Istituzioni di Logica Matematica 2007-08
Parte sulle interpretazioni e teorie indecidibili

A. Berarducci

31 Dic. 2008

1 Interpretazioni e teorie Indecidibili

1.1 Proposizione. *Se T è decidibile e $T + \theta$ si ottiene da T aggiungendo l'assioma θ, allora $T + \theta$ è decidibile.*

Dimostrazione. Abbiamo $T + \theta \vdash \varphi$ sse $T \vdash \theta \to \varphi$. Quindi se T è decidibile lo è anche $T + \theta$. $\square$

Una estensione finita di una teoria T è una teoria che si ottiene da T con l'aggiunta di un numero finito di assiomi. Poiché un numero finito di assiomi equivale ad un singolo assioma (la loro congiunzione), otteniamo:

1.2 Corollario. *Se una estensione finita di una teoria T è indecidibile, allora T è indecidibile.*

Il viceversa non è vero: una teoria indecidibile potrebbe avere estensioni finite decidibili (ad esempio la teoria dei campi è indecidibile, ma la teoria dei campi di cardinalità due è decidibile).

1.3 Definizione. Una teoria T è essenzialmente indecidibile se ogni estensione coerente di T nello stesso linguaggio è indecidibile.

Si noti che per una teoria completa la essenziale indecidibilità equivale alla indecidibilità.

1.4 Definizione. Siano $A \subseteq \mathbb{N}$ e $B \subseteq \mathbb{N}$ due insiemi ricorsivamente enumerabili disgiunti. Diciamo che A e B sono ricorsivamente inseparabili se non esiste alcun insieme ricorsivo R che include A ed è disgiunto da B.

1.5 Teorema. *Esistono due insiemi ricorsivamente enumerabili $A \subseteq \mathbb{N}$ e $B \subseteq \mathbb{N}$ che sono ricorsivamente inseparabili.*

Dimostrazione. Sia $\varphi_e \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la funzione ricorsiva parziale con indice e. Sia $A = \{x \mid \varphi_x(x) = 0\}$ e $B = \{x \mid \varphi_x(x) = 1\}$. Chiaramente A e B sono ricorsivamente enumerabili e disgiunti. Se per assurdo esistesse un insieme ricorsivo R che include A ed è disgiunto da B consideriamo la sua funzione caratteristica

$\varphi_e \colon \mathbb{N} \to \{0,1\}$. Se $e \in R$ allora siccome φ_e è la funzione caratteristica di R abbiamo $\varphi_e(e) = 1$, e questo implica $e \in B$, che è assurdo essendo B disgiunto da R. Analogamente se $e \notin R$ allora $\varphi_e(e) = 0$ e quindi $e \in A$, che è di nuovo assurdo perchè A è disgiunto dal complemento di R. $\square$

1.6 Teorema. *Siano A e B due sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ ricorsivamente enumerabili. Allora esistono insiemi ricorsivamente enumerabili disgiunti $A' \subseteq A$ e $B' \subseteq B$ con $A' \cup B' = A \cup B$.*

Dimostrazione. Possiamo scrivere $A = \{x \mid \exists y \alpha(y,x)\}$ e $B = \{x \mid \exists z \beta(z,x)\}$ con α e β predicati ricorsivi. Sia $A' = \{x \mid \exists y(\alpha(y,x) \wedge \forall z < y \neg\beta(z,x))\}$ e $B' = \{x \mid \exists z(\beta(z,x) \wedge \forall y \leq z \neg\alpha(y,x))\}$. Allora A' e B' sono come desiderato. $\square$

1.7 Teorema. *La teoria Q è essenzialmente indecidibile.*

Dimostrazione. L'idea é di riprodurre entro Q la dimostrazione del teorema precedente. Siano dunque A, B due insiemi ricorsivamente enumerabili e ricorsivamente inseparabili. Possiamo scrivere $A = \{x \mid \mathbb{N} \models \exists y \alpha(y,x)\}$ e $B = \{x \mid \mathbb{N} \models \exists z \beta(z,x)\}$ con α e β formule binumerabili in Q (usando il fatto che tutti i predicati ricorsivi sono binumerabili in Q). Sia "$x \in A'$" un'abbreviazione per la formula $\exists y(\alpha(y,x) \wedge \forall z(\beta(z,x) \to y \leq z))$ e "$x \in B'$" un'abbreviazione per la formula $\exists z(\beta(z,x) \wedge \forall y(\alpha(y,x) \to \neg(y \leq z))$. Ne segue che Q (o addirittura una teoria senza assiomi) dimostra che non esiste alcun x che verifica sia $x \in A'$ che $x \in B'$, altrimenti, in corrispondenza di un tale x, ci sarebbero un y e un z che verificano entrambe le condizioni $y \leq z$ e $\neg(y \leq z)$.

Per inciso si noti che, per raggiungere questa contraddizione, non avremmo potuto utilizzare la formula $z < y$ in luogo di $\neg(y \leq z)$ in quanto Q non dimostra che l'ordine $\leq$ (che abbiamo definito a partire dal $+$) è totale. Questo è il motivo per cui le formule che definiscono A', B' nel teorema precedente non corrispondono esattamente a quelle che definiscono A', B' in questa dimostrazione.

Usando la binumerabilità di α e β (e il fatto che A, B sono disgiunti)è facile verificare che se $n \in A$ allora $Q \vdash \overline{n} \in A'$ e se $n \in B$ allora $Q \vdash \overline{n} \in B'$, dove $\overline{n} = s^n(0)$ è il termine che rappresenta il numero n. Per verificarlo si consideri, nel caso $n \in A$, il minimo $k \in N$ tale che $\alpha(\overline{n}, \overline{k})$. Si osservi che $Q \vdash \alpha(\overline{n}, \overline{k})$ e per ogni $m < k$ $Q \vdash \neg\beta(\overline{n}, \overline{m})$. Siccome i quantificatori limitati commutano con "$Q \vdash$" otteniamo $Q \vdash \forall z \leq \overline{k} \neg\beta(\overline{n}, z))$, che si può riscrivere nella forma equivalente $Q \vdash \forall z(\beta(\overline{n}, z) \to \neg(z \leq \overline{k}))$. Ne segue in base alle definizioni che $Q \vdash \overline{n} \in A'$. Analoghi ragionamenti valgono se $n \in B$. Sia ora $R = \{n \mid Q \vdash \overline{n} \in A'\}$. Per quanto detto R contiene A ed è disgiunto da B. Se Q fosse decidibile R sarebbe ricorsivo, contraddicendo la ricorsiva inseparabilità di A e B. $\square$

Diamo ora una seconda dimostrazione della essenziale indecidibilità di Q usando il teorema seguente.

1.8 Teorema. *Ogni teoria decidibile T ha una estensione decidibile completa.*

Dimostrazione. Sia $(\varphi_n \mid n \in \mathbb{N})$ una enumerazione ricorsiva (rispetto ad una fissata codifica) delle formule chiuse nel linguaggio L di T. L'esistenza di una tale enumerazione deve essere possibile affinché abbia senso parlare della decidibilità di T. Definiamo induttivamente una successione crescente di L-teorie coerenti $T_0 \subset T_1 \subset T_2 \ldots$ come segue. Poniamo $T_0 = T$. Supponendo induttivamente che T_n sia coerente, lo deve essere una delle due teorie $T_n \cup \{\varphi_n\}$ o $T_n \cup \{\neg\varphi_n\}$ (senza escludere che lo siano entrambe). Se si verifica il primo caso poniamo $T_{n+1} = T_n \cup \{\varphi_n\}$. Nel caso contrario poniamo $T_{n+1} = T_n \cup \{\neg\varphi_n\}$. In ogni caso T_{n+1} sarà dunque coerente. Ora poniamo $T' = \bigcup_n T_n$. Chiaramente T' è coerente (in quanto unione crescente di teorie coerenti) e completa (in quanto ogni φ_n o la sua negazione è un assioma di T'). Resta da dimostrare che è decidibile. Osserviamo che ogni singola T_n è una estensione finita della teoria decidibile T e quindi è decidibile. Ciò tuttavia non basta ancora a mostrare che T' è decidibile in quanto un'unione crescente di teorie decidibili può essere indecidibile. Osserviamo tuttavia che $T' \vdash \varphi_n$ se e solo se φ_n è un assioma di T_{n+1} (altrimenti lo sarebbe la sua negazione e T' risulterebbe incoerente). Basta quindi mostrare che esiste un algoritmo per stabilire, dato n, se φ_n è un assioma di T_{n+1}, ovvero se $T_n \cup \{\varphi_n\}$ è coerente. Per stabilirlo dobbiamo innanzitutto conoscere gli assiomi di T_n. Ne consegue che non conviene concentrarsi sulla sola domanda se φ_n sia un assioma di T_{n+1}, ma dobbiamo simultaneamente rispondere a tutte le domande della forma "$\varphi_i \in T_{n+1}$?". A tal fine conviene introdurre una notazione. Data una formula ϕ, scriviamo ϕ^0 per ϕ e ϕ^1 per $\neg\phi$. Si osservi che T_{n+1} è della forma $T \cup \{\varphi_0^{b_0}, \ldots, \varphi_n^{b_n}\}$ per un'opportuna successione binaria $b_0, \ldots, b_n$. Si tratta quindi di trovare un algoritmo per stabilire, dato n, quale sia la successione binaria giusta (tra le 2^{n+1} successioni possibili). Il primo criterio a cui la successione deve soddisfare è che $T \cup \{\varphi_0^{b_0}, \ldots, \varphi_n^{b_n}\}$ sia coerente, ovvero che T non dimostri la negazione di $\varphi_0^{b_0} \wedge \ldots \wedge \varphi_n^{b_n}$. Visto che T è decidibile, esiste un algoritmo che, ricevendo in input n, fa questa verifica. In generale possono però esserci più successioni che verificano questo criterio di coerenza in quanto per alcuni i entrambe le teorie $T_i \cup \{\varphi_i\}$ e $T_i \cup \{\neg\varphi_i\}$ possono essere coerenti. In tal caso, in base alle nostre definizioni, la successione cercata è quella con $b_i = 0$. Si vede quindi in generale che, tra tutte le successioni che verificano il criterio della coerenza, quella giusta è quella minimale rispetto all'ordine lessicografico, dove per definizione la successione $b_0, \ldots, b_n$ è lessicograficamente minore di $c_0, \ldots, c_n$ se, per il primo indice i in cui le successioni differiscono, si ha $b_i = 0$ e $c_i = 1$. Mettendo insieme il criterio della coerenza e il criterio della minimalità nell'ordine lessicografico otteniamo l'algoritmo desiderato. $\square$

Come corollario otteniamo una seconda dimostrazione della essenziale indecidibilità di Q.

1.9 Corollario. *Q è essenzialmente indecidibile.*

Dimostrazione. Sia T una teoria coerente contenente Q (nello stesso linguaggio). Se T fosse decidibile avrebbe una estensione completa T' decidibile. Ma una teoria decidibile è anche ricorsivamente assiomatizzabile (basta prendere come assiomi i suoi teoremi). Ma per il teorema di Rosser non esiste alcuna teoria coerente contenente Q che sia ricorsivamente assiomatizzabile e completa. $\square$

Introduciamo ora una definizione utile a confrontare due teorie in un linguaggio diverso.

1.10 Definizione. Sia A una L-struttura e sia B una L'-struttura. Diciamo che A è interpretabile in B se esiste una famiglia I di L'-formule

$\Delta(x)$ (detta dominio dell'interpretazione)
$\varphi_f(x_1, \ldots, x_n, y)$, per ogni simbolo di funzione n-ario f in L,
$\varphi_P(x_1, \ldots, x_n)$, per ogni simbolo di relazione n-ario P in L

tali che se definiamo $B_I := \{b \in B \mid B \models \Delta(b)\}$ allora l'insieme $\{(b_1, \ldots, b_n, b) \in {B_I}^{n+1} \mid B \models \varphi_f(b_1, \ldots, b_n, b)\}$ definisce il grafico di una funzione $f_I \colon {B_I}^n \to B_I$ e l'insieme $\{(b_1, \ldots, b_n) \mid B \models \varphi_P(b_1, \ldots, b_n)\}$ definisce una relazione n-aria P_I su B_I in modo tale che A è isomorfa alla struttura B^I che ha come dominio B_I e che interpreta f con f_I e P con P_I (per ogni f, P in L). In tal caso diciamo che I è una interpretazione della L-struttura $A \cong B^I$ in B.

1.11 Esempio. Usando il fatto che un numero intero è maggiore o uguale a zero se e solo se è la somma di quattro quadrati (teorema di Lagrange) osserviamo che la struttura $(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ è interpretabile nella struttura $(\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)$ tramite la seguente interpretazione I:

$$\begin{array}{lcl}
\Delta(x) & \equiv & \exists y_1, y_2, y_3, y_4 (x = {y_1}^2 + {y_2}^2 + {y_3}^2 + {y_4}^2) \\
\varphi_+(x_1, x_2, y) & \equiv & x_1 + x_2 = y, \\
\varphi_\cdot(x_1, x_2, y) & \equiv & x_1 \cdot x_2 = y \\
\varphi_\leq(x_1, x_2) & \equiv & \exists y (\Delta(y) \wedge x_1 + y = x_2)
\end{array}$$

1.12 Definizione. Sia $I = \langle \Delta(x), \varphi_f(\vec{x}, y), \varphi_P(\vec{x}) \mid f, P \in L \rangle$ una interpretazione della L-struttura A nella L'-struttura B. Per ogni L-formula $\theta(\vec{x})$ definiremo una L'-formula $\theta^I(\vec{x})$ in modo tale che per ogni $b_1, \ldots, b_n \in B_I$ si abbia $B^I \models \varphi(b_1, \ldots, b_n)$ se e solo se $B \models \theta^I(b_1, \ldots, b_n)$. La definizione di θ^I si basa sulle seguenti clausole induttive:

$$\begin{array}{lcl}
(\theta_1(\vec{x}) \vee \theta_2(\vec{x}))^I & \equiv & {\theta_1}^I(\vec{x}) \vee {\theta_2}^I(\vec{x}) \\
(\theta_1(\vec{x}) \wedge \theta_2(\vec{x}))^I & \equiv & {\theta_1}^I(\vec{x}) \wedge {\theta_2}^I(\vec{x}) \\
(\neg\theta(\vec{x}))^I & \equiv & \neg\theta^I(\vec{x}) \\
(\forall y \theta(y, \vec{x}))^I & \equiv & \forall y (\Delta(y) \to \theta^I(y, \vec{x})) \\
(\exists y \theta(y, \vec{x}))^I & \equiv & \exists y (\Delta(y) \wedge \theta^I(y, \vec{x})) \\
P(\vec{x})^I & \equiv & \varphi_P(\vec{x}) \\
(f(\vec{x}) = y)^I & \equiv & \varphi_f(\vec{x}, y)
\end{array}$$

Rimane da definire θ^I nel caso in cui θ sia una formula della forma $t_1 = t_2$ dove t_1 e t_2 sono L-termini qualsiasi. L'ultima clausola sopra data tratta un caso particolare di questo tipo di formule. Il caso generale si riduce al caso particolare introducendo dei quantificatori esistenziali per eliminare le composizioni di simboli di funzione. Ad esempio per definire $(f(g(x)) = y)^I$ usiamo l'equivalena $f(g(x)) = y \leftrightarrow \exists z(g(x) = z \wedge f(z) = y)$ e definiamo $(f(g(x)) = y)^I$ come $(\exists z(g(x) = z \wedge f(z) = y))^I$, dove ques'ultima è definita dalle clausole sopra date.

1.13 Osservazione. Se ci restringiamo a linguaggi finiti, la funzione che manda θ in θ^I è calcolabile.

1.14 Proposizione. *Per ogni L-formula θ e parametri $b_1, \dots, b_n \in B_I$ si ha $B^I \models \varphi(b_1, \dots, b_n)$ se e solo se $B \models \theta^I(b_1, \dots, b_n)$.*

Dimostrazione. Quando θ è una formula atomica della forma $f(\vec{x}) = y$ o $P(\vec{x})$ la tesi segue direttamente dalle definizioni. Se θ è ottenuta da formule più semplici applicando dei quantificatori o dei connettivi booleani il risultato segue facilmente per induzione. Se infine θ è una formula atomica della forma $t_1 = t_2$ il risultato segue dalla definizione di $(t_1 = t_2)^I$ riconducendosi ai casi precedenti. □

1.15 Definizione. Una interpretazione di una L-teoria T in una L'-teoria T' è una famiglia $I = \langle \Delta(x), \varphi_f(\vec{x}, y), \varphi_P(\vec{x}) \mid f, P \in L \rangle$ di L'-formule come sopra, tali che T' dimostra:

1. tutte le formule della forma θ^I dove θ è un assioma di T,
2. $\exists x \Delta(x)$,
3. tutte le formule della forma $(\forall x \exists! y f(\vec{x}) = y)^I$, dove f è un simbolo di funzione di L.

Ricordiamo che $\forall x \exists! y f(\vec{x}) = y$ è una abbreviazione per $\forall x \exists y \forall z (f(\vec{x}) = z \leftrightarrow z = y)$.

1.16 Esempio. L'aritmetica di Peano PA è interpretabile nella teoria degli insiemi ZF tramite la seguente interpretazione I:

1. 0 è interpretato come l'insieme vuoto $\emptyset$, ovvero $(x = 0)^I$ è la formula $(x = \emptyset)$.
2. $S(x)$ è interpretato come $x \cup \{x\}$, ovvero $(S(x) = y)^I$ è la formula $y = x \cup \{x\}$.
3. Il dominio $\Delta(x)$ dell'interpretazione è la fomula di ZF che dice che x appartiene a tutti gli insiemi che contengono $\emptyset$ e sono chiusi per la funzione "successore" $S_{ZF}(x) = x \cup \{x\}$.
4. $(x + y = z)^I$ è la formula di ZF che dice che esiste una funzione f tale che $f(\emptyset) = x$, $f(y) = z$, e tale che $\forall u \in \operatorname{dom} f$ si ha $S_{ZF}(u) \in \operatorname{dom} f$ e $f(S_{ZF} u) = S_{ZF}(fu)$. Indichiamo con $x +_{ZF} y = z$ la formula $(x + y = z)^I$ così definita.
5. $(x \cdot y = z)^I$ è la formula di ZF che dice che esiste una funzione f tale che $f(\emptyset) = \emptyset$, $f(y) = z$, e tale che $\forall u \in \operatorname{dom} f$ si ha $S_{ZF}(u) \in \operatorname{dom} f$ e $f(S_{ZF}(u)) = fu +_{ZF} x$.

Si può verificare che ZF dimostra l'interpretazione θ^I di tutti gli assiomi θ di PA. Cambiando la definizione di I si può dimostrare che basta in effetti ZF meno l'assioma dell'infinito per interpretare PA.

1.17 Proposizione. *Se I è una interpretazione della L-teoria T nella L'-teoria T', allora per ogni modello B di T risulta ben definita la L-struttura B^I (grazie ai punti (2) e (3)) e questa risulta un modello di T (grazie al punto (3) e alla Proposizione 1.14).*

1.18 Esempio. Per ogni modello M di ZF risulta ben definito un modello M^I di PA tramite l'interpretazione sopra data. Non tutti i modelli di PA però si ottengono in questo modo: ad esempio ogni modello di PA della forma M^I (con $M \models ZF$) soddisfa la formula $Con(PA)$ che esprime la coerenza di PA. Ciò dipende dal fatto che ZF dimostra l'interpretazione della formula che esprime la coerenza di PA. Questo suggerisce di rafforzare PA nel seguente modo. Definiamo T come la teoria nel linguaggio di PA che ha come assiomi tutte le formule θ tali che $ZF \vdash \theta^I$. Allora T è una teoria coerente con un insieme di assiomi ricorsivamente enumerabile che rafforza PA e tale che $T \vdash Con(PA)$ (ma per i teoremi di Gödel $T \nvdash Con(T)$).

1.19 Teorema. *Supponiamo che la L-teoria T sia interpretabile nella L'-teoria T'.*

1. *Se T' è coerente lo è anche T.*
2. *Supponiamo che T sia essenzialmente indecidibile. Allora T', se coerente, è essenzialmente indecidibile.*

Dimostrazione. Sia I l'interpretazione di T in T'.

Per il punto (1) basta osservare che se M è un modello di T', allora M^I è un modello di T.

Supponiamo ora che T' sia coerente e dimostriamo che è indecidibile. Definiamo a tal fine $S \supseteq T$ come la teoria nel linguaggio di T i cui assiomi sono gli enunciati θ tali che $T' \vdash \theta^I$. Abbiamo dunque $\theta \in Ax(T)$ se e solo se $T' \vdash \theta^I$. È facile vedere che la teoria S è deduttivamente chiusa, cioè i suoi assiomi coincidono con i suoi teoremi (posponiamo la verifica). Quindi $S \vdash \theta$ se e solo se $T' \vdash \theta^I$. Questo implica che S è coerente ($S \vdash \perp$ sse $T' \vdash \perp^I$), e che se T' fosse decidibile lo sarebbe anche S. Visto però che S non può essere decidibile (in quanto è coerente ed estende la teoria essenzialmente indecidibile T), nemmeno T' lo è.

Rimane da verificare che S è deduttivamente chiusa. Supponiamo pertanto che $S \vdash \theta$ e mostriamo che $\theta \in Ax(S)$, cioè $T' \vdash \theta^I$. Da $S \vdash \theta$ segue che esiste un insieme finito $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ di assiomi di S tale che $\sigma_1 \wedge \ldots \sigma_n \to \theta$ è logicamente valida. Poiché $\sigma_i \in Ax(S)$ abbiamo $T' \vdash {\sigma_i}^I$ per ogni i. D'altra parte $T' \vdash {\sigma_1}^I \wedge \ldots \wedge {\sigma_n}^I \to \theta^I$, in quanto altrimenti esisterebbe un modello M di T' che non soddisfa ${\sigma_1}^I \wedge \ldots \wedge {\sigma_n}^I \to \theta^I$ e questo è assurdo in quanto in tal caso il modello M^I di T non verificherebbe la formula logicamente valida $\sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_n \to \theta$.

Abbiamo così dimostrato che T' è indecidibile. L'essenziale indecidibilità segue dal fatto che se T è interpretabile in T' allora è anche interpretabile in qualsiasi estensione di T'. $\square$

1.20 Teorema. *Sia T una teoria essenzialmente indecidibile e finitamente assiomatizzata (ad esempio la teoria Q). Se T è interpretabile in una estensione coerente S di una teoria T', allora T' è indecidibile (ed S è essenzialmente indecidibile).*

Dimostrazione. Sia I l'interpretazione di T in S. Per definizione questo significa che S dimostra θ^I per ogni assioma θ di T e inoltre S dimostra che il dominio $\Delta(x)$ dell'interpretazione definisce un insieme non-vuoto chiuso rispetto alla interpretazione delle funzioni di $L(T)$. Siccome T è finitamente assiomatizzata, l'insieme di queste formule è finito, e pertanto per compattezza basta un sottoinsieme finito degli assiomi di S a dimostrarle. Ne segue che T è in effetti interpretabile in una sottoteoria finita S' di S, e quindi a maggior ragione è interpretabile in $T' + S'$. Quest'ultima essendo contenuta in S è coerente, ed interpretando T è indecidibile (anche essenzialmente). Poiché S' consiste di un insieme finito di assiomi possiamo concluderne che T' è indecidibile. $\square$

1.21 Corollario. *PA e ZF sono essenzialmente indecidibili.*

Dimostrazione. Q è interpretabile in PA (addirittura è contenuta in PA) che a sua volta è interpretabile in ZF. $\square$

1.22 Corollario. *Sia L un linguaggio con un simbolo di relazione binaria. L'insieme degli L-enunciati logicamente validi non è decidibile.*

Dimostrazione. Il linguaggio di ZF contiene solamente il simbolo di appartenenza. Possiamo assumere che il linguaggio L dell'ipotesi sia il linguaggio di ZF. Sia $T(L)$ la L-teoria con l'insieme vuoto di assiomi. I teoremi di $T(L)$ sono dunque gli L-enunciati logicamente validi. La teoria Q è interpretabile in ZF, che è una estensione coerente di $T(L)$. Ne segue che $T(L)$ è indecidibile. $\square$

Analogamente, considerando Q o PA invece di ZF, si dimostra che se L è un linguaggio con almeno due simboli di funzione binaria e due simboli di costante (come il linguaggio di PA), allora l'insieme degli L-enunciati logicamente validi è indecidibile. In effetti si può dimostrare che per ogni linguaggio con almeno un simbolo di funzione binaria l'insieme degli enunciati logicamente validi è indecidibile. Se il linguaggio L contiene solo simboli di relazioni unarie e simboli di costante, allora l'insieme degli L-enunciati validi è decidibile.

1.23 Teorema. *La teoria completa $Th(\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)$ è indecidibile.*

Dimostrazione. Per i teoremi di Gödel sappiamo che $Th(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ è essenzialmente indecidibile. In $\mathbb{Z}$ possiamo definire i numeri naturali come quei numeri interi che sono somma di quattro quadrati. Questo mostra che $Th(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ è interpretabile in $Th(\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)$ tramite l'interpretazione I data dalle seguenti formule:

$$\begin{array}{lcl}\Delta(x) & \equiv & \exists y_1, y_2, y_3, y_4 (x = {y_1}^2 + {y_2}^2 + {y_3}^2 + {y_4}^2) \\ \varphi_+(x_1, x_2, y) & \equiv & x_1 + x_2 = y, \\ \varphi_\cdot(x_1, x_2, y) & \equiv & x_1 \cdot x_2 = y\end{array}$$

Possiamo concludere che $Th(\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)$ è indecidibile. $\square$

1.24 Teorema. *La teoria degli anelli commutativi è indecidibile.*

Dimostrazione. Poiché $(\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)$ è un anello commutativo, la teoria degli anelli commutativi è contenuta nella teoria di $(\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)$. Siccome Q è interpretabile in quest'ultima, possiamo concludere con una applicazione del Teorema 1.20. $\square$

1.25 Teorema. *La teoria completa $Th(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1)$ è essenzialmente indecidibile.*

Dimostrazione. (Cenno) Si dimostra che $Th(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ è interpretabile in $Th(\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)$ usando un risultato di Julia Robinson che mostra che l'insieme $\mathbb{N}$ è definibile in $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1)$. $\square$

1.26 Teorema. *La teoria dei campi è indecidibile.*

Dimostrazione. Q è interpretabile in $Th(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ che è interpretabile in $Th(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1)$. Quest'ultima è una estensione coerente della teoria dei campi. Ne segue che in base al Teorema 1.20 che la teoria dei campi è indecidibile. $\square$

1.27 Fatto. La teoria dei campi non è essenzialmente indecidibile.

Infatti Tarski ha dimostrato che le teorie complete del campo $\mathbb{R}$ e del campo $\mathbb{C}$ sono decidibili. È un problema aperto, posto da Tarski, se la teoria della struttura $(\mathbb{R}, +, \cdot, \exp)$ è decidibile, dove $\exp(x) = e^x$.