1. Logica matematica 2013-14: tipiche domande da esame

(1) Si dimostri che ogni formula proposizionale φ può essere messa in forma normale disgiuntiva, ovvero espressa come congiunzione di disgiunzioni di letterali, dove un letterale è una variabile proposizionale o la negazione di una variabile proposizionale. Suggerimento: φ è vera se e solo se si verifica almeno uno di un certo insieme di casi, ciascuno dei quali è esprimibile con una congiunzione di letterali.

(2) Si dia una definizione induttiva di $\varphi(t/x)$, dove $\varphi(t/x)$ è il risultato della sostituzione del termine t nelle occorrenze libere della variabile x in φ. L'induzione va fatta sul numero dei connettivi di φ.

(3) Si mostri che se il termine t è sostituibile per x in φ, allora $\models \forall x \varphi \to \phi(t/x)$, mentre se non si assume la sostituibilità il risultato non vale.

(4) Si diano esempi di dimostrazioni formali (essendo preparati ad improvvisare la dimostrazione di semplici formule).

(5) Si dimostri il teorema di compattezza.

(6) Si dimostri il teorema di completezza.

(7) Si dimostri il Lemma di Lindenbaum: ogni teoria coerente ha una estensione completa.

(8) Si mostri che ogni teoria coerente ha una estensione coerente di Henkin.

(9) Si diano esempi di teorie di Henkin e non.

(10) Si dimostri che ogni teoria i cui assiomi sono formule atomiche quantificate universalmente ha un modello.

(11) Si dimostri che se $T \vdash \varphi(c/x)$ e se la costante c non compare in T o in φ, allora esiste una dimostrazione di φ da T che non menziona c.

(12) Si applichi il teorema di compattezza per dimostrare che ogni relazione di ordine parziale su un insieme si può estendere ad una relazione di ordine totale sullo stesso insieme.

(13) Si dimostri che se ZF è coerente esiste un suo modello con numeri naturali non standard.

(14) Si dimostri che se ZF è coerente esiste un suo modello M e una successione infinita di elementi $a_n \in M$ tali che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $M \models a_{n+1} \in a_n$. Come mai ciò non contraddice l'assioma di fondazione?

(15) Si dimostri che non esiste alcuna teoria T, nel linguaggio con un simbolo di relazione binaria, i cui modelli siano esattamente i grafi connessi.

(16) Si dimostri che non esiste alcuna teoria T nel linguaggio $L = \{\leq\}$ i cui modelli siano esattamente i buoni ordini.

(17) Sia M un modello non standard di PA. Si dica qualcosa sull'ordine di M (definito a partire dal $+$). Ad esempio: è un buon ordine?

(18) Si applichi il teorema di compattezza per dimostrare che se un grafo infinito non è 5-colorabile allora esiste un suo sottografo finito che non è 5-colorabile.

(19) Si dimostri che esiste un modello numerabile della teoria completa dei numeri naturali $(\mathbb{N}, 0, s, +, \cdot)$ che non è isomorfo a $(\mathbb{N}, 0, s, +, \cdot)$.

(20) Si dimostri che esiste una estensione completa di PA (l'aritmetica di Peano del primo ordine) che non ha $(\mathbb{N}, 0, s, +, \cdot)$ come modello.

(21) Si trovi un'estensione coerente di PA che sia ω-incoerente.

(22) Si dimostri il primo e il secondo teorema di incompletezza di Gödel.

(23) Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{N}$ definibile da una formula $\varphi(x)$ di complessità Σ^1_0. Si dimostri che A è semidecidibile, ovvero esiste un algoritmo che dato in input un numero naturale n si ferma in un numero finito di passi se e solo se $n \in A$.

(24) Si dimostri che se un enunciato Σ^1_0 è vero nel modello standard $\mathbb{N}$ allora è vero in tutti i modelli di PA.

(25) Si dimostri che il modello standard $\mathbb{N}$ è un segmento iniziale di ogni altro modello di PA (o dell'aritmetica di Robinson Q).
(26) Sia $\mathbb{N} = (\mathbb{N}, 0, s, +, \cdot)$ il modello standard dell'aritmetica. Si trovi una formula $\varphi(x, y)$ tale che per ogni $n, m \in \mathbb{N}$ si ha che $\mathbb{N} \models \varphi(n, m)$ se e solo se $m = n^n$. Suggerimento: si consideri la funzione ausiliaria $m = n^k$.
(27) Si dimostri che ogni funzione calcolabile totale può essere binumerata in nell'aritmetica di Robinson Q.
(28) Si dimostri che esistono sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ non semidecidibili.
(29) Si dimostri che esistono sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ semidecidibili ma non decidibili.
(30) Si dimostri che la teoria degli anelli è indecidibile. Suggerimento: $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ è un anello e la sua teoria intepreta la teoria di $(\mathbb{N}, +, \cdot)$.
(31) Sia L un linguaggio del primo ordine abbastanza ricco (basta che ci sia un simbolo di relazione binaria). Si dimostri che l'insieme delle L-formule valide è semidecidibile ma non è decidibile.
(32) Si dimostri che l'insieme degli indici delle funzioni calcolabili totali non è semidecidibile.
(33) Si dimostri il secondo teorema del punto fisso.
(34) Si dimostri che la funzione di Ackermann è μ-ricorsiva.
(35) Si dimostri che esistono insiemi definibili in $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ che non sono semidecidibili.
(36) Si dimostri che l'insieme dei numeri di Gödel degli enunciati aritmetici veri nel modello standard $\mathbb{N}$ non è semidecidibile e neppure il suo complemento lo è.
(37) Sia $f : A \to B$ un omomorfismo tra L-strutture (ad esempio un omomorfismo di gruppi). Sia φ un L-enunciato i cui connettivi siano inclusi in $\{\exists, \wedge, \vee\}$. Si dimostri che se φ è vero in A allora è vero in B. Si dimostri che se f è surgettivo possiamo estendere il risultato alle formule con connettivi in $\{\exists, \forall, \wedge, \vee\}$ Infine se f è un isomorfismo il risultato vale per tutte le formule.
(38) Si dimostri che due strutture isomorfe sono elementarmente equivalenti.
(39) Si mostri che $\mathbb{Z}$ non è una sottostruttura elementare di $\mathbb{Z}[x]$.
(40) Si mostri che esistono esempi di sottostrutture elementarmente equivalenti ma che non sono sottostrutture elementari.
(41) Si dimostrino i teoremi di Löwenheim - Skolem verso l'alto e verso il basso.
(42) Siano M un modello di una teoria T e sia N una sottostruttura di M. Possiamo concludere che N è un modello di T? Fare degli esempi.
(43) Si discuta la completezza delle teorie κ-categoriche.
(44) Discutere i rapporti tra completezza, decidibilità, e ricorsiva assiomatizzabilità di una teoria del primo ordine T. Si diano esempi.

Altre domande non strettamente relative al programma 2013-14 ma su cui può essere utile riflettere.

(1) Si dimostri che $(V_{\omega+\omega}, \in)$ ha una sottostruttura elementare $M \subseteq V_{\omega+\omega}$ numerabile. Tale sottostruttura è necessariamente transitiva? È isomorfa ad una sottostruttura transitiva?
(2) Si dimostri che la teoria degli ordini densi senza estremi è completa.
(3) Si dimostri che la teoria degli ordini densi (senza alcuna ipotesi sull'esistenza o meno del massimo o del minimo) ha esattamente 4 estensioni complete.
(4) Si dimostri che la teoria del grafo random è completa.