. viene omessa.

Osservazione 2.22. Nel dare esempi di L-formule ometteremo le parentesi ridondanti quando non sussista ambiguità di lettura, ovvero qualora esista un unico modo di aggiungere le parentesi mancanti in modo da ottenere una L-formula. Ad esempio la formula $(((x = x) \wedge (x = y)) \vee (y = z))$ può essere scritta in forma abbreviata come $(x = x \wedge x = y) \vee y = z$. Per un ulteriore risparmio di parentesi stabiliamo la convenzione che in assenza di parentesi $\wedge$ e $\vee$ legano maggiormente di $\rightarrow$ e $\neg$ lega maggiormente di $\wedge$ e $\vee$, quindi ad esempio $\neg\alpha \wedge \beta \rightarrow \gamma$ significa $(((\neg\alpha) \wedge \beta) \rightarrow \gamma)$. Conveniamo inoltre che un quantificatore seguito da più variabili stia ad indicare la ripetizione del quantificatore su ciascuna variabile. Ad esempio $\forall xy\phi$ sta per $(\forall x(\forall y \phi))$. Resta inteso che queste sono solo abbreviazioni informali e la definizione di L-formula resta quella sopra data.

Esempio 2.23. Sia $L = \{0, 1, +, \cdot, \leq\}$. La seguente espressione è una L-formula (con parentesi ridondanti omesse):

$$\forall x(\neg(x = 0) \to \exists y(y \cdot x = 1))$$

Definizione 2.24. Le *sottoformule* di una formula ϕ sono per definizione quelle formule che intervengono nella formazione induttiva di ϕ (inclusa la ϕ stessa).

Definizione 2.25. Un'occorrenza di una variabile x in una formula α si dice *legata* se occorre in una sottoformula β di α immediatamente preceduta da un quantificatore $\forall x$ o $\exists x$. Un'occorrenza non legata si dice *libera*. Le *variabili libere di una formula* sono le variabili che hanno almeno una occorrenza libera nella formula. Una formula senza variabili libere viene detta *formula chiusa* o *enunciato*.

Esempio 2.26. Ad esempio le variabili libere di $x = y \wedge \forall u \exists x(x = u)$ sono la x e la y (sebbene la x abbia anche una occorrenza legata).

`parametri` **Definizione 2.27.** Data una L-struttura M, una *formula con parametri da M* è una coppia (ϕ, v), che indicheremo anche $\phi(v)$, costituita da una L-formula ϕ e da una funzione v - detta valutazione - che assegna ad alcune variabili degli elementi di M. Se $\{x_1, \ldots, x_n\}$ è un insieme finito di variabili distinte, e v è la valutazione che assegna alla variabile x_i il valore $a_i \in M$, scriveremo $\phi(a_1/x_1, \ldots, a_n/x_n)$ per $\phi(v)$. Qualora sia chiaro dal contesto a quali variabili $x_1, \ldots, x_n$ ci si riferisca, scriveremo $\phi(a_1, \ldots, a_n)$ invece di $\phi(a_1/x_1, \ldots, a_n/x_n)$.

La formula con parametri $\phi(a_1/x_1, \ldots, a_n/x_n)$ viene detta *formula chiusa* o *enunciato* se le variabili libere di ϕ sono incluse in $\{x_1, \ldots, x_n\}$, ovvero se ogni variabile libera è stata valutata.

Per indicare che ϕ è una formula le cui variabili libere sono incluse in $\{x_1, \ldots, x_n\}$ talvolta scriveremo $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ invece di ϕ.

Esempio 2.28. Sia $L = \{<\}$ e sia $\phi(y, z)$ la L-formula $\exists x(y < x \wedge x < z)$. Allora $\phi(2/y, 4/z)$ è una L-formula con parametri da $\mathbb{Z}$ (considerata come L-struttura). Informalmente possiamo scrivere tale formula nella forma $\exists x(2 < x \wedge x < 4)$. Ciò a rigore comporta una perdita di informazione (il fatto che ϕ contiene le variabili y e z), ma si tratta di informazioni semanticamente irrilevanti, come si può verificare dopo aver definito l'interpretazione delle formule con parametri.

Definizione 2.29. (Interpretazione delle formule chiuse con parametri) Sia M una L-struttura, e sia $\phi(v)$ una L-formula chiusa con parametri da M. Diciamo che $\phi(v)$ è vera in M, e scriviamo $M \models \phi(v)$, se ciò segue dalle seguenti clausole induttive. L'induzione viene fatta sul numero dei connettivi della formula.

1. $M \models (\forall x \phi)(v)$ se e solo se per ogni $a \in dom(M)$, $M \models \phi(a/x, v)$; (Indichiamo con $(a/x, v)$ la valutazione che coincide con v sulle variabili diverse da x ed assegna ad x il valore a.)

2. $M \models (\exists x \phi)(v)$ se esiste $a \in dom(M)$ tale che $M \models \phi(a/x, v)$;

3. $M \models \neg\phi(v)$ se e solo se $M \not\models \phi(v)$ (cioè non vale $M \models \phi(v)$);
4. $M \models (\phi \wedge \psi)(v)$ se e solo se $M \models \phi(v)$ e $M \models \psi(v)$;
5. $M \models (\phi \vee \psi)(v)$ se e solo se $M \models \phi(v)$ o $M \models \psi(v)$;
6. $M \models (\phi \to \psi)(v)$ se e solo se $M \models \psi(v)$ o $M \not\models \phi(v)$.

Per la base dell'induzione dobbiamo considerare il caso delle *formule atomiche* (cioè senza connettivi). Aggiungiamo a tal fine le seguenti clausole, dove R è un simbolo di predicato di L di arietà n, e i vari t_i sono L-termini chiusi con parametri da M.

7. $M \models R(t_1, \ldots, t_n)$ se e solo se $(M(t_1), \ldots, M(t_n)) \in R_M$;
8. $M \models t_1 = t_2$ se e solo se $M(t_1)$ e $M(t_2)$ sono lo stesso elemento.

Esercizio 2.30. Se M è una L-struttura, e $\phi(v)$ è una L-formula chiusa con parametri da M, allora il valore di verità di $\phi(v)$ in M dipende solo dalla restrizione di v allle variabili libere di ϕ. In altre parole se v e v' coincidono sulle variabili libere di ϕ, allora $M \models \phi(v)$ sse $M \models \phi(v')$.

Definizione 2.31. Se ϕ è un L-enunciato diciamo che ϕ è vero in M, e scriviamo $M \models \phi$, se $M \models \phi(v)$ per ogni v (o equivalentemente per qualche v).

Definizione 2.32. Sia M una L-struttura. Un sottoinsieme X di M^n è $\emptyset$-*definibile* se esiste una L-formula $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ tale che X è l'insieme delle n-uple $\vec{a}$ da M tali che $M \models \phi(\vec{a})$. Diciamo che X è *definibile* se esiste una L-formula $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ con parametri da M tale che X è l'insieme delle n-uple $\vec{a}$ da M tali che $M \models \phi(\vec{a})$.

3 Teorie e modelli

3.1 Conseguenze logiche di una teoria

Definizione 3.1. Una *teoria* T è una coppia consistente di una segnatura L e di un insieme di L-enunciati chiamati *assiomi di* T.

Definizione 3.2. La teoria dei gruppi ha come assiomi le formule $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$, $x \cdot 1 = x$, $1 \cdot x = 1$, $x \cdot x^{-1} = 1$, $x^{-1} \cdot x = 1$, implicitamente precedute da $\forall xyz$, e formulate in una segnatura con un simbolo di costante 1 per l'elemento neutro, un simbolo di funzione binaria $\cdot$ per l'operazione di gruppo, e un simbolo per la funzione $x \mapsto x^{-1}$.

Definizione 3.3. Un *modello* di una L-teoria T è una L-struttura in cui risultano veri tutti gli assiomi di T. (Ad esempio un gruppo è, per definizione, un modello della teoria dei gruppi.) Se M è un modello di T scriviamo $M \models T$. Quindi $M \models T$ se per ogni assioma ϕ di T, si ha $M \models \phi$. Indichiamo con $Mod(T)$ la classe di tutti i modelli di T. Una L-teoria T si dice *coerente*, o *soddisfacibile*, se ha almeno un modello.

Definizione 3.4. (Conseguenza logica) Sia ϕ una L-formula chiusa e T una L-teoria. Diciamo che ϕ *segue logicamente* da T, e scriviamo $T \models \phi$, se ϕ è vera in tutti i modelli di T, ovvero non esiste alcuna L-struttura che rende veri tutti gli assiomi di T e non rende vera ϕ. In altre parole:

$$T \models \phi \text{ se e solo se } Mod(T) \subseteq Mod(\phi).$$

In particolare se T è *insoddisfacibile*, cioè se $Mod(T) = \emptyset$, allora vale sempre $T \models \phi$.

Definizione 3.5. (Formule logicamente valide) Sia L una data segnatura e sia ϕ una L-formula. Diciamo che ϕ è logicamente valida, e scriviamo $\models \phi$, se ϕ è valida in ogni L-struttura. Osserviamo che se T è la L-teoria con un insieme vuoto di assiomi, allora ogni L-struttura è modello di T, e pertanto si ha $\models \phi$ se e solo se $T \models \phi$.

Esercizio 3.6. Sia L la segnatura con un simbolo di funzione binario f. La L-formula

$$\forall xyz(f(f(x,y),z) = y) \to \forall xy(x = y)$$

è logicamente valida.

Definizione 3.7. (Teorie equivalenti) Due L-teorie T_1 e T_2 si dicono equivalenti se hanno le stesse conseguenze: $\{\phi \mid T_1 \models \phi\} = \{\phi \mid T_2 \models \phi\}$. È facile vedere che due teorie sono equivalenti se e solo se hanno gli stessi modelli.

`deduzione-semantico`

Osservazione 3.8. Sia T una L-teoria e siano α e β due L-formule chiuse. Allora $T \models \alpha \to \beta$ se e solo se $T, \alpha \models \beta$, dove con la notazione "T, α" abbiamo indicato la L-teoria che ha come assiomi la formula α e tutti gli assiomi di T.

Osservazione 3.9. $T \models \phi$ se e solo se $T, \neg\phi$ è insoddisfacibile.

3.2 Teorie deduttivamente chiuse

Definizione 3.10. Una L-teoria T si dice *deduttivamente chiusa* (da un punto di vista semantico) se l'insieme $\{\phi \mid T \models \phi\}$ delle sue conseguenze, coincide con l'insieme dei suoi assiomi.

Per una teoria deduttivamente chiusa abbiamo dunque $\phi \in T$ se e solo se $T \models \phi$ (dove per $\phi \in T$ intendiamo che ϕ è un assioma di T).

Esercizio 3.11. Ogni teoria T è equivalente ad una teoria T' deduttivamente chiusa: basta prendere come insieme di assiomi per T' l'insieme $\{\phi \mid T \models \phi\}$.

Da una teoria T possiamo ottenere una classe di L-strutture prendendo la classe $Mod(T)$ dei suoi modelli. Viceversa partendo da una classe di L-strutture, si può ottenere una L-teoria nel modo seguente.

Definizione 3.12. Data una classe K di L-strutture indichiamo con $Th(K)$ la L-teoria che ha come assiomi gli enunciati che sono veri in ogni struttura $\mathcal{A} \in K$.

Esercizio 3.13. La teoria $Th(K)$ sopra definita è deduttivamente chiusa. Inoltre ogni teoria deduttivamente chiusa T è della forma $Th(K)$ per una opportuna classe K di L-strutture: si prenda $K = Mod(T)$ e si osservi che $Th(Mod(T)) = \{\phi \mid T \models \phi\}$.

Definizione 3.14. Sia K una classe di L-strutture. Diciamo che K è una classe elementare se per qualche L-teoria T si ha $K = Mod(T)$. Ad esempio la classe dei gruppi è elementare.

Esercizio 3.15. L'operazione $T \mapsto Mod(T)$ porta da teorie a classi elementari di strutture, mentre $K \mapsto Th(K)$ porta da classi di strutture a teorie deduttivamente chiuse. Per una teoria deduttivamente chiusa T abbiamo $T = Th(Mod(T))$ (mentre per T arbitraria in generale vale solo l'inclusione "$\subseteq$") e per una classe elementare di strutture K abbiamo $K = Mod(Th(K))$ (mentre per K arbitraria in generale vale solo l'inclusione "$\subseteq$").

3.3 Teorie complete

Definizione 3.16. Una L-teoria T è *completa* se è coerente e per ogni L-formula chiusa ϕ, si ha $T \models \phi$ o $T \models \neg\phi$.

Esempio 3.17. La teoria T dei gruppi non è completa. Sia infatti ϕ l'enunciato $\forall x, y(x \cdot y = y \cdot x)$, che esprime la legge commutativa. Poiché esistono sia gruppi commutativi che non commutativi, non si ha nè $T \models \phi$ nè $T \models \neg\phi$.

Un esempio di gruppo non commutativo è il gruppo delle matrici 2×2, dove 1 è intepretato come la funzione identità, e $\cdot$ come la moltiplicazione riga per colonne di matrici. Un esempio di gruppo commutativo è il gruppo additivo dei numeri interi, dove il simbolo $\cdot$ viene intepretato come la somma, e il simbolo 1 come lo zero (siamo liberi di farlo!).

Definizione 3.18. Data una L-struttura M sia $Th(M)$ la teoria che ha come assiomi tutti gli L-enunciati veri in M. Allora $Th(M)$ è una L-teoria completa chiamata *teoria completa della struttura M*.

`completa` **Esercizio 3.19.** Una teoria coerente T è completa se e solo se, comunque si prenda un suo modello M, si ha che $Th(M)$ equivale a T.

Esercizio 3.20. Una L-teoria T è completa se e solo se per ogni coppia di L-enunciati α e β si ha: $T \models \alpha \vee \beta$ se e solo se $T \models \alpha$ o $T \models \beta$.

Esercizio 3.21. Sia T una L-teoria soddisfacibile e deduttivamente chiusa. Allora T è completa se e solo se è massimale tra le teorie soddisfacibili, cioè non è possibile ampliare l'insieme dei suoi assiomi in modo da ottenere una L-teoria che continua ad essere soddisfacibile.

Definizione 3.22. Due L-strutture $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ si dicono *elementarmente equivalenti*, $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ se e solo se hanno la stessa teoria completa: $Th(\mathcal{A}) = Th(\mathcal{B})$.

In altre parole due strutture $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono elementarmente equivalenti se e solo se non esiste alcuna proprietà del primo ordine che le distingue, cioè per ogni L-enunciato ϕ, $\mathcal{A} \models \phi$ se e solo se $\mathcal{B} \models \phi$.

Esercizio 3.23. Una L-teoria T è completa sse comunque si prendano due modelli di T essi sono elementarmente equivalenti.

Scriviamo $T' \supset T$ se T e T' sono teorie nella stessa segnatura e gli assiomi di T' includono quelli di T.

Esercizio 3.24. Sia T una L-teoria T e sia ϕ un L-enunciato. Supponiamo che per ogni L-teoria completa $T' \supset T$ si ha $T' \models \phi$. Allora $T \models \phi$.

3.4 Espansioni del linguaggio

Definizione 3.25. Dati due linguaggi L ed $L' \supset L$, diciamo che la L'-struttura A è una *espansione* della L-struttura B (o che B è una *restrizione* di A), se A e B hanno lo stesso dominio e interpretano nello stesso modo i simboli di L.

Ad esempio il gruppo $(\mathbb{R}, +, 0)$ è una restrizione del campo $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$.

Osservazione 3.26. Siano L ed L' due segnature, con $L' \supset L$. Data una L'-struttura M ed un L-enunciato ϕ, possiamo considerare ϕ anche come L'-enunciato e chiederci se è vero in M. È immediato verificare che ϕ è vero in M se e solo se ϕ è vero nella restrizione $M_{|L}$ di M alla segnatura L.

Ora sia T un insieme di L-enunciati. Se $L' \supset L$ possiamo considerare T sia come l'insieme degli assiomi di una L-teoria che come l'insieme degli assiomi di una L'-teoria. Risulta dalla osservazione precedente che T ha un modello come L-teoria se e solo se lo ha come L'-teoria. Similmente la relazione $T \models \phi$ non cambia se consideriamo T come L-teoria o come L'-teoria (dove ϕ è una L-formula).

Non è quindi necessario essere troppo pignoli sulla segnatura quando ci si chiede se un insieme di enunciati ha un modello, o se da un insieme di enunciati segue logicamente un altro enunciato. Quando la segnatura sia sottointesa o irrilevante identificheremo una teoria con l'insieme dei suoi assiomi.

Lemma 3.27. *Sia T un insieme di L-enunciati, sia $\phi(x)$ una L-formula e sia c un simbolo di costante non in L. Sono equivalenti:*

1. $T \models \phi(c)$ *(nella segnatura $L \cup \{c\}$).*
2. $T \models \forall x \phi(x)$ *(nella segnatura L).*

Dimostrazione. Se $T \not\models \forall x \phi(x)$, allora esiste un modello A di T ed un elemento $a \in A$ con $A \models \neg\phi(a)$. La struttura (A, a) che espande A interpretando c con a è allora un modello di $T \cup \{\neg\phi(c)\}$. □

3.5 Esercizi

Esercizio 3.28. Trovare una assiomatizzazione finita della teoria completa del gruppo delle simmetrie del triangolo.

Esercizio 3.29. Due strutture isomorfe sono elementarmente equivalenti. Se due strutture sono elementarmente equivalenti ed una delle due è finita, allora esse sono isomorfe.

Esercizio 3.30. Sia Γ il seguente insieme di assiomi:
1) $\forall x(x + 0 = x)$,
2) $\forall xy(x + s(y) = s(x + y))$,
3) $\forall xy(s(x) = s(y) \to x = y)$,
4) $\forall x \neg(s(x) = 0)$,
5) $\forall x(x \neq 0 \to \exists y(x = s(y))$.
Stabilire se:
a) $\Gamma \models \forall x(x + x = s(0) \to x \neq 0)$.
b) $\Gamma \models \neg\exists y[y + y = s(0)]$.
c) $\Gamma \models \forall xy(x + y = y + x)$.

Esercizio 3.31. Sia $L = (0, s, R, \min)$ dove 0 è un simbolo di costante, s è un simbolo di funzione unaria, R è un simbolo di predicato binario, min è un simbolo di predicato ternario.
Sia Γ il seguente insieme di L-formule:
$\forall xy(R(x, y) \to \min(x, y, x)$
$\forall xyz(R(x, y) \wedge R(y, z) \to R(x, z))$
$\forall xR(x, x)$
$\forall xR(x, s(x))$
Nella interpretazione che abbiamo in mente R è la relazione di minore o uguale, ma ci potrebbero essere altre interpretazioni. Trovate l'insieme di tutti i termini chiusi t tali che:
a) $\Gamma \models \min(s0, sss0, t)$.
Trovate l'insieme di tutti i termini chiusi t tali che:
b) $\Gamma \models \min(s0, t, s0)$.
Giustificate la risposta.

4 Compattezza

Nel seguito assumeremo, per semplificare le dimostrazioni, che nelle regole per la formazione delle formule non sia presente il quantificatore universale. Ciò non comporta perdita di generalità in quanto $\forall x\phi$ può essere definito come $\neg\exists x\neg\phi$ (essendo le due formule logicamente equivalenti).

4.1 Insiemi di Hintikka

Definizione 4.1. (Insiemi di Hintikka) Sia T un insieme di L-formule chiuse. Diciamo che T è un insieme di Hintikka (per L) se per ogni scelta di L-formule chiuse ϕ, ψ si ha:

1. se $\phi \in T$, allora $\neg\phi \notin T$,
2. se $\neg\neg\phi \in T$, allora $\phi \in T$,

3. se $\phi \wedge \psi \in T$, allora $\phi \in T$ e $\psi \in T$,
4. se $\neg(\phi \wedge \psi) \in T$, allora $\neg\phi \in T$ o $\neg\psi \in T$,
5. se $\phi \vee \psi \in T$, allora $\phi \in T$ o $\psi \in T$,
6. se $\neg(\phi \vee \psi) \in T$, allora $\neg\phi \in T$ e $\neg\psi \in T$,
7. se $\phi \to \psi \in T$, allora $\neg\phi \in T$ o $\psi \in T$,
8. se $\neg(\phi \to \psi) \in T$, allora $\phi \in T$ e $\neg\psi \in T$,
9. se $\exists x\phi(x) \in T$, allora esiste un L-termine chiuso t, tale che $\phi(t) \in T$,
10. se $\neg\exists x\phi(x) \in T$, allora per ogni L-termine chiuso t, $\neg\phi(t) \in T$.

Per linguaggi senza simbolo di uguaglianza = possiamo fermarci qui. Altrimenti dobbiamo aggiungere le seguenti proprietà dell'uguaglianza:

1. (riflessività) per ogni L-termine chiuso t, $t = t \in T$,
2. (sostituibilità) per ogni L-formula $\phi(x)$ e termini chiusi t e t', se $t = t' \in T$, allora $\phi(t) \in T$ se e solo se $\phi(t') \in T$.

(Nella ultima clausola possiamo anche limitarci a formule atomiche $\phi(x)$.)

Esercizio 4.2. Si consideri un linguaggio senza simbolo di uguaglianza nella segnatura $L = \{R, c\}$, dove R è un simbolo di relazione binario e c è un simbolo di costante. Si trovi un insieme di Hintikka finito contenente la formula $\forall x\exists y(R(x, y) \vee R(y, x))$. Si dimostri che se ampliamo L con l'aggiunta di un simbolo di funzione f, qualsiasi insieme di Hintikka contenente la formula sopra data è infinito.

Osservazione 4.3. L'insieme delle L-formule ha cardinalità $|L| + \omega$ (che è uguale a $|L|$ se $|L|$ è infinito). L'insieme degli L-termini ha cardinalità $\leq |L|+\omega$.

`esistenza-modello` **Teorema 4.4.** *Ogni insieme di Hintikka T ha un modello M. Inoltre possiamo prendere M in modo tale che ogni elemento del dominio di M è l'interpretazione di un termine chiuso della segnatura L di T. Quindi in particolare $|M| \leq |L|+\omega$.*

Dimostrazione. Per semplicità consideriamo prima il caso di linguaggi senza il simbolo di uguaglianza né simboli di funzione. In questo caso gli unici termini chiusi di L sono le costanti. Prendiamo come $dom(M)$ l'insieme delle costanti di L. Dato un simbolo di relazione R di arietà n, definiamo la sua interpretazione $R^M \subseteq dom(M)^n$ come l'insieme di tutte le n-uple $(c_1, \dots, c_k)$ tali che $R(c_1, \dots, c_n) \in T$. In questo modo abbiamo definito una L-struttura che rende veri tutti gli enunciati atomici in T, e falsi gli enunciati atomici non in T. Sia ora ϕ un arbitrario L-enunciato. Usando le proprietà di Hintikka segue per induzione sul numero dei connettivi di ϕ che se $\phi \in T$, allora $M \models \phi$ (se T è un insieme di Hintikka completo sarà anche vero che se $\phi \notin T$, allora $M \models \neg\phi$).

Consideriamo ad esempio il caso $\neg\phi \in T$. Dalle proprietà di Hintikka segue che $\phi \notin T$. Se ϕ è atomica, concludiamo che $M \models \neg\phi$ per definizione di M. Se invece ϕ non è atomica, allora deve cominciare con un connettivo. Supponiamo ad esempio che tale connettivo sia $\vee$, cioè $\neg\phi = \neg(\alpha \vee \beta)$. Usando le proprietà di Hintikka abbiamo $\neg\alpha \in T$ e $\neg\beta \in T$. Per induzione possiamo concludere $M \models \neg\alpha$ e $M \models \neg\beta$, da cui poi segue $M \models \neg(\alpha \vee \beta)$.

Lasciamo al lettore la verifica degli altri casi. Questo conclude la dimostrazione nel caso il linguaggio non abbia simboli di funzione e il simbolo di uguaglianza.

Consideriamo ora il caso generale. Ricordiamo che il simbolo di uguaglianza deve essere interpretato come la relazione di uguaglianza, quindi se $t = t' \in T$ dobbiamo fare in modo che t e t' siano interpretati con lo stesso elemento del modello M che vogliamo costruire.

A tal fine prendiamo come $dom(M)$ l'insieme degli L-termini chiusi quozientato rispetto alla relazione di equivalenza $\sim$ definita da $t \sim t'$ sse $t = t' \in T$. Segue dalle proprietà degli insiemi di Hintikka che $\sim$ è in effetti una relazione di equivalenza. Indichiamo con $t/\sim$ la classe di equivalenza di t rispetto a $\sim$.

Dato un simbolo di funzione f di L di arietà n definiamo la sua interpretazione $f^M : dom(M)^n \to dom(M)$ ponendo: $f^M(t_1/\sim, \dots, t_n/\sim) = f(t_1, \dots, t_n)/\sim$. Questa definizione è ben posta perchè dalla clausola di sostituibilità nella definizione degli insiemi di Hintikka (applicata ripetute volte) segue che se $t_1 \sim t'_1, \dots, t_n \sim t'_n$ allora $f(t_1, \dots, t_n) \sim f(t'_1, \dots, t'_n)$.

Resta solo da definire l'interpretazione R^M dei simboli di relazione di L (se ve ne sono). Se R ha arietà n e $t_1, \dots, t_n$ sono termini chiusi, poniamo $(t_1/\sim, \dots, t_n/\sim) \in R^M$ sse $R(t_1, \dots, t_n) \in T$. Questo è ben posto per la clausola di sostituibilità. Abbiamo così definito una L-struttura M.

Per induzione sulla lunghezza dei termini chiusi t, segue che $t^M = t/\sim$. Quindi se $t = t' \in T$, allora $t^M = t/\sim = t'/\sim = t'^M$, e quindi $M \models t = t'$ (si noti che per abuso di linguaggio abbiamo usato "=" sia come simbolo che come la vera relazione di uguaglianza). Viceversa se $t = t' \notin T$, allora $t/\sim \neq t'/\sim$ e $M \models t \neq t'$. Quindi M rende veri gli enunciati di T della forma $t = t'$, e falsi gli enunciati della forma $t = t'$ che non sono in T. Similmente si verifica che $R(t_1, \dots, t_n) \in T$ sse $M \models R(t_1, \dots, t_n)$. Quindi tra gli enunciati atomici (senza connettivi) M rende veri tutti e soli quelli che sono in T. Ragionando per induzione sulla complessità della formula, usando le proprietà di Hintitkka per i passi induttivi, vediamo che ogni $\phi \in T$ (non necessariamente atomica) è vera M. Consideriamo nel dettaglio il caso in cui ϕ è della forma $\exists x\theta(x)$. Se $\phi \in T$, allora essendo T di Hintikka deve esistere un termine chiuso t tale che $\theta(t) \in T$. Per induzione $\theta(t)$ è vero nel modello M. Ma allora deve essere vero anche $\exists x\theta(x)$. $\square$

4.2 Teorema di compattezza

Definizione 4.5. Un insieme di L-enunciati si dice *finitamente soddisfacibile* se ogni suo sottoinsieme finito è soddisfacibile.

completion **Lemma 4.6.** *Sia Σ un insieme soddisfacibile di L-enunciati. Allora per ogni L-enunciato σ, almeno uno dei due insiemi $\Sigma \cup \{\sigma\}$ o $\Sigma \cup \{\neg\sigma\}$ è soddisfacibile. Similmente se rimpiazziamo "soddisfacibile" con "finitamente soddisfacibile".*

Dimostrazione. Sia M un modello di Σ. In M almeno uno degli enunciati σ o $\neg\sigma$ è vero. Quindi almeno uno dei due insiemi $\Sigma \cup \{\sigma\}$ o $\Sigma \cup \{\neg\sigma\}$ è soddisfacibile (avendo come modello lo stesso M). La prima parte è cosí dimostrata.

Il caso della finita soddisfacibilità si dimostra come segue: supponiamo che nè $\Sigma \cup \{\sigma\}$ nè $\Sigma \cup \{\neg\sigma\}$ sia finitamente soddisfacibile. Esiste allora un sottoinsieme finito Σ' di Σ tale che nè $\Sigma' \cup \{\sigma\}$ nè $\Sigma' \cup \{\neg\sigma\}$ sia soddisfacibile (verificare!). Ma allora neppure Σ' è soddisfacibile. Pertanto Σ non è finitamente soddisfacibile. $\square$

henkin **Lemma 4.7.** *Sia Σ un insieme di L-enunciati, sia $\phi(x)$ una L-formula nella variabile x e sia c sia un simbolo di costante non occorrente nè in Σ. Allora $\Sigma \cup \{\phi(c)\}$ è soddisfacibile se e solo se $\Sigma \cup \{\exists x \phi(x)\}$ è soddisfacibile. Similmente se rimpiazziamo "soddisfacibile" con "finitamente soddisfacibile".*

Dimostrazione. Poiché $\phi(c) \to \exists x \phi(x)$ è logicamente valida, ogni modello di $\phi(c)$ è modello di $\exists x \phi(x)$. L'implicazione inversa $\exists x \phi(x) \to \phi(c)$ non è logicamente valida (verificare!), tuttavia ogni modello M di $\exists x \phi(x)$ può essere espanso ad un modello M' di $\phi(c)$ interpretando c come un qualsiasi elemento $a \in M$ tale che $M \models \phi(a)$ (l'esistenza di tale a essendo garantita dalla verità di $\exists x \phi(x)$ in M). $\square$

completamento **Lemma 4.8.** *Sia Σ un insieme di L-enunciati finitamente soddisfacibile. Allora esiste una segnatura $L' \supset L$ e un insieme di L'-enunciati $\Sigma' \supset \Sigma$ con le seguenti proprietà:*

1. *Σ' è finitamente soddisfacibile.*
2. *Per ogni enunciato σ di L', esattamente uno degli enunciati σ o $\neg\sigma$ appartiene a Σ'. (Quindi Σ' è un insieme finitamente soddisfacibile massimale di L'-enunciati.)*
3. *Σ' ha la proprietà di Henkin, ovvero per ogni enunciato della forma $\exists x \phi(x)$ in Σ', esiste almeno una costante c di L' tale che $\phi(c) \in \Sigma'$.*
4. *$|L'| + \omega = |L| + \omega$.*

Dimostrazione. Per semplicità assumiamo dapprima che il linguaggio sia numerabile. Sia $\{c_i \mid i < \omega\}$ un insieme numerabile di nuovi simboli di costante. Sia L' l'espansione di L tramite questi nuovi simboli. Sia $(\sigma_i \mid i < \omega)$ una enumerazione di tutti gli L'-enunciati. A partire da $\Sigma_0 = \Sigma$ costruiamo, in base ai lemmi 4.6 e 4.7, una successione crescente $\Sigma_0 \subset \Sigma_1 \subset \Sigma_2 \ldots$ di insiemi finitamente soddifacibili di L'-enunciati, ognuno dei quali è ottenuto dal precedente con l'aggiunta di uno o due enunciati nel modo seguente:

1. Se $\Sigma_i \cup \{\sigma_i\}$ è finitamente soddisfacibile allora $\sigma_i \in \Sigma_{i+1}$. Se inoltre σ_i ha la forma $\exists x \phi(x)$ allora $\phi(c_j) \in \Sigma_{i+1}$ per qualche c_j che non occorre nelle formule di $\Sigma_i \cup \{\phi(x)\}$.

2. Se $\Sigma_i \cup \{\sigma_i\}$ non è finitamente soddisfacibile allora $\neg\sigma_i \in \Sigma_{i+1}$.

Sia Σ' l'unione dei Σ_i. Per costruzione Σ' verifica le proprietà richieste.

Il caso in cui L sia di cardinalità $\kappa > \omega$ è analogo. Si aggiunge una successione $(c_i \mid i < \kappa)$ di simboli di costante per formare L'. Si fissa una enumerazione $(\sigma_i \mid i < \kappa)$ delle L' formule, e si definisce una successione crescente $(T_i \mid i < \kappa)$ di teorie come sopra con l'unica differenza che se i è un ordinale limite T_i è definito come l'unione dei precedenti T_j. □

Lemma 4.9. *Sia Σ' e L' come nel Lemma 4.8. Allora Σ' è di Hintikka.*

Dimostrazione. Verifichiamo ad esempio la clausola del $\vee$ nella definizione di insieme di Hintikka. Supponiamo che $\alpha \vee \beta \in \Sigma'$ ma che per assurdo $\alpha \notin \Sigma'$ e $\beta \notin \Sigma'$. Le negazioni delle due formule appartengono allora Σ' e pertanto l'insieme $\{\neg\alpha, \neg\beta, \alpha \vee \beta\}$ è incluso in Σ' contraddicendone la finita soddisfacibilità. Le altre clausole si dimostrano analogamente. □

`compattezza` **Teorema 4.10.** *Sia Σ un insieme di L-enunciati. Σ è soddisfacibile se e solo se Σ è finitamente soddisfacibile.*

Dimostrazione. Per i risultati precedenti Σ è contenuto in un insieme di Hintikka e pertanto ha un modello. □

`weakLSbasso` **Teorema 4.11.** *Sia T una L-teoria. Se T è soddisfacibile allora T ha un modello di cardinalità $\leq |L| + \omega$.*

Dimostrazione. Se T è soddisfacibile allora in particolare T è finitamente soddisfacibile. Esiste dunque un insieme di Hintikka $T' \supset T$ in una segnatura $L' \supset L$ con $|L'| + \omega = |L| + \omega$. Per il Teorema 4.4 T' ha un modello della cardinalità richiesta, e quindi anche T lo ha. □

4.3 Esercizi

Esercizio 4.12. Si mostri che non esiste una L-teoria il cui unico modello, a meno di isomorfismi, sia l'anello degli interi.

Esercizio 4.13. Usare il teorema di compattezza per mostrare che non esiste alcuna formula del primo ordine ϕ nella segnatura $\{\leq\}$ tale che $M \models \phi$ se e solo se M è un buon ordine, dove un buon ordine è un ordine lineare senza successioni decrescenti infinite. In altre parole la classe dei buoni ordini non è una classe elementare.

Esercizio 4.14. Si mosti che la classe dei grafi connessi non è una classe elementare di strutture.

Esercizio 4.15. Usare il teorema di compattezza per dimostrare che se un grafo infinito non è 3-colorabile (ovvero non esiste una funzione dai vertici ad un insieme di 3 colori in modo che nodi adiacenti ricevano colore diverso), allora anche un suo sottografo finito non è 3-colorabile. Suggerimento: si trovi una teoria i cui modelli corrispondono alle colorazioni del grafo.

5 Teoremi di Lowenheim-Skolem

5.1 Lowenheim-Skolem verso l'alto: forma debole

weakLSalto **Teorema 5.1.** *Sia T una L-teoria.*

1. *Supponiamo che per ogni intero positivo n esiste un modello M_n di T di cardinalità maggiore di n. Allora T ha un modello infinito.*

2. *Supponiamo che T abbia un modello infinito. Allora per ogni cardinale $\kappa \geq |L| + \omega$, T ha un modello di cardinalità κ.*

Dimostrazione. Assumiamo che per ogni intero positivo n esista un modello M_n di T di cardinalità maggiore di n. (Questa ipotesi è verificata in particolare se T ha un modello infinito.) Sia $\kappa \geq |L| + \omega$. Mostriamo che T ha un modello di cardinalità κ (ciò dimostra sia il primo che il secondo punto). Sia L' il linguaggio ottenuto da L con l'aggiunta di un insieme C di cardinalità κ di nuovi simboli di costante. Sia T' la L'-teoria i cui assiomi sono quelli di T più tutti gli assiomi della forma $c \neq c'$, dove c, c' sono costanti distinte di C. Dimostriamo innanzitutto che ogni sottoteoria finita S di T' ha un modello. A tal fine osserviamo che S può menzionare solo un insieme finito - diciamo n - delle costanti di C. Scegliamo un modello A di T di cardinalità $\geq n$. Sia A' la L'-struttura che espande A interpretando le n costanti di C menzionate in S con n elementi distinti di A. Tale A' è un modello di S. Per il teorema di compattezza possiamo concludere che T' ha un modello B, che per il teorema 4.11 può essere scelto di cardinalità $\leq \kappa$, ma che d'altra parte deve essere di cardinalità $\geq \kappa$ in quanto dovendo verificare tutti i nuovi assiomi $c \neq c'$ deve interpretare le costanti di C con elementi distinti del dominio. La restrizione di B al linguaggio originale L è una L-struttura di cardinalità κ modello di T. $\square$

5.2 Immersioni elementari

Definizione 5.2. Un morfismo $f \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ tra due L-strutture si dice una *immersione elementare* se per ogni n e per ogni L-formula $\phi(x_1, \dots, x_n)$ con variabili libere incluse in $\{x_1, \dots, x_n\}$ e per ogni $a_1, \dots, a_n \in A$, si ha:

$$\mathcal{A} \models \phi(a_1, \dots, a_n), \text{ se e solo se } \mathcal{B} \models \phi(f(a_1), \dots, f(a_n))$$

Una sottostruttura $\mathcal{B}$ di $\mathcal{A}$ si dice *sottostruttura elementare*, e scriviamo $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$, se e solo se la inclusione di $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ è una immersione elementare.

Scriviamo $\mathcal{A} \precsim \mathcal{B}$ se esiste una immersione elementare da $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$.

Esempio 5.3. Sia $L = (<)$ e consideriamo la L-struttura costituita dall'insieme ordinato dei numeri interi $\mathbb{Z}$, e la sua sottostruttura $2\,\mathbb{Z}$ costituita dai numeri pari. Allora $2\,\mathbb{Z}$ è elementarmente equivalente a $\mathbb{Z}$ (in quanto è isomorfa), ma non è una sua sottostruttura elementare perchè la formula $\exists x(2 < x \wedge x < 4)$ è vera in $\mathbb{Z}$ ma non in $2\,\mathbb{Z}$.

Definizione 5.4. Sia M una L-struttura e sia A un sottoinsieme del dominio di M. Sia L_A il linguaggio ottenuto da L con l'aggiunta di nuovi simboli di costante c_a corrispondenti agli elementi a di A. Espandiamo M ad una L_A struttura interpretando c_a con a, e denotiamo $(M, a)_{a\in A}$ la struttura espansa. Osserviamo che per ogni L-formula $\phi(x_1, \dots, x_n)$ e per ogni $a_1, \dots, a_n \in A$ si ha

$$M \models \phi(a_1, \dots, a_n) \text{ se e solo se } (M, a)_{a\in A} \models \phi(c_{a_1}, \dots, c_{a_n}).$$

Indichiamo con $Th((M, a)_{a\in A})$ la teoria completa della struttura $(M, a)_{a\in A}$. In particolare possiamo prendere $A = M$. Il *diagramma elementare* di M è per definizione la L_M-teoria completa

$$ED(M) = Th((M, m)_{m\in M})$$

.

ED **Lemma 5.5.** *Siano M, N L-strutture. Allora M può essere immersa elementarmente in N se e solo se N può essere espansa ad un modello di $ED(M)$. In altre parole $M \lesssim N_{|L}$ se e solo se $N \models ED(M)$.*

Dimostrazione. Supponiamo che $f : M \to N$ sia una immersione elementare. Espandiamo N ad una L_M-struttura $N' = (N, f(m))_{m\in M}$ interpretando c_m con $f(m)$. È immediato verificare che $N' \models ED(M)$.

Viceversa se N ammette una espansione N' modello di $ED(M)$, allora la funzione $f : M \to N$ che manda m nell'interpretazione di c_m in N' è una immersione elementare di M in N. □

estensione-elementare **Corollario 5.6.** *Sia M una L-struttura e sia T una L_M-teoria. Una condizione necessaria e sufficiente affinché esista $N \succ M$ tale che $N \models T$ è che $ED(M) \cup T$ sia soddisfacibile.*

5.3 Löweinheim - Skolem verso l'alto: forma forte

strongLSalto **Teorema 5.7.** *(Löweinheim - Skolem verso l'alto) Sia M una L-struttura infinita. Sia κ un cardinale $\geq |L_M| = |M| + |L| + \omega$. Allora M ha una estensione elementare di cardinalità κ.*

Dimostrazione. Per il Teorema 5.1 $ED(M)$ ha un modello N di cardinalità κ. Per il Lemma 5.5 $M \lesssim N_{|L}$. Rimpiazzando N con una copia isomorfa possiamo assumere $M \prec N_{|L}$. □

5.4 Lowenheim-Skolem verso il basso

Tarski-Vaught

Lemma 5.8. *(Criterio di Tarski - Vaught) Consideriamo due L-strutture $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. Supponiamo che per ogni L-formula della forma $\exists y \phi(y, x_1, \dots, x_n)$ e parametri $a_1, \dots, a_n \in A$, si abbia che se $\mathcal{B} \models \exists y \phi(y, a_1, \dots, a_n)$, allora esiste $a \in A$ tale che $\mathcal{B} \models \phi(a, a_1, \dots, a_n)$. Ne segue che $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$.*

Dimostrazione. Per induzione sul numero dei connettivi della formula $\theta(x_1, \dots, x_k)$ mostriamo che per ogni $a_1, \dots, a_k \in A$, $\mathcal{B} \models \theta(a_1, \dots, a_k)$ se e solo se $\mathcal{A} \models \theta(a_1, \dots, a_k)$.

Se θ è atomica, allora l'equivalenza da dimostrare segue dal fatto che $\mathcal{A}$ è una sottostruttura di $\mathcal{B}$.

Se l'equivalenza da dimostrare vale per una classe di formule, essa vale anche per tutte le formule che si ottengono da esse usando i connettivi booleani.

L'unico caso interessante è quello di formule della forma $\exists y \phi(y, x_1, \dots, x_n)$ per le quali ragioniamo come seque. Supponiamo che $\mathcal{B} \models \exists y \phi(y, \vec{a})$. Allora per le ipotesi esiste $c \in A$ tale che $\mathcal{B} \models \phi(c, \vec{a})$. Per ipotesi induttiva $\mathcal{A} \models \phi(c, \vec{a})$. Dunque $\mathcal{A} \models \exists y \phi(y, \vec{a})$. L'implicazione inversa è facile. $\square$

Teorema 5.9. *(Teorema di Lowenheim-Skolem verso il basso) Sia M una L-struttura di cardinalità κ, sia A un sottoinsieme del dominio di M e sia λ un cardinale tale che $|L| + \omega + |A| \leq \lambda \leq \kappa$. Allora esiste una sottostruttura elementare $N \prec M$ di cardinalità λ il cui dominio include A.*

Dimostrazione. Sostituendo A con un insieme più grande se necessario possiamo assumere $|A| = \lambda$. La cardinalità dell'insieme delle L_A formule è λ. Per ogni L_A formula $\phi(x)$ tale che $M \models \exists x \phi(x)$ scegliamo un $b_\phi \in M$ tale che $M \models \phi(b_\phi)$ e sia A_1 l'unione di A e dell'insieme dei b_ϕ al variare di $\phi = \phi(x)$ tra la L_A formule nella variabile x. Costruiamo una successione di insiemi $A \subset A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$ dove ogni A_{i+1} è ottenuto da A_i nello stesso modo in cui A_1 è stato definito a partire da A. Sia $B = \bigcup_{i \in \omega} A_i$ la loro unione. Allora B è un sottoinsieme di M di cardinalità λ e per ogni L_B-formula $\phi(x)$ tale che $M \models \exists x \phi(x)$ esiste $b \in B$ tale che $M \models \phi(b)$ (in quanto i parametri di $\phi(x)$, essendo in numero finito, appartengono a qualche A_i e b può essere scelto in A_{i+1}). È facile vedere che B è il dominio di una sottostruttura di M, e per il Lemma 5.8 B è il dominio di una sottostruttura elementare di M. $\square$

5.5 Completezza delle teorie κ-categoriche

Definizione 5.10. Sia κ un numero cardinale. Una L-teoria T è κ-categorica se T ha un modello di cardinalità κ e tutti i modelli di T di cardinalità κ sono isomorfi.

Teorema 5.11. *Sia T una L-teoria senza modelli finiti. Se $\kappa \geq |L| + \omega$ e T è κ-categorica allora T è completa.*

Dimostrazione. Siano M, N modelli di T e siano T_1, T_2 le teorie complete di M, N rispettivamente. Tali teorie sono estensioni complete di T. Per il teorema

5.1 (usando il fatto che M, N sono infiniti) T_1 ha un modello M_1 di cardinalità κ e T_2 ha un modello M_2 di cardinalità κ. In particolare M_1, M_2 sono modelli di T di cardinalità κ quindi sono isomorfi per le ipotesi. Ne segue che $T_1 = T_2$ e $M \equiv N$. Quindi T è completa. □

5.6 Amalgamazione di immersioni elementari

jep **Lemma 5.12.** *Siano M, N due L-strutture elementarmente equivalenti. Allora esiste una L-truttura C ed immersioni elementari $f \colon M \to C$ ed $g \colon N \to C$. (Inoltre possiamo fare in modo che una delle due immersioni sia l'inclusione.)*

Dimostrazione. Dimostriamo la prima parte. Sia $ED(M)$ il diagramma elementare di M formulato nel linguaggio $L \cup \{c_m \mid m \in \mathrm{dom}(M)\}$ dove c_m sono nuovi simboli di costante distinti tra loro, e sia $ED(N)$ il diagramma elementare di N formulato nel linguaggio $L \cup \{d_n \mid n \in \mathrm{dom}(N)\}$ dove d_n sono simboli di costante distinti tra loro e da tutti i c_m (quindi anche se M ed N avessero elementi in comune, le corripondenti costanti sarebbero diverse). È sufficiente mostrare che la teoria $T = ED(M) \cup ED(N)$ è coerente, perché poi basta prendere com C un modello di questa teoria (e come immersioni elementari le funzioni che mandano $m \in M$ nell'interpretazione di c_m in C, ed $n \in N$ nell'interpretazione di d_n in C). Se T fosse incoerente per compattezza lo sarebbe una sua sottoteoria finita. In altre parole ci sarebbero due L-formule $\varphi(\vec{x})$ e $\theta(\vec{x})$ tali che $\varphi(c_{m_1}, \dots, c_{m_k}) \in ED(M)$, $\theta(d_{n_1}, \dots, d_{n_l}) \in ED(N)$ e $\varphi(c_{m_1}, \dots, c_{m_k}) \models \neg\theta(d_{n_1}, \dots, d_{n_l})$. Siccome le costanti sono distinte, ne segue che $\varphi(c_{m_1}, \dots, c_{m_k}) \models \forall x_1, \dots, x_l \neg\theta(x_1, \dots, x_l)$. Poiché $(M, m_1, \dots, m_k)$ è modello dell'antecendente, ne segue che $M \models \forall x_1, \dots, x_l \neg\theta(x_1, \dots, x_l)$, e essendo $N \equiv M$ anche $N \models \forall x_1, \dots, x_l \neg\theta(x_1, \dots, x_l)$, contraddicendo il fatto che $N \models \theta(n_1, \dots, n_l)$. □

Analogamente si dimostra:

Lemma 5.13. *Siano $i \colon P \to M$ e $j \colon P \to N$ immersioni elementari di L-strutture. Allora esiste C ed immersioni elementari $f \colon M \to C$ ed $g \colon N \to C$ tali che $f \circ i = g \circ j$.*

Dimostrazione. Basta aggiungere al comune linguaggio di M ed N costanti per ciascun elemento di P. □

6 Isomorfismi parziali

6.1 Isomorfismi parziali ed ω-categoricità

Definizione 6.1. Date due L-strutture M ed N, un isomorfismo parziale tra M e N è una bigezione f tra un sottoinsieme A di M e un sottoinsieme B di N che induce un isomorfismo tra la sottostruttura generata da A in M e la sottostruttura generata da B in N.

Dati elementi $a_i \in M$ e $b_i \in N$ per $i < n$ scriveremo $(M, a_0, \dots, a_n) \equiv_{QF} (N, b_0, \dots, b_n)$ se la funzione che manda a_i in b_i per $i < n$ è un isomorfismo parziale tra M ed N.

Il suffisso QF sta per "quantifier free" ed è giustificato dalla seguente osservazione.

Osservazione 6.2. $(M, a_0, \dots, a_n) \equiv_{QF} (N, b_0, \dots, b_n)$ se e solo se per ogni formula $\phi(x_1, \dots, x_n)$ senza quantificatori, $M \models \phi(a_1, \dots, a_n)$ se e solo se $N \models \phi(b_1, \dots, b_n)$ (verificate!).

Esempio 6.3. Nel caso M, N siano ordini lineari, $(M, a_1, \dots, a_n) \equiv_{QF} (N, b_1, \dots, b_n)$ significa che per ogni $i, j < n$ si ha: $a_i <_A a_j \iff b_i <_B b_j$ e $a_i = a_j \iff b_i = b_j$.

Definizione 6.4. Sia I un insieme di isomorfismi parziali finiti tra M e N. Scriviamo $(M, a_1, \dots, a_n) \equiv_I (N, b_1, \dots, b_n)$ se esiste $f \in I$ (il cui dominio include $\{a_1, \dots, a_n\}$) che manda a_i in b_i. Diciamo che I gode della proprietà del va e vieni se valgono le seguenti proprietà.

1. Se $(M, \vec{a}) \equiv_I (N, \vec{b})$ e $c \in M$, allora esiste $d \in N$ tale che $(M, \vec{a}, c) \equiv_I (N, \vec{b}, d)$.
2. Se $(M, \vec{a}) \equiv_I (N, \vec{b})$ e $d \in N$, allora esiste $c \in M$ tale che $(M, \vec{a}, c) \equiv_I (N, \vec{b}, d)$.

Definizione 6.5. Un ordine lineare $(X, <)$ si dice denso se verifica l'assioma $\forall x, y (x < y \to \exists z (x < z \land z < y))$, e si dice senza estremi se non ha nè massimo nè minimo elemento, ovvero verifica gli assiomi $\forall x \exists y (x < y)$ e $\forall x \exists y (y < x)$.

Esercizio 6.6. Se $(A, <)$ e $(B, <)$ sono ordini lineari densi e senza estremi, allora l'insieme di tutti gli isomorfismi parziali finiti tra A e B è non vuoto e gode della proprietà del va e vieni.

Talvolta è utile considerare un sottoinsieme proprio dell'insieme di tutti gli isomorfismi parziali:

Esercizio 6.7. Siano$(A, <)$ e $(B, <)$ ordini lineari densi con massimo ma senza minimo. Allora l'insieme I degli isomorfismi parziali finiti tra A e B che mandano il massimo nel massimo è non vuoto e gode della proprietà del va e vieni.

`omega-iso` **Teorema 6.8.** *Se A e B sono due L-strutture numerabili e se I è un insieme non vuoto di isomorfismi parziali finiti tra A e B che gode della proprietà del va e vieni, allora A è isomorfo a B.*

Dimostrazione. Fissiamo un buon ordine di A e B di tipo ω e definiamo induttivamente $a_n \in A$ e $b_n \in B$ nel modo sequente. Supponendo induttivamente che $(M, a_0, \dots, a_n) \equiv_I (N, b_0, \dots, b_n)$, se n è pari scegliamo come a_{n+1} il minimo elemento di $A \setminus \{a_i : i < n\}$ rispetto al buon ordine fissato, e scegliamo come

b_{n+1} un qualsiasi elemento u di B tale che $((\vec{a}, a_{n+1}), (\vec{b}, u)) \in I$. Se n è dispari scegliamo come b_{n+1} il minimo elemento di $B \setminus \{b_i : i < n\}$ nell'ordine fissato, e come a_{n+1} un elemento v di A tale che $((\vec{a}, v), (\vec{b}, b_{n+1})) \in I$. L'isomorfismo cercato tra A e B manda a_i in b_i per ogni $i \in \mathbb{N}$ (verificate!). □

`Cantor` **Corollario 6.9.** *Sia T la teoria degli ordini lineari densi e senza estremi. Allora T è ω-categorica (e quindi completa).*

Esercizio 6.10. La teoria degli ordini lineari densi con almeno due elementi ha esattamente quattro estensioni complete.

6.2 Esempi ed esercizi

Esercizio 6.11. Un atomo in un'algebra di boole è un elemento minimale tra gli elementi strettamente maggiori dello zero dell'algebra. La teoria delle algebre di Boole senza atomi è ω-categorica.

Esercizio 6.12. Un grafo casuale è un insieme V dotato di una relazione binaria simmetrica e antiriflessiva E tale che per ogni coppia (A, B) di sottoinsiemi finiti di V esiste un elemento $v \in V$ tale che $E(a, v)$ per ogni $a \in A$ e $\neg E(b, v)$ per ogni $b \in B$. La teoria dei grafi casuali è ω-categorica.

6.3 Il caso non numerabile

Il Teorema 6.8 si può generalizzare. A tal fine diamo una definizione leggermente diversa ma sostanzialmente equivalente del concetto di isomorfismo parziale.

Definizione 6.13. Date due L-strutture M ed N, un isomorfismo parziale tra M ed N è una bigezione f tra un sottoinsieme A di M e un sottoinsieme B di N che induce un isomorfismo tra la sottostruttura generata da A in M e la sottostruttura generata da B in N.

Definizione 6.14. Sia I un insieme di isomorfismi parziali da M ad N. Dati elementi $a_i \in M$ e $b_i \in N$ per $i < \alpha$ (α un ordinale) scriveremo $(M, a_i)_{i<\alpha} \equiv_I (N, b_i)_{i<\alpha}$ se esiste un isomorfismo parziale $f \in I$ il cui dominio include $\{a_i \mid i < \alpha\}$ e che manda a_i in b_i per ogni $i < \alpha$. Dato un cardinale κ, diremo che I gode della proprietà del va e vieni per successioni di lunghezza $< \kappa$ se valgono le seguenti proprietà.

1. Se $\alpha < \kappa$ e $(M, a_i)_{i<\alpha} \equiv_I (N, b_i)_{i<\alpha}$, allora per ogni $c \in M$ esiste $d \in N$ tale che $(M, a_i, c)_{i<\alpha} \equiv_I (N, b_i, d)_{i<\alpha}$ (ovvero esiste $f \in I$ che manda ciascun a_i in b_i e c in d).
2. Se $\alpha < \kappa$ e $(M, a_i)_{i<\alpha} \equiv_I (N, b_i)_{i<\alpha}$, allora per ogni $d \in N$ esiste $c \in M$ tale che $(M, a_i, c)_{i<\alpha} \equiv_I (N, b_i, d)_{i<\alpha}$.
3. Richiediamo inoltre che, se $\lambda < \kappa$ è un ordinale limite, per avere $(M, a_i)_{i<\lambda} \equiv_I (N, b_i)_{i<\lambda}$ è sufficiente che $(M, a_i)_{i<\alpha} \equiv_I (N, b_i)_{i<\alpha}$ per ogni $\alpha < \kappa$.

Se vale solo la (1.) diremo che I ha la proprietà del "va", e se vale solo la (2.) I ha la proprietà del "vieni".

Esempio 6.15. L'insieme degli isomorfismi parziali tra due ordini densi senza estremi gode della proprietà del va e vieni fino ad ω, ma non necessariamente fino ad ω_1 (potrebbe non essere possibile estendere un isomorfismo parziale tra due sottostrutture numerabili).

kappa-iso

Teorema 6.16. *Siano M e N due L-strutture della stessa cardinalità κ. Se I è un insieme non vuoto di isomorfismi parziali da M ad N che gode della proprietà del va e vieni per successioni di lunghezza $< \kappa$, allora M è isomorfo ad N.*

Dimostrazione. Fissiamo un buon ordine di M ed N di tipo d'ordine κ e ragionaniamo come nel Teorema 6.8 usando la (3.) nel caso di ordinali limite. $\square$

7 Tipi

7.1 Tipi di una teoria

tipi

Lemma 7.1. *Sia T una L-teoria sia $n \in \mathbb{N}$ e sia $(x_1, \dots, x_n)$ una n-upla di variabili distinte sia $\Sigma(x_1, \dots, x_n)$ un insieme di L-formule nelle variabili $x_1, \dots, x_n$. I seguenti enunciati sono equivalenti:*
(Nel primo enunciato consideriamo le x_i come simboli di costante.)

1. *$T \cup \Sigma(x_1, \dots, x_n)$ è coerente (come $L \cup \{x_1, \dots, x_n\}$-teoria), ovvero esiste un modello M di T ed elementi $a_1, \dots, a_n$ di M tali che $M \models \Sigma(a_1, \dots, a_n)$ (cioè $M \models \sigma(a_1, \dots, a_n)$ per ogni $\sigma \in \Sigma$).*

2. *Per ogni congiunzione finita $\sigma(\vec{x})$ di formule di Σ, $T \cup \{\exists \vec{x} \sigma(\vec{x})\}$ è una L-teoria coerente (se T è completa ciò equivale a $T \models \exists \vec{x} \sigma(\vec{x})$).*

Dimostrazione. L'equivalenza delle prime due segue immediatamente dalle definizioni, la terza segue per compattezza e dal fatto che $T \cup \exists \vec{x} \sigma(\vec{x})$ è coerente come L-teoria se e solo se $T \cup \{\sigma(\vec{x})\}$ è coerente come $L \cup \{\vec{x}\}$-teoria. $\square$

Definizione 7.2. Sia T una L-teoria, sia $n \in \mathbb{N}$ e sia $(x_1, \dots, x_n)$ una n-upla di variabili distinte. Un n-tipo di T è un insieme $\Sigma(x_1, \dots, x_n)$ di L-formule nelle variabili $x_1, \dots, x_n$ tali che $T \cup \Sigma(x_1, \dots, x_n)$ è coerente (ovvero valgono le condizioni equivalenti del lemma precedente).

Definizione 7.3. Un n-tipo completo di T è un n-tipo $p(x_1, \dots, x_n)$ [3] tale che per ogni L-formula $\sigma(x_1, \dots, x_n)$, o $\sigma(\vec{x})$ o la sua negazione $\neg\sigma(\vec{x})$ appartengono a $p(\vec{x})$.

Se $M \models T$ e $a_1, \dots, a_n \in M$, l'insieme delle L-formule $\sigma(x_1, \dots, x_n)$ tali che $M \models \sigma(a_1, \dots, a_n)$ è un n-tipo completo di T, detto il tipo di $(a_1, \dots, a_n)$ in M, e denotato $tp_M(a_1, \dots, a_n)$.

[3] in genere i tipi completi sono indicati con le lettere p, q.

Esercizio 7.4.

1. Nella struttura $(\mathbb{Q}, <)$ tutti gli elementi hanno lo stesso tipo.
2. Nella struttura $(\mathbb{Q}, <, +, \cdot)$ tutti gli elementi hanno tipo diverso. Ad esempio il tipo $p(x)$ di 0 e il tipo $q(x)$ di 1 sono differenziati dal fatto che solamente il primo contiene la formula $\forall y(x + y = y)$ e solamente il secondo contiene la formula $\forall y(x \cdot y = y)$.
3. Nella struttura $(\mathbb{Q}, <, +)$ tutti gli elementi strettamente positivi hanno lo stesso tipo, e tutti gli elementi strettamente negativi hanno lo stesso tipo. Ci sono quindi in tutto tre tipi realizzati in $(\mathbb{Q}, <, +)$. (Suggerimento: la moltiplicazione per un numero positivo preserva l'ordine e la addizione).

Si noti che tutti i tipi completi di T sono della forma $tp_M(a_1, \ldots, a_n)$ per qualche $M \models T$ e $a_1, \ldots, a_n \in M$.

Definizione 7.5. Se $p(\vec{x})$ è un n-tipo di T e se $M \models T$, diciamo che p è realizzato in M se esistono $\vec{a} \in M$ con $M \models p(\vec{a})$ (diciamo in tale caso che $\vec{a}$ realizza p). Diciamo che p è omesso in M nel caso contrario.

Si noti che se $T = Th(\mathrm{A})$ è la teoria completa dellla struttura A, un n-tipo di T, pur non essendo necessariamente realizzato in A, per il Lemma 7.1 è sempre finitamente realizzato in A (ovvero ogni sottoinsieme finito di p è realizzato in A).

Teorema 7.6. *Sia* A *una L-struttura. Ogni n-tipo $p = p(x_1, \ldots, x_n)$ di $Th(\mathrm{A})$ è realizzato in una estensione elementare di* A.

Dimostrazione. Basta mostrare che $ED(\mathrm{A}) \cup p(x_1, \ldots, x_n)$ è una teoria coerente (quel che sappiamo è che $Th(\mathrm{A}) \cup p(x_1, \ldots, x_n)$ lo è). Se non lo è, per compattezza esiste una congiunzione finita $\theta(\vec{x})$ di formule di p tale che $ED(\mathcal{A}) \cup \{\theta(\vec{x})\}$ è incoerente, da cui $\mathrm{A} \models \forall \vec{y} \neg \theta(\vec{y})$. Questo è assurdo perchè p essendo un tipo di $Th(\mathrm{A})$ è finitamente soddisfacibile in A. $\square$

7.2 Esercizi

Esercizio 7.7. Si mostri che la teoria completa T di $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ ha $2^{\aleph_0}$ 1-tipi completi. Si deduca che esistono $2^{\aleph_0}$ modelli numerabili non isomorfi di T.

8 Eliminazione dei quantificatori

Definizione 8.1. Una L teoria T ammette eliminazione dei quantificatori se per ogni L-formula $\theta(\vec{x})$ esiste una L-formula senza quantificatori $\gamma(\vec{x})$ tale che $T \models \forall x(\theta(\vec{x}) \leftrightarrow \gamma(\vec{x}))$.

Esempio 8.2. Si può dimostrare che la teoria completa T del campo ordinato $(\mathbb{R}, <, 0, 1, +, \cdot)$ ammette eliminazione dei quantificatori. Un ben noto esempio è il seguente: in T la formula $\exists x(x^2 + bx + c = 0)$ equivale alla formula senza quantificatori $4c < b^2$. Un altro esempio è dato dalla formula $\exists xy((x \neq 0 \vee y \neq 0) \wedge ax + by = 0 \wedge cx + dy = 0)$, la quale esprime l'esistenza di una vettore non nullo (x, y) soluzione del sistema lineare

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tale formula equivale alla formula senza quantificatori $ad = bc$ che esprime il fatto che il determinante della matrice è nullo. La presenza del simbolo $<$ nella segnatura è necessario per avere l'eliminazione dei quantificatori. La formula $\exists x(x^2 = y)$ equivale alla formula senza quantificatori $0 < y \vee 0 = y$ ma non equivale a nessuna formula senza quantificatori che non usi il $<$.

8.1 Tipi senza quantificatori

Lemma 8.3. *Data una teoria T e un intero n, le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. *la funzione $p(\vec{x}) \mapsto p(\vec{x}) \cap QF$ che associa ad ogni n-tipo completo $p(\vec{x})$ di T la sua restrizione all'insieme QF delle formule senza quantificatori è iniettiva.*

2. *Se M, N sono due modelli di T ed $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono n-uple di elementi di M, N tali che $tp_M(\vec{a}) \cap QF = tp_N(\vec{b}) \cap QF$, allora $tp_M(\vec{a}) = tp_N(\vec{b})$.*

3. *se $p(\vec{x})$ è un tipo completo di T e $\phi(\vec{x})$ è una formula tale che $p(\vec{x}) \models \phi(\vec{x})$, allora $p(\vec{x}) \cap QF \models \phi(\vec{x})$.*

Dimostrazione. Le prime due sono equivalenti perché ogni n-tipo di T è della forma $tp_M(\vec{a})$ per qualche modello M di T. Dimostriamo la (3) assumendo le prime due. Supponiamo $p(\vec{x}) \models \phi(\vec{x})$. Se per assurdo $p(\vec{x}) \cap QF \not\models \phi(\vec{x})$, allora esiste un tipo completo $q(\vec{x})$ che contiene la teoria coerente $(p(\vec{x}) \cap QF) \cup \neg\phi(\vec{x})$. Poiché $q(\vec{x}) \cap QF = p(\vec{x}) \cap QF$, per la (1) $q(\vec{x}) = p(\vec{x})$. Questo è assurdo perché $p(\vec{x})$ contiene $\phi(\vec{x})$ e $q(\vec{x})$ la sua negazione. □

Esercizio 8.4. Siano A, B due L-strutture e siano $\vec{a}$ e $\vec{b}$ due n-uple di elementi di A e B rispettivamente. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. $(\vec{a}, \vec{b})$ è un isomorfismo parziale tra A e B.

2. $tp_A(\vec{a}) \cap QF = tp_B(\vec{b}) \cap QF$.

sufficienteQE **Teorema 8.5.** *Sia T una L-teoria. Supponiamo che per ogni n la funzione $p(\vec{x}) \mapsto p(\vec{x}) \cap QF$ che associa ad ogni n-tipo completo $p(\vec{x})$ di T la sua restrizione all'insieme QF delle formule senza quantificatori sia iniettiva. Allora T ammette eliminazione dei quantificatori.*

Dimostrazione. Sia $\phi(\vec{x})$ una L-formula e sia $\Sigma(\vec{x}) = \{\sigma(\vec{x}) \in QF \mid T \models \forall \vec{x}(\phi(\vec{x}) \to \sigma(\vec{x}))$ l'insieme delle consequenze senza quantificatori di $\phi(\vec{x})$ in T. Basta mostrare che $T \cup \Sigma(\vec{x}) \models \phi(\vec{x})$, in quanto poi per compattezza (e il fatto che Σ è chiusa per congiunzioni finite) esiste una singola formula $\sigma(\vec{x}) \in \Sigma(\vec{x})$ tale che $T \models \forall \vec{x}(\sigma(\vec{x}) \leftrightarrow \phi(\vec{x}))$. Se per assurdo così non fosse esisterebbe un tipo completo $p(\vec{x})$ contenente $\Sigma(\vec{x})$ e $\neg\phi(\vec{x})$. Per le nostre ipotesi $p(\vec{x}) \cap QF \models \neg\phi(\vec{x})$. Per compattezza esiste $\sigma(\vec{x}) \in p(\vec{x}) \cap QF$ tale che $T \models \sigma(\vec{x}) \to \neg\phi(\vec{x})$. Ma allora $T \models \phi(\vec{x}) \to \neg\sigma(\vec{x})$, e quindi $\neg\sigma(\vec{x}) \in \Sigma(\vec{x})$. Poiché $p(\vec{x})$ contiene $\Sigma(\vec{x})$ raggiungiamo l'assurdo che $p(\vec{x})$ contiene sia $\neg\sigma(\vec{x})$ che $\sigma(\vec{x})$. $\square$

8.2 Criterio per l'eliminazione dei quantificatori e per la completezza

sufficiente-stesso-tipo

Lemma 8.6. *Sia T una L-teoria e siano M, N modelli di T. Sia I un insieme di isomorfismi parziali finiti da M ad N. Supponiamo che I abbia la proprieà del va e vieni. Allora per ogni $((a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n)) \in I$ vale $(M, \vec{a}) \equiv (N, \vec{b})$.*

Dimostrazione. Dobbiamo mostrare che per ogni $((a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n)) \in I$, e per ogni L-formula $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ vale $M \models \phi(\vec{a})$ sse $N \models \phi(\vec{b})$. La dimostrazione è per induzione sulla complessità (numero dei connettivi) di $\phi(\vec{x})$ (ammettendo che n vari). Il caso base è ovvio: un isomorfismo parziale preserva le formule senza quantificatori. Il caso in cui $\phi(\vec{x})$ si ottiene da formule più semplici tramite un connettivo proposizionale segue immediatamente dall'ipotesi induttiva. L'unico caso interessante è dunque quello in cui $\phi(\vec{x})$ ha la forma $\exists y \theta(\vec{x}, y)$. Supponiamo $(\vec{a}, \vec{b}) \in I$ e $M \models \phi(\vec{a})$. Esiste dunque $c \in M$ tale che $M \models \theta(\vec{a}, c)$. Poichè I ha la proprietà del va e vieni esiste $d \in N$ tale che $(\vec{a}c, \vec{b}d) \in I$. Per ipotesi induttiva $N \models \theta(\vec{b}, d)$ e quindi $N \models \phi(\vec{b})$. L'altro caso è simmetrico. $\square$

Ricordando che $\vec{a} \in M \mapsto \vec{b} \in N$ è un isomorfismo parziale se e solo se $tp_N(\vec{a}) = tp_M(\vec{b})$ otteniamo:

cor-stesso-tipo

Corollario 8.7. *Sia T una L-teoria e siano M, N modelli di T. Supponiamo che l'insieme $I(M, N)$ di* tutti *gli isomorfismi parziali finiti da M ad N abbia la proprieà del va e vieni. Allora $tp_M(\vec{a}) \cap QF = tp_N(\vec{b}) \cap QF$ implica $tp_M(\vec{a}) = tp_N(\vec{b})$.*

Teorema 8.8.

1. *Se per ogni coppia M, N di modelli di T l'insieme $I(M, N)$ degli isomorfismi finiti parziali da M ad N ha la proprieà del va e vieni, allora T ammette eliminazione dei quantificatori* [4].

2. *Se inoltre $I(M, N)$ è sempre non vuoto (e ha la proprietà del va e vieni) comunque si scelgano M, N , allora T è completa.*

Dimostrazione. La prima parte seque dal Corollario 8.7. Per la seconda, dati $(\vec{a}, \vec{b}) \in I(M, N)$, per il Lemma 8.6 abbiamo $M, \vec{a} \equiv M, \vec{b}$, e in particolare $M \equiv N$. Per l'arbitrarietà di M, N, T è completa. $\square$

[4] Notiamo che la condizione del va e vieni è verificata banalmente se $I(M, N)$ è vuoto.

8.3 Esempi ed esercizi

Esercizio 8.9. La teoria degli ordini densi e senza estremi ammette eliminazione dei quantificatori ed è completa.

Esercizio 8.10. La teoria degli ordini densi con massimo ma senza minimo è completa.

Dimostrazione. Basta mostrare che presi comunque due modelli M, N essi sono elementarmente equivalenti. Sia I l'insieme degli isomorfismi parziali finiti da M ad N che mandano il massimo $a \in M$ nel massimo $b \in N$. I è non vuoto in quanto contiene (a, b). Per il Lemma 8.6 $M, a \equiv N, b$. In particolare $M \equiv N$. $\square$

Esercizio 8.11. La teoria degli ordini densi ha esattamente quattro estensioni complete.

Esercizio 8.12. La teoria delle algebre di Boole senza atomi ammette eliminazione dei quantificatori ed è completa.

Esercizio 8.13. La teoria del grafo casuale ammette eliminazione dei quantificatori ed è completa.

9 Saturazione

9.1 Catene elementari

Definizione 9.1. Una catena di L-strutture è una successione $(M_i \mid i \in I)$ di L-strutture dove $I = (I, <)$ è un insieme linearmente ordinato e $i < j$ implica che M_i è una sottostruttura di N_i. Una catena elementare di L-strutture è una catena di strutture con l'ulteriore proprietà che $i < j$ implica $M_i \prec M_j$.

Definizione 9.2. Data una catena $(M_i \mid i \in I)$ di L-strutture, esiste un'unica L-struttura, denotata $\bigcup_i M_i$, il cui dominio è l'unione dei domini delle M_i e tale che ogni M_i sia una sottostruttura di $\bigcup_i M_i$. La struttura $\bigcup_i M_i$ viene detta il limite, o l'unione, della catena.

Teorema 9.3. *Sia $(M_i \mid i \in I)$ una catena elementare di L-strutture e sia $M = \bigcup_i M_i$. Allora per ogni $i \in I$, $M_i \prec M$.*

Dimostrazione. Dimostriamo per induzione sulla complessità della L-formula $\phi(x_1, \dots, x_n)$ che per ogni $i \in I$ e $a_1, \dots, a_n \in M_i$, $M_i \models \phi(a_1, \dots, a_n)$ sse $M \models \phi(a_1, \dots, a_n)$. Se ϕ è atomica ciò segue dal fatto che M_i è una sottostruttura di M. Se ϕ si ottiene tramite un connettivo proposizionale da formule più semplici la verifica è immediata. Supponiamo che ϕ sia $\exists y \theta(\vec{x}, y)$ e $M_i \models \phi(\vec{a})$. Allora $M_i \models \theta(\vec{a}, b)$ per qualche $b \in M_i$. Per ipotesi induttiva $M \models \theta(\vec{a}, b)$ e quindi $M \models \phi(\vec{a})$. Viceversa supponiamo $M \models \phi(\vec{a})$. Quindi $M \models \theta(\vec{a}, b)$ per qualche $b \in M$. Allora $b \in M_j$ per qualche $j > i$. Per ipotesi induttiva $M_j \models \theta(\vec{a}, b)$. Quindi $M_j \models \phi(\vec{a})$. Poiché $M_i \prec M_j$, $M_i \models \phi(\vec{a})$. $\square$

9.2 Modelli saturi

Definizione 9.4. Data una L-struttura M e un sottoinsieme $A \subset M$ del suo dominio, un n-tipo di M con parametri da A è, per definizione, un n-tipo della teoria $Th((\mathcal{M}, a)_{a \in A})$. Equivalentemente esso è un insieme di formule $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ con parametri da A che è finitamente realizzabile in M.

Esercizio 9.5. Se $N \succ M$ e $A \subset \text{dom}(M)$, i tipi di M con parametri da A, coincidono con i tipi di N con parametri da A.

Definizione 9.6. Una L-struttura M si dice ω-satura se per ogni sottoinsieme finito A di M, M realizza tutti gli 1-tipi di M con parametri da A. Più in generale, dato un cardinale infinito κ, M è κ-satura se M realizza tutti gli 1-tipi di M con $< \kappa$ parametri. Infine diciamo che M è satura, se è κ satura per $\kappa = |M|$.

La restrizione agli 1-tipi non è necessaria: vedremo che un modello ω-saturo (o κ-saturo) M realizza tutti gli n-tipi di M con un numero finito di parametri.

Esempio 9.7. $(\mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, <)$ non è ω-saturo in quanto non realizza il tipo $p(x)$ consistente di tutte le formule della forma $0 < x \wedge x + x + \ldots x < 1$ (n volte x) al variare di n.

Esercizio 9.8. $(\mathbb{R}, <)$ è ω-saturo.

Teorema 9.9. *Ogni L-struttura ha una estensione elementare ω-satura.*

Dimostrazione. Sia $\{p_i(x_i) \mid i \in I\}$ l'insieme di tutti gli 1-tipi di $\mathcal{M}$ con un numero finito di parametri, dove abbiamo scelto una variabile diversa x_i per ogni tipo. La teoria $ED(\mathcal{M}) \cup \{p_i(x_i) \mid i \in I\}$ è coerente per compattezza, in quanto i vari p_i sono finitamente soddisfacibili in $\mathcal{M}$. Quindi esiste un modello $\mathcal{M}_1$ di questa teoria che estende elementarmente $\mathcal{M}$ (in quando ogni modello di $ED(\mathcal{M})$ è identificabile con una estensione elementare di $\mathcal{M}$). Tale modello $\mathcal{M}_1$ realizza tutti i tipi $p_i(x)$, ma non è detto che sia ω-saturo perchè ora dobbiamo considerare anche i tipi con un numero finito di parametri da $\mathcal{M}_1$, non solo da $\mathcal{M}$. Iteriamo perciò il procedimento ottenendo una catena elementare $\mathcal{M} \prec \mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}_2 \prec \ldots$ dove ogni $\mathcal{M}_{n+1}$ realizza tutti i tipi di $\mathcal{M}_n$ con un numero finito di parametri. Il limite $\mathcal{M}_\omega$ di questa catena è una estensione elementare di tutti gli $\mathcal{M}_i$ e realizza tutti i tipi di $\mathcal{M}_\omega$ con un numero finito di parametri. Per verificare ciò basta osservare che, dato un tale tipo $p(x)$, i suoi parametri, essendo in numero finito, saranno contenuti in qualche $\mathcal{M}_n$ e $p(x)$ sarà realizzato in $\mathcal{M}_{n+1}$, e quindi in $\mathcal{M}_\omega$ (essendo $\mathcal{M}_\omega$ una estensione elementare di $\mathcal{M}_n$ e di $\mathcal{M}_{n+1}$). $\square$

Similmente dato un cardinale κ si dimostra:

Teorema 9.10. *Ogni L-struttura M ha una estensione elementare κ^+-satura $N \succ M$. Inoltre, assumendo $\kappa \geq |L|$ e $2^\kappa \geq |M|$, possiamo scegliere N di cardinalità $\leq 2^\kappa$.*

Dimostrazione. Si costruisca una catena elementare $(M_\alpha \mid \alpha \leq \kappa^+)$ tale che $M_0 = M$, $M_{\alpha+1} \succ M_\alpha$ realizza tutti gli 1-tipi con $\leq \kappa$ parametri da M_α, e per ciascun ordinale limite $\lambda \leq \kappa^+$ $M_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} M_\alpha$. Per far vedere che M_{κ^+} è κ^+ saturo si usi il fatto che ogni suo sottoinsieme A di cardinalità κ è contenuto in qualche M_α con $\alpha < \kappa^+$. I tipi di M_{κ^+} con parametri da A coincidono con i tipi di M_α con parametri da A. Per costruzione essi sono realizzati in $M_{\alpha+1}$ e quindi anche in M_{κ^+}.

Per la stima sulle cardinalità osserviamo che data una L-struttura N di cardinalità $\leq 2^\kappa$, l'insieme degli 1-tipi di N con $\leq \kappa$ parametri ha cardinalità $\leq 2^\kappa$ (ci sono al più $|N|^\kappa \leq 2^\kappa$ modi di scegliere i parametri, e per ogni scelta dei parametri ci sono $\leq 2^\kappa$ tipi). Induttivamente, usando Lowenheim-Skolem, possiamo fare in modo che ciascun elemento della catena abbia cardinalità $\leq 2^\kappa$. □

Il teorema fornisce estensioni κ^+ sature di cardinalità 2^κ. Se vale l'ipotesi generalizzata del continuo $\kappa^+ = 2^\kappa$ e l'estensione ottenuta è satura. In molti casi interessanti (ad esempio per modelli di teorie "stabili") si possono ottenere estensioni sature senza l'ipotesi del continuo.

omogeneo

Teorema 9.11. *Siano M, N L-strutture, sia $n < \omega$ e assumiamo che $(M, a_i)_{i<n} \equiv (N, b_i)_{i<n}$. Sia $b \in N$. Se M è ω-satura, allora esiste $a \in M$ tale che $(M, a_i, a)_{i<n} \equiv (N, b_i, b)_{i<n}$.*

Dimostrazione. Sia $\Sigma(x, b_i)_{i<n}$ il tipo di b su $\{b_i \mid i < n\}$, ovvero l'insieme di tutte le formule $\phi(x, b_{i_1}, \ldots, b_{i_k})$ con parametri da $\{b_i \mid i < n\}$ realizzate da b in N. Sia $\Sigma(x, a_i)_{i<n}$ l'insieme delle formule ottenute rimpiazzando i b_i con gli a_i nelle formule di $\Sigma(x, b_i)$. Se $\phi(x, b_{i_1}, \ldots, b_{i_k}) \in \Sigma(x, b_i)_{i<n}$, allora $N \models \exists x \phi(x, b_{i_1}, \ldots, b_{i_k})$, e quindi per elementare equivalenza $M \models \exists x \phi(x, a_{i_1}, \ldots, a_{i_k})$. Ne seque che $\Sigma(x, a_i)_{i<n}$ è finitamente soddisfacibile in M (ovvero è un tipo), ed essendo M ω-saturo, esiste $a \in M$ che realizza $\Sigma(x, a_i)_{i<n}$. Per tale a vale la tesi. □

Corollario 9.12. *Una struttura ω-satura M è ω-universale, ovvero ogni modello numerabile N della sua teoria completa si immerge elementarmente in M.*

Dimostrazione. Sia $(b_i \mid i < \omega)$ una enumerazione di N. Per il Teorema 9.11 possiamo costruire induttivamente $a_i \in M$ con $(M, a_i, a)_{i<n} \equiv (N, b_i, b)_{i<n}$. La funzione $a_i \mapsto b_i$ è l'immersione cercata. □

Con la stessa dimostrazione (rimpiazzando ω con κ) si ha:

Teorema 9.13. *Siano M, N L-strutture con M κ-satura. Sia $\alpha < \kappa$ e assumiamo che $(M, a_i)_{i<\alpha} \equiv (N, b_i)_{i<\alpha}$. Sia $b \in N$. Allora esiste $a \in M$ tale che $(M, a_i, a)_{i<\alpha} \equiv (N, b_i, b)_{i<\alpha}$.*

Dimostrazione. Come nel Teorema 9.11 rimpiazzando ω con κ nella dimostrazione. □

Corollario 9.14. *Una struttura κ-satura M è κ-universale, ovvero ogni modello di cardinalità κ della teoria completa di M si immerge elementarmente in M.*

Dimostriamo ora l'unicità dei modelli saturi.

Teorema 9.15. *Sia T una teoria completa. Due modelli ω-saturi M, N di T di cardinalità ω sono isomorfi.*

Dimostrazione. Fissiamo una enumerazione di M e una enumerazione di N, entrambe di tipo d'ordine ω. Per $n < \omega$ costruiamo induttivamente $(a_i)_{i<n}$ in M e $(b_i)_{i<n}$ in N tali che $(M, a_i)_{i<n} \equiv (N, b_i)_{i<n}$. Il caso $n = 0$ è dato dal fatto che $M \equiv N$, essendo T completa. Supponendo di aver definito a_i, b_i per $i < n$ definiamo a_n, b_n come segue. (i) per n pari sia a_n il minimo elemento dell'enumerazione di M diverso da ciascun a_i con $i < n$ e sia b_n il minimo elemento dell'enumerazione di N che verifica $(M, a_i)_{i<n} \equiv (N, b_i)_{i<n}$ (b_n esiste per il Teorema 9.11); (ii) per n dispari sia b_n il minimo elemento dell'enumerazione di N diverso da ciascun b_i con $i < n$ ed sia a_n il minimo elemento dell'enumerazione di N che verifica $(M, a_i)_{i<n} \equiv (N, b_i)_{i<n}$ (a_n esiste per il Teorema 9.11). □

Similmente:

unicitaSat

Teorema 9.16. *Sia T una teoria completa. Due modelli κ-saturi M, N di T di cardinalità κ sono isomorfi.*

Dimostrazione. Fissiamo una enumerazione di M e una enumerazione di N, entrambe di tipo d'ordine κ e ragioniamo come prima rimpiazzando ω con κ. □

Esercizio 9.17. Nella dimostrazione precedente, dove si usa il fatto che l'enumerazione sia di tipo d'ordine esattamente κ, anziché di un qualsiasi tipo d'ordine della stessa cardinalità di κ?

sat-omog

Corollario 9.18. *Sia M una L-struttura κ-satura di cardinalità κ. Se $\alpha < \kappa$, $(a_i)_{i<\alpha}$ e $(b_i)_{i<\alpha}$ sono α-uple da M con lo stesso tipo, allora esiste un automorfismo f di M che porta ciascun a_i nel corrispondente b_i. (Per semplicità si pensi al caso $\kappa = \omega$.)*

Dimostrazione. Le ipotesi dicono che $(M, a_i)_{i<\alpha}$ e $(M, b_i)_{i<\alpha}$ sono elementarmente equivalenti come strutture in un linguaggio L' espanso con α nuove costanti. Ma essendo anche sature (verificare!), sono isomorfe per il Teorema 9.16. □

Il corollario motiva la seguente:

Definizione 9.19. Una L-struttura M è fortemente κ-omogenea se per ogni $\alpha < \kappa$ due α-uple da M con lo stesso tipo sono coniugate da un automorfismo di M (ovvero esiste un automorfismo di M che porta l'una nell'altra).

Il Corollario 9.18 dice che una struttura satura di cardinalità κ è fortemente κ-omogenea.

9.3 Va e vieni in modelli ω-saturi

criterioEQ

Teorema 9.20. *Sia T una L-teoria.*

1. *Supponiamo che per ogni coppia M, N di modelli ω-saturi di T l'insieme $I(M, N)$ degli isomorfismi finiti parziali da M ad N abbia la proprietà del va e vieni. Allora T ammette eliminazione dei quantificatori.*

2. *Supponiamo inoltre che per ogni $M, N \models T$ ω-saturi $I(M, N)$ sia non vuoto (e abbia la proprietà del va e vieni). Allora T è completa.*

Dimostrazione. (1.) Siano M, N modelli di T non necessariamente ω-saturi e siano $\vec{a}$ e $\vec{b}$ due n-uple di elementi di M ed N tali che $tp_M(\vec{a}) \cap QF = tp_N(\vec{b}) \cap QF$. Siano $M^* \succ M$ e $N^* \succ N$ ω-saturi. Poichè le formule verificate da $\vec{a}$ e $\vec{b}$ non cambiano passando ad estensioni elementari, $tp_{M^*}(\vec{a}) \cap QF = tp_{N^*}(\vec{b}) \cap QF$, ovvero $(\vec{a}, \vec{b}) \in I(M^*, N^*)$. Poichè $I(M^*, N^*)$ ha la proprietà del va e vieni, per il Lemma 8.6, $tp_{M*}(\vec{a}) = tp_{N^*}(\vec{b})$, e quindi $tp_M(\vec{a}) = tp_N(\vec{b})$. Per il Teorema 8.5, T ammette eliminazione dei quantificatori.

(2.) Siano M, N modelli di T e siano $M^* \succ M$ ed $N^* \succ N$ estensioni ω-sature. Sia $(\vec{a}, \vec{b}) \in I(M^*, N^*)$. Ragionando come sopra $tp_{M*}(\vec{a}) = tp_{N^*}(\vec{b})$. Quindi in particolare $M^* \equiv N^*$. Ma allora anche $M \equiv N$ e ne concludiamo che T è completa. $\square$

Vale un teorema analogo rimpiazzando "ω-saturo" con "κ-saturo". Ad esempio per $\kappa = \omega_1$ otteniamo il seguente teorema che utilizzeremo in seguito per dimostrare l'eliminazione dei quantificatori per la teoria dei campi reali chiusi.

criterioEQ2

Teorema 9.21.

1. *Se per ogni coppia M, N di modelli ω_1-saturi di T l'insieme $I(M, N)$ degli isomorfismi parziali tra sottostrutture al più numerabili di M ed N ha la proprieà del va e vieni, allora T ammette eliminazione dei quantificatori.*

2. *Se inoltre $I(M, N)$ è sempre non vuoto (e ha la proprietà del va e vieni) comunque si scelgano M, N , allora T è completa.*

Dimostrazione. Si ragioni come nel Teorema 9.20 considerando gli isomorfismi parziali tra successioni di lunghezza $< \omega_1$. $\square$

9.4 Eliminazione dei quantificatori per gli ordini discreti

Teorema 9.22. *Sia $L = \{<\}$ il linguaggio dell'ordine e sia T la L-teoria degli ordini discreti senza massimo o minimo elemento.*

1. *T è completa.*

2. *T ammette eliminazione dei quantificatori in una segnatura $L' = \{<, S, P\}$ con un simbolo S per il successore definito da $S(x) = y \leftrightarrow (x < y \wedge \neg\exists z(x < z \wedge z < y))$ e un simbolo P per il predecessore definito da $P(x) = y \leftrightarrow S(y) = x$. Più precisamente la L'-teoria T' che si ottiene da T*

aggiungendo queste definizioni come assiomi ammette eliminazione dei quantificatori.

Dimostrazione. Applichiamo il Teorema 9.20. Siano M, N modelli ω-saturi di T. Esiste un unico modo di espandere M, N a due L'-strutture che siano modelli di T'. Continueremo a denotare M, N le strutture espanse. Sia I l'insieme degli isomorfismi finiti parziali da M ad N considerati come L'-strutture. I è non vuoto in quanto presi comunque $a \in M$ e $b \in N$ si verifica facilmente che $(a, b) \in I$. Per finire basta mostrare che I gode della proprietà del va e vieni. Supponiamo dunque $((a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n)) \in I$ e sia $c \in M$. Dobbiamo trovare $d \in N$ tale che $(\vec{a}c, \vec{b}d) \in I$ (l'altro caso è simmetrico). Per $m \in \mathbb{Z}$ sia $S^m(x)$ l'm-esimo successore di x se $m \geq 0$, mentre se $m < 0$ sia $S^m(x)$ l'm-esimo predecessore di x (quindi $S^0(x) = x$, $S^1(x) = S(x)$ e $S^n S^m(x) = S^{n+m}(x)$).

Caso 1. Supponiamo che esista a_i (con $1 \leq i \leq n$) ed $m \in \mathbb{Z}$ tale che $c = S^m(a_i)$. Possiamo porre in questo caso $d = S^m(b_i)$.

Caso 2. Supponiamo di non essere nel caso 1, e assumiamo senza perdita di generalità che $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ e che $a_i < c < a_{i+1}$ (il caso in cui c sia maggiore di ogni a_i o minore di ogni a_i è analogo). Per ogni intero positivo m dobbiamo allora avere $S^m(a_i) < c$ e $S^m(c) < a_{i+1}$. Ne segue che per ogni intero positivo m dobbiamo avere $S^m(a_i) < a_{i+1}$. Poiché $(\vec{a}, \vec{b}) \in I$, per ogni intero positivo m deve valere $S^m(b_i) < b_{i+1}$. Per ω-saturazione di N esiste allora un $d \in N$ tale che per ogni intero positivo m, $S^m(b_i) < d < b_{i+1}$. Per tale d abbiamo $(\vec{a}c, \vec{b}d) \in I$. $\square$

10 Applicazioni alla teoria dei campi

10.1 Campi algebricamente chiusi

ACF **Teorema 10.1.** *La teoria dei campi algebricamente chiusi ammette eliminazione dei quantificatori nella segnatura* $L = \{0, 1, +, \cdot\}$.

Dimostrazione. Applichiamo il Teorema 9.20. Siano M, N campi algebricamente chiusi, e siano $M_0 \subset M$ ed $N_0 \subset N$ i loro sottocampi primi (ciascuno dei quali è isomorfo o a $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ o a $\mathbb{Q}$ a seconda che la caratteristica del campo sia p o 0). Assumiamo M, N ω-saturi e mostriamo che l'insieme degli isomorfismi parziali da M a N ha la proprietà del va e vieni. Supponiamo dunque che $M, a_1, \ldots, a_n \equiv_{QF} N, b_1, \ldots, b_n$ (ovvero $a_i \mapsto b_i$ è un isomorfismo parziale). Ne seque che M ed N hanno la stessa caratteristica e $K := M_0(a_1, \ldots, a_n)$ è isomorfo a $K' := N_0(b_1, \ldots, b_n)$ tramite un isomorfismo che manda M_0 in N_0 e a_i in b_i. Sia $a \in M$. Vogliamo un $b \in N$ con $M, a_1, \ldots, a_n, a \equiv_{QF} N, b_1, \ldots, b_n, b$. Distinguiamo due casi.

Caso 1. Supponiamo che b sia algebrico su $K = M_0(b_1, \ldots, b_n)$ e sia $f(x) \in K[x]$ il suo polinomio minimo. L'isomorfismo tra K e K' induce un isomorfismo tra $K[x]$ e $K'[x]$. Sia $g(x) \in K'[x]$ l'immagine di $f(x)$ tramite l'isomorfismo e sia $b \in N$ una radice di $g(x)$ (che esiste in quanto N è algebricamente chiuso). Osserviamo che $M_0(b_1, \ldots, b_n, b) \cong K(a) \cong K[x]/f(x) \cong K'[x]/g(x) \cong K'(b) \cong$

$N_0(a_1, \ldots, a_n, a)$. La composizione degli isomorfismi manda ciascun a_i in b_i ed a in b. Quindi $M, a_1, \ldots, a_n, a \equiv_{QF} N, b_1, \ldots, b_n, b$.

Caso 2. Supponiamo che b sia trascendente su K. Ne segue che $K(b) \cong K(x)$ (il campo quoziente dell'anello di polinomi $K[x]$). Poichè N è ω-saturo e K' è finitamente generato come campo da $a_1, \ldots, a_n$, esiste un $a \in N$ trascendente su K'. Ne segue che $K(b) \cong K(x) \cong K'(x) \cong K(a)$ e concludiamo come nel caso 1. $\square$

Teorema 10.2. *La teoria ACF_0 dei campi algebricamente chiusi di caratteristica zero è completa. Similmente per ogni primo p la teoria ACF_p dei campi algebricamente chiusi di caratteristica p è completa.*

Dimostrazione. Due campi con la stessa caratteristica M ed N hanno sottocampi isomorfi (i loro sottocampi primi). Quindi l'insieme degli isomorfismi parziali tra M, N è non vuoto. Per concludere applichiamo il Teorema 9.20 ragionando come nel Teorema 10.1. $\square$

Corollario 10.3. *Sia σ una formula nel linguaggio dei campi. Sono equivalenti:*

1. *σ è vera nei complessi.*
2. *σ è vera in qualche campo algebricamente chiuso di caratteristica zero.*
3. *σ è vera in tutti i campi algebricamente chiusi di caratteristica zero.*
4. *Per infinite primi p, σ è vera in tutti in tutti i campi algebricamente chiusi di caratteristica p.*

Dimostrazione. Se σ è vera in $\mathbb{C}$, allora per completezza $ACF_0 \models \sigma$, e per compattezza basta un sottoinsieme finito degli assiomi di ACF_0 a dedurre σ. Ne segue che σ è vero in tutti i campi algebricamente chiusi di caratteristica abbastanza grande. Analogamente se σ è falsa in $\mathbb{C}$ allora $ACF_0 \models \neg\sigma$ e σ è falsa in tutti i campi algebricamente chiusi di caratteristica abbastanza grande. $\square$

Corollario 10.4. *(Hilbert's Nullstellensatz) Sia K un campo algebricamente chiuso. Sia $P(x_1, \ldots, x_n) = 0$ uns sistema finito di equazioni polinomiali in $x_1, \ldots, x_n$. Se P ha una soluzione in qualche campo L che estende K, allora ha soluzione in K.*

Dimostrazione. Ogni campo ha una chiusura algebrica. Quindi possiamo assuere L algebricamente chiuso. La formula $\exists \vec{x} P(\vec{x}) = 0$ è vera in L. Per eliminazione dei quantificatori K è una sottostruttura elementare di L. Quindi la formula è vera anche in K. $\square$

Diamo una semplice applicazione algebrica di questi risultati.

Teorema 10.5. *(Ax) Sia $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ una funzione polinomiale iniettiva. Allora f è surgettiva.*

Dimostrazione. (See Thm. 1.3 in [1]) Sia k il grado totale di f, ovvero il massimo dei gradi totali delle sue componenti $f_i \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ $(i = 1, \dots, n)$. Fissato k, esiste una formula θ_k del linguaggio della teoria dei campi $L = \{0, 1, +, \cdot\}$ che (quantificando sui coefficienti) esprime il fatto ogni funzione polinomiale $f \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ iniettiva di grado totale k è surgettiva. Dobbiamo mostrare che $\mathbb{C} \models \theta_k$. Siccome ACF_0 è completa ciò equivale ad mostrare che $ACF_0 \models \theta_k$. Se così non fosse, sempre per la completezza, avremmo $ACF_0 \models \neg\theta_k$. Per il teorema di compattezza, per ogni primo p sufficientemente grande $ACF_p \models \neg\theta_k$. Sia $K \models ACF_p$ la chiusura algebrica di $\mathbb{Z}/pZ$. Dunque esiste una mappa polinomiale $f \colon K^n \to K^n$ iniettiva ma non surgettiva. Sia $b \in K^n$ non nell'immagine di f. Osserviamo che ogni sottocampo finitamente generato di K è finito. Sia $K_0 \subset K$ il sottocampo generato dalle componenti di b e dai coefficienti di f. Per restrizione f induce una mappa polinomiale iniettiva da K_0^n a K_0^n. Essendo K_0 finito, f è surgettiva su K_0^n. Assurdo. □

10.2 Campi reali chiusi

Studiamo la teoria di $(\mathbb{R}, +, \cdot, <, 0, 1)$.

Definizione 10.6. Un campo ordinato reale chiuso è un campo ordinato F in cui ogni polinomio $p(x) \in F[x]$ a che cambia segno ha uno zero. Sia $RCOF$ la teoria dei campi ordinati reali chiusi.

Mostreremo che $RCFO$ è completa e pertanto coincide con la teoria di $(\mathbb{R}, +, \cdot, <, 0, 1)$. Cominciamo con il seguente:

Teorema 10.7. *$RCOF$ ammette eliminazione dei quantificatori.*

Dimostrazione. In base al Teorema 9.20 basta mostrare che la classe degli isomorphismi parziali finiti tra due modelli ω-saturi di $RCFO$ ha la proprietà del va e vieni. Siano dunque $(K, <)$ e $(K', <)$ due campi ordinati reali chiusi ω_1-saturi. Siano F, F' due sottostrutture finite di K e K' ed $f : F \to F'$ un isomorfismo. Per un teorema di Artin-Schreier ogni campo ordinato ha un'unica chiusura reale a meno di isomorfismi (la quale chiusura può essere presa all'interno di un qualsiasi campo ordinato reale chiuso che contenga il campo dato). Quindi f si estende ad un isomorpfismo $\overline{f}$ tra le chiusure reali $RC(Q(F)) \subset K$ e $RC(Q(F')) \subset K'$ dei campi $Q(F)$ e $Q(F')$ generati da F ed F'. Ora sia $b \in K$. Vogliamo trovare $c \in K'$ tale che f si estende ad un isomorfismo tra $Q(F, b)$ e $Q(F, c)$. Questo è chiaro se $b \in RC(Q(F))$. Quindi assumiamo $b \notin RC(Q(F))$. Dunque b è trascendente su $Q(F)$. Dico che esiste esiste c in K' che non solo è trascendente su $Q(F')$, ma soddisfa le sequenti condizioni: per ogni $a \in Q(F)$, $b < a$ sse $c < \overline{f}(a)$. Questa è una quantità numerabile di condizioni (visto che $Q(F)$ è numerabile) quindi saremmo a posto se K' fosse ω_1-saturo (e nulla osterebbe a lavorare con modelli ω_1-saturi). Ci basta però in effetti la ω-saturazione visto che ogni elemento di $Q(F)$ è definibile con parametri dall'insieme finito F. Dunque esiste $c \in K'$ come richiesto. Per la trascendenza di b, c su $Q(F)$ e $Q(F')$, f si estende (in modo unico) ad un isomorfismo di campi $f_1 : Q(F)[b] \to Q(F)[c]$ che manda b in c. Resta da dimostrare che f_1 rispetta l'ordine (indotto da K, K'). In altre parole dobbiamo mostrare che per ogni $p(x) \in Q(F)[x]$ abbiamo $p(b) > 0$ se e solo se $p(f_1(b)) > 0$. Possiamo assumere che $p(x)$

□

11 Dimensione

11.1 Chiusura algebrica

Diamo una generalizzazione model-teoretica della nozione di chiusura algebrica. Essa generalizza anche la nozione di dipendenza lineare negli spazi vettoriali.

Definizione 11.1. Sia M una L-struttura, e sia $A \subset \mathrm{dom}(M)$. Diciamo che $b \in M$ è algebrico su A (in simboli: $b \in \mathrm{acl}(A)$) se b appartiene ad un insieme finito A-definibile. Nel caso in cui l'insieme finito abbia cardinalità 1, ovvero contenga solo b, diremo che b è A-definibile (e scriveremo $b \in dcl(A)$).

Vedremo che se M è un campo algebricamente chiuso, $\mathrm{acl}(A)$ coincide con la chiusura algebrica di A nel senso algebrico. Una direzione è facile: la chiusura algebrica nel senso della teoria dei campi è contenuta nella chiusura algebrico nel senso model-teoretico. Basta osservare che il polinomio minimo di un elemento algebrico definisce un insieme finito.

Esempio 11.2. Sia $\mathbb{C} = (\mathbf{C}; 0, 1, +, \cdot)$. Nella struttura $\mathbb{C}$, l'elemento $\sqrt{2}$ è algebrico sull'insieme vuoto ($\emptyset$-algebrico), in quanto appartiene all'insieme finito $\{x \in \mathbb{C} \mid x^2 = 1+1\}$. Si può anche mostrare che $\sqrt{2}$ non è $\emptyset$-definibile in quanto esistono automorfismi di $\mathbb{C}$ che mandano $\sqrt{2}$ in $-\sqrt{2}$ e quindi ogni insieme -set definibile contenente $\sqrt{2}$ deve contenere anche $-\sqrt{2}$.

Esempio 11.3. Sia $\mathbb{R} = (\mathbf{R}; 0, 1, +, \cdot)$. Nella struttura $\mathbb{R}$, l'elemento $\sqrt{2}$ è $\emptyset$-definibile. Infatti in $\mathbb{R}$ l'ordine è definibile ($x \geq 0 \iff \exists y(y^2 = x)$) e $\sqrt{2}$ può essere definito come l'unico elemento positivo il cui quadrato è due (nel nostro linguaggio 2 è definibile senza parametri come $1 + 1$).

Lemma 11.4. $\mathrm{acl}(\mathrm{acl}(A)) = \mathrm{acl}(A)$.

11.2 Strutture fortemente minimali

Definizione 11.5. (Vedi [Hod:93] sezione 4.5) Sia M una L-struttura. M è minimale se ogni sottoinsieme definibile di M è finito o cofinito (cioè ha complemento finito). M è fortemente minimale se ogni sua estensione elementare è minimale.

Più in generale, data una L-struttura M, diremo che un insieme M-definibile $X \subset M^n$ è minimale se ogni suo sottoinsieme M-definibile Y è finito o relativamente cofinito (ovvero $X - Y$ è finito). Una formula $\varphi(\vec{x})$ con parametri da M è fortemente minimale se, in ogni estensione elementare N di M, l'insieme definito da $\varphi(\vec{x})$ in N è minimiale.

ACFmin **Esempio 11.6.** Un campo algebricamente chiuso M è fortemente minimale.

Dimostrazione. Sia $X \subset M$ un sottoinsieme definibile. Dobbiamo mostrare che X è finito o cofinito. Per l'eliminazione dei quantificatori X è combinazione booleana di sottoinsiemi di M definiti da formule atomiche. Visto la classe degli insiemi finiti o cofiniti è stabile per che unioni finite, intersezioni finite e complementi, basta trattare il caso in cui X è definito da una formula atomica. Ma ogni formula atomica (con parametri da M) equivale ad un'equazione polinomiale $p(x) = 0$ con $p(x) \in M[x]$. Per concludere basta ricordare che un polinomio non banale ha un numero finito di zeri. $\square$

Osservazione 11.7. In un campo algebricamente chiuso M la chiusura algebrica di $A \subset \mathrm{dom}(M)$ nel senso model-teoretico coincide con la chiusura algebrica nel senso algebrico.

Dimostrazione. Mostriamo il verso non banale. Sia $a \in \mathrm{acl}(A)$ nel senso model-teoretico. Quindi $a \in X$ per un certo X finito ed A-definibile. Come nella dimostrazione di 11.6, X è una combinazione booleana di insiemi della forma $X_p = \{x \mid p(x) = 0\}$ con $p(x) \in M[x]$. Equivalentemente $X = \bigcup_i \bigcap_j Y_{ij}$ dove i, j variano su un insieme finito di indici e ogni Y_{ij} è della forma X_p o $\neg X_p := \{x \mid p(x) \neq 0\}$. Nell'espressione per X deve esserci almeno un Y_{ij} finito, altrimenti X sarebbe infinito. Un tale Y_{ij} deve avere la forma $\neg X_p$ per qualche $p(x) \in M[x]$, X_p non banale, altrimenti $\square$

11.3 Dimensione in strutture fortemente minimali

Il seguente risultato generalizza il "Lemma dello scambio di Steinitz".

Lemma 11.8. *Sia N fortemente minimale. Siano $a, b \in M, A \subset \mathrm{dom}(M)$. Se $a \in \mathrm{acl}(b, A)$ e $a \notin \mathrm{acl}(B)$, allora $b \in \mathrm{acl}(a, A)$.*

Dimostrazione. (Vedi [Hod:93, Lemma 4.5.2]) $\square$

Lemma 11.9. *Sia N fortemente minimale. Due elementi $a, b \in N$ non-algebrici su $A \subset \mathrm{dom}(N)$ hanno lo stesso tipo su A.*

Dimostrazione. Sia $X \subset N$ un insieme definibile su A. Dobbiamo mostrare che $a \in X$ se e solo se $b \in X$. In caso contrario uno dei due appartiene ad X e l'altro no. Ma X o il suo complemento è finito. Quindi uno dei due è algebrico su A. $\square$

Definizione 11.10. Sia N fortemente minimale e siano $a_1, \ldots, a_n \in N$. Un sottoinsieme X di $\{a_1, \ldots, a_n\}$ è detto *generante* se la sua chiusura algebrica contiene tutti gli a_i, ed è detto *algebricamente indipendente* se ciascun elemento di X non è algebrico sugli altri elementi di X. Infine X è detto una *base* se è sia generante che algebricamente indipendente.

Teorema 11.11. *Tutte le basi di $\{a_1, \ldots, a_n\}$ hanno la stessa cardinalità, chiamata $\dim(a_1, \ldots, a_n)$. Inoltre ogni insieme indipendente massimale è generante.*

Analoghe conclusioni valgono rimpiazzando in tutte le definizioni "algebrico" con "algebrico su P", dove $P \subset \text{dom}(N)$ è un insieme di parametri (basta aggiungere costanti al linguaggio per gli elementi di P per ricondursi al caso $P = \emptyset$).

Dimostrazione. Sia $P \subset \text{dom}(N)$ e sia $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$.

Dati $b_1, \ldots, b_k \in A$ e $c_1, \ldots, c_l \in A$, dimostriamo che se $A \subset acl_P(b_1, \ldots, b_k)$ e $c_1, \ldots, c_l$ sono algebricamente indipendenti su P, allora $l \leq k$. Consideriamo un sottoinsieme minimale B di $\{b_1, \ldots, b_k\}$ tale che $c_l \in acl_P(B)$. Chiaramente B è non-vuoto perché c_l non è algebrico (su P). Riordinando gli indici possiamo assumere che il sottoinsieme contenga b_k, e quindi sia della forma $B' \cup \{b_k\}$, con c_l non-algebrico su B'. Per il lemma dello scambio b_k è algebrico su c_l, B'. Quindi $\text{acl}(b_1, b_2, \ldots, b_k) = \text{acl}(b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}, c_l)$. Ponendo $P' = P \cup \{c_l\}$ abbiamo che $A \subset acl_{P'}(b_1, \ldots, b_{k-1})$ e $c_1, \ldots, c_{l-1}$ sono algebricamente indipendenti su P'. Per induzione $l - 1 \leq k - 1$ e quindi $l \leq k$. (Lo stesso ragionamento mostra che possiamo espandere l'insieme $\{c_1, \ldots, c_l\}$ ad un insieme generante aggiungendogli $k - l$ elementi presi da $\{b_1, \ldots, b_k\}$.)

In particolare ne segue che tutti gli insiemi che siano al tempo stesso generanti ed indipendenti hanno la stessa cardinalità.

Per finire la dimostrazione basta mostrare che un sottoinsieme massimale X di A algebricamente indipendente (su P) è generante (su P). Se così non fosse ci sarebbe un $a_i \in A$ non contenuto in $acl_P(X)$. Ma allora $X \cup \{a_i\}$ sarebbe indipendente su P (verificare), contraddicendo la massimalità. $\square$

Definizione 11.12. Similmente definiamo $\dim(a_1, \ldots, a_n/B)$, dove $B \subset \text{dom}(N)$, come la cardinalità di un qualsiasi sottoinsieme di $\{a_1, \ldots, a_n\}$ che sia massimale tra quelli algebricamente indipendenti su B (aggiungendo al linguaggio nuove constanti per gli elementi di B ci si riconduce al caso senza parametri.)

Definizione 11.13. Data una strutture ω-satura M e un insieme definibile $X \subset M^n$, definiamo la dimensione di X, $\dim(X)$, come la massima dimensione delle n-uple prese da X. Similmente definiamo la dimensione di X su un insieme A di parametri, che indichiamo $\dim(X/A)$.

Esercizio 11.14. Sia $X \subset N^k$ un insieme definibile. $\dim(X) \geq r + 1$ se e solo se esistono sottoinsiemi definibili $X_i \subset X$ $(i < \omega)$ disgiunti, tali che $\dim(X_i) \geq r$ per ogni $i < \omega$.

12 Rango di Morley

Si veda la sezione 5.6 in [Hod:93] oppure la Definizione 2.1 in [Pi:89].

Definizione 12.1. Sia M una L-struttura e sia $X \subset M^n$ un insieme definibile in M (con parametri). Il rango di Cantor-Bendixon $\text{RCantor}(X)$ è definito come il minimo ordinale (se esiste) compatibile con le seguenti disuguaglianze:

1. $\text{RCantor}(X) \geq 0$ se X è non vuoto.

2. Se λ è un ordinale limite, $\mathrm{RCantor}(X) \geq \lambda$ se $\mathrm{RCantor}(X) > \alpha$ per ogni $\alpha < \lambda$.

3. $\mathrm{RCantor}(X) \geq \alpha+1$ se esistono insiemi definibili disgiunti $X_i \subset X$ $(i < \omega)$ tali che $\mathrm{RCantor}(X_i) \geq \alpha$ per ogni $i < \omega$.

Se vale $\mathrm{RCantor}(X) > \alpha$ per ogni α diremo che $\mathrm{RCantor}(X) = \infty$.

Chiaramente $X \subset Y$ implica $\mathrm{RCantor}(X) \leq \mathrm{RCantor}(Y)$ (induzione). Inoltre si ha:

`unione` **Lemma 12.2.** $\mathrm{RCantor}(X \cup Y) = \max\{\mathrm{RCantor}(X), \mathrm{RCantor}(Y)\}$.

Dimostrazione. Basta mostrare per induzione su α che se $\mathrm{RCantor}(X \cup Y) \geq \alpha$, allora $\mathrm{RCantor}(X) \geq \alpha$ o $\mathrm{RCantor}(Y) \geq \alpha$. Il caso α limite è banale. Consideriamo il caso $\alpha = \beta + 1$. Per definizione $X \cup Y$ contiene infiniti sottoinsiemi definibili disgiunti Z_i $(i < \omega)$ con $\mathrm{RCantor}(Z_i) \leq \beta$. Scrivendo $Z_i = (Z_i \cap X) \cup (Z_i \cap Y)$ e applicando l'ipotesi induttiva, abbiamo che $\mathrm{RCantor}(Z_i \cap X) \geq \beta$ o $\mathrm{RCantor}(Z_i \cap Y) \geq \beta$. Rimpiazzando Z_i con $Z_i \cap X$ o con $Z_i \cap Y$ possiamo assumere che ciascun Z_i sia contenuto in X o in Y. Ma allora uno tra X e Y contiene infiniti Z_i, da cui la tesi. □

Osservazione 12.3. La terza clausola nella definizione di RCantor equivale a: $\mathrm{RCantor}(X) \geq \alpha + 1$ se per ogni $n < \omega$ esistono insiemi definibili disgiunti $X_i \subset X$ $(i < n)$ tali che $\mathrm{RCantor}(X_i) \geq \alpha$ per ogni $i < n$.

Dimostrazione. Sia C_n una famiglia di n sottoinsiemi disgiunti di X ciascuno dei quali ha rango almeno α. Allargando uno degli insiemi possiamo assumere che C_n partizioni X. Usando il Lemma 12.2 possiamo inoltre assumere che la partizione C_{n+1} raffini C_n. Fatte queste riduzioni, sia $C = \bigcup_n C_n$. Poiché C è infinito, ne segue facilmente che deve allora esistere una successione infinita $(Z_i \mid i < \omega)$ in C con Z_{i+1} strettamente incluso in Z_i per ogni $i < \omega$. Osserviamo che $Z_i - Z_{i+1}$ deve essere unione di insiemi di qualche C_n, e quindi ha rango $\geq \alpha$. Per concludere basta osservare che gli insiemi $Z_i - Z_{i+1}$ $(i < \omega)$ sono disgiunti. □

Definizione 12.4. Se $\phi(x, a)$ è una formula con parametri a da M, e $N \succ M$, definiamo $\mathrm{RCantor}_N(\phi(x, a))$ come il rango di Cantor-Bendixon dell'insieme definito da $\phi(x, a)$ in N.

Lemma 12.5. *Se* $M \prec N$, *allora* $\mathrm{RCantor}_M(\phi(x, a)) \leq \mathrm{RCantor}_N(\phi(x, a))$.

Dimostrazione. Nella terza clausola della definizione del rango, gli insiemi X_i sono definibili da formule con parametri, e quindi è più facile trovarli in N (avendo a disposizione più parametri) piuttosto che in M. □

Se M è ω-satura, il rango non cambia passando ad una estensione elementare di M. Più precisamente:

Lemma 12.6. *Sia M ω-satura. Sia $\phi(x,a)$ una formula con parametri $a = (a_1, \ldots, a_k) \in M^k$ e variabili libere $x = (x_1, \ldots, x_k)$. Sia $N \succ M$ e sia $b \in N^k$ una k-upla con lo stesso tipo di a (in particolare possiamo prendere $b = a$). Allora* $\mathrm{RCantor}_M(\phi(x,b)) = \mathrm{RCantor}_N(\phi(x,a))$.

Dimostrazione. Basta mostrare per induzione su β che $\mathrm{RCantor}_N(\phi(x,a)) \geq \beta$ implica $\mathrm{RCantor}_M(\phi(x,a)) \geq \beta$ (il viceversa è facile). Il caso β limite è immediato. Assumiamo $\mathrm{RCantor}_N(\phi(x,a)) \geq \alpha+1$. Dato $m \in \omega$ esistono allora m insiemi disgiunti, definiti da formule $\theta_i(x,c_i)$ con parametri $c_i \in N^{k_i}$ $(i < m)$, tali che $\mathrm{RCantor}_N(\theta_i(x,c_i) \geq \alpha$ e $\{x \mid \theta_i(x,c_i)\} \subset \{x \mid \phi(x,a)\}$ (in N). Siccome M è ω-saturo esistono parametri d_i da M tali che $(M,a,d_i)_{i<m} \equiv (N,b,c_i)_{i<m}$. Ne segue che le formule $\theta_i(x,d_i)$ $(i < m)$ definiscono insiemi disgiunti in M inclusi in $\{x \in M \mid \phi(x,a)\}$. Per induzione $\mathrm{RCantor}_M(\theta(x,d_i)) \geq \alpha$ per ogni $i < m$. Visto che $m \in \omega$ è arbitrariamente grande, $\mathrm{RCantor}_M(\theta(x,a)) \geq \alpha + 1$. $\square$

Definizione 12.7. Sia $\phi(x,a)$ una formula con parametri da una struttura M. Il rango di Morley $\mathrm{RM}(\phi(x,a))$ è definito come $\sup_{N \succ M} \mathrm{RCantor}_N(\phi(x,a))$.

Osservazione 12.8. Nella definizione il sup è raggiunto prendendo N ω-satura. Se M stessa è ω-satura $\mathrm{RM}(\phi(x,a)) = \mathrm{RCantor}_M(\phi(x,a))$.

Dimostrazione. Usiamo il lemma di amalgamazione. Sia $\overline{M} \succ M$ una estensione elementare ω-satura di M e sia $N \succ M$. Per il lemma di amalgamazione N ed $\overline{M}$ possono essere immerse elementarmente in qualche N' (con una immersione che fissa M). Quindi al fine di calcolare il sup dei ranghi di $\phi(x,a)$ nelle estensioni elementari di M, possiamo limitarci a considerare le estensioni di $\overline{M}$. Poiché $\overline{M}$ è ω-saturo sappiamo che il rango non cresce passando da $\overline{M}$ ad una sua estensione. $\square$

Definizione 12.9. Sia $\phi(x,a)$ una formula con parametri da M di rango di Morley α. Il grado di Morley di $\phi(x,a)$ è definito come il massimo intero k tale che l'insieme definito da $\phi(x,a)$ (in una estensione ω-satura di M) ammette k sottoinsiemi definibili disgiunti di rango α.

Teorema 12.10. *Sia N fortemente minimale. Sia $X \subset N^n$ un insieme definibile. Allora $RM(X) = \dim(X)$.*

Dimostrazione. Vedi Lemma 2.6 in [Pi:89]. $\square$

13 Modelli primi

13.1 Modelli di termini

Lemma 13.1. *Sia T una L teoria e sia $C \subset L$ un insieme di simboli di constante. Supponiamo che:*

1. *T è coerente e completa.*

2. *Se $T \models \exists x \phi(x)$, allora $T \models \phi(c)$ per qualche $c \in C$.*

Allora T ha un modello M tale che ogni elemento del dominio di M è l'interpretazione di qualche termine costante $c \in C$.

Dimostrazione. Sia N un modello di T e sia $M \subset \mathrm{dom}(N)$ il sottoinsieme di N consistente delle interpretazioni delle costanti di C. Dato un termine chiuso t di L, chiaramente $T \models \exists x(x = t)$, e per ipotesi esiste una costante $c \in C$ tale che $T \models c = t$. Quindi M coincide con l'insieme delle interpretazioni dei termini chiusi, e pertanto è (il dominio di) una sottostruttura di N. Basta verificare che M è una sottostruttura elementare di N. A tal fine applichiamo il criterio di Tarski-Vaught. Supponiamo dunque che $N \models \exists x \phi(x, a_1, \dots, a_n)$ con $a_1, \dots, a_n \in M$. Dobbiamo verificare che esiste $b \in M$ con $N \models \phi(b, a_1, \dots, a_n)$. Per definizione di M, ciascun a_i è della forma ${c_i}^N$ per qualche $c_i \in C$. La L-formula chiusa $\exists x \phi(x, c_1, \dots, c_n)$ è vera in N, e siccome T è completa, essa è dimostrabile in T. Per le ipotesi su T esiste $c_0 \in C$ tale che $T \models \phi(c_0, c_1, \dots, c_n)$. Ma allora possiamo prendere come b l'interpretazione di c_0 in N. $\square$

Esercizio 13.2. Si dia una dimostrazione alternativa basata sul fatto che l'insieme delle conseguenze logiche di T è una teoria di Hintikka.

13.2 Omissione di tipi

`costanti` **Esercizio 13.3.** Sia T una L-teoria e siano x, y variabili distinte. Sia $L' = L \cup \{c_1, c_2\}$ dove c_1, c_2 sono costanti distinte non in L. Sono equivalenti:

- $T, \theta(c_1, c_2) \models \phi(c_1)$;
- $T \models \forall x, y(\theta(x, y) \to \phi(x))$;
- $T \models \forall x(\exists y \theta(x, y) \to \phi(x))$;
- $T, \exists y \theta(c_1, y) \models \phi(c_1))$.

Definizione 13.4. Sia T una teoria, e sia $\Sigma(x)$ un n-tipo completo di T. Diciamo che $\Sigma(x)$ è principale, se esiste una formula $\theta(x)$ tale che $T, \theta(x)$ è coerente e dimostra tutte le formule di $\Sigma(x)$. (Si noti che $\theta(x)$ appartiene necessariemente a $\Sigma(x)$ altrimenti per completezza vi apparterrebbe la sua negazione e avremmo $T, \theta(x) \models \neg\theta(x)$ contraddicendo la coerenza di $T, \theta(x)$.)

Possiamo dare l'analoga definizione per teorie e tipi non completi:

Definizione 13.5. Sia T una teoria coerente, e sia $\Sigma(x)$ un n-tipo (possibilmente parziale) di T. Diciamo che $\Sigma(x)$ è finitamente supportato, se esiste una formula $\theta(x)$ tale che $T, \theta(x)$ è coerente e dimostra tutte le formule di $\Sigma(x)$. (Non richiediamo che $\theta(x)$ appartenga a $\Sigma(x)$.)

Teorema 13.6. *Sia T una teoria coerente in un linguaggio L numerabile, sia $x = (x_1, \dots, x_n)$ e sia $\Sigma(x)$ un n-tipo (parziale) di T non finitamente supportato. Allora T ha un modello che omette $\Sigma(x)$.*

Dimostrazione. Consideriamo dapprima il caso $n = 1$. Sia $C = \{c_i \mid i < \omega\}$ un insieme numerabile di nuove costanti non in L. Sia $(\sigma_i \mid i < \omega)$ una enumerazione di tutte le $L \cup C$-formule chiuse. Definiremo una successione di $L \cup C$-teorie coerenti $T = S_0 \subset S_1 \subset S_2 \subset \ldots$ tale che ogni S_i sia una estensione finita di T e, ponendo $S = \bigcup_n S_n$, si abbia:

1. S è completa.
2. Se $\exists x \phi(x) \in S$, allora $\phi(c) \in S$ per qualche $c \in C$.
3. Per ogni $c \in C$ esiste $\delta(x) \in \Sigma(x)$ con $\neg\delta(c) \in S$.

Le prime due proprietà implicano che S ha un modello M in cui ogni elemento è l'interpretazione di qualche costante c_i. La terza proprietà garantisce che M omette $\Sigma(x)$ (in quanto nessun $c \in C$ realizza $\Sigma(x)$).

Diamo un'enumerazione di tutte le terne $(\sigma, \exists x\psi(x), c)$ consistenti di una $L \cup C$-formula chiusa σ, una $L \cup C$-formula chiusa della forma $\exists x \psi(x)$, e una costante c di C.

Supponendo di aver già definito S_n definiamo delle nuove teorie $S_n \subset {S_n}' \subset {S_n}'' \subset S_{n+1}$ come segue. Consideriamo la n-esima terna $(\sigma, \exists x\psi(x), c)$ dell'enumerazione. Se $S_n \cup \{\sigma\}$ è coerente poniamo ${S_n}' = S_n \cup \{\sigma\}$, altrimenti ${S_n}' = S_n \cup \{\neg\sigma\}$. Ora distinguiamo due casi. Se ${S_n}'$ non dimostra $\exists x\phi(x)$, poniamo ${S_n}'' = {S_n}'$. Se invece ${S_n}'$ dimostra $\exists x \phi(x)$, scegliamo una costante $c \in C$ ancora non adoperata e poniamo ${S_n}'' = {S_n}' \cup \phi(c)$. Si noti che, scegliendo come $\phi(x)$ una formula della forma $c' = x$, ne seguirà che in ogni modello di $S = \bigcup_n S_n$ ogni costante è uguagliata ad infinite altre costanti. Assumendo induttivamente che S_n sia coerente, anche ${S_n}'$ ed ${S_n}''$ lo sono. Inoltre se S_n è un'estensione finita di T, anche ${S_n}''$ lo è. Quindi esiste una $L \cup C$-formula $\psi(c_1, \ldots, c_n)$ (che non contiene altre costanti di C oltre quelle esplicitate) tale che ${S_n}'' \equiv T \cup \{\psi(c_1, \ldots, c_n)\}$. Siccome $\Sigma(x)$ non è finitamente supportato, $T, \psi(c_1, \ldots, c_n)$ non può dimostrare tutte le formule di $\Sigma(c)$ (vedi Esercizio 13.3). Quindi esiste una formula $\delta(x)$ tale che $S_{n+1} = {S_n}'' \cup \neg\delta(c)$ è coerente. La construzione delle S_n è completata e per costruzione $S = \bigcup_n S_n$ ha le proprietà richieste.

Consideriamo ora il caso $n > 1$. Procediamo come prima ma enumerando le terne $(\sigma, \exists \vec{x}\psi(\vec{x}), \vec{c})$ dove questa volta $\vec{x}$ è una n-upla di variabili e $\vec{c}$ è una n-upla di costanti distinte. Ci serve che le costanti siano distinte per garantire che, supponendo $\Sigma(\vec{x})$ non finitamente supportato, una estensione finita $T, \psi(c_1, \ldots, c_n)$ di T non può dimostrare tutte le formule di $\Sigma(\vec{c})$ (verificare!). Ragionando come sopra abbiamo che per ciascuna n-upla di costanti distinte $\vec{c}$, S dimostra che $\vec{c}$ non realizza $\Sigma(x)$, ovvero esiste $\delta(\vec{x}) \in \Sigma(x)$ con $S \models \neg\delta(\vec{c})$. D'altra parte in ogni modello M di S ogni costante è uguagliata ad infinite altre costanti. Quindi ogni n-upla $\vec{a}$ di elementi di M (non necessariamente distinti) può essere denotata da una n-upla di costanti distinte $\vec{c}$. Sappiamo d'altra parte che S ha un modello i cui elementi sono solo le interpretazioni delle costanti. Tale modello omette $\Sigma(x)$. □

Similmente si dimostra:

Teorema 13.7. *Sia T una teoria coerente in un linguaggio L numerabile, e sia $\Sigma_m(x_1, \ldots, x_{k_m})$ una famiglia numerabile di tipi (parziali) non finitamente supportati. Allora T ha un modello che omette ciascun Σ_m.*

13.3 Topologia sullo spazio dei tipi

Definizione 13.8. Sia $S_n(T)$ l'insieme degli n-tipi completi $p(x)$ di T (dove $x = (x_1, \ldots, x_n)$). Mettiamo una topologia su $S_n(T)$ come segue. Data una formula $\phi(x)$, sia $[\phi(x)]$ l'insieme dei tipi che contengono $\phi(x)$. Diciamo che $[\phi(x)]$ è aperto base. Gli aperti sono unioni di aperti base. Notiamo che $[\phi(x)]$ è clopen, in quanto il suo complemento è $[\neg\phi(x)]$.

Teorema 13.9. *$S_n(T)$ è uno spazio topologico compatto di Hausdorff con una base di clopen.*

Dimostrazione. Dati due tipi distinti $p, q \in S_n(T)$ esiste una formula $\phi(x)$ che sta in uno dei due tipi e non nell'altro. Gli aperti $[\phi(x)]$ e $[\neg\phi(x)]$ separano p da q. Quindi $S_n(T)$ è Hausdorff. Mostriamo che è compatto. Visto che ogni aperto è unione di aperti base, basta mostrare che ogni famiglia di aperti base $[\phi_i(x)]$ $(i \in I)$ che ricopre$S_n(T)$ ha un sottoricoprimento finito. Questo segue dal fatto che se $T \models \bigcup_{i \in I} \phi_i(x)$, allora, come semplice conseguenza del teorema di compattezza per la logica del primo ordine, esiste un sottoinsieme finito J di I tale che $T \models \bigcup_{i \in J} \phi_i(x)$. $\square$

Esercizio 13.10. Un tipo $p(x) \in S_n(T)$ è principale se e solo se è isolato, ovvero se esiste $\phi(x)$ tale che $p(x)$ è l'unico tipo di $[\phi(x)]$.

Definizione 13.11. Fissata una teoria T, diciamo che una formula $\phi(x)$ è completa se $T, \phi(x)$ è una $L \cup \{x\}$ teoria completa. Ciò equivale a dire che $[\phi(x)] \subset S_n(T)$ contiene un solo tipo, isolato da $\phi(x)$.

13.4 Modelli atomici

In questa sezione definiamo i modelli atomici, mostriamo che (per T completa numerabile) i modelli atomici numerabili coincidono con i modelli primi, dimostriamo l'unicità dei modelli atomici numerabili, e caratterizziamo le teorie che hanno un modello atomico.

Definizione 13.12. Una struttura M è atomica se ogni n-upla di M realizza un tipo isolato di $T = Th(M)$. Equivalentemente M è atomica se ogni n-upla di M verifica una formula completa $\phi(x_1, \ldots, x_n)$.

isolato **Lemma 13.13.** *Sia $(M, a_1, \ldots, a_n) \equiv (N, b_1, \ldots, b_n)$ e sia $c \in M$. Se il tipo di c su $a_1, \ldots, a_n$ è isolato, esiste $d \in N$ tale che $(M, a_1, \ldots, a_n, c) \equiv (N, b_1, \ldots, b_n, d)$.*

Dimostrazione. Sia $\Sigma(x, a_1, \ldots, a_n)$ il tipo di c su $a_1, \ldots, a_n$ in M, e sia $\phi(x, a_1, \ldots, a_n)$ la formula che lo isola. Allora $\Sigma(x, b_1, \ldots, b_n)$ è un tipo in $(N, b_1, \ldots, b_n)$ (verificate!), che è isolato da $\phi(x, b_1, \ldots, b_n)$. I tipi isolati sono sempre realizzati, quindi esiste $d \in N$ con realizza $\Sigma(x, b_1, \ldots, b_n)$, da cui la tesi. $\square$

Corollario 13.14. *Due modelli atomici numerabili M, N di una teoria completa T sono isomorfi.*

Dimostrazione. Per il Lemma precedente l'insieme degli isomorfismi parziali finiti tra due modelli di T ha la proprietà del va e vieni, e possiamo dunque applicare il Teorema 6.8. $\square$

Lo stesso ragionamento, facendo solo il "va" e non il "vieni", mostra:

Corollario 13.15. *Un modello atomico numerabile è primo.*

Per teorie numerabili vale anche il viceversa:

Corollario 13.16. *(T completa numerabile) Sia M un modello primo. Allora M è sia atomico che numerabile.*

Dimostrazione. M è numerabile per Löwenheim Skolem, ed è atomico perchè ogni tipo non-principale $p(x)$ viene omesso in qualche modello N (omissione dei tipi) e quindi anche necessariamente nel modello primo M (in quanto i tipi realizzati in una struttura sono necessariamente realizzati in tutti i modelli in cui quella struttura si immerge elementarmente). $\square$

Dunque per teorie complete numerabili i modelli primi sono esattamente i modelli atomici numerabili, e sappiamo che cè uno solo tale modello a meno di isomorfismi.

Studiamo ora le teorie numerabili che hanno un modello primo.

Teorema 13.17. *Sia T una teoria completa numerabile. Sono equivalenti:*

1. *T ha un modello atomico;*
2. *T ha un modello atomico numerabile;*
3. *per ogni n gli n-tipi isolati di T sono densi nello spazio dei tipi $S_n(T)$.*

Dimostrazione. Assumiamo la densità dei tipi isolati. Ciò significa che ogni formula è implicata, in T, da una formula completa. Ne segue che l'insieme $\Sigma_n(x)$ consistente delle negazioni $\neg\phi(x)$ delle formule complete in $x = (x_1, \ldots, x_n)$ non può essere implicato da una singola formula (altrimenti sarebbe anche implicato da una formula completa, ma ciò è impossibile visto che la negazione della formula appartiena a $\Sigma(x)$). Per il teorema di omissione dei tipi esiste dunque un modello che omette $\Sigma_n(x)$ per ogni n. Ora basta osservare che una struttura M è atomica se e se e solo se M omette, per ogni n, l'insieme $\Sigma_n(x)$.

Viceversa supponiamo che T abbia un modello atomico N. Per Löwenheim Skolem ne ha anche uno numerabile $M \prec N$. Data una formula $\phi(x)$ coerente con T vogliamo dimostrare che essa è implicata (in T) da una formula completa. Abbiamo $T \models \exists x \phi(x)$. Quindi esiste $a \in M$ tale che $M \models \phi(a)$. Il tipo $p(x)$ di a è isolato (in quanto M è atomica) e contiene $\phi(x)$. Abbiamo così dimostrato che ogni aperto base $[\phi(x)]$ dello spazio dei tipi contiene un tipo isolato, ovvero i tipi isolati sono densi. $\square$

Una condizione sufficiente per la densità dei tipi isolati è la seguente.

Lemma 13.18. *Supponiamo che T abbia al più una quantità numerabile di n-tipi. Allora gli n-tipi isolati di T sono densi in $S_n(T)$.*

Dimostrazione. Questo è un fatto puramente topologico. In uno spazio di Hausdorff compatto e numerabile (quale assumiamo sia $S_n(T)$) i punti isolati sono densi. Diamo comunque la dimostrazione nel nostro caso particolare. Dato un aperto base $[\phi(x)]$ di $S_n(T)$, supponendo che non contenga punti isolati, possiamo ovviamente trovare due aperti non-vuoti e disgiunti $[\phi_1(x)] \subset [\phi(x)]$ e $[\phi_2(x)] \subset [\phi(x)]$. Iterando la costruzione possiamo costruire un albero binario completo di formule, ciascuna delle quali implica quelle più in alto nell'albero (cioè più vicine alla radice) ed è incompatibile con quelle al suo stesso livello nell'albero. Prendendo i rami massimali dell'albero, otteniamo $2^{\aleph_0}$ tipi distinti. $\square$

13.5 Teorie ω-categoriche

Diamo una caratterizzazione delle teorie ω-categoriche. Un esempio è la teoria degli ordini densi senza estremi.

Lemma 13.19. *Sono equivalenti:*

1. *Ogni tipo di $S_n(T)$ è isolato.*
2. *$S_n(T)$ è finito.*

Dimostrazione. Se tutti i tipi sono isolati, $S_n(T) = \bigcup_{p \in S_n(T)} \{p\}$ è un ricoprimento aperto di $S_n(T)$. Per compattezza esiste un sottoricoprimento finito.

Poichè $S_n(T)$ è di Hausdorff i suoi punti sono chiusi. Quindi se $S_n(T)$ è finito ogni sottoinsieme di $S_n(T)$ è chiuso. Passando ai complementi, ogni sottoinsieme di $S_n(T)$ è aperto. In particolare ogni punto è aperto, e quindi isolato. $\square$

Teorema 13.20. *Sia T una teoria completa in un linguaggio numerabile. Allora T è ω-categorica se e solo se, per ogni n, $S_n(T)$ è finito (equivalentemente: ogni tipo è isolato).*

Dimostrazione. Supponiamo che T sia ω-categorica. Dobbiamo mostrare che ogni tipo $p(x) \in S_n(T)$ è isolato. Per assurdo sia $p(x) \in S_n(T)$ non isolato. Per il teorema di omissione di tipi esiste un modello $M \models T$ che omette $p(x)$, che possiamo prendere numerabile essendo il linguaggio di T numerabile. D'altra parte, come qualsiasi altro tipo, $p(x)$ deve essere realizzato in qualche modello numerabile $N \models T$. Chiaramente M non è isomorfo ad N e T non è ω-categorica.

Viceversa supponiamo che tutti gli n-tipi di T sono isolati. Da ciò segue che tutti i modelli sono atomici. Per l'unicità dei modelli atomici ciò implica che T è ω-categorica. $\square$

14 Teorema di Morley

Consideriamo la teoria ACF_0 dei campi algebricamente chiusi di caratteristica zero. Ogni modello è della forma $AC(\mathbb{Q}(x_i : i \in I))$, dove $(x_i : i \in I)$ è una base di trascendenza, e AC è la chiusura algebrica. Ne seque che per ogni cardinale $\kappa \geq \aleph_1$ esiste un solo modello, quello in cui la base di trascendenza ha cardinalità κ (per $\kappa = \aleph_0$ ci possono essere $\aleph_0$ modelli, quelli in cui la base di trascendenza ha cardinalità $\leq \aleph_0$). Il teorema di Morley generalizza questo risultato: ogni teoria completa numerabile κ-categorica in un cardinale $\kappa \geq \aleph_1$ è κ-categorica per qualunque cardinale $\geq \aleph_1$. Nella dimostrazione dovremmo il concetto di successione indiscernibile, che giocherà il ruolo della base di trascendenza nel caso di ACF_0, e il concetto di modello costruibile su un insieme A giocherà grosso modo il ruolo della chiusura algebrica.

14.1 Indiscernibili

Dato un insieme X, sia $X^{[n]}$ l'insieme dei sottoinsiemi di X di cardinalità n. Dato $k \in \omega$, una k-colorazione di $X^{[n]}$ è una funzione $c\colon X^{[n]} \to k$. Osserviamo che un grafo su un insieme X di vertici può essere visto come una 2-colorazione di $X^{[2]}$ (assegno colore 1 agli archi del grafo).

Teorema 14.1. *(Ramsey) Sia X un insieme infinito e siano $k, n < \omega$. Data una k-colorazione $c\colon X^{[n]} \to k$, esiste un sottoinsieme infinito Y di X tale che $Y^{[n]}$ è monocromatico (ovvero c è costante su di esso).*

Dimostrazione. Possiamo assumere $X = \mathbb{N}$ e identificare $\mathbb{N}^{[n]}$ con l'insieme delle n-uple crescenti di elementi di $\mathbb{N}$. Il caso $n = 1$ è banale. Assumiamo $n > 1$ e per ogni $j \in \mathbb{N}$ definiamo $c_j\colon \mathbb{N}^{[n-1]} \to k$ ponendo $c_j(x_1, \ldots, x_{n-1}) = c(x_1, \ldots, x_{n-1}, j)$. Per induzione possiamo assumere che esista un sottoinsieme infinito X_j di X tale che $X_j^{[n-1]}$ sia monocromatico per c_j. Sia $k_j < k$ il corrisponente colore costante assunto. Per induzione su j possiamo fare in modo che $X_{j+1} \subset X_j$ per ogni j. Definiamo ora induttivamente $j_0 \in \mathbb{N}$ e $j_{m+1} \in X_{j_m}$. Per la finitezza del numero k dei colori, la successione $(k_{j_m})_{m \in \mathbb{N}}$ deve arere una sottosuccessione costante $(k_{j_{r_m}})_{m \in \mathbb{N}}$. L'insieme $Y = \{j_{r_n} : n \in \mathbb{N}\}$ è allora come richiesto. $\square$

Definizione 14.2. Sia M una L-struttura e sia $(b_i : i \in I)$ una famiglia di elementi distinti di M indiciata da un insieme totalmente ordinato $(I, <)$. Diciamo che $(b_i : i \in I)$ è indiscernibile se per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $i_1 < \ldots < i_n$ in I, il tipo di $(b_{i_1}, \ldots, b_{i_n})$ non dipende dalla scelta degli indici $i_1, \ldots, i_n$ (ovvero coincide con il tipo di $(b_{j_1}, \ldots, b_{j_n})$ per ogni altra n-upla crescente $j_1 < \ldots < j_n$). Similmente definiamo la nozione di famiglia indiscernibile su un insieme $A \subset M$ di parametri, considerando i tipi su A.

Teorema 14.3. *Data una teoria completa T con modelli infiniti e un ordine totale $(I, <)$, esiste un modello di T con una famiglia di indiscernibili indiciata da I.*

Dimostrazione. Trattiamo prima il caso $I = \omega$, con l'usuale ordine. L'indiscernibilità di $(b_i : i \in I)$ può essere espressa da una infinità di assiomi della forma $\phi(b_{i_1}, \dots, b_{i_n}) \iff \phi(b_{j_1}, \dots, b_{j_n})$ (*) dove $i_1 < \dots i_n$ e $j_1 < \dots j_n$ variano in I, $\phi(x_1, \dots, x_n)$ varia tra le L-formule, e i b_i sono simboli di costante. Per compattezza basta dimostrare che, dato un insieme finito $\Delta(x_1, \dots, x_n)$ di formule in $x_1, \dots, x_n$, esiste un modello M con una famiglia "Δ-indiscernibile", ovvero una famiglia che verifica (*) per le formule ϕ in Δ. A tal fine prendiamo un modello qualsiasi M di T e fissiamo una successione $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ di elementi di M. Coloriamo le n-uple $(a_{i_1}, \dots, a_{i_n})$ con $2^{|\Delta|}$ colori, dove i colori sono in corrispondenza biunivoca con i sottoinsiemi di Δ e codificano quali delle formule di Δ sono soddisfatte dalla n-upla. Per il teorema di Ramsey esiste una sottosuccessione infinita degli $(a_i)_i$ tale che la colorazione è costante sulle n-uple crescenti di elementi della sottosuccessione, ovvero la sottosuccessione è Δ-indiscernibile.

Il caso in cui $(I, <)$ è un arbitrario ordine totale segue per compattezza. Dato un modello M con una famiglia di indiscernibili $(b_i : i < \omega)$, introduciamo nuove costanti c_i $(i \in I)$ e $\underline{b}_j$ $(j \in \omega)$ con gli assiomi $\phi(c_{i_1}, \dots, c_{i_n}) \iff \phi(\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e ogni formula $\phi(x_1, \dots, x_n)$. Questi assiomi sono coerenti con T in quanto ogni loro sottoinsieme finito ha come modello una espansione di M. Infatti dato un insieme finito $c_{i_1}, \dots, c_{i_k}$ delle constanti c_i possiamo intepretare ciascun c_{i_m} con b_m e ciascun $\underline{b}_m$ con b_m $(m \leq k)$. L'idea è che ogni sottoinsieme finito di un ordine totale si immerge in $\mathbb{N}$. $\square$

Il seguente lemma fornisce modelli arbitrariamente grandi che realizzano pochi tipi sugli insiemi numerabili di parametri.

pochitipi

Lemma 14.4. *Data una teoria numerabile T ed un cardinale $\kappa \geq \aleph_1$, esiste un modello $M \models T$ di cardinalità κ che realizza, per ogni sottoinsieme numerabile A di M, al più $\aleph_0$ 1-tipi su A.*

Dimostrazione. Possiamo assumere che T sia skolemizzata, ovvero per ogni formula $\phi(\vec{x}, y)$ esista una funzione definibile f_ϕ tale che T dimostri $(\forall \vec{x} y)(\phi(\vec{x}, y) \rightarrow \phi(\vec{x}, f_\phi(x)))$ (possiamo infatti ricondurci a questo caso aggiungendo simboli di costante f_ϕ e osservando che l'introduzione di assiomi della forma $\phi(\vec{x}, y) \rightarrow \phi(\vec{x}, f_\phi(x))$ preserva la coerenza). Fatta questa riduzione ne seque che T è model completa, ovvero ogni immersione tra modelli di T è un'immersione elementare. Ne seque anche (per il test di Tarski-Vaught) che dato un modello M di T e un sottoinsieme A di M, la chiusura definibile di A in M è una sottostruttura elementare.

Assumendo dunque che T sia skolemizzata procediamo come segue. Sia N un modello di T con una successione indiscernibile $(b_i : i < \kappa)$. Sia $M \prec N$ la chiusura definibile di $B = \{b_i : i < \kappa\}$. Ogni elemento c di M è della forma $c = f(b_{j_1}, \dots, b_{j_n})$ per qualche funzione $\emptyset$-definibile f e qualche n-upla da B. Poichè il linguaggio di T è numerabile, $|M| = \kappa$. Dato un sottoinsieme numerabile A di M, dobbiamo mostrare che M realizza al più $\aleph_o$ 1-tipi su A. Osserviamo che A è incluso nella chiusura definibile di un sottonsieme numerabile $B_0 = \{b_i : i \in I\}$ di $B = \{b_i : i < \kappa\}$. Dato $c \in M$, scriviamo $c = f(b_{j_1}, \dots, b_{j_n})$ come sopra e sia $J = \{j_1, \dots, j_n\} \subset \kappa$. Per l'indiscernibilità, il tipo di c su A dipende solo da come gli elementi di J sono situati tra gli elementi di I, ovvero dal tipo di isomorfismo di $(J, J \cup I, <)$ (verificate!). Siccome I è numerabile e bene ordinato (essendo incluso in κ) e J è finito, ci sono solo $\aleph_0$ possibilità (basta specificare per ogni $j \in J$ il minimo elemento di I maggiore di j). $\square$

14.2 Teorie ω-stabili e teorie totalmente trascendenti

Definizione 14.5. Una teoria completa numerabile T è ω-stabile se per ogni modello M di T e ogni sottoinsieme numerabile di M, la teoria $Th(M, a)_{a \in A}$ ha al più una quantità numerabile di 1-tipi.

Teorema 14.6. *Sia T una teoria κ-categorica, $k \geq \aleph_1$. Allora T è ω-stabile.*

Dimostrazione. Se no sia M un modello la cui teoria ha più di $\aleph_0$ tipi su un insieme numerabile $A \subset M$ di parametri. Posso realizzare $\aleph_1$ di questi tipi in una estensione elementare N di M, e per i teoremi di Löwenheim-Skolem posso prendere N di cardinalità κ. D'altra parte per il Lemma 14.4 esiste anche un modello $N' \succ M$ di cardinalità κ che realizza solo $\aleph_0$ tipi su A. Chiaramente N non è isomorfo ad N', contraddicendo la κ-categoricità. $\square$

Definizione 14.7. Una teoria T è totalmente trascendente se ogni formula con parametri da un modello di T ha rango di Morley $< \infty$.

Teorema 14.8. *Per una teoria numerabile completa T sono equivalenti:*

1. *T è ω-stabile.*
2. *T è totalmente trascendente.*
3. *T è λ-stabile per ogni cardinale $\lambda \geq \omega$.*

Dimostrazione. $(1 \to 2)$. Supponiamo che $\phi(\vec{x})$ sia una formula di rango di Morely ∞ con parametri da un modello M di T, che possiamo supporre ω-saturo. L'insieme definito da $\phi(\vec{x})$ può allora essere spezzato in due sottoinsiemi definiti da formule con rango di Morley ∞. Iterando la costruzione otteniamo un albero binario di formule di rango ∞. I rami dell'albero determinano $2^{\aleph_0}$ tipi su un insieme numerabile di parametri. Pertanto T non è ω-stabile.

$(2 \to 3)$. Se T è totalmente trascendente, ogni tipo $p(x)$ con parametri da $M \models T$ è determinato dalla formula $\phi_p(x)$ di minimo rango e grado presente nel tipo. Infatti una formula appartiene a $p(x)$ se e solo se in congiunzione con $\phi_p(x)$ non abbassa il rango o, a parità di rango, il grado. Siccome ci sono al più $|L_M|$ formule, ci sono al più $|L_M|$ tipi su M. Essendo L numerabile, ne segue che T è λ-stabile.

$(3 \to 1)$ è immediato. $\square$

Osserviamo che l'implicazione $(1 \to 2)$ non richiede T numerabile.

Teorema 14.9. *Sia T una teoria completa numerabile ω-stabile. Allora T ha modelli saturi di qualsiasi cardinalità regolare λ. Inoltre dato un cardinale $\kappa \geq \lambda$, T ha un modello λ-saturo di cardinalità κ.*

Dimostrazione. Sia M_0 un modello di T di cardinalità κ. Costruiamo una catena elementare di modelli $(M_i : i < \lambda)$ in modo che $M_{\alpha+1}$ realizzi tutti gli 1-tipi su M_α. Se M_α ha cardinalità κ possiamo mantenere $M_{\alpha+1}$ di cardinalità κ in quanto, per la κ-stabilità, i tipi da realizzare sono al più κ. L'unione $M = \bigcup_{i<\lambda} M_i$ della catena ha cardinalità κ. Per mostrare che M è λ-saturo consideriamo un insieme $A \subset M$ di parametri di cardinalità $< \lambda$ e sia $p(x)$ un tipo su A. Siccome λ è assunto regolare, $A \subset M_\alpha$ per qualche $\alpha < \lambda$. Poiché posso estendere $p(x)$ a un tipo su M_α, per costruzione $p(x)$ è realizzato in $M_{\alpha+1}$ e quindi in M. □

Si può dimostrare che l'ipotesi di regolarità di λ si può omettere, ma per il momento non ne abbiamo bisogno.

`k-cat-sat` **Teorema 14.10.** *Sia $\kappa > \aleph_0$ e sia T una teoria completa numerabile κ-categorica. Allora l'unico modello M di cardinalità κ è saturo.*

Dimostrazione. Scriviamo κ come sup $\bigcup_{i\in I} \lambda_i$ di cardinali regolari λ_i. Essendo κ-categorica T è ω-stabile, e pertanto ha un modello λ_i-saturo di cardinalità κ, che deve coincidere con l'unico modello M di cardinalità κ. M è pertanto λ_i-saturo per ogni $i \in I$, e dunque è κ-saturo. □

14.3 Modelli costruibili

Definizione 14.11. Sia M una struttura e A un sottoinsieme di M. Diciamo che M è costruibile su A se possiamo scrivere M nella forma $A \cup \{b_\alpha : \alpha < \gamma\}$ per qualche ordinale γ, in modo che il tipo di ciascun b_β su $A \cup \{b_\alpha : \alpha < \beta\}$ sia isolato. Similmente definiamo il concetto di sottoinsieme di M costruibile su A.

Lemma 14.12. *Se M è costruibile su A, allora è atomico su A (e quindi è primo su A).*

Dimostrazione. Sia $A_\alpha = A \cup \{b_i : i < \alpha\}$. Mostro per induzione su α che il tipo su A di ogni n-upla di elementi di A_α è isolato, ovvero l'insieme A_α è atomico su A. Questo è chiaro se α è limite. Consideriamo $A_{\alpha+1} = A_\alpha \cup \{b_\alpha\}$. Per definizione il tipo di b_α su A_α è isolato. Ne seque che $b_\alpha \cup A_\alpha$ è atomico su A_α, ovvero il tipo di ogni n-upla da $b_\alpha \cup A_\alpha$ è isolato su A_α. Per induzione possiamo assumere che A_α sia isolato su A. Per transitività di "atomico su", concludiamo che $A_{\alpha+1}$ è isolato su A. □

Lemma 14.13. *Siano $A \subset B \subset C$ sottoinsiemi di un modello di T. Se C è atomico su B e B è atomico su A, allora C è atomico su A.*

Dimostrazione. Data una n-upla c da C, sia $\phi(x, b)$ la formula che isola il suo tipo su B (dove b è una tupla di parametri da B) e sia $\psi(y)$ la formula che isola il tipo di b su A. Allora $\exists y(\psi(y) \wedge \phi(x, y)$ isola il tipo di c su B. □

Lemma 14.14. *Sia T una teoria numerabile completa ω-stabile e sia M un modello di T. Allora per ogni sottoinsieme $A \subset M$ esiste $N \prec M$ contenente A costruibile su A.*

Dimostrazione. Se A è il dominio di una sottostruttura elementare di M non c'è nulla da dimostrare. Altrimenti esiste una formula $\phi(x)$ con parametri da A tale che $M \models \exists x\phi(x)$ ma $M \not\models \phi(a)$ per ogni $a \in A$. Scelgo una tale $\phi(x)$ di minimo rango di Morley e, a parità di rango, di minimo grado. Dico che $\phi(x)$ isola un 1-tipo completo di $Th(M,a)_{a\in A}$. Infatti se cosi non fosse esisterebbe una formula $\psi(x) \in L_A$ tale che $\psi(x) \wedge \phi(x)$ e $\psi(x) \wedge \phi(x)$ siano entrambe coerenti con $Th(M,a)_{a\in A}$, contraddicendo la minimalità di $\phi(x)$. Ne segue che, se b_0 verifica $\phi(x)$, il tipo di b_0 su A è isolato. Inoltre per la scelta di $\phi(x)$, b_0 non appartiene ad A. Poniamo ora $A' = A \cup \{b_0\}$ e ripetiamo la costruzione con A' al posto di A. In questo modo otteniamo una successione strettamente crescente di insiemi $A_0 = A, A_{\alpha+1} = {A_\alpha}'$ prendendo l'unione $A_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} A_\alpha$ ai passi limite. Ad un certo punto dovremo necessariamente fermarci (essendo M un insieme) ottendo una sottostruttura elementare $N = A_\alpha$ di M costruibile su A. □

Ancora sugli indiscernibili:

suff-ind **Lemma 14.15.** *Sia T ω-stabile. Dato $M \models T$ e un sottoinsieme A di M, le seguenti condizioni sono sufficienti affinchè una successione $(b_i : i < \omega)$ di elementi di M sia indiscernibile su A.*

1. *Detto $p_i(x)$ il tipo di b_i su $\{b_j : j < i\}$, esistono un ordinale α e un intero d tali che il rango di Morley di ciascun p_i è uguale ad α e il grado è uguale a d.*

2. *Esiste una singola formula $\phi(x)$ di rango e grado (α, d), appartenente a tutti i $p_i(x)$.*

Dimostrazione. Aggiungendo costanti al linguaggio possiamo assumere che A sia vuoto. Se la successione non fosse indiscernibile esisterebbero $i_0 < i_1 < \ldots < i_n$, con n minimale, tali che $(M, b_0, \ldots, b_n) \not\equiv (M, b_{i_0}, \ldots, b_{i_n})$. In questa situazione sia $\sigma(x_0, \ldots, x_n)$ una formula verificata dalla prima n-upla e non dalla seconda. Allora $\phi(x) \wedge \sigma(b_0, \ldots, b_{n-1}, x)$ appartiene a $p_n(x)$ (il tipo di b_n sugli elementi precedenti), e quindi ha rango-grado (α, d). Similmente $\phi(x) \wedge \neg\sigma(b_{i_0}, \ldots, b_{i_{n-1}}, x)$ appartiene a $p_{i_n}(x)$ (il tipo di b_{i_n} sugli elementi precedenti), e quindi ha rango-grado (α, d). Ma il rango-grado di una formula dipendo solo dal tipo dei parametri, e siccome possiamo assumere per induzione che $(M, b_0, \ldots, b_{n-1}) \equiv (M, b_{i_0}, \ldots, b_{i_{n-1}})$, anche $\phi(x) \wedge \neg\sigma(b_0, \ldots, b_{n-1}, x)$ ha rango-grado (α, d). Ne segue $\phi(x)$ può essere spezzata nelle due formule incompatibili $\phi(x) \wedge \sigma(\vec{b}, x)$ e $\phi(x) \wedge \neg\sigma(\vec{b}, x)$ entrambe di rango-grado (α, d). Questo è assurdo in quanto $\phi(x)$ ha rango-grado (α, d). □

Teorema 14.16. *Sia T una teoria numerabile completa ω-stabile e sia M un modello di T di cardinalità $\kappa > \aleph_0$. Allora per ogni sottoinsieme A di M di cardinalità $< \kappa$, M contiene una successione $(b_i : i < \omega)$ indiscernibile su A.*

Dimostrazione. Sia $\phi(x)$ una formula di minimo rango-grado (α, d) tra quelle che sono verificate da un insieme di elementi di M di cardinalità $> |A|$ (per le nostre ipotesi la formula $x = x$ è tra queste). Ingrandendo A possiamo assumere $\phi(x) \in L_A$. L'idea è di definire induttivamente b_i $(i < \omega)$ in modo che siano verificate le ipotesi del Lemma 14.15. A tal fine scegliamo come b_0 una qualunque realizzazione di $\phi(x)$ il cui tipo su A ha rango-grado (α, d). Dobbiamo mostrare che un tale elemento esiste. Per assurdo supponiamo che per ogni $b \in M$ che verifica $\phi(b)$ il tipo $tp(b/A)$ abbia rango-grado $< (\alpha, d)$, e scegliamo $\theta_b(x)$ in $tp(b/A)$ di rango-grado $< (\alpha, d)$. La funzione $b \mapsto \theta_b(x)$ ha immagine di cardinalità $|L_A| < \kappa$ (essendo L numerabile e $|A| < \kappa$), e quindi è costante su insieme di cardinalità κ. Esiste quindi una singola formula $\theta(x) \in L_A$ di rango-grado $< (\alpha, d)$ verificata da un insieme di κ elementi di M, contraddicendo la minimalià di (α, d). Avendo dimostrato che b_0 esiste, ripetiamo il procedimento, con $A \cup \{b_0\}$ al posto di A, per trovare b_1. Similmente definiamo b_2, b_3, etc. Per il Lemma 14.15 la successione dei b_i è indiscernibile su A. □

Teorema 14.17. *(Teorema di Morley) Sia T una teoria completa numerabile κ-categorica, con $\kappa \geq \aleph_1$. Allora T è λ-categorica per ogni $\lambda \geq \aleph_1$.*

Dimostrazione. Basta mostrare che tutti i modelli di cardinalità λ sono saturi. Supponiamo che M sia un modello non saturo di cardinalità λ. Esiste dunque un tipo $p(x)$ su un insieme di parametri $A \subset M$ di cardinalità $< \lambda$, non realizzato in M. Raggiungeremo un assurdo trovando un modello non saturo di cardinalità κ (contraddicendo cosi il Teorema 14.10). Essendo κ-categorica, T è ω-stabile, e quindi M contiene una successione indiscernibile $(b_i : i < \omega)$ su A. Il fatto che $p(x)$ non sia realizzato, implica che per ogni L_M-formula $\phi(x)$ tale che $M \models \exists x \phi(x)$, esiste una formula $\theta_\phi(x) \in p(x)$ non implicata da $\phi(x)$ (in M). In particolare ciò avviene per tutte le formule $\phi(x) \in L_{A \cup B}$, dove $B = \{b_i : i < \omega\}$. Il prossimo obiettivo è di ricondurci ad una situazione simile con al posto di A un insieme numerabile. In altre parole cerchiamo un $A' \subset A$ numerabile, tale che valga:

(*) *per ogni $L_{A' \cup B}$-formula $\phi(x)$ tale che $M \models \exists x \phi(x)$, esiste una formula $\theta_\phi(x) \in p(x)$ con parametri da A' non implicata da $\phi(x)$.*

Partiamo da un qualsiasi sottoinsieme numerabile A_0 di A. Facendo variare $\phi(x)$ in L_{A_0}, le corrispondenti $\theta_\phi(x)$ varieranno in L_{A_1} per qualche $A_1 \subset A$ numerabile. Possiamo ovviamente assumere $A_0 \subset A_1$ e ripendo il procedimento otteniamo $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \ldots$ dove ogni A_{n+1} è ottenuto da A_n come A_1 da A_0. Ponendo $A' = \bigcup_n A_n$ abbiamo la proprietà (*).

Ora per compattezza esiste un modello $(N, a)_{a \in A'}$ di $Th(M, a)_{a \in A'}$ contenente una κ-successione $(c_i : i < \kappa)$ indiscernibile su A' con gli stessi n-tipi della ω-successione indiscernibile $(b_i : i < \omega)$ (ovvero per $i_1 < \ldots < i_n$ il tipo di $(c_{i_1}, \ldots, c_{i_n})$ su A' coincide con il tipo di $(b_1, \ldots, b_n)$ su A'). Possiamo inoltre assumere per Löwenheim-Skolem che N abbia cardinalità κ. Per la ω-stabilità di T esiste $N' \prec N$ contenente $A' \cup \{c_i : i < \kappa\}$ e costruibile su tale insieme. Notiamo che N' ha cardinalità κ. Per finire basta mostrare che N' non è saturo. A tal fine facciamo vedere che esso non realizza $p'(x)$, dove $p'(x)$ è la restrizione di $p(x)$ all'insieme di parametri $A' \cup \{c_i : i < \kappa\}$. Sappiamo che i modelli costruibili sono atomici. Quindi se $p'(x)$ fosse realizzato in N', esso sarebbe isolato da una certa formula $\phi(x, c_{i_0}, \ldots, c_{i_n})$ con $\phi(x, \vec{y}) \in L_{A'}$. Ciò significa che per ogni $\theta(x) \in p'(x)$, $N' \models \forall x(\psi(x, c_{i_0}, \ldots, c_{i_n}) \rightarrow \theta(x))$. Siccome $(N', c_{i_0}, \ldots, c_{i_n}, a)_{a \in A'} \equiv (M, b_0, \ldots, b_n, a)_{a \in A'}$, ne segue che per ogni $\theta(x) \in p'(x)$, $M \models \forall x(\phi(x, b_0, \ldots, b_n) \rightarrow \theta(x))$. Questo contraddice (*). $\square$

Riferimenti bibliografici

[Hod:93] W. Hodges, *Model theory*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 42. Cambridge University Press, Cambridge, 1993. xiv+772 pp.

[Pi:89] A. Pillay, *Model theory, stability theory and stable groups.* In: *The model theory of groups* (Notre Dame, IN, 1985–1987), 1-40, Notre Dame Math. Lectures, 11, Univ. Notre Dame Press, Notre Dame, IN, 1989.

[Pi:02] A. Pillay, *Lecture notes in model theory*, 2002

[1] D. Marker, M. Messmer, A. Pillay, *Model theory of fields.* Lecture Notes in Logic, 5. Springer 1991.