LOGICA MATEMATICA
Alessandro Berarducci
Programma svolto. A.A. 2013-2014

Teorie assiomatiche e loro modelli. Primi esempi. La teoria Q di Robinson. Aritmetica di Peano del primo ordine (PA). Aritmetica di Peano del secondo ordine. Modelli non-standard dell'aritmetica di Robinson. L'aritmetica di Peano del secondo ordine ha solo il modello standard.

Linguaggi e L-strutture. Termini e formule. Variabili libere. Sostituzioni. Cattura delle variabili.

Semantica di Tarski per la logica del primo ordine. Conseguenza logica.

Teorie complete. Incompletezza dell'aritmetica di Robinson (tramite esibizione di formule indimostrabili). Elementare equivalenza. Teoria completa di una struttura. Teoria di una classe di strutture. Teorie deduttivamente chiuse. Teorie complete. Teorie decidibili, teorie ricorsivamente assiomatizzate.

Esempi di teorie decidibili (senza dimostrazione): teoria dei reali, teoria dei complessi, teoria dei campi algebricamente chiusi. Esempi di teorie indecidibili: teoria dei numeri naturali, degli interi, dei razionali, teoria degli insiemi, etc.

Sottostrutture elementari. Diagramma elementare di una struttura. Criterio di Tarski-Vaught. Teoremi di Löwenheim Skolem verso il basso. Paradosso di Skolem: la teoria degli insiemi ha un modello numerabile.

Regole di inferenza. Tautologie proposizionali. Regole per i quantificatori. Correttezza del sistema dimostrativo. Lemma di Lindembaum. Costanti di Henkin. Modelli ricchi. Ogni teoria completa e di Henkin ha un modello (ricco). Completezza del sistema dimostrativo.

Teorema di compattezza. Esistenza di modelli non standard dell'aritmetica di Peano del primo ordine. Teorema di Löwenheim-Skolem verso l'alto. Completezza delle teorie κ-categoriche. Esempi: Gli spazi vettoriali su $\mathbb{Q}$ sono $\aleph_1$ categorici. I campi algebricamente chiusi di una data caratteristica sono $\aleph_1$-categorici.

Funzioni calcolabili (o ricorsive). Macchine a registri. Ricursione primitiva. Minimalizzazione. Tesi di Church. Insiemi decidibili e semidecidibili. Teorema di Post. Funzione universale. Forma normale di Kleene. Teorema smn. Secondo teorema del punto fisso. Dimostrazione della calcolabilità della funzione di Ackermann usando il teorema del punto fisso. Indecidibilità del problema della fermata. L'insieme degli indici delle funzioni ricorsive totali non è semidecidibile. Gerarchia aritmetica.

Confronto tra: insiemi decidibili, insiemi semidecidibili, insiemi definibili nell'aritmetica. Proprietà di chiusura rispetto ai connettivi logici. I semidecidibili sono stabili per quantificatori esistenziali ma non per negazine.

Una teoria ricorsivamente assiomatizzata e completa è decidibile.

Codifica delle successioni tramite la funzione beta di Gödel. Le funzioni calcolabili sono definibili (da formule Σ_1^0) nel modello standard dell'aritmetica. Definibilità degli insiemi decidibili e semidecidibili. Ogni insieme semidecidibile è definibile. Gli insiemi semidecidibili sono tutti e soli quelli definibili da formule Σ_1^0. Gli insiemi aritmetici coincidono con gli insiemi definibili nel modello standard dell'aritmetica. Indecidibilità della teoria completa dell'aritmetica tramite riduzione al problema della fermata.

L'aritmetica di Robinson è completa relativamente alle formule con quantificatori limitati. Una formula Σ_1^0 è vera nel modello standard dell'aritmetica se e solo se è dimostrabile in Q. Binumerabilità in Q delle funzioni calcolabili totali (tramite formule Σ_1^0). Binumerabilità degli insiemi decidibili.

Aritmetizzazione della sintassi. Lemma di diagonalizzazione. Teorema di Tarski sulla indefinibilità aritmetica della verità aritmetica. Prima dimostrazione della incompletezza di PA usando il teorema di Tarski e la semidecidibilità dei teoremi.

Primo teorema di Gödel: Incompletezza di PA. Ogni teoria ω-coerente e ricorsivamente assiomatizzata che contiene Q è incompleta. Teorema di Rosser: ogni teoria coerente e ricorsivamente assiomatizzata che contiene Q è incompleta. Secondo teorema di Gödel: PA non dimostra la sua coerenza.

Teorie indecidibili. Metodo delle interpretazioni. Se Q si interpreta in una teoria T allora T è indecidibile, e inoltre ogni sottoteoria di T con lo stesso linguaggio è indecidibile. Indecidibilità dell'insieme delle formule valide del calcolo dei predicati con almeno un simbolo di relazione binaria. Indecidibilità della teoria degli interi, dei razionali, dei campi. Indecidibilità della teoria degli insiemi.