Istituzioni di Logica Matematica

I semestre, a.a. 2007-2008, Dipartimento di Matematica, Pisa
Codice esame AA103, 45 ore, 7 crediti. Anno di corso: non specificato
Prof. Alessandro Berarducci

Programma d'esame

Calcolo proposizionale. Formule proposizionali, Tautologie, Conseguenza logica, Sistema dimostrativo dei tableaux. Il tableaux di una formula proposizionale permette di calcolarne una forma normale disgiuntiva (disgiunzione delle foglie del tableaux). Dimostrazione del teorema di completezza proposizionale nel caso finito, e riduzione del caso generale al caso finito tramite il teorema di compattezza. Due forme equivalenti del teorema di compattezza: i) ogni teoria finitamente soddisfacibile ha un modello, ii) se una formula è conseguenza di una teoria, è conseguenza di una sottoteoria finita. Dimostrazione del teorema di compattezza nel caso numerabile tramite il Lemma di König, e nel caso generale tramite il lemma di Zorn (considerando le estensioni finitamente soddisfacibili massimali). Applicazioni del teorema di compattezza proposizionale e/o del Lemma di König. Tassellazioni del piano tramite tessere di Hao Wang (se sono tassellabili quadrati arbitrariamente grandi, lo è anche tutto il piano). Un grafo infinito non κ-colorabile ammette un sottografo finito non κ-colorabile (esercizio).

Calcolo dei predicati. Linguaggi del primo ordine. Espansione del linguaggio con nuove costanti per denotare gli elementi di una data struttura. Semantica di Tarski dei termini e delle formule. Se il dominio è finito la semantica è costruttiva. Tableaux predicativi. Teorie complete. Teorie di Henkin. Teoremi di completezza (per i tableaux) e di compattezza. Riduzione al caso di linguaggi senza uguaglianza come simbolo logico. Classi elementari di strutture. Esempi: gruppi, anelli, campi, grafi, multigrafi. Applicazioni del teorema di compattezza. Non elementarità di varie classi di strutture (gruppi finiti, grafi connessi, buoni ordini, grafi finiti, etc.). Cenni alla logica del secondo ordine. I grafi connessi sono assiomatizzabili al secondo ordine. Una teoria che ha modelli finiti arbitrariamente grandi ne ha uno infinito. Esistenza di modelli della teoria degli insiemi i cui numeri naturali (visti dall'esterno del modello) non sono bene ordinati. Costruzione di un modello numerabile della teoria degli insiemi meno l'assioma dell'infinito basato sugli sviluppi binari. Gerarchia di von Neumann: a livello $\omega + \omega$ si ottiene un modello di ZF meno il rimpiazzamento (cenno). Teoremi di Lowenheim-Skolem verso il basso e verso l'alto e prime conseguenze: modelli numerabili di ZF (se coerente) e non numerabili di PA. Teorie κ-categoriche.

Completezza delle teorie κ-categoriche. $\aleph_0$-categoricità della teoria degli ordini lineari densi e della teoria del grafo casuale. Altri criteri per la completezza di una teoria: giochi di Erenfeucht-Fraïssè e completezza della teoria degli ordini discreti (cenno). Esercizio: la somma sui naturali non è definibile al primo ordine usando zero e successore.

Calcolabilità. Insiemi ricorsivi e ricorsivamente enumerabili. Teorie decidibili (ovvero tali che l'insieme dei teoremi è ricorsivo). Esempi: teoria dei reali, teoria dei complessi (senza dim.). Teorema di Post. Una teoria ricorsivamente assiomatizzata e completa è decidibile. Formalizzazione della nozione di funzione calcolabile: macchine di Turing, macchine a registri, funzioni mu-ricorsive. Tesi di Church. Simulazione della ricursione primitiva e della minimializzazione con una macchina a registri. Caratterizzazioni equivalenti degli insiemi ricorsivamente enumerabili: X è il dominio di una funzione ricorsiva parziale, se e solo se è l'immagine di una ricorsiva totale (se non vuoto), se e solo è definibile premettendo un quantificatore esistenziale a un predicato ricorsivo. La minimalizzazione limitata non fa uscire dalla classe dei predicati primitivi ricorsivi. Gli insiemi Δ_0 definibili sono primitivi ricorsivi. Esempio: l'insieme dei numeri primi è primitivo ricorsivo. Codifica delle successioni tramite scomposizione in primi. Codifica tramite la funzione beta di Gödel. Ricursione sul decorso dei valori. La funzione di Ackermann è mu-ricorsiva totale ma non primitiva ricorsiva (cenno). Il predicato di Turing (la macchina numero e su input x termina in t passi con output y) è primitivo ricorsivo (senza dim.). Indecidibilità del problema della fermata. Non enumerabilità ricorsiva dell'insieme degli indici delle funzioni ricorsive totali. Gerarchia aritmetica.

Teorie formali dei numeri naturali. Aritmetica di Robinson Q. Aritmetica di Peano PA (del primo ordine). Definizione della relazione $<$ nel linguaggio dell'aritmetica. Modelli non standard di PA. La teoria completa dei numeri naturali (con somma e prodotto) ha modelli non standard. Struttura d'ordine dei modelli non standard. Gli enunciati Δ_0 sono decidibili in Q. Gli enunciati Σ_0^1 veri in $\mathbb{N}$ sono dimostrabili in Q. Rappresentabilità delle funzioni calcolabili in $\mathbb{N}$ (con somma e prodotto). Gli insiemi della gerarchia aritmetica coincidono con gli insiemi definibili in $\mathbb{N}$. Binumerabilità funzionale delle funzioni calcolabili in Q (e a maggior ragione in PA o nella teoria completa del modello standard) tramite formule Σ_1^0. Codifica della sintassi. L'insieme delle codifiche delle formule è primitivo ricorsivo. La funzione sostituzione è primitiva ricorsiva. L'insieme delle codifiche degli assiomi di PA è primitivo ricorsivo. Il predicato di dimostrabilità in PA è primitivo ricorsivo (senza dim.). L'insieme dei teoremi di PA è ricorsivamente enumerabile. Idem per teorie ricorsivamente assiomatizzabili. Lemma di diagonalizzazione. Teorie ω-coerenti. Per teorie ω-coerenti contenenti Q le formule Σ^0_1 dimostrabili coincidono con quelle vere in $\mathbb{N}$. Primo teorema di Gödel: ogni teoria ω-coerente ricorsivamente assiomatizzabile contenente Q è incompleta (ad esempio PA). Secondo teorema di Gödel: PA non dimostra la sua coerenza. (Dimostrazione usando le condizioni di derivabilità.) La teoria PA + $\neg$Con(PA) non è omega-coerente. Teorema di Rosser: ogni estensione coerente ricorsivamente assiomatizzata di Q è incompleta. Insiemi ricorsivamente inseparabili. La teoria Q di Robinson è essenzialmente indecidibile (ogni sua estensione coerente è indecidibile). Teorema di Church: il calcolo dei predicati è indecidibile. Una estensione finita di una teoria decidibile è decidibile. Indecidibilità della teoria dell'anello dei numeri interi (usando il teorema dei quattro quadrati di Lagrange per ridursi a $\mathbb{N}$). Interpretazioni tra teorie. Indecidibilità della teoria degli anelli commutativi e dei campi usando il metodo delle interpretazioni.

TESTI DI RIFERIMENTO

Dispense del docente. http://www.dm.unipi.it/~berardu/

Barwise, Handbook of Mathematical Logic.

Bell & Machover, A course in mathematical logic.

Mendelson, Logica Matematica.

Shoenfield, Logica Matematica.