1 Prodotti diretti

Dati due gruppi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ possiamo formare il loro prodotto diretto $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ prendendo come dominio l'insieme delle coppie ordinate (a, b) con $a \in A$ e $b \in B$ e definendo la operazione di gruppo termine a termine: $(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$. Il prodotto di due gruppi risulta allora è un gruppo con elemento neutro $(0, 0)$.

Altrettanto non avviene per i campi. Se facciamo il prodotto diretto di due campi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ definendo le operazioni $+$ e $\cdot$ termine a termine, allora la struttura risultante $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ è un anello ma non un campo: infatti $(0, 1) \cdot (1, 0) = (0, 0)$, e quindi $(0, 1)$ non può essere invertibile.

Definiremo nel seguito degli opportuni quozienti dei prodotti diretti, gli ultraprodotti, in cui sono preservate tutte le proprietà esprimibili al primo ordine: quindi un ultraprodotto di campi sarà un campo.

Diamo prima la definizione di prodotto diretto per un insieme possibilmente infinito di strutture.

Definizione 1.1 (Prodotti diretti di L-strutture) Siano $\mathcal{A}_i$, per $i \in I$, L-strutture. Il prodotto diretto $\Pi_{i\in I}\mathcal{A}_i$ è la L-struttura il cui dominio è formato dall'insieme di tutte le "I-uple" $a =< a(i) \mid i \in I >$ tali che per ogni $i \in I$, la i-esima coordinata $a(i)$ appartiene ad A_i. Le operazioni e le relazioni sono definite termine a termine: ad esempio se il liguaggio comprende una operazione binaria $+$ e una relazione binaria $<$, allora $a+b = c$ se e solo se $\forall i \in I, a(i)+b(i) = c(i)$, e $a < b$ se e solo se $\forall i \in I, a(i) < b(i)$.

2 Filtri e ultrafiltri

L'ultraprodotto è un quoziente $\Pi_{i\in I}\mathcal{A}_i/U$ che dipende da una misura finitamente additiva $m_U: I \to \{0, 1\}$ a due valori. La misura m_U determina univocamente la collezione U degli insiemi di misura zero e viceversa. L'idea della definizione di ultraprodotto è di identificare due I-uple che differiscono su un insieme di indici di misura 0. Trovare tali misure non è semplice. Ad esempio se $I = \mathbf{N}$ allora m_U deve dare misura 0 ai pari e 1 ai dispari o viceversa, e tale scelta è ovviamente arbitraria in quanto non c'è ragione di preferire i pari o i dispari. Se decidiamo di dare misura 1 ai pari, lo stesso problem si ripresenta per i multipli di 4 e cosívia. A causa di tale successione di scelte arbitrarie, la esistenza di misure additive non banali a valori $\{0, 1\}$ richiede l'assioma della scelta (se l'insieme I è infinito).

La seguente definizione enumera alcune proprietà di U (la collezione degli insiemi di misura zero).

Definizione 2.1 Sia U un insieme non vuoto di sottoinsiemi di I. Diciamo che U è un filtro se soddisfa le proprietà:

1. $\emptyset \notin U$;

2. $A \in U$ e $B \supseteq A$, implica $B \in U$.

3. $A \in U$ e $B \in U$, implica $A \cap B \in U$.

   Se inoltre vale anche la:

4. Per ogni $A \subseteq I$ esattamente uno dei due insiemi A ed $I \setminus A$ appartiene ad U.

   allora diciamo che U è un *ultrafiltro.*

Se valgono la (2) e la (3) ma non la (1), allora U contiene necessariamente tutti i sottoinsiemi di I e viene chiamato il *filtro improprio.*

Definizione 2.2 (Misura associata ad un ultrafiltro) Dato un ultrafiltro U su I, definiamo $m_U: I \to \{0,1\}$ tramite $m_U(X) = 1$ se e solo se $X \in U$.

Proposizione 2.3 *m_U è finitamente additiva, cioè se X, Y sono disgiunti $m_U(X \cup Y) = m_U(X) + m_U(Y)$.*

Dim. Intanto osserviamo che la somma non può venire uguale a due, perchè due insiemi di misura 1 non possono essere disgiunti (la loro intersezione ha ancora misura 1). Ci sono quindi solo tre casi da verificare a seconda che X, Y abbiano misure $(0,0)$ o $(0,1)$ o $(1,0)$.

Se X ha misura 1 (cioè $X \in U$) anche $X \cup Y$ ha misura uno perchè se U contiene un insieme contiene tutti gli insiemi che lo includono.

Resta da verificare che se X, Y hanno misura zero, anche la loro unione $X \cup Y$ ha misura zero, cioè $I \setminus (X \cup Y) \in U$. Poiché U è un ultrafiltro, il complemento di X e quello di Y sono in U, e quindi anche la loro intersezione $(I \setminus X) \cap (I \setminus Y)$ è in U, ovvero $I \setminus (X \cup Y) \in U$ come desiderato. Si osservi che non abbiamo usato il fatto che X, Y sono disgiunti. QED

Un filtro U si dice *principale* se e solo se esso consiste di tutti e soli gli insiemi che contengono un dato insieme $A \subseteq I$, e diciamo i tal caso che A genera U. Se U è un ultrafiltro principale generato da $A \subseteq I$, è facile vedere che A deve consistere di un unico elemento (se no potrei scrivere A come unione di due sottoinsiemi non vuoti disgiunti e uno dei due dovrebbe appartenere ad U). Quindi gli ultrafiltri principali sono tutti e soli quelli della forma $\{A \subseteq I \mid x \in A\}$ dove x è un elemento di I. La misura m_U associata ad un ultrafiltro principale $U = \{A \subseteq I \mid x \in A\}$ fornisce misura 1 agli insiemi che contengono x e misura 0 agli altri. Noi siamo interessati agli ultrafiltri non principali, quelli cioè che assegnano misura 0 agli insiemi con un solo elemento, e quindi a tutti gli insiemi finiti (per la finita additività di m_U).

Definizione 2.4 Una collezione U di sottoinsiemi di I è una *prebase* o ha la proprietà dell'intersezione finita (*fip*) se l'intersezione di un numero finito di elementi di U è sempre non vuota.

Proposizione 2.5 *Ogni prebase si estende a un filtro.*

Dim. Sia $\mathcal{B}$ una prebase. Se $\mathcal{F}$ è un filtro che contiene $\mathcal{B}$, allora $\mathcal{F}$ deve contenere tutte le intersezioni finite di elementi di $\mathcal{B}$, e tutti gli insiemi che includono queste intersezioni finite. È ragionevole quindi definire:

$$\mathcal{F} = \{Y \subseteq I \mid \exists n \in \omega \exists X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{B} \text{ con } Y \supseteq X_1 \cap \ldots \cap X_n\}$$

Se $\mathcal{F}$ è un filtro, è sicuramente il più piccolo filtro che contiene $\mathcal{B}$. Verifichiamo che è un filtro. Se $Y_1, Y_2 \in \mathcal{F}$, allora Y_1 include una intersezione finita $X_1 \cap \ldots X_n$ di elementi di $\mathcal{B}$ e Y_2 include una intersezione finita $X'_1 \cap \ldots \cap X'_m$ di elementi di $\mathcal{B}$. Ma allora $Y_1 \cap Y_2$ include $X_1 \cap \ldots \cap X_n \cap X'_1 \cap \ldots \cap X'_m$ e quindi $Y_1 \cap Y_2 \in \mathcal{F}$. Quindi $\mathcal{F}$ è chiuso per intersezioni finite.

Ne segue ora facilmente che $\mathcal{F}$ è un filtro. QED

Primo di mostrare che ogni filtro si estende ad un ultrafiltro osserviamo che:

Proposizione 2.6 *Se $\mathcal{F}$ è un filtro, e $I \setminus A \notin \mathcal{F}$, allora $\mathcal{F} \cup \{A\}$ è una prebase.*

Dim. Se non lo fosse, esisterebbero $X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{F}$ tali che $X_1 \cap \ldots X_n \cap A = \emptyset$. Ne segue $X_1 \cap \ldots \cap X_n \subseteq I \setminus A$ e quindi $I \setminus A \in \mathcal{F}$, contraddizione. QED

Proposizione 2.7 *$\mathcal{F}$ è un ultrafiltro se e solo se è un filtro massimale (cioè non esiste alcun filtro che lo include propriamente)*

Dim. Sia $\mathcal{F}$ un filtro massimale. Se non è un ultrafiltro, esiste $A \subseteq I$ tale che $A \notin \mathcal{F}$ e $I \setminus A \notin \mathcal{F}$. Da $I \setminus A \notin \mathcal{F}$ segue che $\mathcal{F} \cap \{A\}$ è una prebase, e quindi si estende a un filtro $\mathcal{F}_1$, che deve includere propriamente $\mathcal{F}$ perchè $A \notin \mathcal{F}$. Questo è assurdo perchè $\mathcal{F}$ è massimale.

Viceversa se $\mathcal{F}$ è un ultrafiltro, allora è un filtro massimale, altrimenti si estenderebbe ad un filtro $\mathcal{F}_1$ che contiene almeno un insieme $A \notin \mathcal{F}$. Otteniamo un assurdo mostrando che nè A nè il suo complemento possono essere in $\mathcal{F}$: infatti se $I \setminus A$ è in $\mathcal{F}$, allora è anche in $\mathcal{F}_1$ ed $\mathcal{F}_1$ conterrebbe sia A che il suo complemento, che è una contraddizione. QED

Per applicare il lemma di Zorn, abbiamo bisogno di:

Osservazione 2.8 Per ogni catena di filtri propri $\mathcal{F}_j \mid j \in J\}$ (cioè un insieme di filtri propri, su uno stesso insieme di indici I, a due a due contenuti l'uno nell'altro) esiste un filtro $\mathcal{F}$ che include tutti gli $\mathcal{F}_j$. Inoltre posso prendere come $\mathcal{F}$ la unione degli $\mathcal{F}_j$.

Dim. Sia $\mathcal{F}$ l'unione degli $\mathcal{F}_j$, cioè $X \in \mathcal{F}$ se e solo se esiste $j \in J$ con $X \in \mathcal{F}_j$. Se $X, Y \in \mathcal{F}$, allora $X \in \mathcal{F}_{j_1}$ e $Y \in \mathcal{F}_{j_2}$. Poichè gli $\mathcal{F}_j$ formano una catena, scegliendo il più grande tra $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ troviamo un $j \in J$ tale che $X, Y \in \mathcal{F}_j$ e quindi $X \cap Y \in \mathcal{F}_j \supseteq \mathcal{F}$. Quindi $\mathcal{F}$ è chiuso per intersezioni finite, e le altre proprietà da verificare sono ovvie. QED

Lemma 2.9 *Ogni filtro $\mathcal{F}$ si estende ad un ultrafiltro.*

Dim. Applico il lemma di Zorn all'insieme dei filtri propri contenenti $\mathcal{F}$ ordinati per inclusione. Le ipotesi del lemma di Zorn sono verificate per il lemma precedente e otteniamo cosíun filtro massimale contenente $\mathcal{F}$. QED

Ogni prebase si estende dunque ad un ultrafiltro.

Definizione 2.10 (Filtro dei cofiniti) Sia $\mathcal{F}$ l'insieme degli $X \subseteq I$ tali che il complemento di X in I è finito. $\mathcal{F}$ è un filtro, detto *filtro dei co-finiti.*

Un ultrafiltro su un insieme di indici infinito I è non principlale se e solo se contiene il filtro dei cofiniti. Visto che ogni filtro si estende ad un ultrafiltro, ne segue che su un insieme di indici infinto esiste almeno un ultrafiltro non principale. Su un insieme finito I tutti gli ultrafiltri sono principali, e tutto si banalizza.

Definizione 2.11 L'ultraprodotto $\Pi_{i \in I} \mathcal{A}_i/U$ delle L-strutture $\mathcal{A}_i$ rispetto all'ultrafiltro U è definito come segue.

Gli elementi di $\Pi_{i \in I} \mathcal{A}_i/U$ sono classi di equivalenza a/U di elementi $a =< a(i) \mid i \in I >\in \Pi_{i \in I} \mathcal{A}_i$, dove $a/U = b/U$ se e solo se a e b coincidono su un insieme di indici in U: cioè $\{i \in I \mid a(i) = b(i)\} \in U$. Poichè U è chiuso per intersezioni finite, questa è una relazione di equivalenza. Per ora abbiamo definito un insieme, non ancora una struttura.

Definiamo l'interpretazione dei simboli di L in modo che per ogni L-formula atomica $\phi(x_1, \dots, x_n)$ si abbia:

$$\Pi_i \mathcal{A}_i/U \models \phi(a/U, b/U, c/U, \dots)$$

se e solo se

$$\{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models \phi(a(i), b(i), c(i), \dots)\} \in U$$

Gli esempi che seguono chiariranno che si tratta di una definizione ben posta.

Esempio 2.12 Se $L = (0+, 0, <)$ e abbiamo una famiglia di L strutture $\mathcal{A}_i = (A_i, +_{\mathcal{A}_i}, 0_{\mathcal{A}_i}, <_{\mathcal{A}_i})$ (ad esempio dei gruppi ordinati) allora il loro ultraprodotto $\Pi_i \mathcal{A}_i/U$ è la L-struttura definita come segue:

1. $\Pi_i \mathcal{A}_i/U \models a/U < b/U$ se e solo se $\{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models a(i) < b(i)\} \in U$.
2. $\Pi_i \mathcal{A}_i/U \models a/U + b/U = c/U$ se e solo se $\{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models a(i) + b(i) = c(i)\} \in U$.
3. $\Pi_i \mathcal{A}_i/U \models 0 = c/U$ se e solo se $\{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models 0 = c(i)\} \in U$.

La (3) definisce univocamente c/U come la classe di equivalenza della funzione $c =< 0^{\mathcal{A}_i} \mid i \in I >\in \Pi_i \mathcal{A}_i$ (c è determinata solo a meno di un insieme di indici di m_U-misura 0).

A priori la (2) definisce solo una relazione ternaria $+$ su $\Pi_i \mathcal{A}_i/U$, e non è chiaro che si tratti di una funzione, cioè esiste una e una sola classe c/U tale che $a/U + b/U = c/U$. La verifica che si tratta di una funzione è lasciata al lettore. Alternativamente si possono trasformare le $\mathcal{A}_i$ in strutture relazionali identificando le funzion con i loro grafi, e in quel caso è chiaro che la definizione della relazione ternaria $+$ su $\Pi_i \mathcal{A}_i/U$ è ben posta. Si può poi usare il teorema di Los che vedremo in seguito per vedere che $+$ è in effetti il grafo di una funzione (essere il grafo di una funzione è una proprietà del primo ordine).

Il seguente teorema dice che l'ultraprodotto è una sorta di *media* di modelli per quanto concerne le proprietà del primo ordine: se la maggior parte dei modelli (rispetto alla misura m_U) soddisfa una certa proprietà del primo ordine, anche l'ultraprodotto soddisfa la data proprietà. Questo vale anche per proprietà che contengono parametri, e i parametri sono in effetti importanti per far funzionare la dimostrazione induttiva.

Teorema 2.13 *(Teorema di Los) L'equivalenza*

$$\Pi_i \mathcal{A}_i/U \models \phi(a/U, b/U, c/U, \ldots)$$

se e solo se

$$\{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models \phi(a(i), b(i), c(i), \ldots)\} \in U$$

vale non solo per le formule atomiche (per le quali vale per definizione), ma anche per tutte le formule del primo ordine ϕ.

Dim. Per induzione sul numero di connettivi logici $\neg, \wedge, \vee, \exists$ presenti in ϕ (assumiamo per semplicità che $\forall x\phi$ sia definito come $\neg\exists x\neg\phi$ e quindi non ci sia bisogno di trattare questo caso).

Il caso del $\wedge$ usa il fatto che U è chiuso per intersezione finita. Il caso del $\neg$ usa il fatto che U è un ultrafiltro e non semplicemente un filtro. Il caso del $\vee$ si riconduce a $\neg, \wedge$ usando le formule di De Morgan $\phi \vee \psi \leftrightarrow \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$. Il caso del $\exists$ è leggermente più complicato perchè richiede di definire una funzione $c \in \Pi_i \mathcal{A}_i/U$.

Veniamo ai dettagli:

$\Pi_i \mathcal{A}_i \models \neg\phi(a/U, b/U, \ldots)$

$\iff$ non è vero che $\Pi_i \mathcal{A}_i/U \models \phi(a/U, b/U, \ldots)$

$\iff$ (per induzione, avendo ϕ meno connettivi di $\neg\phi$) non è vero che $\{i \mid \mathcal{A}_i \models \phi(a(i), b(i), \ldots)\} \in U$

$\iff$ (essendo U un ultrafiltro) $I \setminus \{i \mid \mathcal{A}_i \models \phi(a(i), b(i), \ldots)\} \in U$

$\iff \{i \mid \mathcal{A}_i \models \neg\phi(a(i), b(i), \ldots)\} \in U.$

$\Pi_i \mathcal{A}_i/U \models (\phi \wedge \psi)(a/U, b/U, \ldots)$

$\iff \Pi_i \mathcal{A}_i/U \models \phi(a/U, b/U, \ldots)$ e $\Pi_i \mathcal{A}_i/U \models \psi(a/U, b/U, \ldots)$

$\iff$ (per induzione) $X = \{i \mid \mathcal{A}_i \models \phi(a(i), b(i), \ldots)\} \in U$ e $Y = \{i \mid \mathcal{A}_i \models \psi(a(i), b(i), \ldots)\} \in U$

$\iff X \cap Y \in U$

$\iff \{i \mid \mathcal{A}_i \models (\phi \wedge \psi)(a(i), b(i), \ldots)\} \in U$

Consideriamo ora il caso del $\exists$ e trattiamo le due implicazioni da dimostrare separatamente. Supponiamo: $X = \{i \mid \mathcal{A}_i \models \exists x\phi(x, a(i), \ldots)\} \in U$. Definiamo $c \in \Pi_i \mathcal{A}_i$ in modo che per $i \in X$, $c(i)$ soddisfa $\mathcal{A}_i \models \phi(c(i), a(i), \ldots)$ (in generale sarà necessario l'assioma della scelta per scegliere gli $c(i)$ tra i vari possibili candidati), e per $i \notin X$, $c(i)$ è arbitrario. Poichè $X \in U$, c/U non dipende da come è stato definito $c(i)$ per $i \notin X$. Poichè ϕ ha un connettivo in meno di $\exists x\phi$, per ipotesi induttiva

$\Pi_i \mathcal{A}_i/U \models \phi(c/U, a/U, \ldots)$, e quindi

$\Pi_i \mathcal{A}_i/U \models \exists x\phi(x, , a/U, \ldots)$

Viceversa sapendo che $\exists x\phi(x, a/U, \ldots)$ vale in $\Pi_i \mathcal{A}_i/U$, troviamo c/U, poi applichiamo l'ipotesi induttiva, e otteniamo che $\mathcal{A}_i \models \phi(c(i), a(i), \ldots)$ vale per un insieme di indici A in U. Ne segue che $\mathcal{A}_i \models \exists x\phi(x, a(i), \ldots)$ vale per un insieme di indici che include A e quindi appartiene ad U.

Il caso delle formule atomiche ϕ, ovvero formule con zero connettivi, segue quasi immediatamente dalla definizione stessa di ultraprodotto. L'unico problema è che se ci sono simboli di funzione, allora dobbiamo tenere conto anche delle formule atomiche che coinvolgono funzioni composte come $f(g(x)) = y$. Si può trattare questo caso per induzione sul numero delle composizioni oppure aggirare il problema eliminando le composizioni al costo di quantificatori esistenziali: $f(g(x)) = y \leftrightarrow \exists z(z = g(x) \wedge f(z) = y$, riconducendosi cosía casi già trattati. QED

3 Teorema di compattezza

Diamo ora per mezzo degli ultraprodotti, una dimostrazione puramente algebrica del teorema di compattezza, che non utilizza alcun sistema dimostrativo.

Teorema 3.1 *(Teorema di compattezza) Sia T una L-teoria. Supponiamo che per ogni sottoteoria finita T' di T esista un modello $M_{T'}$ di T'. Allora T ha un modello M.*

Dim. L'idea è di definire $M = \Pi_{T'} M_{T'}/U$ per un opportuno ultrafiltro U. L'insieme degli indici è dunque costituito da $I = \{T' \mid T'$ è una sottoteoria finita di $T\}$. Affinchè M sia modello di T occorre che per ogni assioma $\phi \in T$ si abbia $M \models \phi$ (possiamo assumere che gli assiomi siano formule chiuse). Per il teorema di Los questo accade se l'insieme degli indici T' tali che $M_{T'} \models \phi$ appartiene all'ultrafiltro U. Basta quindi scegliere U in modo che per ogni $\phi \in T$, $X_\phi = \{T' \in I \mid \phi \in T'\} \in U$. Gli insiemi X_ϕ, al variare di ϕ tra gli assiomi di T, costituiscono una prebase, ovvero l'intersezione di un numero finito di essi è non vuota: $X_{\phi_1} \cap \ldots \cap X_{\phi_n} = \{T' \in I \mid \{\phi_1, \ldots, \phi_n\} \subseteq T'\}$ è non vuoto, perchè contiene almeno $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$. Basta ora scegliere un ultrafiltro U che estende questa prebase. QED

Un ultraprodotto $\Pi_{i\in I} M_i/U$ con tutti i fattori uguali $M_i = M$ viene detto *ultrapotenza*, e indicato con $\Pi_i M/U$.

Se ϕ è un L-enunciato senza parametri, per il teorema di Los $\Pi_i M/U \models \phi$ se e solo se $M \models \phi$. Quindi l'ultrapotenza è elementarmente equivalente al modello: $\Pi_i M/U \equiv M$.

In generale l'ultrapotenza $\Pi_i M/U$ non è isomorfa ad M (però lo è se U è principale). Osserviamo che, se M è infinito, "essere isomorfo ad M" non è una proprietà del primo ordine, e non c'è quindi motivo, a priori, che si conservi nell'ultraprodotto.

Se invece M è finito, la proprietà "essere isomorfo ad M" è esprimibile al primo ordine (verificate!) e quindi l'ultrapotenza $\Pi_i M/U$ è sempre isomorfa ad M per il teorema di Los.

Tra M e una sua ultrapotenza $\Pi_i M_i/U$ c'è una relazione ancora più stretta che l'essere elementarmente equivalenti. Vale cioè la seguente:

Proposizione 3.2 *Sia $\delta: M \to \Pi_i M/U$ la mappa diagonale che manda $a \in M$ nella classe di equivalenza della funzione costante a, cioè $\delta(a) =< a \mid i \in I > /U$. Allora δ immerge elementarmente M in $\Pi_i M/U$.*

Dim. Immediato dal teorema di Los: $M \models \phi(a, b, \ldots)$ se e solo se $\Pi_i M/U \models \phi(\delta(a), \delta(b), \ldots)$. QED

L'isomorfismo δ è detto *isomorfismo diagonale*. Se identifichiamo $\delta(a)$ con a un ultraprodotto è una estensione elementare del modello.

Esercizio 3.3 Un ultraprodotto di modelli finiti non è necessariamente finito ("finito" non è una proprietà del primo ordine). Ad esempio se U è un ultrafiltro non banale su U, $\Pi_{n\in \mathbf{N}}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})/U$ è un anello infinito (si applichi il teorema di Los alla proprietà del primo ordine "avere più di n elementi", per ogni fissato $n \in \mathbf{N}$).

Si può verificare che $\Pi_{n\in \mathbf{N}}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})/U$ non è mai isomorfo ad $\mathbf{R}$, e neppure elementarmente equivalente ad $\mathbf{R}$ (si trovi una proprietà del primo ordine che li distingue usando il teorema di Los).

4 Numeri reali non-standard

Consideriamo una ultrapotenza non principale del campo dei numeri reali $\mathbf{R}^* = \Pi_{i\in\mathbf{N}}\mathbf{R}/U$, dove abbiamo preso per semplicità $\mathbf{N}$ come insieme degli indici.

$\mathbf{R}^*$ è un campo ordinato come $\mathbf{R}$ perchè la proprietà di essere un campo ordinato è del primo ordine e quindi si conserva. Non è in generale completo, cioè un suo sottoinsieme limitato superiormente non ha necessariamente un sup (però è facile verificare, usando il teorema di Los, che ogni sottoinsieme definibile e limitato superiormente ha un sup). $\mathbf{R}^*$ contiene un sottocampo isomorfo ad $\mathbf{R}$, costituito dagli elementi della forma $\delta(a)$ con $a \in \mathbf{R}$.

$\mathbf{R}^*$ non è *archimedeo*, ovvero contiene degli elementi α tali che per ogni intero positivo n (o anche per ogni reale positivo n), $0 < \alpha < \frac{1}{n}$, dove abbiamo scritto per semplicità $\frac{1}{n}$ anzichè $\delta(\frac{1}{n})$. Tali elementi vengono detti *infinitesimi* e non possono ovviamente essere nella immagine di δ. Un tipico elemento infinitesimo α è $< \frac{1}{i} \mid i \in \mathbf{N} > /U$. Per ogni fissato n, l'insieme degli indici $i \in \mathbf{N}$ tali che $\frac{1}{i} < \frac{1}{n}$ è co-finito (contiene tutti gli i tranne un numero finito), e quindi appartiene all'ultrafiltro U (se U non è principale). Segue dal teorema di Los che $\alpha < \frac{1}{n}$ e poiché n è arbitrario abbiamo che α è infinitesimo (è maggiore di zero perché lo è su tutti gli indici).

La costruzione di $\mathbf{R}^*$ è la base della analisi non-standard di Abraham Robinson. Lavorando in $\mathbf{R}^*$, $\frac{dy}{dx}$ puó essere interpretato come rapporto di due infinitesimi - come lo pensavano Leibniz e Newton - senza per questo perdere di rigore. Questo uso rigoroso degli infinitesimi può essere poi usato per dimostrare risultati su $\mathbf{R}$ via il teorema di Los che ci permette di trasferire risultati da $\mathbf{R}^*$ ad $\mathbf{R}$. Per arricchire la classe di proprietà a cui poter applicare il *transfer* (trasferimento da $\mathbf{R}^*$ a $\mathbf{R}$) è conveniente fare un ultraprodotto non solo di $\mathbf{R}$ con la sua struttura di campo, ma di una intera *soprastruttura* che comprende sia $\mathbf{R}$, l'insieme delle parti di $\mathbf{R}$, l'insieme delle parti dell'insieme delle parti di $\mathbf{R}$ ecc. (si veda ad esempio l'articolo sull'handbook of mathematical logic, o la monografia di A.Robinson edita da Boringhieri).

La possibilità di impiego della analisi non standard sta non tanto nel fatto di aver costruito un campo reale non archimedeo che estende $\mathbf{R}$ (tali campi si possono costruire facilmente senza ricorrere agli ultraprodotti, basta ad esempio ordinare il campo delle frazioni $\mathbf{R}(x)$ in modo che la x risulti infinitesima), quanto nella possibilità di applicare il principio del trasferimento, che è garantito dal teorema di Los.

Esercizio 4.1 L'insieme degli infinitesimi è limitato superiormente e non ha un sup. Gli infinitesimi costituiscono quindi un sottoinsieme non definibile di $\mathbf{R}^*$.

5 Spazi topologici compatti

Sia X uno spazio topologico e sia F un filtro di sottoinsiemi di X. Diciamo che F *converge* ad $x \in X$, e scriviamo $F \to x$, se per ogni intorno aperto $\mathcal{O}_x$ di x, esiste $B \in F$ con $B \subseteq \mathcal{O}_x$.

Esempio 5.1 1. Il filtro di tutti gli intorni di x converge a x.

2. L'ultrafiltro di tutti gli insiemi che contengono x converge ad x.

3. In $\mathbf{R}$ il filtro di tutte le semirette sinistre $(a, +\infty)$, $a \in \mathbf{R}$, non converge a nessun punto di $\mathbf{R}$ (in un certo senso converge a $+\infty$.

Teorema 5.2 *Sono equivalenti:*

1. *X è compatto (ogni ricoprimento di aperti ha un sottoricoprimento finito).*

2. *Ogni collezione di insiemi chiusi con la proprietà dell'intersezione finita ha intersezione non vuota.*

3. *Ogni ultrafiltro converge.*

Dim. L'equivalenza tra (1) e (2) si ottiene immediatamente considerando i complementi.

Assumiamo (2) e sia U un ultrafiltro. In particolare U ha la proprietà dell'intersezione finita, e quindi esiste $x \in \bigcap_{B \in U} \overline{B}$. Ogni intorno aperto $\mathcal{O}_x$ di x ha intersezione non vuota con ogni $B \in U$, e quindi $U \cup \{\mathcal{O}_x\}$ ha la proprietà dell'interezione finita. Poichè U è un filtro massimale, ne segue $\mathcal{O}_x \in U$, e quindi U converge ad x.

Ora assumiamo (3) e sia F una collezione di insiemi chiusi con la proprietà dell'intersezione finita. Estendiamo F ad un ultrafiltro U (di insiemi non necessariamente chiusi) e sia x tale che $F \to x$. Ne segue che $x \in \bigcup_{B \in F} B$. QED

Sia $S_1(X)$ l'insieme degli ultrafiltri su X. Possiamo identificare $a \in X$ con l'ultrafiltro principale p_a generato da $\{a\}$ e pensare quindi a $S_1(X)$ come ad una estensione di X. Gli altri elementi di $S(X)$ sono dei "punti ideali". Possiamo mettere una topologia su $S_1(X)$ postulando che ogni aperto D di X determina un aperto D^* su $S(X)$ i cui elementi sono tutti e soli gli ultrafiltri p tali che $D \in p$. Vedremo che se X è una struttura del primo ordine, e se mettiamo su X una topologia i cui aperti basici sono gli insiemi definibili con parametri, allora $S_1(X)$ è uno spazio topologico di Hausdorff compatto e totalmente disconnesso (cioè con una base di aperti chiusi).