Teorema di completezza per il calcolo proposizionale

Alessandro Berarducci

15 Ott. 2004

1 Calcolo proposizionale

Definizione 1.1 Un linguaggio proposizionale è un insieme L di simboli chiamati variabili proposizionali.

L'insieme delle formule proposizionali nel linguaggio L è un insieme di espressioni definito induttivamente come segue. Ogni variabile proposizionale $A \in L$ è una formula proposizionale. Se ϕ e ψ sono formule proposizionali, lo sono anche $\neg\phi$ e $(\phi \wedge \psi)$.

I connettivi $\wedge$ (congiunzione) e $\vee$ (disgiunzione) si possono introdurre per definizione:
$(A \wedge B)$ per $\neg(A \to \neg B)$;
$(A \vee B)$ per $\neg A \to B$.

Definizione 1.2 Una L-interpretazione è una funzione M che associa ad ogni variabile proposizionale $A \in L$ un valore $M(A) \in \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ ($\mathbf{0}$ per falso, $\mathbf{1}$ per vero). Estendiamo M ad una funzione dall'insieme di tutte le L-formule proposizionali a $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ stabilendo che $M(\neg\phi) = \mathbf{1}$ se e solo se $M(\phi) = \mathbf{0}$ e che $M((\alpha \to \beta)) = \mathbf{1}$ se e solo se non si verifica che $M(\alpha) = \mathbf{1}$ e $M(\beta) = \mathbf{0}$.

Definizione 1.3 Una **tautologia** è una L-formula vera in tutte le L-interpretazioni.

Ad esempio $A \to A$ è una tautologia, in quanto risulta vera sia nel caso in cui A è vera, sia nel caso in cui A è falsa.

Definizione 1.4 Fissiamo un linguaggio proposizionale L. Una L-teoria è un insieme Γ di L-formule. Le formule appartenenti a Γ vengono chiamate assiomi della teoria Γ. Un modello di una L-formula ϕ è una L-interpretazione che rende vera ϕ. Un modello di una L-teoria Γ è una L-interpretazione che rende vere tutte le formule di Γ. Diciamo che una L-formula ϕ è **conseguenza logica** di Γ, e scriviamo $\Gamma \models \phi$, se ogni modello di Γ è modello di ϕ. Se Γ è vuoto scriviamo $\models \phi$ per $\Gamma \models \phi$. In base alle definizioni $\models \phi$ se e solo se ϕ è una tautologia.

1.1 Gli assiomi e i teoremi del calcolo proposizionale

Assiomi logici.

Per ogni scelta di formule proposizionali A, B, C (non necessariamente atomiche) abbiamo i seguenti "assiomi logici":
A0. $A \to A$
A1. $A \to (B \to A)$
A2. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
A3. $((\neg B \to \neg A) \to ((\neg B \to A) \to B))$
A0, A1, A2, A3 sono "schemi" di assiomi, cioè ognuno rappresenta una infinitá di assiomi. Si noti che ogni istanza di questi schemi è una tautologia.

Regola di inferenza (modus ponens).

$\frac{A, A \to B}{B}$.
Significato: da A e da $A \to B$ si può dedurre B.

Teoremi.

Fissiamo un linguaggio L e una L-teoria Γ. I teoremi di Γ sono definiti induttivamente da:

1. Ogni assioma di Γ è un teorema di Γ;
2. ogni assioma logico è un teorema di Γ;
3. se A e $A \to B$ sono teoremi di Γ, allora B è un teorema di Γ.

Scriviamo $\Gamma \vdash B$ per dire che B è un teorema di Γ. Se Γ è vuoto scriviamo $\vdash B$ per $\Gamma \vdash B$.

Una dimostrazione formale di B da Γ è una successione finita di formule $(B_0, B_1, \ldots, B_n)$ tale che $B_n = B$ e ogni B_i o è un assioma logico, o è un assioma di Γ, o si ottiene da due formule precedenti nella successione per modus ponens.

L'insieme dei teoremi di Γ viene indicato con $Th(\Gamma)$.

Lemma 1.5 *Assumiamo che* $\Gamma \vdash \theta_1, \ldots, \Gamma \vdash \theta_n$ *e che* $\{\theta_1, \ldots, \theta_n\} \vdash \alpha$. *Allora* $\Gamma \vdash \alpha$.

Dim. Basta concatenare (mettere in fila) le dimostrazioni di $\theta_1, \ldots, \theta_n$ da Γ e farle seguire da una dimostrazione di α da $\{\theta_1, \ldots, \theta_n\}$ per ottenere una dimostrazione di α da Γ (verificare!). QED

1.2 Il teorema di deduzione

Teorema 1.6 *(Teorema di deduzione, Herbrand 1930) Siano A e B formule proposizionali e sia Γ un insieme di formule proposizionali. Se $\Gamma, A \vdash B$, allora $\Gamma \vdash A \to B$.*

Dim. La dimostrazione è per induzione sulla lunghezza delle derivazioni (= dimostrazioni formali). Si usano solo gli schemi di assiomi A0, A1, A2 concernenti l'implicazione e non lo schema A4 che concerne la negazione. Sia $(B_0, B_1, \ldots, B_n)$ una dimostrazione di B da $\Gamma \cup \{A\}$. Mostriamo per induzione su $i \leq n$, che $\Gamma \vdash A \to B_i$ (poichè $B = B_n$ quando arriviamo a $i = n$ abbiamo il risultato desiderato). Supponiamo per ipotesi induttiva che il risultato sia vero per ogni $j < i$ (se $i = 0$ questa è una assunzione vuota) e mostriamo che vale per i, cioè $\Gamma \vdash A \to B_i$. Ci sono tre casi da considerare.

Caso 1. B_i è un assioma logico. Ne segue che $\vdash B_i$ e quindi a fortiori: a) $\Gamma \vdash B_i$. D'altra parte lo schema A1 garantisce che b) $\Gamma \vdash B_i \to (A \to B_i)$. Concludiamo $\Gamma \vdash A \to B_i$ per MP (modus ponens) da a) e b).

Caso 2. B_i è un assioma non logico, cioè $B_i \in \Gamma \cup \{A\}$. Se $B_i \in \Gamma$ ragioniamo esattamente come nel caso 1. Se $B_i = A$ usiamo lo schema A0 per ottenere $\Gamma \vdash A \to B_i$.

Caso 3. B_i segue da due formule precedenti, diciamo da B_j e B_k (con $j, k < i$) per modus ponens. (Notiamo che questo caso si puó verificare solo se $i \neq 0$.) Affinchè sia possibile applicare il modus ponens ne segue che una di queste due formule, diciamo B_k, è la "premessa maggiore" del modus ponens, cioè $B_k = B_j \to B_i$. Per ipotesi induttiva abbiamo a) $\Gamma \vdash A \to B_j$ e b) $\Gamma \vdash A \to (B_j \to B_i)$. Per lo schema A2 abbiamo c) $\Gamma \vdash (A \to (B_j \to B_i)) \to ((A \to B_j) \to (A \to B_i))$. Applichiamo ora MP a b) e c) per ottenere d) $\Gamma \vdash ((A \to B_j) \to (A \to B_i))$. Un'ultima applicazione del MP ad a) e d) fornisce il risultato desiderato $\Gamma \vdash A \to B_i$. QED

1.3 Teorie coerenti

Definizione 1.7 Diciamo che Γ è incoerente (o contraddittoria) se esiste una formula θ tale che $\Gamma \vdash \theta$ e $\Gamma \vdash \neg\theta$. Diciamo che Γ è coerente in caso contrario.

Lemma 1.8 *Sono equivalenti:*

1. *Esiste una formula θ tale che $\Gamma \vdash \theta$ e $\Gamma \vdash \neg\theta$;*
2. *Per ogni formula φ, $\Gamma \vdash \varphi$.*

Dim. Da (2) segue banalmente (1). Viceversa assumiamo (1) e sia data φ. Vogliamo mostrare che $\Gamma \vdash \varphi$. Usando la (1) scegliamo θ tale che $\Gamma \vdash \theta$ e $\Gamma \vdash \neg\theta$. Per lo schema di assiomi logici A2 abbiamo $\Gamma \vdash \theta \to (\neg\varphi \to \theta)$ e similmente $\Gamma \vdash \neg\theta \to (\neg\varphi \to \neg\theta)$. Per modus ponens $\Gamma \vdash \neg\varphi \to \theta$ e $\Gamma \vdash \neg\varphi \to \neg\theta$. Per lo schema A3 $\Gamma \vdash (\neg\varphi \to \neg\theta) \to ((\neg\varphi \to \theta) \to \varphi)$. Applicando due volte il modus ponens ottengo $\Gamma\varphi\varphi$. QED

Quindi Γ è incoerente se e solo se dimostra ogni formula.

Osserviamo che Γ è coerente se e solo se $Th(\Gamma)$ lo è.

Il seguente risultato mostra che la relazione di derivabilitá "$\vdash$" e il predicato "essere contraddittoria" sono interdefinibili.

Proposizione 1.9 $\Gamma \vdash \phi$ *se e solo se* $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ *è incoerente.*

Dim. Se $\Gamma \vdash \phi$, allora $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ è chiaramente incoerente perchè è una teoria che dimostra sia ϕ che $\neg\phi$.

Viceversa assumiamo che $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ sia incoerente, e che quindi dimostri tutte le formule. Data una formula β abbiamo allora in particolare $\Gamma \cup \{\neg\phi\} \vdash \neg\beta$ e $\Gamma \cup \{\neg\phi\} \vdash \beta$. Per il teorema di deduzione $\Gamma \vdash \neg\phi \to \neg\beta$ e $\Gamma \vdash \neg\phi \to \beta$. Per lo schema A3 $\Gamma \vdash (\neg\phi \to \neg\beta) \to ((\neg\phi \to \beta) \to \phi)$. Applicando due volte il modus ponens ottengo $\Gamma\varphi\phi$. QED

Corollario 1.10 *Supponiamo che le teorie* $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ *e* $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ *siano entrambe incoerenti. Allora anche* Γ *lo è.*

Dim. Poichè $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ è incoerente abbiamo $\Gamma \vdash \phi$. Ne segue che i teoremi di Γ coincidono con quelli di $\Gamma \cup \{\phi\}$, ed essendo quest'ultima teoria incoerente lo è anche Γ. QED

1.4 Teorie complete

Definizione 1.11 Una L-teoria coerente Γ si dice *completa* se data una L-formula ϕ o $\Gamma \vdash \phi$ o $\Gamma \vdash \neg\phi$.

Definizione 1.12 Fissato un linguaggio proposizionale L, una L-teoria Γ si dice coerente massimale se è coerente e non è propriamente inclusa in alcun'altra L-teoria coerente.

Osservazione 1.13 Supponiamo che Γ sia coerente massimale e $\Gamma \vdash \phi$. Allora $\phi \in \Gamma$.

Dim. Se $\phi \notin \Gamma$ allora $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ è una estensione propria di Γ ed è pertanto incoerente. Ma siccome $\Gamma \vdash \phi$, Γ e $\Gamma \cup \{\phi\}$ hanno gli stessi teoremi, e pertanto anche Γ sarebbe incoerente. QED

Teorema 1.14 *Sono equivalenti:*

1. *Γ è coerente massimale;*
2. *Γ è coerente e per ogni formula ϕ, $\phi \in \Gamma$ oppure $\neg\phi \in \Gamma$.*

Dim. $1 \to 2$. Supponiamo che $\phi \notin \Gamma$ e $\neg\phi \notin \Gamma$. Allora entrambe le teorie $\Gamma \cup \{\theta\}$ e $\Gamma \cup \{\neg\theta\}$ estendono propriamente Γ. Ma per il Lemma 1.10 una di queste due teorie è coerente, contraddicendo la massimalià di Γ.

$2 \to 1$. Assumendo (2) dobbiamo mostrare che Γ non è estendibile ad una teoria coerente $\Delta \supset \Gamma$. Infatti se $\phi \in \Delta \setminus \Gamma$, per (2) abbiamo $\neg\phi \in \Gamma$. Ma allora Δ conterrebbe sia ϕ che $\neg\phi$ e pertanto non sarebbe coerente. QED

Lemma 1.15 *Consideriamo una famiglia $\{T_i \mid i \in I\}$ di L-teorie che formano una catena, cioè per ogni $i, j \in I$ $T_i \subset T_j$ o $T_j \subset T_i$. Sia $\bigcup_{i \in I} T_i$ l'unione della catena. Se $\bigcup_{i \in I} T_i \vdash \varphi$, allora esiste $i \in I$ tale che $T_i \vdash \varphi$.*

Dim. Consideriamo l'insieme $S \subset \bigcup_i T_i$ degli assiomi utilizzati nella dimostrazione di φ. S è ovviamente un insieme finito, ed essendo incluso nell'unione della catena $\bigcup_i T_i$ è incluso in una delle T_i (qui si usa l'ipotesi che le T_i formino una catena).QED

Corollario 1.16 *Siano T_i, per $i \in I$, L-teorie coerenti. Una condizione sufficiente affinchè l'unione $\bigcup_{i \in I} T_i$ sia coerente è che le T_i formino una catena, cioè per ogni $i, j \in I$ $T_i \subset T_j$ o $T_j \subset T_i$.*

Dim. Se $\bigcup_{i \in I} T_i$ è incoerente dimostra una contraddizione (ovvero dimostra una formula B e la sua negazione). Per il lemma precedente esisterebbe allora un T_i da cui si deduce la stessa contraddizione. QED

Lemma 1.17 *(Lemma di Lindembaum) Ogni L-teoria coerente Γ è contenuta in una L-teoria coerente massimale.*

Dim. Per semplicità consideriamo dapprima il caso in cui L sia numerabile. Possiamo allora fissare una enumerazione $\{\phi_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ dell'insieme delle L-formule. Sia $T_0 = \Gamma$ e induttivamente definiamo T_{n+1} come $T_n \cup \{\phi_n\}$ se questa teoria è coerente, e come $T_n \cup \{\neg\phi_n\}$ nel caso contrario. Per il lemma 1.10 T_{n+1} è coerente se T_n lo è. Quindi per induzione tutte le T_n sono coerenti e per per il corollario precedente lo è la loro unione $T' = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} T_n$. Data una qualsiasi formula $\theta \in \{\phi_n \mid n \in \mathbf{N}\}$, T' deve contenere una delle due formule θ o $\neg\theta$ (se $\theta = \phi_n$, o θ o la sua negazione appartiene a T_{n+1}). Quindi per il Lemma 1.14 T' è coerente massimale.

Il caso in cui L non è numerabile si dimostra applicando il lemma di Zorn all'insieme di tutte le L-teorie coerenti contenenti Γ ordinate per inclusione. Le ipotesi del lemma di Zorn sono verificate grazie al Corollario 1.16. QED

1.5 Teorema di completezza per la logica proposizionale

Lemma 1.18 *Sia T una L-teoria coerente massimale.*

1. *Se $(\alpha \to \beta) \in T$, allora $\beta \in T$ o $\neg\alpha \in T$.*
2. *Se $(\alpha \to \beta) \notin T$, allora $\alpha \in T$ e $\neg\beta \in T$.*

Dim. (1) Supponiamo che $(\alpha \to \beta) \in T$. Se non vale la (1) allora per la massimalià $\neg\beta \in T$ e $\alpha \in T$. Per modus ponens anche $\beta \in T$, contraddicendo la coerenza di T.

(2) Supponiamo $(\alpha \to \beta) \notin T$. Per la massimalità $\neg(\alpha \to \beta) \in T$.

Mostriamo che $\alpha \in T$. In caso contrario per la massimalità $\neg\alpha \in T$. Ora $\{\alpha, \neg\alpha\}$ è una teoria incoerente e pertanto dimostra β. Applicando due volte il teorema di deduzione $\neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$. D'altra parte siccome $\neg\alpha \in T$, per modus ponens $T \vdash \alpha \to \beta$. Sappiamo però che $\neg(\alpha \to \beta) \in T$ e quindi T sarebbe incoerente.

Resta da dimostrare che $\neg\beta \in T$. In caso contrario per la massimalità $\beta \in T$. Per lo schema A1 $T \vdash \beta \to (\alpha \to \beta)$. Per modus ponens $T \vdash \alpha \to \beta$. Sappiamo però che $\neg(\alpha \to \beta) \in T$ e quindi T sarebbe incoerente. QED

Teorema 1.19 *(Teorema di completezza) Se Γ è coerente, Γ ha un modello.*

Dim. Sia Γ coerente. Per il lemma di Lindembaum esiste una estensione $\Delta \subseteq \Gamma$ coerente massimale. Osserviamo che ogni modello di Δ è anche un modello di Γ. basta quindi trovare un modello M della teoria coerente massimale Δ.

Definiamo $M: L \to \{0,1\}$ come segue: $M(A) = 1$ se $A \in \Delta$, $M(A) = 0$ se $\neg A \in \Delta$. Questa è una buona definizione di M in quanto Δ è coerente massimale. Estendiamo M a tutte le formule proposizionali usando le tavole di verità. Mostriamo per induzione sulla lunghezza delle formule, che per ogni formula ϕ si ha: $M(\phi) = 1$ se $A \in \Delta$ e $M(\phi) = 0$ se $\neg\phi \in \Delta$. Il caso in cui ϕ è una variabile proposizionale di L è vero per definizione di M. Il caso $\phi = \neg\theta$ è ovvio. Per dimostrare il caso $\phi = (\alpha \to \beta)$ possiamo usare il lemma precedente e l'ipotesi induttiva. Infatti se $(\alpha \to \beta) \in \Delta$, per il lemma $\beta \in \Delta$ o $\neg\alpha \in \Delta$. Per ipotesi induttiva $M(\beta) = \mathbf{1}$ o $M(\neg\alpha) = \mathbf{1}$. Per le tavole di verità $M(\alpha \to \beta) = \mathbf{1}$. Infine se $(\alpha \to \beta) \notin \Delta$, per il lemma $\alpha \in \Delta$ e $\neg\beta \in \Delta$. Per ipotesi induttiva $M(\alpha) = \mathbf{1}$ e $M(\neg\beta) = \mathbf{1}$. Per le tavole di verità $M(\alpha \to \beta) = \mathbf{0}$. QED

Corollario 1.20 *Se $T \models \phi$ allora $T \vdash \phi$.*

Dim. Se $T \nvdash \phi$ allora $T \cup \{\neg\phi\}$ è coerente e per il teorema di completezza ha un modello. Tale modello testimonia $T \not\models \phi$. QED

Lemma 1.21 *(Teorema di correttezza) Se $T \vdash \phi$ allora $T \models \phi$.*

Dim. Tutte le L-interpretazioni verifica gli assiomi logici A0-A4. Se una L-interpretazione verifica le due premesse di una applicazione del modus ponens, allora verifica anche la conclusione. Ne segue per induzione sulla lunghezza delle dimostrazioni che se una L-interpretazione verifica tutti gli assiomi di T essa verifica anche ϕ. QED

Teorema 1.22 *(Compattezza) Se $T \models \phi$ allora esiste una sottoteoria finita T' di T tale che $T' \models \phi$.*

Dim. Per il teorema di correttezza e completezza la relazione $\models$ equivale a $\vdash$. Rimpiazzando $\models$ con $\vdash$ il teorema di compattezza diventa ovvio in quanto una qualsiasi dimostrazione usa solo un numero finito di assiomi. QED