Prima parte del Compito di MDAL
10 luglio 2017

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: .... Corso e Aula: ....

<u>IMPORTANTE:</u> Non si possono consultare libri e appunti. Non si possono usare calcolatrici, computer o altri dispositivi elettronici. Non si può scrivere con il lapis.

Esercizio 1. Dato un insieme X di 10 elementi, quante sono le funzioni $f : X \to X$ la cui immagine ha esattamente 2 elementi?

$\binom{10}{2}[2^{10}-2]$ Scelgo i due elementi, poi scelgo una f non costante da 10 a 2 elementi.

Esercizio 2. Per quali valori del parametro a la retta in $\mathbb{R}^2$ di equazione $2x + ay$ contiene un vettore non nullo ortogonale a $(3, 4)$?

$\boxed{a = \frac{8}{3}}$.

Svolgimento: $\binom{x}{y}$ sta sulla retta se $2x + ay = 0$. (1)
$\binom{x}{y}$ è ortogonale a $(3,4)$ se $3x + 4y = 0$. (2)
il sistema (1)(2) ha soluzione $\neq \binom{0}{0} \iff \det\begin{pmatrix} 2 & a \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 0 \iff a = \frac{8}{3}$.

Esercizio 3. Per quanti valori di $a \in \mathbb{Z}$ il polinomio $x^3 + ax + 5$ è riducibile in $\mathbb{Q}[x]$?

4 valori di a.

Le possibili radici sono $1, -1, 5, -5$.
1 è radice $\Rightarrow 1 + a + 5 = 0$, $a = -6$
-1 è radice $\Rightarrow -1 - a + 5 = 0$, $a = 4$
5 radice $\Rightarrow 5^3 + 5a + 5 = 0$, $25 + a + 1 = 0$, $a = -26$
-5 radice $\Rightarrow -5^3 - 5a + 5 = 0$, $-25 - a + 1 = 0$, $a = -24$

Esercizio 4. Sia A la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Trovare una matrice M tale che $M^{-1}AM$ sia in forma diagonale.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

in colonna ci sono gli autovettori.

Esercizio 5. Determinare per quanti valori del parametro b, con $0 \leq b < 315$ il sistema di congruenze

$$\begin{cases} x \equiv 7 & \pmod{15} \\ x \equiv b & \pmod{21} \end{cases}$$

è risolubile.

$b \equiv 7 \ (3) \Rightarrow \frac{315}{3} = 105$ valori per b.

Esercizio 6. Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale V sul campo $\mathbb{C}$. Sapendo che $T^2 = -I$ e che T non è un multiplo dell'identità, indicare quali fra i seguenti numeri sono autovalori di T:

$$1, 0, -1, 2, -2, \imath, -\imath, 2\imath, -2\imath, 1+\imath, 1-\imath$$

$\boxed{i, -i}$

$v \neq 0$ autovettore con autovalore λ.

$Tv = \lambda v \Rightarrow T^2 v = \lambda^2 v \Rightarrow -v = \lambda^2 v \Rightarrow \lambda^2 = -1 \Rightarrow \lambda = \pm i$.

Se T avesse un solo autovalore sarebbe multiplo di I, quindi $i, -i$ sono entrambi autovalori.

Risposta: $\boxed{i, -i}$