22/02/10 TEORIA dei MODELLI (Prof. Berarducci)

INTRO: ORARIO: GIOV 14 → 15 (15 → 16) VEN 14 → 16
ora di recupero

T teoria (Teorema di Morley)
con un unico modello di card $\lambda \geq \aleph_1$ allora ha un unico modello di card λ per ogni $\lambda \geq \aleph_1$

Per la parte applicata invece arriveremo a studiare $\underbrace{Th(\mathbb{C}, +, \cdot)}_{\text{cade sotto Morley}}$, $\underbrace{Th(\mathbb{R}, +, \cdot)}_{\text{non cade sotto Morley}}$
$\underbrace{Th(\text{Grafo random})}_{\text{unico modello numerabile}}$, ...

In generale si studia la funz. $I(T, \lambda)$ = numero dei modelli di T di card λ.

es. T = $\mathbb{Q}$ - sp. vett. $I(T, \aleph_0) = \aleph_0$ $\mathbb{Q}, \mathbb{Q}^2, \dots, \mathbb{Q}^{(\omega)}$
$I(T, \aleph_1) = 1$ $\mathbb{Q}^{(\aleph_1)}$
$\aleph_2$ 1
⋮ ⋮

Se $|L(T)| \leq \aleph_0$ $I(T, \lambda) \leq 2^\lambda$

Se il max è raggiunto non si riesce a classificare i modelli, se è < si classificano.

es. $I(PA, \lambda) = 2^\lambda$
$I(ZF, \lambda) = 2^\lambda$

¿ Spostamento di orario LUN → GIOV 14 - 15 ?

---

o. L (linguaggio) = $\{\overbrace{0, 1, +, \cdot}^{\text{simboli}}\}$
L - struttura $(\mathbb{N}, \overbrace{0, 1, +, \cdot}^{\text{funzioni}})$ vera qui
Matrici 2×2, 0, 1, +, · falsa qui
L formula $\forall x \forall y (x \cdot y = y \cdot x)$ è e

Definizioni base formali (già viste)

L = { simb. di funz, simboli di predicato, simboli di cost }
o di funz. di arietà 0.

' = $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ variabili

· formule = atomiche &c. L-termini

L-Struttura ... bla ...

$T \models \varphi \;:\Longleftrightarrow\; \mathrm{Mod}_L(T) \subseteq \mathrm{Mod}_L(\varphi)$

25/02/10

<u>Teo di Compattezza</u> (1° ordine) [dimostraz. con gli ultraprodotti]

Se T una L-teoria

e $T \models \varphi$

Allora $\exists T' \subset_{\text{finito}} T \quad T' \models \varphi$

es. Se T non è del 1° ordine il Teo <u>non vale</u> - Ad es. $L = \{<\}$

$T = \{< \text{ è un ordine totale}\} \cup \{\forall P\, (\exists x\, P(x) \rightarrow \exists x\, (P(x) \wedge \forall y\, (P(y) \rightarrow x \leq y)))\}$

$x<y \wedge y<z \rightarrow x<z$ $\quad$ $<$ è un buon ordine (è SO)

$\neg(x<x)$

$x<y \vee y<x \vee x=y$

$M \models T \Longleftrightarrow M$ è un b. ord.

$T' := T \cup \{c_1 < c_0, c_2 < c_1, c_3 < c_2, \dots\}$ (non è il T' del Teo!)

$L := \{<, c_0, c_1, \dots\}$

$\mathrm{Mod}(T') = \emptyset \Longleftrightarrow T' \models \bot$ Però ogni sottoteoria finita T^* di T', $T^* \not\models \bot$ perché $\mathrm{Mod}(T^*) \neq \emptyset$

□

È equiv. al Teo di Compattezza:

$\forall T' \subset_{fin} T \quad \mathrm{Mod}(T') \neq \emptyset \Rightarrow \mathrm{Mod}(T) \neq \emptyset$

$\forall T' \subset_{fin} T \quad \exists M_{T'} \models T'$. Voglio un modello di T: prendo $M = \prod_{T'} M_{T'} / \sim$ per una opportuna $\sim$. costruita con gli ultrafiltri

<u>Def</u>: Sia I insieme, $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(I)$ è un <u>filtro su I</u> se

(i) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$

(ii) $A \in \mathcal{F}$ e $B \supset A \Rightarrow B \in \mathcal{F}$

(iii) $\emptyset \notin \mathcal{F}$, $I \in \mathcal{F}$

es. $\mathcal{F} = \{A \subset I \mid |I \setminus A| < \infty\}$ (filtro dei cofiniti o di Frechet)

Obs: la nozione si può generalizzare ad un alg. di Boole -

Def: $\mathcal{F}$ è un ultrafiltro se
(i) è filtro
(ii) $\forall A \in P(I) \quad A \in \mathcal{F} \vee A^c \in \mathcal{F}$

si dimostra che esistono ma non si possono costruire.

obs: $\mathcal{F}$ è ultrafiltro $\iff$ $\mathcal{F}$ è un filtro massimale
Quindi per Zorn dato $\mathcal{F}$ filtro esiste $\mathcal{F}' \supset \mathcal{F}$ ultrafiltro.

Def: $\mathcal{G} \subset P(I)$ ha la fip (prop. dell' $\cap$ finita) se
$\forall A_1, \dots, A_n \in \mathcal{G} \quad \bigcap_{i=1}^{n} A_i \neq \emptyset$

obs: $\mathcal{F}$ filtro $\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ ha la fip perché $\bigcap A_i \in \mathcal{F}$ e $\emptyset \notin \mathcal{F}$.
Il viceversa non è vero, però se $\mathcal{G}$ ha la fip $\exists \mathcal{F}$ filtro tc $\mathcal{F} \supset \mathcal{G}$:
$\mathcal{F} := \{ B \in P(I) \mid \exists A_1, \dots, A_n \in \mathcal{G} \quad B \supseteq \bigcap_{i=1}^{n} A_i \}$
Quindi se $\mathcal{G}$ ha la fip $\Rightarrow \exists \mathcal{F} \supset \mathcal{G}$ ultrafiltro.

s. (ultrafiltro banale) $I = \mathbb{N}$ $\quad U := \{ A \subset \mathbb{N} \mid 5 \in A \}$ è un ultrafiltro principale
Quelli non banali sono quelli che non contengono insiemi finiti, quindi contengono $\mathcal{F}$ il filtro di Frechet.

Nota: U ultrafiltro su I, $U \subset P(I)$
$m : P(I) \to \{0,1\}$
$A \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{se } A \notin U \\ 1 & \text{se } A \in U \end{cases}$ è una misura finit. additiva
$(A \cap B = \emptyset \Rightarrow m(A \cup B) = m(A) + m(B))$

obs: $A \in U$ ultrafiltro $A = B \cup C \Rightarrow B \in U$ o $C \in U$
x ass. $B^c \in U \wedge C^c \in U \Rightarrow B^c \cap C^c = (B \cup C)^c \in U \Rightarrow$ ↯. □

Viceversa data una misura ottengo un ultrafiltro $\mathcal{F} = \{ A \subset I \mid \mu(A) = 1 \}$; un ultrafiltro è una collezione di insiemi "grandi".

s: Un alg. di Boole è un particolare anello (t.c. $x^2 = x$) quindi
filtro $\leftrightarrow$ ideale
ultrafiltro $\leftrightarrow$ ideale massimale.

Def: I insieme $\forall i \in I$ abbiamo M_i L-struttura.
$\prod_{i \in I} M_i$ è una L-struttura
con dominio $\prod_i \mathrm{dom}(M_i)$ e operazioni definite termine a termine.
$\quad \rotatebox{90}{$\in$}$
$\quad f$
$f : I \to \bigcup \mathrm{dom}(M_i)$ ...

difetto: prodotto di campi non è un campo : $\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}}$

L'idea di ultraprodotto è prendere un quoziente in modo da avere un "prodotto" che sia ancora modello della teoria da cui partiamo.

Def: U ultrafiltro su I, $\prod_i \mathfrak{M}_i /_U$ è una L-struttura

$\sim_U$ su $\prod \mathfrak{M}_i$, $f \sim_U g :\iff \{i \in I \mid f(i) = g(i)\} \in U$

Prendiamo le $[f]_U$ e definiamo le operazioni termine a termine modulo $\sim_U$, ad es.

$[f]_U < [g] \iff \{i \mid f(i) < g(i)\} \in U$

$[f]_U +^* [g]_U = [h]_U \iff \{i \mid f(i) +_i g(i) = h(i)\} \in U$

$[0]_U = [\langle 0 \mid i \in I \rangle]_U$

esempio: (i reali non std.)

$\forall i \in \overset{\mathbb{N}}{I}$ $\mathfrak{M}_i = (\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <)$

U ultrafiltro non principale su $P(I)$, cioè $U \supset \mathcal{F}$ di Frechet

$\mathbb{R}^* = \prod_i \mathfrak{M}_i /_U = \prod_i \mathbb{R} /_U$

$\mathbb{R}^* \underset{d}{\hookleftarrow} \mathbb{R}$ ed è un campo ordinato (vedi più sotto)

$d(r) = [\langle r \mid i \in I \rangle]_U$ è una immersione

però $\mathbb{R}^*$ non è archimedeo : $\varepsilon = [\langle \frac{1}{n} \mid n \in I \rangle]_U$ e $\forall r \in \mathbb{Q}_+ \; \varepsilon < d(r) \wedge \varepsilon > 0$

(uso che $U \supset \mathcal{F}$ di Frechet)

Teo: (Łoś) $\prod_i \mathfrak{M}_i /_U \models \varphi$ φ L-formula <u>chiusa</u> $\iff \{i \mid \mathfrak{M}_i \models \varphi\} \in U$ (*)

Corollario: $\mathbb{R}^*$ è un campo.

Per poterlo dimostrare devo farlo per φ con parametri $\varphi([f_1]_U, \dots, [f_n]_U)$

per ind su φ:

- φ atomica : per def. di ultraprodotto. e (*) diventa $\{i \mid \mathfrak{M}_i \models \varphi(f_1(i), \dots, f_n(i)\} \in U$
- $\varphi = \alpha \wedge \beta$: uso che U è chiuso per intersez. binarie
- $\varphi = \neg \alpha$: uso che $A \notin U \to A^c \in U$
- $\varphi = \exists x\, \psi(x, -)$: $(\Leftarrow)$ $\varphi(x_1, \dots, x_n) = \exists x_0\, \alpha(x_0, x_1, \dots, x_n)$ $S = \{i \mid \mathfrak{M}_i \models \exists x_0\, \alpha(x_0, f_1(i), \dots, f_n(i))\} \in U$

voglio che $\prod \mathfrak{M}_i /_U \models \exists x_0\, \alpha(x_0, [f_1]_U, \dots, [f_n]_U)$ quindi voglio un $[h]_U$ che testimoni quell'esistenziale: $h(i) := \begin{cases} \mathfrak{M}_i \models \alpha(h(i), f_1(i), \dots, f_n(i)) & \text{se } i \in S \\ \text{el. arbitrario di } \mathfrak{M}_i & \text{se } i \notin S \end{cases}$

$[h]_U$ è b. def perché $S \in U$ e questo $[h]_U$ funziona per ip. ind infatti

$\{i \mid M_i \models \alpha(h(i), f_1(i), \dots, f_n(i)\} \supset S \in U \underset{\text{ip. ind}}{\Longrightarrow} \prod M_i/_U \models \alpha([h]_U, [f_1]_U, \dots, [f_n]_U)$

$(\Longrightarrow)$ facile (es.) $\square$

<u>esempio</u>: $M_p = \mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}}$ nello $L = \{0, 1, +, \cdot\}$ (campo se p primo)

$I = P = $ primi, U ultrafiltro su I non principale

$(\prod \mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}})/_U$ è un campo di caratt. 0

<u>es</u>.: che cardinalità ha quel campo? ["quasi sempre" ha la card. di $\prod M_i$]

Torniamo al Teo di Compattezza:

Cerco $M \models T$, $M = \prod_{T' \in I} M_{T'}/_U$ dove $I = \{T' \mid T' \subset_{fin} T\}$ e come U

$M \models \varphi$ per Łos equivale a $\underbrace{\{T' \mid M_{T'} \models \varphi\}}_{= [\varphi]} \in U$, ci basta mostrare che $\{[\varphi] \mid \varphi \in T\}$ ha la fip. In tal caso si può trovare una U ultrafiltro t.c. etc.

$[\varphi_1] \cap \dots \cap [\varphi_n] \overset{?}{\neq} \emptyset$

$\ni T'$ dove $T' = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ infatti $T' \in [\varphi_i] \Longleftrightarrow M_{T'} \models \varphi_i$

$M_{T'} \models T'$

4/03/10

Appunti del corso di Teoria di Modelli nella sua forma]

Date due L-strutture A, B posso definire il concetto di <u>morfismo</u> $f: A \to B$; es. $a <_A a' \to f(a) <_B f(a')$

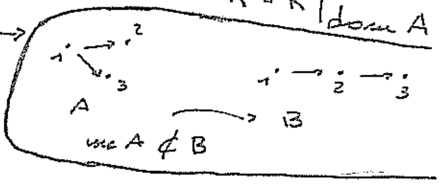
è <u>elementare</u>, e scriviamo $f: A \xrightarrow{\prec} B$, se preserva le formule $\varphi(\vec{x})$ di L e parametri $\vec{a} \in A$, $A \models \varphi(\vec{a}) \Longleftrightarrow B \models \varphi(f(\vec{a}))$

$\underline{A \subset B}$ è <u>sottostruttura</u> se $i: A \hookrightarrow B$ è <u>un morfismo</u> oppure se $\forall R \in L$ $R^A = R^B \restriction_{\text{dom } A}$

$\varphi(f(\vec a)) = \varphi(f(a_1), \dots, f(a_n))$

$\underline{A \prec B}$ se $i: A \hookrightarrow B$ è un <u>morfismo elementare</u>

$\underline{A \equiv B}$ se $\forall \varphi \in L$-formula chiusa vale $A \models \varphi \Longleftrightarrow B \models \varphi$



. $L = \{0, 1, +, \cdot\}$ $(\mathbb{Z}; 0, 1, +, \cdot) \subset (\mathbb{R}; 0, 1, +, \cdot)$

$\not\prec$ perché $\mathbb{R} \models \exists x (x^2 = 1+1)$ ma $\mathbb{Z}$ no!

es. $(\text{Pari}; <) \subset (\mathbb{Z}; <)$

$\cong$

$\equiv$

$\not\prec$ perché $\mathbb{Z} \models \exists x (2 < x \wedge x < 4)$

es. $(\mathbb{N}; 0, 1, +, \cdot) \subset (\mathbb{Z}; 0, 1, +, \cdot)$

I Teoremi di Lowenheim-Skolem -

Teo: (L.-S. $\downarrow$) $\quad A$ L-struttura, $X \subset dom(A)$

$\Rightarrow \exists B \preceq A$ t.c. $X \subset dom(B)$ e $|B| \leq |L| + |X| = K$ dove $|L| := card(L) + \aleph_0$
$= card(L\text{-formule})$

es. $A = (\mathbb{R}; 0, 1, +, \cdot) \quad X = \emptyset \Rightarrow \exists B \preceq A$ t.c. $|B| \leq \aleph_0$ però $|B| = \aleph_0$

$B = \overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}$

Data $\varphi(\vec{x}) \in L$-formule e $f: A^n \to A$, dico che f è una funz. di Skolem per φ se

$\forall \vec{a} \in A \quad A \models \exists x \varphi(x, a_1, \dots, a_n) \Rightarrow A \models \varphi(b, a_1, \dots, a_n)$ con $b = f(a_1, \dots, a_n)$

es. $(\mathbb{R}; +, <)$ e $\varphi(x, y, z) = y < x \wedge x < z$

cerco f t.c. se $\mathbb{R} \models \exists x (a_1 < x \wedge x < a_2) \Rightarrow \mathbb{R} \models \varphi(f(a_1, a_2), a_1, a_2)$

$f(a, b) = \frac{a+b}{2}$ è definibile dicendo che $f(a, b) = c \iff c + c = a + b$

Se A ha funz. di Skolem definibili (per ogni φ)

$B \subset A \iff B \prec A$

(Perché le funz. di Skolem permettono di eliminare i quantificatori -) NO!

Lo per definire f_φ potrei usare $\exists$ o $\forall$!

Per ogni $\varphi(x, \vec{y}) \in L$ fisso $f_\varphi: A^n \to A$ t.c. $\forall \vec{a}$ $A \models \exists x \varphi(x, \vec{a}) \Rightarrow A \models \varphi(f(\vec{a}), \vec{a})$

(cioè f_φ è di Skolem)

Prendo $\mathcal{F} = \{ f_\varphi \mid \varphi \in L\text{-form} \}$ e $B := \langle X \rangle_{\mathcal{F}}$ (la chiusura di X risp. alle funz. di Skolem)

fissato un ordine per le variabili

$= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ dove $X_0 = X$

$X_{n+1} = \{ f_\varphi(\vec{a}) \mid \varphi \in L\text{-form } \vec{a} \in X_n \}$

obs: $X_n \subset X_{n+1}$ infatti posso prendere $a \in X_n$ e $\varphi(x) = \exists x (x = a)$

$|\mathcal{F}| = |L| \quad$ Posso assumere che X infinito

$|X_{n+1}| \leq |L| \times |X_n|$ per ind. se $|X_n| \leq K \Rightarrow |X_{n+1}| \leq K \Rightarrow |B| \leq K \times \aleph_0 = K$

Bisogna mostrare che $B \subset A$ e $B \prec A$ -

05/03/10

$\langle X \rangle_{\mathcal{F}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n = \bigcap_{Y\ \mathcal{F}\text{-chiuso}} Y$

dim: $\vec{a} \in B \quad f_\varphi \in \mathcal{F} \Rightarrow f_\varphi(\vec{a}) \in B$

Verifichiamo che $B \preccurlyeq A$, ovvero che data $\theta(\vec{x})$ e $\vec{b} \in B$ voglio che $B \models \theta(\vec{b}) \Longleftrightarrow A \models \theta(\vec{b})$:
per induz. su $\theta(\vec{x})$

- $\theta = \alpha \wedge \beta$, $\theta = \neg\alpha$ ovvio per ind.

- $\theta(\vec{x}) = \exists y\ \gamma(y, \vec{x})$,

$A \models \exists y\ \gamma(y, \vec{b})$, sia $c = f_\gamma(\vec{b})$

$\Rightarrow A \models \gamma(c, \vec{b}) \underset{\text{Ind.}}{\Longrightarrow} B \models \gamma(c, \vec{b}) \Rightarrow B \models \exists y\ \gamma(y, \vec{b})$

$B \subset A$ (è sottostruttura): ad es. se $L = \{0, +\}$
$b_1, b_2 \in B \quad b_1 +^A b_2 \in B$? sì perché $\exists x (x = b_1 + b_2)$ e B è chiuso per le funz. di Skolem.

teo: (L.-S. $\uparrow$) Per ogni A L-struttura infinita e per ogni κ cardinale $\square$
$\exists B \succcurlyeq A \quad |B| \geq \kappa$

se $\kappa \geq |L|$ posso usare L.-S. $\downarrow$ e avere $|B| = \kappa$)

A L-struttura, $L_A \supset L$ dove $L_A = L \cup \{c_a \mid a \in \text{dom} A\}$

$(A, a)_{a \in A}$ è una L_A-struttura dove $c_a^{(A,a)} = a$ (espansione di A) ← arricchisco il linguaggio
non una estensione ← allargo il dominio

$Th(A) = \{\varphi \in L\text{-form (chiuse)} \mid A \models \varphi\}$ (teoria completa di A)

$ED(A) = Th(A_a)$ (diagramma elementare)

es. $A = (\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$
$(1+1 \neq 0) \in Th(\mathbb{R})$
$(c_\pi > 0) \in ED(\mathbb{R})$

oss: T completa $\Longleftrightarrow \forall A, B \models T \quad A \equiv B$

lemma: $B \models ED(A) \Longleftrightarrow A \precsim B$ (ovvero esiste una immersione elementare)
$f: A \xrightarrow{\preccurlyeq} B$
$a \longmapsto c_a^B$

$\Rightarrow$) $f(a) = c_a^B \quad f: A \xrightarrow{\preccurlyeq} B$ è elementare $\Longleftrightarrow \forall \varphi(\vec{x}) \quad A \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow B \models \varphi(f(a_1), \dots, f(a_n))$
$\Updownarrow$
$\varphi(c_{a_1}, \dots, c_{a_n}) \in ED(A) \quad B \models \varphi(c_{a_1}, \dots, c_{a_n})$

obs: Se $f: A \xrightarrow{\preceq} B \Rightarrow \exists B' \cong B \quad A \preceq B'$

ad es.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}[x]/_{x^2+1} \arrow[r, phantom, "\cong"] & \mathbb{C} \\ \mathbb{R} \arrow[u, hook, "f"] \arrow[ur, hook, "i"'] & \end{tikzcd}$$

è lo stesso che trovare B' t.c.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "f"'] & B' \arrow[d, phantom, "\cong"] \\ & B \end{tikzcd}$$

prendo X t.c. $|X| = |B \setminus f(A)|$ e $X \cap A = \emptyset$

$B' = A \cup X$.

b. ▪

Per quello detto ci basta trovare B t.c. $B \succsim A \quad |B| \geq \kappa$.

$T = ED(A) \cup \{c_i \neq c_j \mid i,j < \kappa, \ i \neq j\}$ nel ling. $L_A = L \cup \{c_i \mid i < \kappa\}$

T è coerente (per compattezza) $\Rightarrow$ ha un modello D.

$\Rightarrow$ $D \succsim A$ e ha card $\geq \kappa$, D è una L_A-struttura.

Lemma

Però $D|_L = B$

$\square$

Def: T è <u>κ-categorica</u> se $\forall A, B \models T \quad |A| = |B| = \kappa \rightarrow A \cong B$
e $\exists A \models T \quad |A| = \kappa$.

Teo: Se $\kappa \geq |L|$ e T è κ-categorica senza modelli finiti
$\Rightarrow T$ è completa.

Siano $A, B \models T$, sono infiniti. Per L.-S.$\uparrow$ $\exists A' \succeq A \quad B' \succeq B \quad |A'| \geq \kappa$
$|B'| \geq \kappa$

Per L.-S.$\downarrow$ $\exists A'' \preceq A' \quad B'' \preceq B' \quad |A''| = |B''| = \kappa$

Ho che $A \equiv A''$ e $B \equiv B''$ per la κ-categoricità $A'' \cong B'' \Rightarrow A \equiv B$.

$\square$

es. $L = \{<\}$ (ordini lineari)

T:
$x < y \wedge y < z \rightarrow x < z$
$\neg(x < x)$
$x < y \vee y < x \vee x = y$

non è completa $(\mathbb{R}, <) \not\equiv (\mathbb{Z}, <)$

Invece gli ordini densi, cioè $T + \forall xy\, (x < y \rightarrow \exists z\, (x < z < y))$ $\quad ([0,1]^{\mathbb{R}}, <) \not\equiv (\mathbb{R}, <)$

DLO : ordini densi $+ \forall x \exists y\, (y > x) + \forall x \exists y\, (y < x)$

DLO è completa

1. La teoria degli ordini densi ha 4 estensioni complete ($\exists$max $\exists$min, $\neg\exists$max $\neg\exists$min ecc...

Teo: DLO è $\aleph_0$-categorica ($\Rightarrow$ DLO è completa)
Teo prec.

Def: $f: A \hookrightarrow B$, dico che $f: A \xrightarrow{\cong} B$ se dove è definita verifica le condiz. per essere isomorfismo o alternativamente $\langle dom(f)\rangle_A \cong \langle Im(f)\rangle_B$ è indotto da f. (isomorfismo parziale)

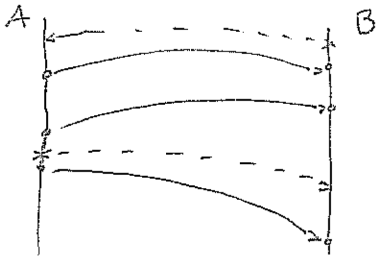
Sia I una famiglia di isomorfismi parziali, dico che ha il va' e vieni se

$\forall f \in I \ \forall a \in A \ \exists f' \supset f \ f' \in I \ a \in dom(f')$ e ("va'")

$\forall b \in B \ \exists f' \supset f \ f' \in I \ b \in Im(f')$ ("vieni")

obs: $I = \emptyset$ ha il va' e vieni

obs: Siano $A, B \models DLO$ e $I = \{ f \mid f: A \hookrightarrow B \ dom(f) \text{ finito} \}$
$\Rightarrow I$ ha il va' e vieni.



per densità posso sempre fare il va' e vieni e per l'assenza di max e min.

Teo: se A, B L-strutture $|A| = |B| = \aleph_0$ e $I \subseteq \{ f \mid f: A \hookrightarrow B \ dom(f) \text{ finito} \}$ ha il va' e vieni e $I \neq \emptyset$
$\Rightarrow A \cong B$

(Corollario: DLO è $\aleph_0$-categorica e quindi completa)

$A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ $B = \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, prendo $f \in I$,

$\forall n$ $f_{n+1} \supset f_n$ e $dom\, f_n \ni a_n$ $Im\, f_n \ni b_n$

L'isomorfismo cercato è $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_n$

orollario: $(\mathbb{R}, <) \models \varphi \Leftrightarrow (\mathbb{Q}, <) \models \varphi \Leftrightarrow DLO \models \varphi$. $\square$

2. Vale lo stesso per gli ord. lineari densi con max e senza minimo.

s: $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, <) \not\equiv (\mathbb{R}, <)$, sennò avrebbero tutte le stesse proprietà, anche SO. Ma $[-5, 0)$ non ha sup. Mentre in $\mathbb{R}$ ogni sottoins. limitato ha sup.

Def: Un grafo (non orientato) $\mathcal{G}=(V,E)$ $\quad E\subset V^2$

non orientato $E(x,y)\longleftrightarrow E(y,x)$

senza loops $\neg E(x,x)$

numerabile $|V|=\aleph_0$

$\mathcal{G}$ è <u>random</u> se $\forall A,B\subset V$ finiti disgiunti $\exists x\in B\ \forall a\in A\ E(a,x)\ \forall b\in B\ \neg E(b,x)$

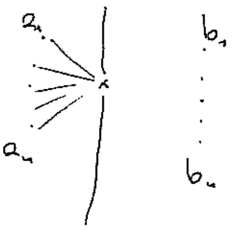
$\forall a_1,\dots a_n\ \forall b_1,\dots,b_m$

cioè è uno schema di assiomi FO

<u>Teo</u>: La teoria dei grafi random è $\aleph_0$-categorica.

con il va e vieni.

¿ Perché è random? $0\ 1\ 2\ \dots$ tirando a testa o croce



con prob. $0<\frac{1}{2^n}\ \frac{1}{2^n}$

però ci sono ∞ possibilità per x.

$V=\mathbb{N}$

$E(n,k)$ se $n=2^{p_1}+\dots+2^{p_n}$, $k=2^{q_1}+\dots+2^{p_1}$ se $n\in\{q_1,\dots,q_n\}$ o $k\in\{p_1,\dots,p_n\}$ [wikipedia]

<u>es</u>. (algebra di Boole senza atomi)

$(\mathbb{B};\wedge,\vee,\sim,0,1)$

$x\vee\sim x=1$

$x\wedge\sim x=0$

$x\wedge(y\vee z)=(x\wedge y)\vee(x\wedge z)$

$x\vee(y\wedge z)=(x\vee y)\wedge(x\vee z)$

$\wedge,\vee$ associative commutative

$\sim 0=1$

$x\vee 0=x$

$x\wedge 0=0$

$x\vee 1=1$

$x\wedge 1=x$

<u>Teo</u>: (Stone) $B\subset(\mathcal{P}(X),\cap,\cup,\sim,0,1)$

<u>Calcolo Proposizionale</u>

$A_1,A_2,A_3,\dots$ variabili su $\{0,1\}$

formule proposizionali $=\ A_i\mid(\varphi\wedge\psi)\mid(\varphi\vee\psi)\mid\neg\varphi$

$\varphi\equiv\psi$ se per ogni $v:\{A_1,\dots,A_n,\dots\}\longrightarrow\{0,1\}$ $\quad\varphi^v=\psi^v\in\{0,1\}$

es. $\neg(A\wedge B)\equiv\neg A\vee\neg B$

$\mathbb{B}=\{[\varphi]\mid\varphi\text{ formula}\}$

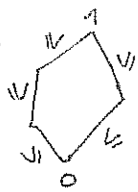
$[\varphi]\wedge[\psi]=[\varphi\wedge\psi]$

prendo modulo $\equiv$ perché $A\wedge B\equiv B\wedge A$ e in $\mathbb{B}$ voglio che siano uguali

$0=[A\wedge\neg A]\qquad 1=[A\vee\neg A]$

Def: Data un alg. di Boole $(\mathbb{B}; \wedge, \vee, \sim, 0, 1)$

$$a \leq b :\iff a \wedge b = a \qquad (\iff a \vee b = b)$$

es1.  non è un alg. di Boole

es2. Un alg. di Boole finita è sempre un $P(X)$. Sennò vale il $\subseteq$.

Def: $\mathbb{B}$ alg. di Boole, a è un atomo se

$$a \neq 0 \quad e \quad a > 0$$
$$\neg \exists b \quad 0 < b < a$$

$\mathbb{B} = \{[\varphi] \mid \varphi \text{ formula}\}$ è senza atomi.

Se $[\varphi] \neq 0$ $\qquad [\varphi] > [\varphi \wedge A_n] > 0$

dove A_n non compare in φ.

Corollario: $\mathbb{B}$ non può essere isomorfo a $P(X)$ perché queste hanno gli atomi.

Teo: La teoria delle alg. di Boole senza atomi è $\aleph_0$-categorica.

/03/10

- Tipi -

Sia T L-teoria, $n \in \mathbb{N}$ e $(x_1, \dots, x_n)$ n-upla di variabili (costanti $\notin L$)

Sia $\Sigma(x_1, \dots, x_n)$ un insieme di formule di $L \cup \{x_1, \dots, x_n\}$

$\Sigma(x_1, \dots, x_n)$ è un tipo di T se $T \cup \Sigma(x_1, \dots, x_n)$ è una $L \cup \{x_1, \dots, x_n\}$ teoria coerente

es. $T = ED(\mathbb{R}, <)$, $\Sigma(x) = \{0 < x, x < \frac{1}{2}, x < \frac{1}{4}, x < \frac{1}{8}, \dots\}$ per compattezza si ha che $T \cup \Sigma(x)$ è coerente $\Rightarrow \Sigma(x)$ è un tipo di T

Oss: $\Sigma(x_1, \dots, x_n)$ è un tipo di T se $\exists M \models T$ e $a_1, \dots, a_n \in M$ t.c. $M \models \Sigma(a_1, \dots, a_n)$

Un modello di $T \cup \Sigma(\vec{x})$ è una coppia $(M, \vec{a})$ dove $M \models T$ e $M \models \Sigma(\vec{a})$.

Oss: $\Sigma(x_1, \dots, x_n)$ è un tipo della teoria T se per ogni $\sigma_1(\vec{x}), \dots, \sigma_k(\vec{x}) \in \Sigma(\vec{x})$ $k \in \mathbb{N}$

$T \cup \{\exists \vec{x} (\sigma_1(\vec{x}) \wedge \dots \sigma_k(\vec{x}))\}$ è coerente come L-teoria ($\iff T \cup \{\sigma_1(\vec{x}), \dots, \sigma_k(\vec{x})\}$ è coerente come $L \cup \{\vec{x}\}$ teoria)

Per compattezza.

obs: Se T é completa ; $T \cup \{\exists \vec{x}\ \sigma(\vec{x})\}$ é coerente $\iff T \models \exists \vec{x}\, \sigma(\vec{x})$

Def: $\Sigma(\vec{x})$ é un tipo completo di T se

$$T \cup \Sigma(\vec{x}) \text{ é una } L\cup\{\vec{x}\}\text{-teoria completa.}$$

I tipi completi si indicano con $p, q \dots$ se incompleti con $\Sigma, \Pi, \dots$

Def: T L-teoria, $M \models T$ $a_1, \dots, a_n \in M$,

$$\text{tipo}_M(a_1,\dots,a_n) := \{\varphi(x_1,\dots,x_n) \mid M \models \varphi(a_1,\dots,a_n)\}$$

Questo é un tipo completo di T

es. In $(\mathbb{Q}, <)$ tutti gli el. hanno lo stesso tipo (1)

Mentre in $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ tutti gli el. hanno tipi diversi (2)

$(\mathbb{Q}, <, 0, +)$ ha 3 tipi di elementi. (3)

(1) $a, b \in \mathbb{Q}$ trovo $f : (\mathbb{Q}, <) \xrightarrow{\cong} (\mathbb{Q}, <)$, $a \longmapsto b$

Quindi $\varphi(x) \in L$ $\mathbb{Q} \models \varphi(a) \iff \mathbb{Q} \models \varphi(f(a)) = \varphi(b)$

$\Rightarrow \text{tipo}_{\mathbb{Q}}(a) = \text{tipo}_{\mathbb{Q}}(b)$

(2) ad es. $\text{tipo}\left(\frac{2}{3}\right) \ni (3x = 2)$ $\quad x = 0 \ :\iff \forall u\,(u + x = u)$

$\updownarrow \quad x = 1 \ :\iff \forall u\,(u \cdot x = u)$

$\exists a (a = 2 \wedge x + x + x = a)$

peró $(3x = 2) \notin \text{tipo}\left(\frac{5}{4}\right)$

(3) $a, b > 0$ $\quad f : (\mathbb{Q}, <, 0, +) \xrightarrow{\cong} (\mathbb{Q}, 0, <, +)$, $x \longmapsto \frac{a}{b} x$

o $a, b < 0$

obs: Quindi se c'é un automorfismo della struttura che manda $a \to b$, allora a e b hanno lo stesso tipo.

Il viceversa é vero se la struttura é "abbastanza satura".

Teo: A L-struttura e $p = p(x_1, \dots, x_n)$ un n-tipo di $Th(A)$

$\Rightarrow p(\vec{x})$ é realizzato in qualche $M \succeq A$.

Basta mostrare che $p(x_1,\dots,x_n) \cup ED(A)$ é coerente; se no esiste $\theta(\vec{x}) \in p(\vec{x})$ (wlog possiamo assumere che il tipo é chiuso per $\wedge$ finite) t.c. $\theta(\vec{x}) \cup ED(A)$ é incoerente

$\Rightarrow ED(A) \models \neg\theta(\vec{x})$ come $L\cup\{\vec{x}\}$-teoria $\iff ED(A) \models \forall \vec{x}\, \neg\theta(\vec{x})$ come L-teoria

vero in generale: se $T \not\models \forall x\, \theta(x)$ $\Rightarrow \exists a \in M$ $M \models \neg\theta(a)$ $\exists M$ $\Rightarrow (M, a) \models \neg\theta(a)$. (b.) e $(M, a) \models T$ perché c non é menzionata in T

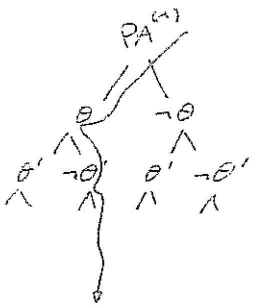
$\Rightarrow A \models \forall \vec{x}\, \neg\theta(\vec{x})$

Peró $Th(A) \models \exists \vec{x}\, \theta(\vec{x})$ perché $\theta(\vec{x}) \in p(\vec{x})$.

$\lightning$

es. [7.7 degli appunti] $T = Th(\mathbb{N}, +, \cdot) \underset{\substack{\neq \\ \uparrow \\ \text{per Gödel}}}{\supset} PA^{(1)}$

$PA^{(1)}$ ha $2^{\aleph_0}$ estensioni complete e $2^{\aleph_0}$ modelli numerabili non isomorfi.



Però anche $I(T, \aleph_0) = 2^{\aleph_0}$: usiamo i tipi.

Dato $S \subseteq \mathbb{P}$, $\Sigma_S(x) = \{ p \underset{x \neq 0}{|} x : p \in S \} \cup \{ p \nmid x : p \in S \}$

$p | x \Longleftrightarrow \exists y \; py = x$

$\Sigma_S(x)$ è realizzato in $\mathbb{N} \iff |S| < \infty$ però è un tipo di T (per compattezza)

Al variare di S ho $2^{\aleph_0}$ tipi, ogni $\Sigma_S(x) \cup T$ è coerente

e $\Sigma_S(x)$ è realizzato in un $M_S \succcurlyeq \mathbb{N}$ numerabile

M_S può realizzare al più $\aleph_0$ tipi $\Rightarrow$ ho $2^{\aleph_0}$ non isomorfi M_S.

$\square$

2/03/10

- Eliminazione dei quantificatori -

Def: T ha la E.Q. (eliminazione dei quantificatori) se ogni $\varphi(\vec{x})$ equivale ad una $\theta(\vec{x})$ senza $\exists, \forall$, ovvero

$$T \models \forall \vec{x} (\varphi(\vec{x}) \longleftrightarrow \theta(\vec{x}))$$

Es. $T = Th(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ ad es. $\exists x (x^2 + bx + c = 0) \iff b^2 - 4c \geq 0$

$T = Th(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$

si definisce però a costo di un $\exists$: $x \geq 0 :\iff \exists y (x = y^2)$

Teo: Data una L-teoria T e $n \in \mathbb{N}$ sono equivalenti:

(i) $p(x_1, \dots, x_n) \in S_n(T)$ (= tipi completi di T)

$\downarrow$

$p(x_1, \dots, x_n) \cap QF$ è iniettiva (QF = quantifier free)

(ii) $M \models T$, $N \models T$ e $\vec{a} \in M^n$, $\vec{b} \in N^n$ se $tipo_M(\vec{a}) \cap QF = tipo_N(\vec{b}) \cap QF$

$\Rightarrow tipo_M(\vec{a}) = tipo_N(\vec{b})$

i) $p(\vec{x}) \in S_n(T)$ e $p(\vec{x}) \models \varphi(\vec{x}) \Rightarrow p(\vec{x}) \cap QF \models \varphi(\vec{x})$

$\Rightarrow$(iii) $p(\vec{x}) \cap QF \not\models \varphi(\vec{x})$

$p(\vec{x}) \cap QF, \neg\varphi(\vec{x}) \subset q(\vec{x}) \in S_n(T)$ però $p(\vec{x}) \cap QF = q(\vec{x}) \cap QF$

$\Rightarrow$

(iii) $\Rightarrow$ (i) $p(x) \cap QF = q(x) \cap QF$, sia $\varphi \in q$, $q \models \varphi$ $\Rightarrow$ $\underset{p \cap QF}{\overset{\shortparallel}{q \cap QF}} \models \varphi$ $\Rightarrow p \models \varphi$

$\underset{\substack{p,q \\ \text{completi}}}{\Rightarrow} p = q$

(i) $\Leftrightarrow$ (ii) b.

Obs: Sono equivalenti: (i) $\vec{a} \mapsto \vec{b}$ è un iso parziale $M \hookrightarrow N$

(ii) $\text{tipo}_M(\vec{a}) \cap QF = \text{tipo}_N(\vec{b}) \cap QF$ □

Teo: T L-teoria, $\forall n$ $p(x_1, \dots, x_n) \in S_n(T) \longmapsto p(\vec{x}) \cap QF$ è iniettiva $\Longleftrightarrow T$ ha EQ.

Data $\varphi(\vec{x})$ L-formula, Sia $\Sigma(\vec{x}) = \{ \sigma(\vec{x}) \in QF \mid T \models \underset{\forall \vec{x}}{\varphi(\vec{x}) \to \sigma(\vec{x})} \}$

basta dimostrare che $\Sigma(\vec{x}) \models \varphi(\vec{x})$: (poi per compattezza ho che $\sigma_1, \dots, \sigma_n \models \varphi$
$\sigma = \sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_n \models \varphi$
e quindi $\varphi \leftrightarrow \sigma$)

Se no $\exists p(\vec{x}) \in S_n(T)$ $\Sigma(\vec{x}), \neg\varphi(\vec{x}) \subset p(\vec{x})$ $\Rightarrow p(\vec{x}) \models \neg\varphi(\vec{x})$

Per il Teo prec. $p(\vec{x}) \cap QF \models \neg\varphi(\vec{x})$, per compattezza esiste $\sigma(\vec{x}) \in p(\vec{x}) \cap QF$ $\sigma(\vec{x}) \models \neg\varphi(\vec{x})$

$\Rightarrow \varphi(\vec{x}) \models \neg\sigma(\vec{x}) \Rightarrow \neg\sigma(\vec{x}) \in \Sigma(\vec{x}) \subset p(\vec{x}) \Rightarrow \sigma(\vec{x}), \neg\sigma(\vec{x}) \in p(\vec{x})$ $\lightning$

es. DLO è $\aleph_0$-categorica ha EQ □

Lemma: T L-teoria, $M, N \models T$, sia $I = \{$isomorfismi parziali finiti da M a $N\}$

se I ha il va e vieni

$\Rightarrow \forall \langle (a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \rangle \in I$ $(M, a_1, \dots, a_n) \equiv (N, b_1, \dots, b_n)$

le mappe che mandano $a_i \mapsto b_i$

Ovvero: $\text{tipo}_M(\vec{a}) \cap QF = \text{tipo}_M(\vec{b}) \cap QF \Rightarrow \text{tipo}_M(\vec{a}) = \text{tipo}_N(\vec{b})$

e quindi T ha EQ

Sia $\langle (a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \rangle \in I$ e $\varphi(\vec{x})$ formula voglio mostrare che $M \models \varphi(\vec{a}) \Leftrightarrow N \models \varphi(\vec{b})$

Per ind su φ:

- se φ è QF è vero perché gli isoparziali preservano le formule QF.
- $\varphi = \neg\alpha$, $\alpha \wedge \beta$: b.
- $\varphi(\vec{x}) = \exists y\, \theta(y, \vec{x})$, se $M \models \exists y\, \theta(y, \vec{a}) \Rightarrow \exists a_0 \in M$ $M \models \theta(a_0, \vec{a})$ $\Rightarrow \exists b_0 \in N$ $N \models \theta(b_0, \vec{b})$ $\Rightarrow N \models \exists y\, \theta(y, \vec{b})$

I ha il va e vieni $\exists b_0 \in N$ t.c. $\langle (a_0, \vec{a}), (b_0, \vec{b}) \rangle \in I$

□

Teo: Se inoltre I del teo prec. è sempre non vuoto $(\forall M, N \quad M, N \models T)$ $I = I(M,N)$
$\Longrightarrow T$ è completa

Sia $(\vec{a}, \vec{b}) \in I(M,N)$, $(M, \vec{a}) \equiv (N, \vec{b})$ $\quad M \equiv N \quad \forall M, N \Rightarrow T$ completa

□

es. ACF = campi alg. chiusi $\quad L = \{0, 1, +, \cdot\}$

ACF ha l'EQ.

$ACF_0 = ACF \cup \{char = 0\}$ è inoltre completa

ACF_p sono completi

Corollario: $Th(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1) \equiv ACF_0$

$\mathbb{C} \models ACF_0 \Rightarrow Th(\mathbb{C}) \supset ACF_0$ siccome sono tutte e due complete $\Rightarrow$ tesi

□

? siccome ACF_0 è ricorsiv. assiomatizzata $\Rightarrow$ è decidibile $\Rightarrow Th(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$ è decidibile.

2. DLO ha EQ ed è completa, $\aleph_0$-categorica

Perché gli $I = \{$iso parz. finiti$\}$ ha il va' e vieni.

Th(Alg. di Boole senza atomi) idem (accennato qualche volta fa)

Th(Grafo random)

Applicazione Standard del metodo.

Corollario: $f: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ polinomiale iniettiva $\Rightarrow$ surgettiva.

$k = \max deg(f)$ Posso scrivere φ FO t.c. $\mathbb{C} \models \varphi \iff \forall f$ di grado $\leq k$ polinomiale iniettiva $\Rightarrow f$ surg.

Voglio mostrare che $\mathbb{C} \models \varphi$, cioè $ACF_0 \models \varphi$, se no $ACF_0 \models \neg\varphi$ e per compattezza $\exists p$ $ACF_{>p} \models \neg\varphi$, cioè $\forall p\ \exists q > p$ $ACF_q \models \neg\varphi$. Fisso un tale campo $\overline{F}_q$, lì $\exists f: \overline{F}_q^n \to \overline{F}_q^n$ polinomiale iniettiva e non surgettiva.

Prendo $\vec{b} \in \overline{F}_q^n$, $K < \overline{F}_q$ sottocampo generato da $\vec{b}$, coeff di f.

$\Longrightarrow K = (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^n \quad f\restriction_{K^n}: K^n \to K^n$ iniettiva $\Rightarrow$ surgettiva $\Rightarrow \vec{b} \in Im(f)$.

char $K = q$

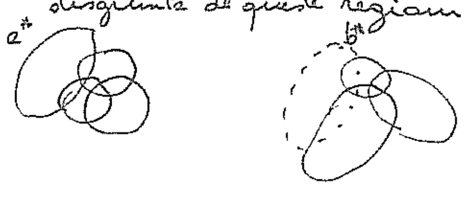
Oss: Il viceversa non è vero, ovviamente: $z \mapsto z^2$.

□

. (Algebre di Boole senza atomi hanno il va' e vieni)

$$
\begin{array}{ccc}
B_1 & & B_2 \\
a_1 & \longrightarrow & b_1 \\
\vdots & & \vdots \\
a_n & \longrightarrow & b_n \\
a^* & \dashrightarrow & ?
\end{array}
$$

ho 2^n regioni $\pm a_1 \wedge \ldots \wedge \pm a_n$ t.c. ogni a_i è unione $(\vee)$ disgiunta di queste regioni...



8/03/10

1. (Discrete Linear Orders) $L=\{<\}$ $T=$ - ordini totali
(DiLO)
- $\forall x \exists y\ (y>x \wedge \nexists z\ x<z<y)$
- $\forall x \exists y\ (y<x \wedge \nexists z\ y<z<x)$

$Mod(T) \ni (\mathbb{Z},<)$
$\ni (\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}, \leq_{lex})$

(Questa teoria è interessante perché ha le stesse difficoltà di ACF (?))
Mostro che è completa; non posso usare però che gli ISOM. PARZIALI hanno il va' e vieni, perché è falso :-

- <u>Modelli Saturi</u> -

Su questi spesso il va' e vieni funziona -

Def: Sia $(I,<)$ ordine totale e $(M_i \mid i\in I)$ t.c. $\forall i\in I$ M_i è una L-struttura t.c.

$$i<j \Rightarrow M_i \subset M_j$$

$M := \lim_{i\in I} M_i :=$ l'unica struttura t.c. $dom(M) = \bigcup_{i\in I} dom(M_i)$
e $M \supset M_i$ $\forall i$

(<u>struttura limite</u>)

<u>es</u>. $\mathbb{Q} =$ lim di ordini finiti
ad es. i primi n numeri raz.

<u>ex</u>. Se T è $\forall\exists$-assiomatizzabile $\Leftrightarrow$ lim di modelli è modello

DiLO non è $\forall\exists$ assiomatizzabile
Teoria dei Campi è $\forall\exists$

<u>Teo</u>: $(M_i \mid i\in I)$ elementare, ovvero $i<j \Rightarrow M_i \prec M_j$ (Tarski)
$\Longrightarrow \lim_i M_i \succ M_i$ $\forall i$

Sia $M = \lim_i (M_i)$, e presa $\varphi(\vec{x})$, per ind su φ mostro che
$\forall i$ $\forall \vec{a}\in M_i^n$ $M \models \varphi(\vec{a}) \Leftrightarrow M_i \models \varphi(\vec{a})$

- φ atomica: ✓ perché $M \supset M_i$
- $\varphi = \alpha\wedge\beta \mid \neg\alpha$: 6.
- $\varphi(\vec{x}) = \exists y\, \theta(y,\vec{x})$: $(\Leftarrow)$ $M_i \models \exists y\,\theta(y,\vec{a})$, $\exists b\in M_i$ $M_i \models \theta(b,\vec{a}) \underset{\text{Ip. Ind}}{\Rightarrow} M \models \theta(b,\vec{a})$
$\Downarrow$
$M \models \exists y\,\theta(y,\vec{a})$

$(\Rightarrow)$ $M \models \exists y\,\theta(y,\vec{a})$ $\exists b\in M$ $M\models\theta(b,\vec{a})$

$\exists j>i$ $\exists b\in M_j$ $M\models\theta(b,\vec{a}) \underset{\text{Ip. Ind}}{\Rightarrow} M_j \models \theta(b,\vec{a})$
$\Downarrow$
$M_j \models \exists y\,\theta(y,\vec{a})$
$\Downarrow$ —— $M_i \prec M_j$
$M_i \models \exists y\,\theta(y,\vec{a})$ $\square$

Def: M L-struttura, $A \subset dom(M)$, un <u>n-tipo di M con parametri da A</u>, $p(x_1, \dots, x_n)$, è un tipo di $Th(M, a)_{a \in A}$ in $L \cup \{\underline{a} \mid a \in A\}$

Cioè $p(x_1, \dots, x_n)$ è un insieme di $L \cup \{\underline{a} \mid a \in A\} \cup \{x_1, \dots, x_n\}$ formule coerente con $Th(M, a)_a$

Def: Un cardinale κ, M è <u>κ-saturo</u> se realizza tutti i suoi tipi con parametri $|A| < \kappa$ e un numero finito di variabili.

1. $p(x) \cup Th(M, a)_{a \in A}$ coerente, se $M \models \exists x\, p(x)$, ovvero $\forall \varphi(x) \in p(x)$ $M \models \exists x\, \varphi(x)$.

$(\mathbb{R}, <)$ è ω-saturo ma non ω_1-saturo:

non è ω_1-saturo perché $p(x) = \{x > 0, x > 1, x > 2, \dots\}$ usa una quantità numerabile di parametri ma $\mathbb{R}$ non lo realizza.

o $\{x < \frac{1}{2}, x < \frac{1}{3}, \dots\}$

ω-saturo, lo vedremo poi?

$(\mathbb{R}, <, +, \cdot)$ non è ω-saturo perché $0, 1, 2, \dots$ non sono parametri.

<u>o:</u> $\forall M$ L-struttura $\exists N \succ M$ ω-saturo

Sia $\{p_i(\vec{x}) \mid i \in I\}$ l'insieme degli n-tipi di M con $< \omega$ parametri. Cambiamo nome alle variabili $p_i(\vec{x}) \rightsquigarrow p_i(\vec{x}_i)$

$ED(M) \cup \{p_i(\vec{x}_i) \mid i \in I\}$ è coerente per compattezza perché M realizza sottoinsiemi finiti di un numero finito di $p_i(\vec{x}_i)$.

$ED(M) = Th(M, a)_{a \in M}$

$\Rightarrow$ M' sia un suo modello e wlog $M' \succ M$, quindi definisco

$M_0 = M$

$M_1 = M'$ (questo)

$M_{n+1} = M_n'$ costruito col procedimento precedente

$M^* = \lim_i (M_i)$

(più in dettaglio poi) □

23/10

<u>Lemma</u>: (amalgamazione) $M \equiv N \Rightarrow \exists C$

$$M \xrightarrow[\prec]{f} C \xleftarrow[\prec]{i} N$$

Considero $ED(M)$ in $L \cup \{c_m \mid m \in M\}$ e $ED(N)$ in $L \cup \{d_n \mid n \in N\}$ e scelgo c_m e d_n t.c. $c_m \neq d_n$ $\forall n, m$ anche se $M \cap N \neq \emptyset$.

Sia $T = ED(M) \cup ED(N)$. Ci basta mostrare che T è coerente, poi prendo $C \models T$

$M \xrightarrow{\prec} C$ e $N \xrightarrow{\prec} C$ e a meno di iso posso prendere $N \subseteq C$.

$m \longmapsto (c_m)^C$ $\quad n \longmapsto (d_n)^C$

Se per assurdo $T \vdash \bot$ per compattezza esistono L formule $\varphi(\vec{x})$, $\theta(\vec{y})$ t.c.

$\varphi(c_{m_1},\dots,c_{m_k}) \in ED(M)$ $\quad \theta(d_{n_1},\dots,d_{n_\ell}) \in ED(N)$

e $\varphi(c_{m_1},\dots,c_{m_k}) \models \neg\theta(d_{n_1},\dots,d_{n_\ell})$ però le d_{n_i} non sono nelle c_{m_k}

$\Rightarrow \varphi(c_{m_1},\dots,c_{m_k}) \models \forall x_1 \dots x_\ell \, \neg\theta(x_1,\dots,x_\ell)$

↑
lemma delle costanti

Però $(M, m_1,\dots,m_k) \models \varphi(c_{m_1},\dots,c_{m_k}) \Rightarrow M \models \forall x_1\dots x_\ell \, \neg\theta(x_1,\dots,x_\ell)$

Ma $N \equiv M$ assurdo perché $N \models \theta(n_1,\dots,n_\ell)$

<u>Corollario</u>: $(M,\vec a)\equiv(N,\vec b) \Rightarrow \exists C$

$$\begin{tikzcd} & C & \\ M \arrow[ur, "\prec", "f"'] & & N \arrow[ul, "\prec"'] \end{tikzcd}$$

e chiedo che $f(\vec a)=\vec b$.

□

Consideriamo $(M,\vec a)$ e $(N,\vec b)$ come $L\cup\{c_1,\dots,c_n\}$ strutture

<u>Def</u>: M L-struttura è <u>ω-satura</u> se
$\forall p(x)$ 1-tipo di $ED(M)$ con $<\omega$ parametri da M $\exists a \in M$ $M \models p(a)$

<u>obs</u>: Se M è ω-satura $\Rightarrow$ per ogni n-tipo $p(x_1,\dots,x_n)$ con $<\omega$ parametri $\exists a_1,\dots,a_n$ t.c. $M \models p(a_1,\dots,a_n)$
(ovvero la def di ω-satura della nostra lezione)

<u>Lemma</u>: $(M,\vec a)\equiv(N,\vec a')$ e sia $b'\in N$. Se M è ω-satura $\exists b \in M$ t.c. $(M,\vec a,b)\equiv(N,\vec a',b')$

Per amalgamazione $\exists C$ t.c. $(M,\vec a) \xhookrightarrow{\prec} C \xleftarrow[f]{\prec} (N,\vec a')$

$\vec a \longmapsto \vec a \longleftarrow \vec a'$

$(N,\vec a',b') \equiv (C, \underbrace{f(\vec a')}_{\vec a}, f(b'))$ (*) Sia $p(x)$ il tipo di $f(b')$ con parametri $\vec a$, preso in C.
Però $p(x)$ è un 1-tipo di $ED(M)$ con parametri $\vec a$ perché $(M,\vec a)\prec(C,\vec a)$
e quindi siccome M ω-satura ho la tesi perché prendo $b\in M$ che realizza $p(x)$

$(M,\vec a,b)\equiv(C,\vec a,f(b')) \underset{(*)}{\Rightarrow}$ la tesi

□

Per semplicità consideriamo $p(x,y)$ un 2-tipo con $<\omega$ parametri. Voglio far vedere che M lo realizza.

$\exists N \succ M$ $\exists a',b'\in N$ t.c. $N\models p(a',b')$, per def. di tipo

Però M è ω-satura per 1-tipo trovo $a\in M$ $M,a \equiv N,a'$ $\Rightarrow M,a,b \equiv N,a',b'$

□

<u>obs</u>: M L-struttura e $p(x)$ $L\cup\{x\}$-teoria $p(x)\cup Th(M)$ coerente $\Longleftrightarrow$ $p(x)\cup ED(M)$ coerente

<u>Teo:</u> M L-struttura $\Rightarrow \exists N \succ M$ ω-satura e $|N| \leq 2^{|L|} \cdot |M|$

Sia $\{ p_i(x) \mid i \in I \}$ l'insieme degli 1-tipi di $ED(M)$ con $<\omega$ parametri

considero $p_i(x_i)$ con x_i costanti distinte.

$|I| \leq 2^{|L|} \cdot |M|$ dove $|L| = \# L + \aleph_0$

$ED(M) \cup \bigcup_{i \in I} p_i(x_i)$ è coerente per compattezza, se no esistono $\varphi_1(x_1) \in p_1(x_1)$

$$\vdots$$

$$\varphi_n(x_n) \in p_n(x_n)$$

t.c. $\varphi_1(x_1), \dots, \varphi_n(x_n), ED(M)$ incoerente, però questo è assurdo perché $M \models \exists x_1 \varphi_1(x_1) \wedge \dots \wedge \exists x_n \varphi_n$ però $x_1 \neq x_2 \neq \dots \neq x_n \Rightarrow M \models \exists x_1 \dots \exists x_n \varphi_1(x_1) \wedge \dots \wedge \varphi_n(x_n)$

$\exists \wedge = \wedge \exists$

Esiste un modello della teoria e wlog lo prendo $M' \succ M$ e $a_i \in M'$ t.c.

$$M' \models p_i(a_i)$$

$$\begin{cases} M_0 = M \\ M_{n+1} = \text{est. elementare di } M_n \text{ che realizza gli 1-tipi di } ED(M_n) \text{ con } <\omega \text{ parametri} \end{cases}$$

$\lim M_n = \bigcup M_n = N \succ M_n$

e N è ω-satura.

<u>N.B.:</u> La cardinalità di N?

sotto <u>GCH</u> : M κ-satura di cardinalità κ

κ^+-satura 2^κ $\sim \square$

<u>Teo:</u> T L-teoria $\forall M, N \models T$ (ω-saturi) l'insieme $I(M,N) = \{ f \mid f : M \xrightarrow[\text{finiti}]{\cong} N \}$ ha il va-e-vieni

$\Rightarrow T$ ha EQ

<u>Inoltre se $I(M,N) \neq \emptyset$ $\forall M,N \Rightarrow T$ è completa</u>

$M, N \models T$ non ω-saturi. Siano $\vec{a} \in M^n$, $\vec{b} \in N^n$ t.c. $tp_M(\vec{a}) \cap QF = tp_N(\vec{b}) \cap QF$

<u>$\Rightarrow M, \vec{a} \equiv N, \vec{b}$</u>

$M^* \succ M$, $N^* \succ N$ ω-sature $M^*, \vec{a} \equiv_{QF} N^*, \vec{b} \Longrightarrow M^*, \vec{a} \equiv N^*, \vec{b} \Longrightarrow M, \vec{a} \equiv N, \vec{b}$.

Da cui la tesi del teorema. $\square$

$\square$

es. (DiLO) Continua dal 18/03. Questa teoria è completa, non ha E.Q. se $L=\{<\}$

Ma ce l'ha in $L\cup\{s,p\}=L'$. $T'=\text{DiLO}\cup\{Sx=y \leftrightarrow x<y \wedge \forall z\, \neg\, x<z<y\}\cup$

succ. pred. $\cup\{py=x \leftrightarrow Sx=y\}$ (espansione definizionale)

Noto che ogni modello di DiLO si espande in modo unico ad un modello di T' che continuo a chiamare M.

Siano M,N modelli ω-saturi di DiLO e $I(M,N)=\{f \mid f: M \xrightarrow[\text{finiti}]{\cong} N$ come L'-strutture$\}$

$I(M,N)\neq\emptyset$ preso $a\in M$ $b\in N$ $(a,b)\in I(M,N)$

$I(M,N)$ ha il va' e vieni: (prox volta) vedi sotto.

Fatto ciò ne concludo che T' ha EQ e siccome $I(M,N)\neq\emptyset \Rightarrow T'$ completa

$\Rightarrow M\equiv N \Rightarrow$ due modelli qlq. sono $\equiv$

$I(M,N)$ ha il va' e vieni:

$(\langle a_1,\dots,a_n\rangle,\langle b_1,\dots,b_n\rangle)\in I(M,N)$ cioè

$(M,a_1,\dots,a_n)\equiv_{QF}(N,b_1,\dots,b_n)$ Prendo $b_{n+1}\in N$

5/03/10

Siccome M è ω-saturo trovo $a_{n+1}\in M$ t.c. $(M,a_1,\dots,a_{n+1})\equiv_{QF}(N,b_1,\dots,b_{n+1})$

e quindi ho il "va'". Il "vieni" è analogo.

Oppure: CASO 1: $\exists k\in\mathbb{Z}\ \exists i\leq n$ $a_{n+1}=S^k(a_i)$ prendo $b_{n+1}=S^k(b_i)$

$\neg$CASO 1: wlog $a_i \overset{\infty}{<} a_{n+1} \overset{\infty}{<} a_{i+1}$ considero il tipo $p(x)=\{S^k(a_i)<x,\ S^k(x)<a_{i+1} \mid k\in\mathbb{N}\}$

questo è realizzabile in M ed è fin. realizzato in N il tipo

$q(x)=\{S^k(b_i)<x,\ S^k(x)<b_{i+1} \mid k\in\mathbb{N}\}$ $\underset{N\ \omega\text{-saturo}}{\Rightarrow}$ è realizzato in N.

Per la completezza basta mostrare che $\forall M,N$ ω-saturi $I(M,N)\neq\emptyset$:

è vero poiché dato $a\in M$, $b\in N$ ho $(M,a\equiv_{QF}N,b)$

es. (ACF) ACF ha eliminazione dei QF, $\forall p\in$ primi $\cup\{0\}$ ACF_p è completa

M,N ω-saturi $M,a_1,\dots,a_n\equiv_{QF}N,b_1,\dots,b_n$ Dato $a_{n+1}\in M$: CASO 1: a_{n+1} algebrico su $a_1,\dots,a_n$

cioè $\exists p(x_1,\dots,x_{n+1})\in M_0[x_1,\dots,x_{n+1}]$ e a_{n+1} è uno zero di $p(a_1,\dots,a_n,x_{n+1})=q(x)$ e q lo posso scegliere (wlog) irriducibile. M_0 è il campo primo di M

ovvero $\exists q(x)\in M_0(a_1,\dots,a_n)[x]$ irriducibile t.c. $q(a_{n+1})=0$

Lemma: $K \subset M$ campo $q(x)$ irriducibile $K(a) \cong K[x]/_{q(x)}$
$a \in M$
$f(a) \longleftarrow [f(x)]$

$$M, a_1, \dots, a_n \underset{QF}{\equiv} N, b_1, \dots, b_n \implies M_0(a_1, \dots, a_n) \overset{f}{\cong} N_0(b_1, \dots, b_n) \implies M_0(a_1, \dots, a_n)[x] \cong N_0(b_1, \dots, b_n)[x]$$
$$a_i \longmapsto b_i$$

$$M_0(a_1, \dots, a_n)(a_{n+1}) \cong M_0(a_1, \dots, a_n)[x]/_{q(x)} \cong N_0(b_1, \dots, b_n)[x]/_{q^f(x)} \cong N_0(b_1, \dots, b_n)(b_{n+1})$$

dove b_{n+1} è una qlq radice di $q^f(x)$.

$\implies M, a_1, \dots, a_{n+1} \underset{QF}{\equiv} N, b_1, \dots, b_{n+1}$.

a maggior ragione ho un iso di sottoanelli

CASO 2: a_{n+1} trascendente $\alpha = a_{n+1}$ su $a_1, \dots, a_n$

$$M_0(a_1, \dots, a_n)(\alpha) \cong M_0(a_1, \dots, a_n)(x) \cong N_0(b_1, \dots, b_n)(x)$$

$\exists \beta \in N$ trascendente su $N_0(b_1, \dots, b_n)$, sì perché N ω-saturo.

Uso il tipo $t(x) = \{$ elenco dei polinomi in $b_1, \dots, b_n$; $p(x)$ $p(x) \neq 0 \}$:

è finit realizzabile ed ha parametri $b_1, \dots, b_n$

$\implies N, \beta \models p(x)$

$\beta = b_{n+1}$.

Questa teoria non è completa, però se fisso char ho che $I(M, N) \neq \emptyset$
ho sempre l'iso tra i sottocampi primi $(1 \longmapsto 1)$

16/03/10

%

□

15/04/10

Manca lezione del 26/03/10 !

Recap: ORDINI DISCRETI

ACF – ACF_0, ACF_p } hanno eliminaz. dei quantificatori

sono complete

———— o ————

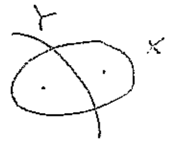
Chiusura Algebrica

Sia M una L-struttura, $a_1, \dots, a_n \in M$ e $a \in M$, diremo che $a \in acl(a_1, \dots, a_n)$ (a é alg. dipendente da $a_1, \dots, a_n$) se $\exists \varphi(x, a_1, \dots, a_n)$ formula t.c. $M \models \varphi(a, a_1, \dots, a_n)$ e $\exists k \in \mathbb{N}$ t.c. $M \models \exists^{=k} x\, \varphi(x, a_1, \dots, a_n)$

[$a \in acl(\emptyset)$ vuol dire che la φ qui sopra non ha parametri]

Es. $M \models ACF$ $\quad a \in acl(a_1, \dots, a_n) \iff a \in \overline{\langle a_1, \dots, a_n \rangle}$

Def: Sia M una L-struttura, $X \subset M$, diciamo che X é fortemente minimale se $\forall Y \subset M^n$ definibile $Y \cap X$ o $X \setminus Y$ é finito.



es. $M \models ACF \Rightarrow M$ fort. minimale.

ACF ha l'EQ. $\varphi(x, \vec{a}) \iff \bigvee_i \bigwedge_j \pm A_{ij}$ dove A_{ij} atomiche

la scrivo in DNF

$\iff \bigvee_i \bigwedge_j (p_{ij}(x) = 0 \wedge q_{ij}(x) \neq 0)$ e i $p_{ij}(x)$ hanno solo un numero finito di zeri

$\Rightarrow \varphi(x, \vec{a})$ definisce qualcosa finito o cofinito.

Lemma: (dello scambio) M fort. minimale. Sia $A = \{a_1, \dots, a_n\}$,

$a \in acl(b, A)$ e $a \notin acl(A)$

$\Rightarrow b \in acl(a, A)$ $\square$

$a \in acl(b, A) \Rightarrow \exists \varphi(x, b, A)$ con un # finito di soluz e $M \models \varphi(a, b, A)$,

Notaz: $\exists^{\infty} x\, \varphi(x) := \forall n \in \mathbb{N}\, \exists^{\geq n} x\, \varphi(x)$ (non é FO, chiaramente, perché ho il $\forall n \in \mathbb{N}$)

Peró se M é fort. minimale diventa FO, infatti se considero $\{x \in M \mid M \models \varphi(x)\}$ questo é finito o finito... ?

Peró, se fosse che $b \notin acl(a, A)$ si avrebbe che $\exists^{\infty} b' \left(\exists^{=n} x\, \varphi(x, b', A) \wedge \varphi(a, b')\right) =$

$\Rightarrow \{b' \in M \mid$ ———— $\}$ ha complementare finito ovvero $\exists k \in \mathbb{N}\, \exists b_1 \dots \exists b_k\, \forall b' \neq b_1, \dots, b_k \left(\exists^{=n} x\, \varphi(x, b', A) \wedge \varphi(a, b')\right)$;

fort. minimale

$=: \psi(a)$

però $a \notin acl(A) \Rightarrow \exists^{\infty} a\, \varphi(a)$ $\lightning$, perché $\exists a_1,\dots,a_{n+1}\ \exists b\ \exists^{=n} x\, \varphi(x,b) \wedge \varphi(a_1,b) \wedge \dots \wedge \varphi(a_{n+1},b)$.

$\square$

obs: In $\mathbb{N},+,\cdot$ non vale lo scambio.

Def: Sia M fort. minimale, dati $a_1,\dots,a_k \in M$, definiamo la dimensione:

$$\dim(a_1,\dots,a_k) := \max n \text{ t.c. } \exists^{=n} \text{ degli } a_1,\dots,a_k \text{ alg. indipendenti.}$$

$a_1,\dots,a_n$ alg. indip $\iff \forall i\ \ a_i \notin acl(a_1,\dots,a_{i-1},a_{i+1},\dots,a_n)$ $(*)$

Def: $X \subset M^n$ definibile, M ω-saturo,

$$\dim(X) := \max\{\dim(\vec{a}) \mid \vec{a} \in X\}$$

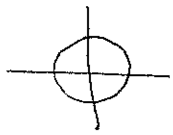
es. $M = (\mathbb{C},+,\cdot)$ é fort. minimale ($\Rightarrow$ scambio)

$M = (\mathbb{R},+,\cdot,0,1,<)$ non é fort. minimale però vale lo scambio

$\hookrightarrow$ es. $(0,1)$

$(0,\tfrac{1}{2}] \cup (\tfrac{1}{2},1)$

Vediamo in $(\mathbb{R},+,\cdot,0,1,<)$ il $x^2+y^2=1$



dovrebbe avere dim 1, nel senso classico.

$\dim(0,1) = 0$

fisso x_0 $\quad y^2+x_0=1$ e se prendo x_0 trascendente (ad es. $\operatorname{sen}(1)$) $\Rightarrow \dim = 1$.

Su $\overline{\mathbb{Q}}^{\mathbb{R}}$ invece il cerchio avrebbe dim 0! Per questo prendiamo modelli saturi

obs: Se X é definibile con parametri da $B \subset M$

$$\dim(X) = \max_{\vec{a} \in X} \dim(\vec{a}/B)$$

Però poi devo far vedere che resta uguale se prendo $B' \supset B$.

6/04/10

Def: Dato $\{a_1,\dots,a_n\} \subset N$, dico che $\{a_{i_1},\dots,a_{i_k}\}$ é generante se

$$acl(a_{i_1},\dots,a_{i_k}) = acl(a_1,\dots,a_n)$$

ed é indipendente se ciascun $a_{i_j} \notin acl(\text{degli altri})$, ovvero $(*)$

Dico che é base se é indip. e generante.

Lemma: Due basi hanno la stessa cardinalità, chiamata dimensione, $\dim(a_1,\dots,a_n)$

Siano $\{b_1,\dots,b_k\} \subset \{a_1,\dots,a_n\} \supset \{c_1,\dots,c_l\}$, $\{b_1,\dots,b_k\}$ generante, $\{c_1,\dots,c_l\}$ indip. Ci basta dimostrare che $l \leq k$. Senza perdita di generalità $c_1 \in acl(b_1, B')$ $\ B' \subset \{b_2,\dots,b_k\}$ però $c_1 \notin acl(B')$. (Lo posso fare a meno di permutare gli indici) $\times$ minimalità

$\underset{\text{Scambio}}{\Longrightarrow}$ $b_1 \in acl(c_1, B') \subset acl(c_1, b_2, \dots, b_k)$

generante (uso che ex. $acl(acl(X)) = acl(X)$)

Adesso reitero con c_2:

Sia $B_2 \subset \{b_2, \dots, b_k\}$ minimale t.c. $c_2 \in acl(c_1, B_2)$ $B_2 \neq \emptyset$ e posso assumere che $b_2 \in B_2$

$\Rightarrow c_2 \in acl(c_1, b_2, B_2')$ e $c_2 \notin acl(c_1, B_2')$, per minimalità.

$\underset{\text{cambio}}{\Longrightarrow}$ $b_2 \in acl(c_1, c_2, B_2') \subset acl(c_1, c_2, b_3, \dots, b_k)$

$\Rightarrow \ell \leq k$.

□

obs: $\overset{\Pi \models ACF}{a}$ algebrico $\Leftrightarrow$ a algebrico nel senso usuale

($\Leftarrow$) chiaro

($\Rightarrow$) a verifica $\varphi(x, e_1, \dots, e_n)$ $\exists^{=n} x\, \varphi(x, e_1, \dots, e_n)$ però ACF ha EQ

$\Rightarrow \varphi(x, e_1, \dots, e_n) = \bigvee \bigwedge (p_{ij}(x) \wedge p_{ij}(x) \neq 0)$ $\Rightarrow \exists_{ij}$ $p_{ij}(a) = 0$.

Def: Sia N fort. minimale, $e_1, \dots, e_n \in N$, $B \subset dom(N)$ con $|B| < \infty$

$dim(e_1, \dots, e_n / B) :=$ max card di un insieme di el. alg. indip. su B

$X \subset N^n$ definibile su $B \subset dom(N)$, N ω-saturo,

$dim(X) = dim(X/B) := max\{dim(e_1, \dots, e_n / B) \mid \langle e_1, \dots, e_n \rangle \in X\}$

ex. Se $B' \supset B$ $dim(X/B') = dim(X/B)$

Rango di Morley: Sia N ω-satura, $X \subset N^n$ definibile con parametri da N voglio definire $RM(X) \in ON \cup \{\infty\}$

Però se N fort. minimale $RM(X) = dim(X)$

Se tolgo queste ip. ho il rango di Cantor-Bernstein.

"The Model Theory of Groups"]

$$\begin{cases} RM(X) \geq 0 \text{ se } X \neq \emptyset \quad (RM(\emptyset) = -1) \\ RM(X) \geq \delta \text{ se } RM(X) \geq \alpha \ \forall \alpha < \delta \quad (\delta \text{ limite}) \\ RM(X) \geq \alpha + 1 \text{ se esistono } X_i \subset X \text{ disgiunti definibili}, i < \omega \text{ t.c. } \forall i\ RM(X_i) \geq \alpha \end{cases}$$

$RM(X) = \beta$ se $RM(X) \geq \beta \wedge RM(X) \not\geq \beta + 1$

$RM(X) = \infty$ se $\forall \alpha \in ON$ $RM(X) \geq \alpha$

obs: $\underset{X}{\overset{\cup}{N}} \prec \underset{X(N')}{\overset{\cup}{N'}}$ ω-saturi si ha che $RM(X) = RM(X(N'))$, ovvero se $X = \{x \mid N \models \varphi(x, a_1, \dots, a_n)\}$

si ha che $RM(X)$ dipende solo dal $\text{tipo}_N(a_1, \dots, a_n) \underset{\uparrow}{=} \text{tipo}_{N'}(a_1, \dots, a_n)$
se $N' \succ N$

Prop: N fort. minimale, ω-saturo. $X \subset N^n$ definibile allora

$RM(X) = \dim(X)$.

Lemma: $\dim(X) \geq r+1 \iff$ esistono $X_i \subset X$ disgiunti definibili $\dim(X_i) \geq r$

$\Longrightarrow \dim(X) = RM(X)$.
($\geq$) per indus. $+ \Leftarrow$ del Lemma
($\leq$) " $+ \Rightarrow$ del Lemma

Lemma

wlog X definibile senza parametri; altrimenti li aggiungo al linguaggio...
($\Longrightarrow$) Fisso $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in X$ t.c. $\dim(a_1, \dots, a_n) = \dim(X) \geq r+1$
Posso assumere che $a_1, \dots, a_{r+1}$ indipendenti

Digressione • Se $a_1, a_2 \notin acl(B) \Rightarrow \text{tipo}(a_1/B) = \text{tipo}(a_2/B)$; cioè $\forall X$ B-definibile $a_1 \in X \longleftrightarrow a_2 \in X$
se no un $a_i \in X$ e l'altro ad $N \setminus X$ quindi uno dei due è alg. su B, perché uno tra X e $N \setminus X$ è finito (N fort. minimale)■
• $b, a_1, \dots, a_k \in N$ e $b \in acl(a_1, \dots, a_k, A) \Rightarrow$ esiste X A-definibile $X \subset N^{k+1}$ t.c.
$(b', a_1', \dots, a_k') \in X \Rightarrow b' \in acl(a_1', \dots, a_k', A)$
Questo perché b verifica $\varphi(b, a_1, \dots, a_k, A) \wedge \exists^{=n}_x \varphi(x, a_1, \dots, a_k, A)$, prendo
$X = \{(b', a_1', \dots, a_k') \mid \varphi(b', a_1', \dots, a_k', A) \wedge \exists^{=n}_x \varphi(x, a_1', \dots, a_k', A)\}$

Fisso $\forall k < \omega$ $N, a_1^k, \dots, a_n^k \underset{(*)}{\equiv} N, a_1, \dots, a_n$; lo posso fare perché N ω-saturo
Prima fisso $a_1^1, a_1^2, \dots$ cioè le prime componenti e le scelgo acl-indip. (su B)
$a_1^1 = a_1$
$a_1^2 \notin acl(a_1^1)$
$a_1^3 \notin acl(a_1^1, a_1^2)$ per saturazione
$\vdots$
, siccome N saturo per il back-and-forth costruisco $a_2^k, \dots$. Infatti fissato k ho che
$N, a_1^k \equiv N, a_1 \underset{\substack{\text{back and forth} \\ + \text{ saturo}}}{\Rightarrow} \exists a_2^k \; N, a_1^k, a_2^k \equiv N, a_1, a_2$
etc.

$X_k := \{(x_1, \dots, x_n) \in X \mid x_1 = a_1^k\}$. Sono definibili (con un param. in più ma vbb.) e disgiunti.
¿$\dim(X_k) \geq r$? sí perché X_k è a_1^k-definibile e ho che $\{\underbrace{a_2^k, \dots, a_{r+1}^k}_{\delta}\}$ indip. su a_1^k
e $(a_1^k, a_2^k, \dots, a_n^k) \in X_k$, perché vale $(*)$ e $\dim(\delta /_{a_1^k}) \geq r$.

($\Longleftarrow$) Supponiamo che $\forall i$ $X_i \subset X$ defin. disg. $\dim(X_i) \geq r$ tutti B-definibili
¡¡ N suff. saturo, nelle ip. ci va ω_1-saturo? !!

Scelgo $\forall i$ $\vec{b}_i \in X_i$ t.c. $\dim(\vec{b}_i) \geq n$ e wlog posso assumere che ad essere indip sempre i primi n di ogni $\vec{b}_i$, passando ad una sottosucc.

Dico che $N, \vec{b}_i\restriction_n \equiv N, \vec{b}_j\restriction_n$, perché il primo $\vec{b}_i\restriction_n$ delle digressione funziona anche per n-uple,

$N, e_1, e_2 \equiv N, b_1, b_2$ se e_1, e_2 indip e b_1, b_2 indip.

$\wr\downarrow$

b_1, e_2^* ///

C'è un automorfismo f_i t.c. $f_i : \vec{b}_i\restriction_n \to \vec{b}_1\restriction_n$ $\quad \vec{b}_i^* = f_i(\vec{b}_i)$ per $i > n$

e f_i fissa B $\Rightarrow \vec{b}_i^* \in X_i$ e $\dim(\vec{b}_i^*) \geq n$

$Y := \{\vec{c} \in N^{u-n} \mid \langle \vec{b}_1\restriction_n, \vec{c} \rangle \in X\}$ è infinito, perché i $\vec{b}_i^*$ sono tutti distinti

$\underset{\uparrow}{\Rightarrow}$ $\dim Y/_{b_1} \geq 1$ $\quad \Rightarrow \dim X \geq n+1$

per saturazione

$(*)$ = $x \notin acl(\phi) \wedge x$ è una delle coord di un "$\vec{c}$" in Y

2/04/10

$\square$

Sia M L-struttura, $X \subset M^n$ M-definibile, se $X = \{x \in M \mid M \models \varphi(x, \vec{a})\}$

Definisco $R(X)$ come il rango di Morley della prec. lezione e pongo

$R_M(\varphi(x, \vec{a})) = R(X)$

os: · se $|X| < \infty$ $\quad R(X) = 0$

· se $|X| \geq \omega$ $\quad R(X) \geq 1$

p.: se $N \succ M$ $\Rightarrow R_N(\varphi(x, \vec{a})) \geq R_M(\varphi(x, \vec{a}))$, per induzione.

Però se M ω-satura vale l'$=$ e in quel caso lo chiamo <u>rango di Morley</u>

ovvero è il <u>rango di Cantor-Bernstein</u>.

$RM(\varphi(x, \vec{a})) = \sup_{N \succ M} R_N(\varphi(x, \vec{a}))$ ed è raggiunto da N ω-satura.

Vediamo che $R_M(X \cup Y) = \max\{R_M(X), R_M(Y)\}$: ci basta mostrare che

$R_M(X \cup Y) \geq \alpha \Rightarrow R_M(X) \geq \alpha$ o $R_M(Y) \geq \alpha$

· α limite : b.

· $\alpha = \beta + 1$: vuol dire che posso spezzare $X \cup Y$ con dei $Z_i \subset X \cup Y$ disgiunti

t.c. $R_M(Z_i) \geq \beta$ $\quad (i < \omega)$

Siccome $Z_i = (Z_i \cap X) \cup (Z_i \cap Y)$ $\overset{\text{ip. ind}}{\Rightarrow}$ posso assumere che $Z_i \subset X$ o $Z_i \subset Y$

$\Rightarrow X$ (o Y) ne contiene ∞.

<u>Equivalentemente</u> $R_M(X) \geq \alpha+1$ se $\forall n \in \mathbb{N}$ esistono $Y_1, \dots, Y_n \subset X$ disgiunti di rango $R_M(Y_i) \geq \alpha$. □

Infatti, sia C_n = famiglia di n sottoinsiemi def. disgiunti di X di rango $\geq \alpha$. wlog C_n partiziona X

E posso assumere che C_{n+1} raffina C_n, grazie al risultato precedente sul R_M dell'unione (e continua ad essere partizione).

$\mathcal{C} := \bigcup_{n \in \omega} C_n$

Trovo $Z_0 \supsetneq Z_1 \supsetneq Z_2 \supsetneq \dots$ tutti in $\mathcal{C}$ ed osservo che $R_M(Z_i \setminus Z_{i+1}) \geq \alpha$ e sono disgiunti.

<u>Lemma</u>: M ω-satura $\varphi(\vec{x}, \vec{a})$ $a \in M^k$ $x = (x_1, \dots, x_l)$ e sia $N \succ M$ allora

(i) $R_M(\varphi(x, \vec{a})) = R_N(\varphi(x, \vec{a}))$

(ii) $b \in N$ $\text{tipo}(a) = \text{tipo}(b) \Rightarrow R_M(\varphi(x,a)) = R_N(\varphi(x,b))$

Chiaramente (ii) $\Rightarrow$ (i). Mostro (ii).

Induzione su β, $R_N(\varphi(x,b)) \geq \beta \Rightarrow R_M(\varphi(x,a)) \geq \beta$

β limite: ✓

· $\beta = \alpha+1$: dato $m \in \mathbb{N}$ trovo $R_N(\theta_i(x, c_i)) \geq \alpha$ $(i < m)$ disgiunti e $\{x \mid \theta_i(x, \vec{c}_i)\} \subset \{x \mid \varphi(x,b)\}$

Siccome M è ω-satura e $M, \vec{a} \equiv N, \vec{b}$, dati $\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_m \in N$ trovo $\vec{d}_1, \dots, \vec{d}_m \in M$ t.c. $M, \vec{a}, \vec{d}_1, \dots, \vec{d}_m \equiv N, \vec{b}, \vec{c}_1, \dots, \vec{c}_m$

Per induzione $R_M(\theta_i(x, \vec{d}_i)) \geq \alpha$ $(i < m)$

e $\{x \mid \theta_i(x, \vec{d}_i)\} \subset \{x \mid \varphi(x,a)\}$ e sono disgiunti perché questa è una prop. del tipo dei parametri.

Siccome m è arbitrario per l'oss prec. ho che $R_M(\varphi(x, \vec{a})) \geq \alpha+1$.

<u>Prop</u>: $RM(\varphi(x, \vec{a})) = \sup_{N \succ M} R_N(\varphi(x, \vec{a})) = R_{\overline{M}}(\varphi(x, \vec{a}))$ con $\overline{M} \succ M$ ω-satura □

Per dimostrare questo ci serve il Teo di amalgamazione.

Teo: (amalgamazione)

$$\begin{tikzcd}
 & K^{eq}_T & \\
a \quad M \arrow[ur, hook, "\prec", "\exists"'] & & N \quad a \arrow[ul, "\prec"'] \\
 & A \arrow[ul, hook, "\prec"] \arrow[ur, hook, "\prec"'] & \\
 & \Phi & \\
 & a &
\end{tikzcd}$$

$f : M \xrightarrow{\prec} N$

$R_M(\varphi(x, a)) \leq R_N(\varphi(x, f(a)))$.

Vediamo come questo entra nella Prop.

$$\begin{tikzcd}
 & N' & \\
N \arrow[ur, "\prec"] & & \bar{M} \arrow[ul, hook, "\prec"'] \\
 & M \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

perché wlog $\sup_{N \succ M}$ equivale a fare il $\sup_{N' \supseteq \bar{M}}$

3/04/10 Sia $M \models T$

$RM(\varphi(x, \vec{a}))$ dipende da φ e da $tipo_M(\vec{a}) \in S_n(T)$, perciò $\exists \alpha \in ON$ per $\varphi(x, \vec{a})$

t.c. $RM(\varphi(x, \vec{a})) \geq \alpha_T \to RM(\varphi(x, \vec{a})) = \infty$

Questo perché ci sono $2^{|L|}$ possibili tipi e quindi si può prendere $\alpha = (2^{|L|})^+$.

In particolare se $RM(\varphi(x, \vec{a})) = \infty$ ... si ha che $RM(\varphi(x, \vec{a})) \geq \alpha_T + 1$

$\Rightarrow$ si spezza in ∞ formule di disgiunte $RM(\theta_i(x, \vec{c}_i)) \geq \alpha_T$ cioè $RM(\theta_i(x, \vec{c}_i)) = \infty$

Ovvero abbiamo mostrato che dato M ω-saturo $X \subset M^n$ M-definibile $RM(X) = \infty \Rightarrow \exists Y, Z \subset X$ disgiunti M-definibili t.c. $RM(Y) = RM(Z) = \infty$

ogni ramo mi da un tipo perché è finit. soddisfacibile

$\Rightarrow$ su $\aleph_0$ parametri ho $2^{\aleph_0}$ tipi

Caso opposto: teorie con pochi tipi

Def: T L-teoria $M \models T$ è un modello primo se

$\forall N \models T \quad \exists f : M \xrightarrow{\prec} N$

Es. $T = ACF_0$ (i) $\bar{\mathbb{Q}}$ è un modello primo

ACF_p (ii) $\overline{\mathbb{Z}/p}$ " " "

DLO (iii) $\mathbb{Z}$

su $L = \{1, p, <\}$

Def: T è model completa se $\forall M, N \models T \quad M \subset N \Rightarrow M \prec N$

obs: Se T ha EQ $\Rightarrow$ T model completa

$\not\Leftarrow$: prendiamo $RCF := Th(\mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot)$ e $RCOF := Th(\mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, <)$

RCOF ha EQ, RCF non ha EQ però è model completa, infatti il $<$ è definibile (usando un quantificatore)

T model completa vuol dire che ho quasi una EQ: ogni formula è equivalente ad una esistenziale $\exists \vec{x}\, \theta(\vec{x}, \vec{y})$ con θ q. free.

obs: Se T è model completa e ha un modello primo $\Rightarrow$ T è completa

Siano $M, N \models T$, P il modello primo
$$\begin{tikzcd} N & & M \\ & P \arrow[ul, "\prec"] \arrow[ur, "\prec"'] & \end{tikzcd}$$
$\Rightarrow M \equiv P \equiv N \Rightarrow M \equiv N$ cioè T è completa. $\square$

es.

(iii) $\mathbb{Z} \xrightarrow{\prec} M$ e per EQ ho che $\mathbb{Z} \underset{f}{\prec} M$

$0 \longrightarrow a$

(i),(ii) ex.

Se $M \prec N \models T$ e $p(x)$ tipo di T realizzato in M $\Rightarrow$ è realizzato anche in N

Quindi se M è primo vuol dire che realizza il "minor numero possibile" di tipi.

Teo: (omissione dei tipi) Sia T una L-teoria completa dove L numerabile e $\Sigma(x)$ un tipo di T (non necess. completo). Supponiamo che non esista $\varphi(x) \in L$-formula coerente con T t.c. $T, \varphi(x) \vdash \Sigma(x)$

oss: Se Σ completo $\varphi \in \Sigma$.

Allora $\exists M \models T$ che omette $\Sigma(x)$, ovvero $\nexists a \in M$ che realizza $\Sigma(x)$

Viceversa se $T, \varphi(x) \vdash \Sigma(x)$ (con $\varphi(x)$ coerente con T) $\Rightarrow$ $\Sigma(x)$ è realizzato in tutti i modelli.

Vediamo il viceversa: $T, \varphi(x)$ coerente $\longleftrightarrow$ $T \vdash \exists x \varphi(x)$

Quindi se $M \models T \quad M \models \exists x \varphi(x)$ etc.

Sia $C = \{c_i \mid i < \omega\}$ nuove costanti $\notin L$ e sia $(\sigma_i \mid i < \omega)$ enumerazione delle $L \cup C$ formule

Definiamo quindi $T =: S_0 \subseteq S_1 \subset S_2 \subset \dots$ $(L \cup C)$-teorie t.c. se prendiamo

$S := \bigcup_{i<\omega} S_i$ abbiamo (i) S completa

(ii) $\exists x \varphi(x) \in S \Rightarrow \exists c_i \in C$ con $\varphi(c_i) \in S$

(iii) $\forall i < \omega \ \exists \delta(x) \in \Sigma(x) \quad \neg \delta(c_i) \in S$

$\Sigma(x)$ è 1-tipo senno la notaz e le dim. si complicano ...

Se faccio questo allora ho che:

$\exists M \models S \ \forall a \in M \ \exists i < \omega \quad M \models a = c_i$ (per (i) e (ii))

(iii) $\Rightarrow$ $\Sigma(x)$ non è realizzato in M quindi la tesi.

¿ Come costruisco $(S_i \mid i < \omega)$? Per induzione:

fisso una numerazione su $(\underbrace{\sigma_i, \exists x \varphi(x)}_{(L \cup C)\text{-formule}}, c_i)$ = triple

Dato S_n considero l'n-esima tripla $(\sigma, \exists x \varphi(x), c_i)$, realizzo (i), (ii), (iii):

per (i): se $S_n \cup \{\sigma\}$ è coerente $\Rightarrow \sigma \in S'_{n+1}$, altrimenti $\neg\sigma \in S'_{n+1}$;

per (ii): se $\exists x \varphi(x) \in S'_{n+1}$, scelgo $c_i \notin L(S'_{n+1}) \Rightarrow \varphi(c_i) \in S''_{n+1}$; uso che se T coerente e $c \notin L(T)$ $\Rightarrow T \cup \{\exists x \varphi(x) \to \varphi(c)\}$ è coerente

per (iii): $S''_{n+1} \equiv T + \psi(\vec{c}) \nvdash \Sigma(c_i)$

es. $T + \psi(c_1, c_2) \vdash \delta(c_1)$

$T \vdash \forall x y\, (\psi(x,y) \to \delta(x))$

$\Downarrow$

$T \vdash \forall x\, (\underbrace{\exists y \psi(x,y)}_{\theta(x)} \to \delta(x))$

$\Rightarrow \exists\, \delta(x) \in \Sigma(x)$ t.c. $T + \psi(\vec{c}) \nvdash \delta(c_i)$

$\Rightarrow T, \psi(\vec{c}), \neg\delta(c_i) =: S_{n+1}$ ed è coerente.

¿E se $\Sigma(x)$ è n-tipo? Potrebbe capitare che anche se il tipo Σ è non principale, ovvero $T, \psi(x,y) \nvdash \Sigma(x,y)$ <u>però</u> $T, \psi(c,c) \vdash \Sigma(c,c)$ $\square$

e se considero $\langle \sigma, \exists x \varphi(x), \vec{c}_{\text{distinti}} \rangle$ poi comq non ho la garanzia che il tipo sia omesso. Aggiungo al passo S_n nuovi assiomi $c_1 = c'_1 \ldots\ c_n = c'_n$ da cui se il tipo fosse realizzato da $\langle c_1, c_1, c_3 \rangle \rightsquigarrow$ è pure realizzato da $\langle \underline{c_1, c_K, c_3} \rangle$ distinti.

cost menzionate in S_n — altre cost.

7/04/10

<u>Teorie ω-categoriche</u>

Sia T una L-teoria completa, $|L| \leq \aleph_0$ (per poter usare il Teo di omissione dei tipi)

$\boxed{T \text{ è } \omega\text{-categorica} \iff \forall n\ |S_n(T)| < \aleph_0}$

. DLO (senza estremi) $(\mathbb{Q}, <)$

2-tipi di $(\mathbb{Q}, <)$ $\quad p(x,y)$ cos'è? sostanzialmente (ho la EQ) posso dire solo $x<y$, $y<x$

…ttiamo una topologia su $S_n(T)$:

$n=1$) $[\varphi(x)] \subset S_1(T)$ $\quad p(x) \in [\varphi(x)] :\iff \varphi(x) \in p(x)$

$[\varphi(x)]$ sono gli <u>aperti base</u>

…esta topologia è T_2 cpta:

T_2 vuol dire che presi $p(x) \neq q(x)$ in $S_n(T)$ trovo due aperti che separano. Mostro che …posso farlo con gli aperti base.

obs: $[\varphi(x)] \cup [\psi(x)] = [\varphi(x) \vee \psi(x)]$ si dimostra usando che $p(x)$ è <u>completo</u>.
$\cap$ $\wedge$

$p(x) \neq q(x) \Rightarrow \exists \varphi(x) \in p(x)$ e $\varphi(x) \notin q(x) \Rightarrow \neg\varphi(x) \in q(x)$

$\Rightarrow [\varphi(x)] \ni p(x)$ e $[\neg\varphi(x)] \ni q(x)$ e sono disgiunti

obs: Se fisso $M \models T$ e $p(x)$ $p(M) = \bigcap_{\varphi(x) \in p(x)} \varphi(M)$

Ogni insieme con la prop. dell'$\cap$ finita si estende ad un filtro ($\checkmark$) e poi ad un ultrafiltro. Gli ultrafiltri "sono" i tipi.

- è cpto: cioè se ogni famiglia $\mathcal{F}$ di chiusi con la f.i.p. ha intersez. non vuota.

$\mathcal{F} = \{C_i \mid i \in I\}$ C_i chiuso $\Rightarrow$ $S_n(X) \setminus C_i = \bigcup_{\varphi(x) \in \Gamma_i} [\varphi(x)]$

$\Rightarrow C_i = \bigcap S_n(X) \setminus [\varphi(x)] = \bigcap [\neg\varphi(x)]$

<u>Gli aperti base sono sia aperti che chiusi.</u>

$\mathcal{F}$ ha la fip $\emptyset \neq C_1 \cap \ldots \cap C_n = \bigcap_{\theta \in \Gamma_1} [\theta(x)] \cap \ldots \cap \bigcap_{\theta \in \Gamma_n} [\theta(x)] \ni p$ ($\exists$)

$\Rightarrow \Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_n \subset p(x) \Rightarrow \Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_n$ coerente $\Rightarrow \bigcup_{i \in I} \Gamma_i$ è coerente, quindi si

$p \in \bigcap_{\Gamma_1} [\theta(x)] \Rightarrow \forall \theta(x) \in \Gamma_1 \; \theta(x) \in p(x)$ Teo di compattezza (logica)

estende ad una teoria completa $q(x)$ cioè un tipo e $\bigcup_i \Gamma_i \subset q(x)$ è come dire che $q(x) \in \bigcap_i C_i$

□

obs: il teo di omissione dei tipi nel ling. topologico diventa il teo di Baire.

Def: $p(x) \in S_n(T)$ è <u>isolato</u> se

$\exists \varphi(x)$ $p(x) \in [\varphi(x)]$ e $[\varphi(x)] = \{p(x)\}$

Ovvero $T, \varphi(x) \vdash p(x)$ cioè il tipo è principale.

Cioè $T, \varphi(x)$ è completa (diciamo che $\varphi(x)$ è <u>completa</u> (in T))

Quindi il teo di omissione dei tipi ci dice che se $p(x)$ è un tipo isolato $\Rightarrow$ si può omettere

obs: Se $p(x)$ è un tipo (parziale) di T p è <u>finitamente supportato</u> se $\exists \varphi(x)$ coerente $T, \varphi(x) \vdash p(x)$

$p(x)$ è principale se è finit. generato e $\varphi \in p$.

Però se p è completo è uguale.

Torniamo alle teorie ω-categoriche (sempre con $|L| \leq \aleph_0$)

Prop. T ω-categorica senza modelli finiti $\Rightarrow \forall n$ ogni $p \in S_n(T)$ è isolato

Se $p \in S_n(T)$ non isolato $\Rightarrow \exists M \models T$ che omette $p(x)$

Ma $\exists M' \models T$ che realizza $p(x)$

e per L.S.$\downarrow$ posso prenderli con $|M| = \aleph_0$ e $|M'| = \aleph_0$ (scelgo come sottoinsieme in LS$\downarrow$ uno che contiene le realizzaz. di $p(x)$)

Però $M \not\cong M'$ ⚡

Prop: Se ogni $p \in S_n(T)$ è isolato $\Rightarrow |S_n(T)| < \aleph_0$ □

Usando la topologia: $S_n(T)$ è compatto e $\{p\} \subset S_n(T)$ è aperto se p isolato

Sennò ogni $p(x) \in S_n(T)$ è isolato da $\varphi_p(x) \in p(x)$.

$T \models \bigvee_p \varphi_p(x)$ in $L \cup \{x\}$ quindi $T \models \varphi_{p_1}(x) \vee \dots \vee \varphi_{p_n}(x)$

$\Rightarrow S_n(T) = \{p_1, \dots, p_n\}$

Quindi abbiamo mostrato che T ω-categorica $\Rightarrow |S_n(T)| < \aleph_0$.

/04/10

Def: $M \models T$ è atomico se $\forall a_1, \dots, a_n \in M$ $tp_M(a_1, \dots, a_n) \in S_n(T)$ è isolato
T completa numerabile

———— o ————

$$\begin{tikzcd}
\forall n\ |S_n(T)| < \aleph_0 \arrow[d, Rightarrow, shift right, "(c)"'] & \text{tutti i modelli di } T \text{ sono atomici} \arrow[d, Rightarrow, "(d)"] \\
\forall n \text{ tutti i tipi di } S_n(T) \text{ sono isolati} \arrow[u, Rightarrow, shift right, "\circ"'] \arrow[ur, Rightarrow, "b."] & T \text{ è } \omega\text{-categorica} \arrow[l, Rightarrow, "\circ"]
\end{tikzcd}$$

° = vista la lez. precedente

$\forall n$ $|S_n(T)| \leq \aleph_0$

$\Downarrow$ (e)

$\forall n$ i tipi isolati di $S_n(T)$ sono densi $\overset{(a)}{\Longrightarrow}$ esiste un modello $M \models T$ atomico

$\underset{(b)}{\Longleftarrow}$

: M atomico numerabile $\Rightarrow M$ primo

$\Leftarrow$ (se T numerabile)

Per vedere questo studiamo i modelli atomici:

<u>N.B.</u>: T sarà sempre completa e numerabile.

M atomico $\underset{def}{\iff} \forall \vec{a} \in M^n \quad tp_M(a)$ è isolato

$\iff \forall \vec{a} \in M^n \quad \exists \varphi(\vec{x})$ completa $\quad M \models \varphi(\vec{a}) \quad = (M, \vec{a}) \models \varphi(\vec{x})$

(cioè $T, \varphi(\vec{x})$ è $L \cup \{\vec{x}\}$ teoria completa)

(*)

$\iff \forall n \quad M$ omette $\Phi_n(x_1, \dots, x_n) = \{\neg \varphi(x_1, \dots, x_n) \mid \varphi \text{ completa}\}$

$\boxed{(a)}$

i tipi isolati di $S_n(T)$ sono densi vuol dire che

$\forall$ formula $\varphi(x)$, $[\varphi(x)]$ contiene un tipo isolato, $p(x)$

$\iff \exists \gamma(x)$ completa $\quad T, \gamma(x) \vdash p(x)$, in particolare $T, \gamma(x) \vdash \varphi(x)$

$\Rightarrow$ l'insieme $\Phi_n(x_1, \dots, x_n)$ è omettibile. Ci basta mostrare che non è implicato da una singola formula: se per assurdo $T, \theta(\vec{x}) \vdash \Phi_n(\vec{x})$. Sia $\gamma(\vec{x})$ completa t.c.

$T, \gamma(\vec{x}) \vdash \theta(\vec{x}) \longrightarrow \Phi_n(\vec{x}) \longrightarrow \neg\gamma(\vec{x})$ ↯

th. omissione dei tipi

$\Rightarrow \exists M \models T$ numerabile che omette $\Phi_n(\vec{x}) \ \forall n \quad \underset{(*)}{\Rightarrow} \quad M$ atomico

$\boxed{(b)}$

$\exists M \models T$ atomico $\Rightarrow \exists M \models T$ atomico numerabile $\quad$ (L.S.↓)

Sia $\varphi(\vec{x})$ una formula coerente, ovvero $T, \varphi(\vec{x})$ coerente $(\iff T \vdash \exists x \varphi(x))$

$T \models \exists x \varphi(\vec{x}), \quad M \models \exists x \varphi(x) \quad$ Sia $\vec{a} \in M^n \quad M \models \varphi(\vec{a})$

$p(x) = \text{tipo}_M(\vec{a})$ è isolato perché M atomico $\quad \varphi(x) \in p(x) \Rightarrow p(x) \in [\varphi(x)]$

$\boxed{(c)}$

Ovvero che ogni spazio topologico cpto T_2 finito ha tutti i pti isolati.

$S_n(T) = \{p_1, \dots, p_n\}$

$\varphi_2 \in p_2 - p_1$

$\varphi_3 \in p_3 - p_1 \qquad \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_n$ isola p_1

$\vdots$

$\varphi_n \in p_n - p_1$

$\boxed{(d)}$

Ci servono dei lemmetti:

recap: $(M, a_1, \dots, a_n) \equiv (N, b_1, \dots, b_n)$

$\forall c \in M$ quand'è che posso dire che $\exists d \in N$ t.c. $(M, a_1, \dots, a_n, c) \equiv (N, b_1, \dots, b_n, d)$?

$tp_M(c/a_1, \dots, a_n) = \Sigma(x, a_1, \dots, a_n) \qquad \Sigma(x, b_1, \dots, b_n)$ è un tipo di N

$M \models \exists x \varphi(x, \vec{a})$

Avevamo visto che vale se N ω-saturo, ma basta anche M atomico:
(Da questo segue
Cor: Unicità dei modelli atomici o saturi numerabili.)

ex. Ogni tipo algebrico è isolato.

Lemma: Data T, $M \models T$, $a b$ tuple da M,
$tp(a) \in S_n(T)$ isolato e $tp(b/a) \in S_n(Th(M,a))$ isolato
$\iff tp(a,b) \in S_n(T)$ è isolato

($\Rightarrow$) $\psi(x)$ isoli il $tp(a)$ e $\varphi(a,y)$ isoli $tp(b/a)$
Dico che $\psi(x) \wedge \varphi(x,y)$ isola il tipo $tp(a,b)$, cioè data θ t.c. $M \models \theta(a,b)$
devo mostrare che $T, \psi(x), \varphi(x,y) \vdash \theta(x,y)$.
Sappiamo che $M \models \underbrace{\forall y\, \varphi(a,y) \to \theta(a,y)}_{\in tp(a)} \Rightarrow T, \psi(x) \vdash \forall y(\varphi(x,y) \to \theta(x,y))$
che è come dire $T, \psi(x), \varphi(x,y) \vdash \theta(x,y)$.

($\Leftarrow$) $\gamma(x,y)$ isola $tp(a,b)$; $\exists y\, \gamma(x,y)$ isola $tp(a)$: $T \vdash \forall xy\,(\gamma(x,y) \to \varphi(x))$
$T \vdash \forall x\,(\exists y\, \gamma(x,y) \to \varphi(x))$
$\gamma(a,y)$ isola $tp(b/a)$

Quindi nei modelli atomici sono isolati pure i tp con un # finito di parametri. □
Dato c, $tp(c/a_1,\dots,a_n)$ è isolato (M atomico), sia $\varphi(x,a_1,\dots,a_n)$ che isola quel tp,
in particolare $M \models \exists x\, \varphi(x,a_1,\dots,a_n)$, però $(M,a_1,\dots,a_n) \equiv (N,b_1,\dots,b_n)$ quindi
$N \models \exists x\, \varphi(x,b_1,\dots,b_n)$, sia d tale x. Se $M \models \theta(a_1,\dots,a_n,c) \Rightarrow$
$\theta(a_1,\dots,a_n,x) \in tp(c/\vec{a}) \Rightarrow M \models \forall x\, \varphi(x,\vec{a}) \to \theta(\vec{a},x)$
$\Rightarrow N \models \forall x\,(\varphi(x,\vec{a}) \to \theta(x,\vec{a})) \underset{\text{prendo } x=d}{\Rightarrow} N \models \theta(\vec{a},d)$.

Cor: $M \models T$ (completa numerabile) M atomico numerabile $\Rightarrow$ M primo □
$M = (a_n \mid n \in \mathbb{N})$ Dato $N \models T$
So che $M \equiv N$ Dato $a_0 \in M$ $\exists b_0 \in N$ $M, a_0 \equiv N, b_0$ et
$a_i \longmapsto b_i$ $M, a_0,\dots,a_n \equiv N, b_1,\dots,b_n$ $\forall n$
$M \xhookrightarrow{\preccurlyeq} N$

Cor: Unicità modelli atomici numerabili.
numero M, N con tipo d'ordine ω. $M \equiv N$, induttivamente $M, a_0,\dots,a_n \equiv N, b_0 \dots$

n pari $\quad a_{n+1}$ = min di M ancora non scelto

$\qquad\qquad b_{n+1}$ = dato dal lemma

n dispari $\quad b_{n+1}$ = min di N non ancora scelto

$\qquad\qquad a_{n+1}$ = dato dal lemma.

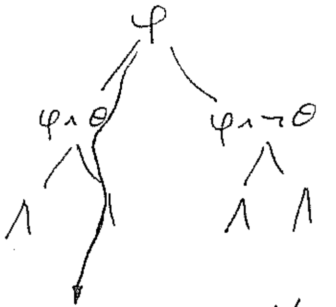
E alla fine $a_i \longmapsto b_i$ é ISOM.

¿ Se $|S_n(T)| > \aleph_0$ $\forall n$?

$\boxed{(e)}$

Se no' $\exists\, [\varphi(\vec{x})] \subset S_n(T)$ che non contiene tipi isolati,
cioé $\varphi(\vec{x})$ non é implicata da una formula completa, in particolare $\varphi(\vec{x})$ non é completa. $\Rightarrow \exists\, \theta(\vec{x})$ t.c. $T, \varphi(\vec{x}) \not\vdash \theta(\vec{x})$ e $T, \varphi(\vec{x}) \not\vdash \neg\theta(\vec{x})$

Quindi $\varphi \wedge \theta \underset{\not\leftarrow}{\longrightarrow} \varphi \qquad \varphi \wedge \neg\theta \underset{\not\leftarrow}{\longrightarrow} \varphi$ a loro volta $\varphi\wedge\theta$ e $\varphi\wedge\neg\theta$ non sono complete ... posso continuare a spezzarle



ciascun ramo determina un tipo. Ho $2^{\aleph_0}$ rami $\Rightarrow$ ho $2^{\aleph_0}$ tipi (parziali)

"Segue da questo" che se $|S_n(T)| > \aleph_0 \Rightarrow |S_n(T)| \geq 2^{\aleph_0}$, infatti:

Ex. $|[\varphi]| > \aleph_0 \Rightarrow \exists\, [\varphi_0], [\varphi_1] \subset [\varphi] \quad |[\varphi_0]| > \aleph_0$ e $|[\varphi_1]| > \aleph_0$ $\square$

06/05/10

Teoria di $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, \leq)$

Assiomi di RCOF (Real Closed Ordered Fields):

(a) assiomi di campo,
(b) $\leq$ è un ordine compatibile con $+, \cdot$, } campo ordinato
(c) $f(x) = x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $f(a) < 0 < f(b) \longrightarrow \exists c \in (a,b)$ $f(c) = 0$

es. $\mathbb{Q} \not\models$ RCOF, infatti $f(x) = x^2 - 2$ non soddisfa (c).

Vogliamo mostrare che RCOF ha E.Q.

Usiamo i seguenti fatti algebrici:

- $(K, +, \cdot, 0, 1)$ è ordinabile $\iff$ -1 non è somma di quadrati
- (Artin-Shreier) $(F, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ verifica (a) e (b) $\Rightarrow \exists R \models$ RCOF t.c. $F \leq R$ (a meno di isom)
  ogni $b \in R$ soddisfa $p(b) = 0$ con $p(x) \in F[x]$

Oss: Se $(K, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ è RCOF $\Rightarrow (K, +, \cdot, 0, 1)$ è ordinabile in un solo modo
(perché $x \geq 0 \longleftrightarrow \exists y\ (y = x^2)$)
se $a > 0 \Rightarrow \exists x\ \ x^2 - a = 0$ per (c).

es. $\mathbb{R}(t)$ è ordinabile in tante maniere, infatti
posso dire ad es. che $f(t) \geq 0 \longleftrightarrow \lim_{\substack{a \to \infty \\ a \in \mathbb{R}}} f(a) = +\infty$

Teo: RCOF ha E.Q.

Siccome vale:
se $\equiv_I$ ha il va' e vieni
allora $(M, a_i)_i \equiv_I (N, b_i)_i \Rightarrow (M, \vec{a}) \equiv (N, \vec{b})$
$(M, \vec{a}) \equiv_{QF} (N, \vec{b}) \Rightarrow (M, \vec{a}) \equiv (N, b)$
$\forall M, N \models T$
allora ho E.Q.

... M, N ω-saturi (o K-saturi).

Siano quindi $M, N \models$ RCOF ω-saturi
basta mostrare che $(M, \vec{a}) \equiv_{QF} (N, \vec{b})$
$\Rightarrow \equiv_{QF}$ ha il va e vieni. (N.B.: $\vec{a}$ e $\vec{b}$ FINITI)

$(M, \vec{a}) \equiv_{QF} (N, \vec{b}) \Longrightarrow \mathbb{Q}(\vec{a}) \cong \mathbb{Q}(\vec{b}) \Longrightarrow RC(\mathbb{Q}(\vec{a})) \cong RC(\mathbb{Q}(\vec{b})) = AC^N(\mathbb{Q}(b))$

Digressione

Scriviamo che
$M, a_1, \ldots, a_n \equiv_{QF} N, b_1, \ldots, b_n$
$\updownarrow$
$a_i \longmapsto b_i$ è isom. parziale

Se I è famiglia di ISOM. PARZIALI da M a N
$(M, a_i)_{i<\alpha} \equiv_I (N, b_i)_{i<\alpha}$
$\Updownarrow$ def
$\exists f \in I\ \ f(a_i) = b_i$

I ha il va' e vieni se $(M, a_i)_{i<\alpha} \equiv_I (N, b_i)_{i<\alpha}$
$\forall a \in M \exists b \in N\ (M, a_i, a)_{i<\alpha} \equiv_I (N, b_i, b)_{i<\alpha}$
$\forall b \in N \exists a \in M$ " "

più il caso al limite:
$(M, a_i)_{i<\lambda} \equiv_I (N, b_i)_{i<\lambda} \overset{def}{\iff} \forall \alpha < \lambda\ (M, a_i)_{i<\alpha} \equiv_I (N, b_i)_{i<\alpha}$

Sia $c \in M$ ¿ $\exists d \in N$ t.c. $(M, \vec{a}, c) \equiv_{QF} (N, \vec{b}, d)$?

CASO 1: $c \in RC(\mathbb{Q}(\vec{a}))$ prendo $d = \bar{f}(c)$

CASO 2: $c \notin RC(\mathbb{Q}(\vec{a})) =: F$ cioè c trascendente

$F(c) \cong F(x) \underset{\bar{f}}{\cong} \underbrace{RC(\mathbb{Q}(\vec{b}))}_{\overset{\shortparallel}{F'}}(x)$ voglio un $d \in N$ t.c. $\forall e \in F$ $c < \vec{e} \leftrightarrow d < \bar{f}(\vec{e})$

$c > \vec{e} \leftrightarrow d > \bar{f}(\vec{e})$

ho una q.tà numerabile di condizioni, se lavoro con modelli ω_1-saturi non ho problemi. Però ogni el. di F è def. usando solo $\vec{a}$... quindi ci basta anche ω-saturo

- d lo trovo per ω_1-saturazione di N:
  - è trascendente quindi $F(c) \cong F'(d)$ come campi
  - induce anche un iso d'ordine

13/05/10

Manca la lezione dell'07/05/10 !

[Poizat pag. 24 →]

· T model completa ($\underset{def}{\Longleftrightarrow}$ $M \subset N \Rightarrow M \prec N$; M, N modelli di T)

Teo. T model completa $\Longleftrightarrow$ ogni formula $\varphi(x) \in L$ equivale ad una formula $\psi(x)$ esistenz.

$$T \vdash \forall x (\varphi(x) \longleftrightarrow \psi(x))$$

($\Longleftarrow$) b.

($\Longrightarrow$) Richiede vari lemmi:

Abbiamo visto la volta scorsa che

T teoria $\quad T_\forall := \{\varphi \ \forall\text{-formula} \mid T \vdash \varphi\}$

es. T=campi $\Rightarrow T_\forall$ = domini di integrità

e i modelli di $T_\forall$ sono sottostrutture di $\mathrm{Mod}(T)$

($\supseteq$) ✓

($\subseteq$) Sia $M \models T_\forall$ voglio $N \supset M$ $N \models T$.

Considero $\underset{\text{senza } \forall\exists}{D(M)} \cup T$. Ho che $\mathrm{Mod}(D(M) \cup T)$

$$\| $$

$$\{N \mid \underset{\text{in realtà è una inclus.}}{N \supset M}, N \models T\}$$

Quindi ci basta mostrarne la coerenza.

Per assurdo altrimenti avrei che $T \cup \theta(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n) \vdash \bot$

dove $M \models \theta(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$ e θ senza $\forall\exists$.

Cioè $T \vdash \neg\theta(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n) \underset{\text{le } \underline{a}_i \text{ non sono menzionate negli assiomi}}{\Longrightarrow} T \vdash \forall \vec{x} \neg\theta(\vec{x})$

$\Rightarrow \forall \vec{x} \neg\theta(\vec{x}) \in T_\forall$ quindi $M \models \forall \vec{x} \neg\theta(\vec{x})$

perché $M \models \theta(\vec{a})$ ↯

Def: $M \models T$ si dice $\underline{\exists\text{-chiuso}}$ se per ogni $N \supset M$ $N \models T$

$\underline{a \in M}$ $\quad N \models \exists x\, \varphi(x, a)$ $\quad \varphi$ senza $\forall\exists$ $\quad \Rightarrow M \models \exists \vec{x}\, \varphi(x, \vec{a})$

Os: è una generalizz. di "essere alg. chiuso".

N.B.: Questa nozione non è assiomatizzabile (in generale), nel caso dei campi era fortunato -

La volta scorsa abbiamo visto che se $T = T_\forall$ (es. gruppi, anelli) ogni modello $M \models T$ è incluso in $N \models T$ $\exists$-chiuso

Teo: T model completa $\Rightarrow$ $T = T_{\forall\exists}$

b. dando per buono che $T \equiv T_{\forall\exists} \Leftrightarrow$ chiusa per $\bigcup_i M_i$ $\quad M_i \subset M_{i+1}$

non lo dimostriamo

Lemma: Sia $T = T_{\forall\exists}$ e $M \models T_\forall$ $\exists$-chiuso $\Rightarrow M \models T$

obs. $Mod(T_\forall) \supset Mod(T)$

Dato M come nelle ipotesi, sia $\forall x \exists y\, \varphi(x,y) \in T$ una $\forall\exists$-formula,

se $M \not\models \forall x \exists y\, \varphi(x,y) \Rightarrow$ c'è $a \in M$ t.c. $M \models \neg \exists y\, \varphi(a,y)$

però $M \models T_\forall \Rightarrow \exists N \supset M$ $\quad N \models T \quad N \models \forall x \exists y\, \varphi(x,y)$

$N \models \exists y\, \varphi(a,y)$

$\Rightarrow M$ non $\exists$-chiuso -

obs: T model completa $\Rightarrow \forall M \models T$ sono $\exists$-chiusi $\square$

Def: Sia M una L-struttura, $a \in M$

$etp_M(a) := tp_M(a) \cap \exists$-formule

Lemma: Sia $T = T_\forall$ e ~~[illegible]~~ $M_1, M_2 \models T$ $\quad a \in M_1 \quad b \in M_2$

e $etp_{M_1}(a) \subseteq etp_{M_2}(b)$

$\Rightarrow$ esiste $N \models T$ t.c.

$$\begin{tikzcd} & N & \\ M_1 \arrow[ur, hook, "f"] & & M_2 \arrow[ul, hook', "g"'] \end{tikzcd}$$

f, g immersioni isomorfe

e $f(a) = g(b)$

Ci basta mostrare che $D(M_1) \cup D(M_2) \cup T$ e facciamo in modo che

$L(D(M_1)) \cap L(D(M_2)) = L \cup \{c\}$ dove $c^{M_1} = a \quad c^{M_2} = b$

Se $N \models \underbrace{D(M_1) \cup D(M_2) \cup T}_{\tilde{T}}$ prendo come f, g le $f(\underline{m}_1) = m_1^N$

$g(\underline{m}_2) = m_2^N$

e $f(a) = g(b)$

Mostriamo che $\tilde{T}$ coerente, usando il Teo di Compattezza:

¿ $\varphi(c, \underline{m}_1) \cup \psi(c, \underline{m}_2) \cup T$ é coerente ? (*)

$\varphi(c, \underline{m}_1) \in D(M_1)$, $\psi(c, \underline{m}_2) \in D(M_2)$

$\Downarrow$

$\exists \vec{y}\, \varphi(x, \vec{y}) \in etp_{M_1}(a) \subset etp_{M_2}(b)$ (per Ip) $\Rightarrow M_2 \models \exists y\, \varphi(b, y)$ quindi trovo $m' \in M_2$ t.c. $M_2 \models \varphi(b, m') \wedge \psi(b, \underline{m}_2) \cup T$

Quindi un modello di (*) é M_2.

Quindi per compattezza ho che $\tilde{T}$ coerente

$\square$

/05/10

Data una teoria T si puó considerare la classe $K(T)$ = modelli $\exists$-chiusi di T] notaz. ad hoc per questa lezione

Es. T = campi $K(T)$ = Modelli (ACF)

Es. T model complete $\Rightarrow \forall M \models T$ M $\exists$-chiuso

Dal Lemma cruciale segue che:

Corollario: Sia $T = T_\forall$ e $M \in K(T)$ $a \in M$

$\Rightarrow etp_M(a)$ é massimale tra gli $\exists$-tipi realizzati in modelli di T

per assurdo ho $b \in M_2 \models T$ t.c. $etp_M(a) \subsetneq etp_{M_2}(b)$ per il Lemma ho che $\exists N \models T$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] & N & M_2 \arrow[l, "g"'] \end{tikzcd}$$

e $etp_M(a) \subseteq etp_N(f(a)) \supseteq etp_{M_2}(b)$

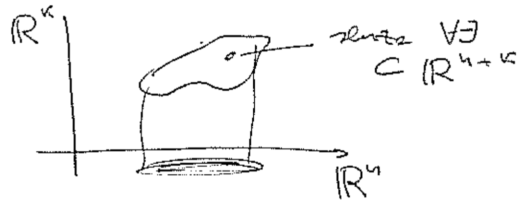
però non può essere stretta perché M é $\exists$-chiuso

$\Rightarrow etp_M(a) \supseteq etp_{M_2}(b)$ ↯

$\square$

Es. $T = Th(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, e^x)$ é model complete (Wilkey (?))

$\{x \mid \exists y\, \varphi(x,y)\} = proj\, \{(x,y) \mid \varphi(x,y)\}$ quindi che ogni formula equivale ad geometrico



<u>Lemma</u>: $T = T_\forall$ e sia $\varphi(x)$ una $\exists$-forma

$\Rightarrow \exists\ \theta_i(x)\ \forall$-formule t.c. $K(T) \models \varphi(x) \longleftrightarrow \bigwedge_{i\in I} \theta_i(x)$

Sia $\mathcal{P}(x) = \{ \mathrm{etp}_M(a) \mid M \in K(T),\ a \in M,\ M \models \neg\varphi(a) \}$ però per il Cor gli $\exists$-tipi in $\mathcal{P}(x)$ sono massimali.

Se $p(x) \in \mathcal{P}(x) \Rightarrow T \cup p(x) \cup \varphi(x) \vdash \bot \quad \Rightarrow \overset{\forall p\in\mathcal{P}}{\exists}\ \psi_p(x) \in p(x)$ t.c. $T \cup \psi_p(x) \cup \varphi(x) \vdash \bot$ $(*)$

Dico che $\quad K(T) \models \varphi(x) \longleftrightarrow \bigwedge_{p\in\mathcal{P}(x)} \neg\psi_p(x)$:

Sia $M \in K(T)$ $a \in M$,

$M \models \varphi(a)$ però vale $(*)$ quindi $M \not\models \psi_p(a)$ cioè $\forall p \in \mathcal{P}$ $M \models \neg\psi_p(a)$

Viceversa se $M \models \bigwedge_{p\in\mathcal{P}} \neg\psi_p(a)$, se per assurdo $M \models \neg\varphi(a) \Rightarrow \underset{\overset{\shortparallel}{p(a)}}{\mathrm{etp}_M(a)} \in \mathcal{P}(x)$

$\Rightarrow M \models p(a)$ però $\psi_p(x) \in p(x) \Rightarrow M \models \psi_p(a)$ $\lightning$

□

Abbiamo:

T model completa

$\Downarrow$

$\mathrm{Mod}(T) = K(T_\forall)$

$(\subseteq)$ Sia $M \models T \qquad \underset{T}{M} \subset \underset{T_\forall}{N} \subset \underset{T}{N'} \ \ldots$

$(\supseteq)$ Sia $M \in K(T_\forall)$

$M \subset N \models T \equiv T_{\forall\exists}$, l'abbiamo visto la volta scorsa

che se $T = T_{\forall\exists}$ e $M \in K(T_\forall) \Rightarrow M \models T$

Passo finale: T model completa $\Rightarrow$ ogni $\varphi(x)$ esistenziale equivale (in T) ad una $\psi(x)$ universale. □

(da questo segue la tesi. $\forall\exists\forall\varphi$)

$\underbrace{\qquad}_{\exists}$ $\quad \exists$ $\quad \underbrace{\forall\,\text{``}\,\forall}$ $\quad \forall\,\text{``}\,\exists$

$\mathrm{Mod}(T) = K(T_\forall)$,

$\underset{\overset{\shortparallel}{\mathrm{Mod}(T)}}{K(T_\forall)} \models \varphi(x) \longleftrightarrow \bigwedge_{i\in I} \theta_i(x) \iff T \models \varphi(x) \longleftrightarrow \bigwedge_{i\in I}\theta_i(x)$ da cui per Compattezza

$\exists J \subset I$ finito $T \vdash \varphi(x) \longleftrightarrow \bigwedge_{i\in J} \theta_i(x)$

(Teo dell'inizio delle volte... □□

es. Un modo per dimostrare che $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, e^x)$ è model completa è estendere il linguaggio... ma non è stato dimostrato così.

Teo di Morley: Se $\kappa > \omega$ e T è κ-categorica $\Rightarrow \forall \lambda > \aleph_0$ T è λ-categorica.
(cenni?)

es. ACF_0 non è $\aleph_0$-categorica, es. $\overline{\mathbb{Q}}$, $\overline{\mathbb{Q}(x)}$, $\overline{\mathbb{Q}(x,y)}$
però è κ-categorica $\forall \kappa > \aleph_0$ e l'unico modello è $\overline{\mathbb{Q}(x_i)}_{i<\kappa}$

- Gli indiscernibili -

Sia I un ordine lineare (tipicamente $(\mathbb{N}, <)$) e $M \models T$, $(b_i \mid i \in I)$ $b_i \in M$ dico che sono indiscernibili rispetto a I se

$$\forall n \quad \forall i_1 < i_2 < \ldots < i_n \quad tp_M(b_{i_1}, \ldots, b_{i_n}) \text{ costante}$$

es. $M \models PA$ M non standard $M \succ (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ (b_i) indiscernibili devono essere a distanza ∞.

Come trovo gli indiscernibili?

Teo: (Ramsey) Sia $\mathbb{N}^{(\kappa)} = \{A \subset \mathbb{N} \mid |A| = \kappa\}$ e $c: \mathbb{N}^{(\kappa)} \longrightarrow n$ $n < \omega$
$\Rightarrow \exists J$ infinito t.c. $c: J^{(\kappa)} \longrightarrow$ costante

Teo: Data T e $(I, <)$ esiste $M \models T$ e $(b_i \mid i \in I) \subset M$ indiscernibile.

Il fatto di essere indiscernibile è assiomatizzabile:
T^* nel ling. $L^* = L \cup \{c_i \mid i \in I\}$

$$T^* = T \cup \{\varphi(c_{i_1}, \ldots, c_{i_k}) \leftrightarrow \varphi(c_1, \ldots, c_k) \mid \underset{i_1 < \ldots < i_k \quad n \in \mathbb{N}}{\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in L\text{-form}}\}$$

Mostro che T^* coerente, e lo faccio per compattezza, mostro che

$$T \cup \{\varphi_i(c_{i_1}, \ldots, c_{i_n}) \leftrightarrow \varphi_i(c_1, \ldots, c_n) \mid i = 1, \ldots, \kappa\} \text{ coerente } (*)$$

i caso $I = \mathbb{N}$! $M \models T$ $(b_i \mid i \in \mathbb{N})$ $b_i \in M$ distinti

colora $c: \mathbb{N}^{(n)} \longrightarrow 2^\kappa =$ funz. da $\kappa \to 2$

$$c(i_1, \ldots, i_n) =: \kappa \longrightarrow 2$$
$$(i) = \begin{cases} 0 & \neg \varphi_i(b_{i_1}, \ldots, b_{i_n}) \\ 1 & \varphi_i(b_{i_1}, \ldots, b_{i_n}) \end{cases}$$

Ramsey
$\Rightarrow$ Quindi ho che $(*)$ ha un modello.

li serve

Corollario: Il teo prec. vale anche per $(I,<)$ e non solo per $(\mathbb{N},<)$.

Come prima perché in $(*)$ menziono solo un numero finito di costanti b_i.
Oppure M li trovo $N \models T$ $(c_i \mid i \in \mathbb{N})$ indisc. col teo prec. $\square$

Corollario: Sia $M \models T$ $(a_i \mid i \in \mathbb{N}) \subset M$ t.c. fissato $n \in \mathbb{N}$ $\forall i_1 < \ldots < i_n$ $M \models \Sigma(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n})$
e $\Sigma(x_1, \ldots, x_n) \cup T$ coerente

$\Rightarrow \exists N$ e $(b_i \mid i \in \mathbb{N}) \subset N$ indiscernibili t.c. $tp(b_1, \ldots, b_n) = \Sigma$

Aggiungo Σ agli assiomi T^* e poi come prima $\square$

20/05/10

es. ACF_0 $\overline{\mathbb{Q}(x_i)_{i<\kappa}}$ se $\kappa > \aleph_0$ questo è l'unico modello di card κ.

Def: T teoria, λ un cardinale, diciamo che T è *λ-stabile* se
$\forall M \models T$ $\forall A \subset dom(M)$ $|A| \leq \lambda$ $Th(M,a)_{a \in A}$ ha $\leq \lambda$ 1-tipi.

es. Dense linear Order non è ω-stabile ma $\aleph_0$-categorica.
$M = \mathbb{R}$ $A = \mathbb{Q}$ $L = \{<\}$ e con parametri da $\mathbb{Q}$ ogni reale ha un tipo diverso.

Prop.: T teoria (da ora in poi assumeremo sempre $|T| \leq \aleph_0$ completa) e $\kappa > \aleph_0$
$\Rightarrow \exists M \models T$ $|M| = \kappa$ t.c. $\forall A \subset dom(M)$ $|A| \leq \aleph_0$ M realizza $\leq \aleph_0$ 1-tipi su A

Posso assumere che T è skolemizzata, ovvero se è di Skolem, cioè $T \models \exists y \varphi(y, \vec{x}) \to \varphi(f(\vec{x}), \vec{x})$
$\forall \varphi\ \exists f \in L$

Però se T skolemizzata $\Rightarrow T$ model completa
$(M \subset N \to M \prec N)$
Tarski-Vaught

$T_0 = T$
$T_{n+1} = T_n'$ ← contiene fun. di Skolem per T_n, ... aggiungo simboli al linguaggio.

es. Ogni teoria si può skolemizzare

Sia $N \models T$ con indiscernibili $(b_i \mid i < \kappa)$
$\cup$
$M = dcl(b_i \mid i < \kappa)$ "chiusura definibile"
$c \in M \Rightarrow c = f(b_{i_1}, \ldots, b_{i_k})$ per qualche $f \in L$

$\Rightarrow M \prec N$

- $|M| = \kappa$, perché le fun. di Skolem sono numerabili
- M ha pochi tipi: dato $A \subset dom(M)$ $|A| \leq \aleph_0$,

$a \in A \Rightarrow a = f(\vec{b}) \Rightarrow A \subset dcl(b_i \mid i \in J)$ con $|J| \leq \aleph_0$
Sia $c \in M$, $c = f(b_{i_1}, \ldots, b_{i_\ell})$ $F := \{i_1, \ldots, i_\ell\} \subset \kappa$
Osservo ora che $tp(c/A)$ dipende solo dal tipo di isomorfismo di $(J.F, <)$

Sia $\varphi(\cdot, b_{j_1}, \dots, b_{j_n}) \in tp(c/A)$, ovvero $M \models \varphi(f(b_{i_1}, \dots, b_{i_\ell}), b_{j_1}, \dots, b_{j_n})$
e per l'indiscernibilità questo dipende solo dall'ordine relativo di F in J.

Siccome J numerabile e b.o.

$| | \dots \quad | | \dots \quad | | \dots$

$F = \{i_1, \dots, i_\ell\}$ ho $\underbrace{\aleph_0 \times \dots \times \aleph_0}_{\ell}$ possibili isomorfismi $\square$

Dimostriamo che

$$\begin{array}{lll} T \ \kappa\text{-categorico} \\ \kappa > \aleph_0 \end{array} \overset{①}{\Longrightarrow} T \ \omega\text{-stabile}$$

(sempre $|T| \leq \aleph_0$ completa)

$$\Downarrow ②$$

$$T \quad RM < \infty \ (\text{tot. trascendente})$$

$$\Downarrow ③$$

$$T \quad \lambda\text{-stabile} \quad \forall \lambda \geq \omega$$

$\boxed{①}$

per assurdo T non ω-stabile, cioè $\exists M \models T \ \exists A \subset dom(M) \ |A| \leq \aleph_0$ t.c.
M ha $> \aleph_0$ 1-tipi su A.
Realizzo $\aleph_1$ di questi tipi in $N \succ M$ che posso assumere di cardinalità $\underline{\kappa}$ (per L.-S.):
$T \cup \{p_i(x_i)\}_{i < \aleph_1}$ è coerente etc.
D'altra parte $\exists M' \models T \ |M'| = \kappa$ con solo $\aleph_0$ 1-tipi realizzati su A } perché T κ-categorica. $\square$

$\boxed{②}$

$RM < \infty$ vuol dire che $\forall M \models T \ \forall \varphi(\vec{x}) \in L_M \ RM(\varphi(\vec{x})) < \infty$

Data T esiste un $\underline{\text{insieme}}$ $\Gamma \subset OR$ (con parametri da M) t.c. $\forall M \models T \ \forall \varphi(\vec{x}) \in L_M \ RM(\varphi(\vec{x})) \in \Gamma$
questo perché $RM(\varphi)$ dipende solo dal tipo di φ.
Quindi $\exists \alpha_T \in OR \ RM(\varphi) \geq \alpha_T \longleftrightarrow RM(\varphi) = \infty$
Quindi se per assurdo $\exists \varphi \ RM(\varphi) = \infty \Rightarrow \exists \varphi_0, \varphi_1 \subset \varphi$ disgiunte con $RM(\varphi_0) = RM(\varphi_1) = \infty$
l'insieme da loro def.

(già visto, ottengo un albero binario di formule $\varphi_s(x)$ $s \in 2^{<\omega}$ con $RM_M(\varphi(x)) = \infty$

$\Rightarrow$ ho $2^{\aleph_0}$ tipi su un insieme numerabile di parametri $\square$

21/05/10

③

[Pillay 5.19] T λ-stabile vuol dire $\forall M \models T$ $\forall A \subseteq dom(M)$ $|A| \le \lambda$ $|S_1(Th(M,a)_{a\in A})| \le \lambda$

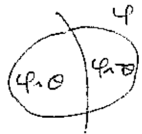
Sia $M \models T$, $A \subseteq dom(M)$ $|A| \le \lambda$ e sia $p(x) \in S_1(Th(M,a)_{a\in A})$ 1-tipi

Sia $\varphi_p(x) \in p(x)$ di (RM, dM) minimale. Abbiamo che $\varphi_p(x)$ determina $p(x)$
grado di Morley

(nel senso che $\varphi_p = \varphi_q \to p = q$) nel senso che $\theta(x) \in p(x) \Leftrightarrow \theta(x) \wedge \varphi_p(x)$ ha lo stesso (RM, dM) di $\varphi_p(x)$
L_A

($\Rightarrow$) ✓

($\Leftarrow$) per assurdo se $\theta(x) \notin p(x)$
$\Rightarrow \neg\theta(x) \in p(x)$
$\Rightarrow \neg\theta(x) \wedge \varphi_p(x)$ ha lo stesso (RM, dM) di $\varphi_p(x)$ ↯



non possono tutte e 3 avere stesso (RM, dM)

$\Rightarrow$ $p \xrightarrow{f} \varphi_p$ è iniettiva

$\Rightarrow$ ci sono pochi tipi

□

Teo: T ω-stabile, λ cardinale regolare ($cof\, \lambda = \lambda$) (es. $\lambda = \kappa^+$)

$\Rightarrow T$ ha un modello λ-saturo di un arbitraria cardinalità $\ge \lambda$

Sia $M_0 \models T$ $|M_0| = \kappa$ con $\kappa \ge \lambda$. Sia $(M_i \mid i < \lambda)$ t.c. $M_i \prec M_j$ $\forall i < j$

$M_{\alpha+1}$ realizza tutti 1-tipi su M_α.
$\vee$
M_α

e $M_\gamma = \bigcup_{i<\gamma} M_i$ se γ limite

$|M_{\alpha+1}| = \kappa$ perché T ω-stabile $\Rightarrow T$ κ-stabile e ho κ realizzaz. dei κ tipi e L.S.↓

Sia $M_\lambda := \bigcup_{i<\lambda} M_i$. $|M_\lambda| \le \sum_{i<\lambda} |M_i| \le \lambda \cdot \kappa = \kappa$

Ed è λ-saturo perché se $A \subseteq dom(M_\lambda)$ $|A| < \lambda$ $\Rightarrow \exists \alpha < \lambda$ $A \subseteq dom(M_\alpha)$ (λ card regolare)

Sia $p(x)$ tipo di M_λ su A, lo estendo ad un tipo completo di $Th(M_\lambda, a)_{a\in M_\alpha}$ e siccome $M_\alpha \prec M_\lambda$ $\Rightarrow Th(M_\lambda, a)_{a\in M_\alpha} = Th(M_\alpha, a)_{a \in M_\alpha}$

$\Rightarrow$ è realizzato in $M_{\alpha+1}$ ✓

□

Corollario: $\kappa > \aleph_0$ T κ-categorica $\Rightarrow$ l'unico modello di card κ è saturo

κ regolare: ✓

Altrimenti $\kappa = \sup_i \lambda_i$ λ_i regolari

$\Rightarrow \exists M :$ $\aleph_1$ saturo di card κ $\Rightarrow$ M κ-saturo

l'unico $\overset{\shortparallel}{M}$

<u>Def</u>: Un modello M è <u>costruibile</u> su $A \subset dom(M)$ se posso scrivere

$$M = A \cup \{b_\alpha \mid \alpha < \gamma\} \text{ t.c. } tp(b_\alpha \mid A \cup \{b_i : i < \alpha\}) \text{ è isolato}$$

<u>Prop</u>: M costruibile su $A \Rightarrow M$ atomico su A ($\Rightarrow M$ primo su A)

<u>Lemma</u>: $A \subseteq B \subseteq C \subseteq dom(M)$

C atomico su B, B atomico su $A \Rightarrow C$ atomico su A

Sia $\vec{c} \in C$ e sia $\varphi(\vec{x}, \vec{b}) \in L_B$ che isola $tp_M(\vec{c} \mid B)$

e $\psi(y_1, \dots, y_n) \in L_B$ che isola $tp(b_1, \dots, b_n \mid A)$

$\Rightarrow \theta(\vec{x}) = \exists y_1, \dots, y_n \, [\psi(y_1, \dots, y_n) \wedge \varphi(\vec{x}, b_1, \dots, b_n)]$ isola $tp(\vec{c} \mid A)$.

$\square$

$\boxed{\text{Prop}}$

Sia $M = A \cup \{b_\alpha \mid \alpha < \gamma\}$ la costruzione di M.

Sia $A_\alpha = A \cup \{b_i \mid i < \alpha\}$, mostro per ind su α che A_α è atomico su A:

- α limite $A_\alpha = \bigcup_{i<\alpha} A_i$ ok.
- $\alpha = \beta + 1$: $A_\alpha = A_\beta \cup \{b_\beta\}$; basta mostrare che $A_{\beta+1}$ isolato su A_β

Sia $(\beta_\alpha, \underset{\overset{\shortparallel}{A_\beta}}{c}) \in A_\alpha$ $tp(\beta_\alpha, c \mid A_\beta)$ è isolato da "$y = c \wedge \varphi$"

φ che isola b_β

$\square$

<u>Teo</u>: T ω-stabile, $M \models T$ $A \subset dom(M)$

$\Rightarrow \exists \underset{\overset{\cup}{A}}{N} \prec M$ costruibile su A

Se $A \prec M$ fine. Se no $\exists \varphi(x) \in L_A$ $M \models \exists x \varphi(x) \wedge M \models \neg\varphi(a)$ $\forall a \in A$

Prendo φ come sopra (RM, dM) minimale e dico che $\varphi(x)$ isola un

tipo completo $/A$: se no $\varphi(x) \not\to \theta(x)$, $\varphi(x) \not\to \neg\theta(x)$ cioè

$\varphi(x) \wedge \theta(x)$ e $\varphi(x) \wedge \neg\theta(x)$ sono coerenti con $Th(M, A)$

una delle due ha (RM, dM) minore di $\varphi(x)$ ↯.

Sia $b_0 \in M$ che verifica $\varphi(x)$. $tp(b_0/A)$ isolato.

Ripeto con $A \cup \{b_0\}$ invece di A. Prima o poi mi fermo perché M insieme ed ho

$A' \prec M$.

$\square$

p tipo, $(RM, dM)(p) =_{\text{def}} \min_{\varphi \in p} (RM, dM)\varphi$

<u>Teo</u>: Sia T ω-stabile $M \models T$ $A \subseteq dom(M)$ $\phi(x) \in L_A$

$(b_i \mid i<\omega) \subset M$ t.c. (i) $tp(b_i \mid A \cup \{b_j \mid j<i\}) = p_i(x)$

$(RM, dM)(p_i) = \text{costante} = (\alpha, d) = (RM, dM)(\phi(x))$

(ii) $M \models \phi(b_i)$ $\forall i$

$\Longrightarrow (b_i \mid i<\omega)$ è indiscernibile su A

Supponiamo $i_0 < \dots < i_n$, voglio $(M, b_{i_0}, \dots, b_{i_n}) \equiv (M, b_0, \dots, b_n)$.
Vediamolo per Ind. su n:

Se per assurdo $(M, b_{i_0}, \dots, b_{i_{n+1}}) \not\equiv (M, b_0, \dots, b_{n+1})$ Sia $M \models \varphi(b_{i_0}, \dots, b_{i_{n+1}})$

e $M \models \neg\varphi(b_0, \dots, b_{n+1})$

Però $\begin{cases} b_{i_{n+1}} \models \phi(x) \wedge \varphi(b_{i_0}, \dots, b_{i_n}, x) \in p_{i_{n+1}}(x) \Rightarrow (RM, dM) \geq (\alpha, d) \\ b_{n+1} \models \phi(x) \wedge \neg\varphi(b_0, \dots, b_n, x) \in p_{n+1}(x) \Rightarrow (RM, dM) \geq (\alpha, d) \end{cases}$

Però RM dipende solo dal tipo dei parametri e per Ip Ind

$tp(b_{i_0}, \dots, b_{i_n}) = tp(b_0, \dots, b_n)$

$\Longrightarrow (RM, dM)(\phi(x) \wedge \varphi(b_0, \dots, b_n, x)) \geq (\alpha, d)$

$(RM, dM)(\phi(x) \wedge \neg\varphi(b_0, \dots, b_n, x)) \geq (\alpha, d)$ $\lightning$

<u>Lemma</u>: [5.30] T ω-stabile, $M \models T$, $A \subseteq dom(M)$ $|A| < |M| = \kappa > \aleph_0$ $\square$

$\Longrightarrow M$ contiene $(b_i \mid i<\omega)$ indiscernibile su A

Scelgo $\phi(x)$ con $> |A|$ realizzazioni in M di (RM, dM) minimale (α, d)

Posso assumere che $\phi(x) \in L_A$ (nel caso ingrandendo A)

Basta trovare, per il teo prec., $(b_i \mid i<\omega)$ t.c.

(i) $M \models \phi(b_i)$

(ii) $p_i(x) := tp(b_i \mid A \cup \{b_j \mid j<i\})$ $(RM, dM)(p_i(x)) = (\alpha, d)$ $\forall i$

Supponiamo, per assurdo, che $\forall c \in M$ $M \models \phi(c)$ non verifichi (ii), ovvero

$tp(c/A)$ con rango $\neq (\alpha, d)$ quindi $< (\alpha, d)$.

Sia $\psi_c(x) \in tp(c/A)$ di rango (-grado) $< (\alpha, d)$.

$c \longmapsto \psi_c(x) \in L_A \Rightarrow$ tanti c ($|M|$) poche ψ_c ($|A|$)

$\{x \mid \phi(x)\}$ $\Rightarrow$ ho tanti c $|M|$ di loro con la stessa ψ. $\Rightarrow$ per la minimalità di ϕ

Quindi ho trovato $b_0 \in M$; per trovare gli altri itero con $A \setminus \{b_0\}$ al posto di A

27/05/10

Teo: T κ-categorica con $\kappa > \aleph_0 \Rightarrow \forall \lambda > \aleph_0$ T λ-categorica. ($|T| \leq \aleph_0$)

Basta mostrare che tutti i modelli di card. λ sono saturi.

Per assurdo sia $M \models T$ non saturo di card λ, proveremo che esiste M' non saturo di card κ $\Rightarrow$ ⚡.

Sia $p(x) \in S_n(Th(M, a)_{a \in A})$ con $|A| < |M| = \lambda$.

Abbiamo visto (la scorsa lezione) che T κ-categorica $\Rightarrow T$ ω-stabile

Quindi M contiene una successione $I = (a_i \mid i < \omega)$ indiscernibile su A.

Osservo che in $Th(M, a)_{a \in A}$, $p(x)$ non è implicato da alcuna $\varphi(x) \in L_M$ coerente

e ~~...~~ a maggior ragione da nessuna $\varphi(x) \in L_{A \cup I}$.

Claim: $\exists A' \subset A$ numerabile t.c. $p(x) \restriction_{A'}$ (cioè le formule in $p(x)$ con parametri da A') non è implicato (in M) da alcuna $\varphi(x) \in L_{A' \cup I}$

¿Come trovo A'? Prendo $A' = \bigcup_{n \in \omega} A_n$ dove $A_0 \subset A$ numerabile

e per ogni $\phi(x) \in L_{A_0 \cup I}$ e so che $\phi(x) \not\to p(x)$ in M

quindi $\exists \psi_\phi(x) \in p(x)$ $\phi(x) \not\to \psi_\phi(x)$

$\Rightarrow \exists A_1$ t.c. $A_0 \subset A_1 \subset A$ e ogni $\psi_\phi(x) \in L_{A_1}$

le $\varphi(x)$ ~~non~~ sono una q.tà numerabile!

E iterando trovo $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \ldots$

Questo A' dimostra il Claim, infatti: per assurdo (facile ...)

Per Compattezza possiamo dimostrare che $\exists (N, a)_{a \in A'} \models Th(M, a)_{a \in A'}$ t.c. $|N| = \kappa$ (per L. S.) ● contenente una succ. indiscernibile $I' = (b_i \mid i < \omega)$ su A'

∘ $\forall n$ $tp_N(b_0, \ldots, b_n / A') = tp_M(a_0, \ldots, a_n / A')$

● e ∘ li ottengo in maniera ~ a quanto già visto, aggiungendo degli assiomi che esprimono ● + ∘.

Da un teo. prec. [5.26 Pillay] esiste $N' \prec N$ contente $A' \cup I'$ costruibile su $A' \cup I'$

$N' = (c_i \mid i < \kappa)$ $tp(c_i \mid (c_j \mid j < i) \cup A' \cup I')$ isolato.

Questo N' è il modello cercato, cioè non è saturo:

anzi più in particolare $p'(x) := p(x)\restriction_{A'}$ non è realizzato.

Sia, per assurdo, $c \in N'$ $c \models p'(x)$.

$tp(c \mid A' \cup I')$ è isolato [5.24] (visto, per la trasm. di essere isolato)

da una certa $\phi(x, b_{i_0}, \dots, b_{i_n})$ dove $\phi(x, y_0, \dots, y_n) \in L_{A'}$
$i_0 < i_1 < \dots < i_n$

cioè, per def., data $\psi(x) \in p'(x)$

$$N' \models \forall x \left(\phi(x, b_{i_0}, \dots, b_{i_n}) \to \psi(x) \right)$$

$$\Longrightarrow \qquad M \models \forall x \left(\phi(x, a_{i_0}, \dots, a_{i_n}) \to \psi(x) \right)$$

↯ per il <u>Claim</u>.

perché
$tp_N(b_0, \dots, b_n / A') = tp_M(a_0, \dots, a_n / A')$

(fine teo Morley) $\square$