

# Elementi di Teoria degli Insiemi

Alessandro Berarducci

Scritto del 8 giugno 2016

**Esercizio 1.** Sia  $f : \omega_1 \rightarrow \omega$  una funzione. Possiamo affermare che necessariamente esiste  $n \in \omega$  la cui controimmagine è un sottoinsieme illimitato di  $\omega_1$ ?

**Esercizio 2.** Trovare la forma normale di Cantor di  $(\omega^2 + \omega)(\omega + 1)$ .

**Esercizio 3.** Sia  $X$  un sottoinsieme di un insieme bene ordinato  $A$ . Ne segue che la cofinalità di  $X$  è minore o uguale a quella di  $A$ ?

**Esercizio 4.** Nel dimostrare il teorema di Cantor-Bernstein abbiamo utilizzato l'assioma della scelta? Quello dell'infinito? Quello delle parti?

**Esercizio 5.** Consideriamo il seguente teorema: per ogni insieme  $X$ , esiste un insieme  $Y$  tale che  $|Y| > |X|$  (dove la cardinalità è intesa nel senso di Frege).

1. Potete dimostrarlo senza usare l'assioma della scelta? (SI, NO)
2. Potete dimostrarlo senza usare l'assioma delle parti? (SI, NO)
3. Assumendo che  $X$  sia bene ordinato cambia qualcosa?

**Esercizio 6.** Quante sono le funzioni  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tali che  $f(f(x)) = x$  per ogni  $x$ ?

**Esercizio 7.** Esistono cardinali più grandi di  $2^{\aleph_0}$  di cofinalità  $\omega_1$ ?