26 settembre 2007



$T$ = insieme di assiomi
Vogliamo dare un senso a $T \vdash \varphi$.
Vogliamo dare delle regole universali.
Esistono regole universali per fare le dimostrazioni indipendenti da $T$ e da $\varphi$.

Teorema di completezza $(T \vdash \varphi) \Leftrightarrow (T \models \varphi)$
($\models$ conseguenza logica) esiste una dimostrazione formale se e solo se modelli$(T) \subseteq$ modelli$(\varphi)$
oppure
$\forall M$ modello di $T$ $M$ rende vera $\varphi$.
oppure
esiste una dimostrazione oppure esiste un contromodello.

$T$ è contraddittoria $\Leftrightarrow$ $T$ non ha modelli
$(T \vdash \perp) \Leftrightarrow (T \models \perp)$ $\perp$ = falso
$A \in \neg A$

Teorema di completezza di Gödel (1930)
Questo teorema è indipendente dalla completezza dell'insieme di assiomi.

Teorema di incompletezza di Gödel (1931):
Esistono $\varphi$ $ZF \nvdash \varphi$ e $ZF \nvdash \neg\varphi$.
$\not\models$ $\not\models$

Teorema. $ZFC = ZF + AC$ e $ZF$ (Gödel 1941)
$ZF \nvdash \neg(IC)$
$ZF \nvdash IC$ (Cohen 1963)
$IC$ = ipotesi del continuo.

Formula $G$ = "ZF è coerente".

Esistono modelli numerabili di ZFC. Teorema di Löwenheim–Skolem $\downarrow$

PA ha modelli non numerabili. Teorema di Löwenheim–Skolem $\uparrow$

(2) Questi due teoremi L S ↑ e ↓ dipendono dal teorema di compattezza

Teorema di compattezza. $(T \models \varphi) \Leftrightarrow \exists T' \underset{fin}{\subseteq} T \; T' \models \varphi$

($\models$ simbolo semantico)
($\vdash$ simbolo sintattico)

Il teorema è falso per teorie del 2° ordine cioè teorie che fanno riferimento ai sottoinsiemi ($PA^{(2)}$, reali: ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ ammette sup).

Supponiamo che $PA^{(2)}$ abbia un solo modello. Consideriamo $T = PA^{(2)} \cup \{c > 0, c > S0, c > SS0, \ldots\}$. Questa teoria non ha modelli quindi semanticamente segue l'assurdo ($\models \bot$).

La compattezza genera dei modelli non standard.

Numeri reali non standard.
$Th(\mathbb{R}^{(1)}) \cup \{0 < c < \frac{1}{2}, 0 < c < \frac{1}{3}, \ldots\}$, dove $c$ è un infinitesimo.

Teoria della calcolabilità.
$\{\varphi \mid PA^{(1)} \vdash \varphi\} \subsetneq \{\varphi \mid \varphi \text{ vere in } \mathbb{N}\}$

| | |
|---|---|
| formule dimostrabili insieme ricorsivamente enumerabile | insieme non ricorsivamente enumerabile |

Bell e Machover Matematical logic.
Mendelson, logica Matematica (incompletezza)
Shoenfield Logic Matem (tutto, difficile)
Handbook of Matematical logic (raccolta di articoli)

## Tavole di verità



| $A$ | $\neg A$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

| $AB$ | $A \wedge B$ | $A \vee B$ (vel) | $A \to B$ | $A \leftrightarrow B$ | $A \oplus B$ (aut) |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 01 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 10 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 11 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

$x > 5 \to x > 2$ È vero anche se $x = 4$.

$(A \leftrightarrow B) \equiv (A \to B) \wedge (B \to A)$ confrontiamo le tavole di verità.

$A \oplus B \equiv (A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$

$\neg, \wedge$ sono una base: tutto si può ottenere da questi due simboli

$\neg, \vee$ base

$\neg, \to$ base

Leggi di De Morgan: $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$

$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$

In presenza della negazione $\neg$, $\wedge$ e $\vee$ sono interdefinibili

$\neg(A \to B) \equiv A \wedge \neg B$

$A \to B \equiv \neg(A \wedge \neg B) \equiv \neg A \vee B$

$\neg(A \to \neg B) \equiv A \wedge B$

Una base genera tutti i connettivi immaginabili

(4)

| A B C | if A then B else C |
|---|---|
| 0 0 0 | 0 |
| 0 0 1 | 1 |
| 0 1 0 | 0 |
| 0 1 1 | 1 |
| 1 0 0 | 0 |
| 1 0 1 | 0 |
| 1 1 0 | 1 |
| 1 1 1 | 1 |

## Formule proposizionali.

L = insieme di variabili proposizionali.
A, B, C, ... Ogni variabile è una formula.
1) $L' \subset$ formule
2) $\varphi, \psi$ formule $\Rightarrow \neg\varphi, (\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \to \psi)$ sono formule.
L'unico piccolo insieme che verifica queste due definizioni è una buona definizione, cioè è una definizione induttiva!

Albero di derivazione:

$$\cfrac{\cfrac{A \quad B}{(A \wedge B)} \qquad \cfrac{B \quad C}{(B \to C)}}{((A \wedge B) \vee (B \to C))}$$

Ogni formula ha un unico albero di derivazione. Questo non è più vero se si tolgono le parentesi.

E' importante che la sintassi non sia ambigua affinché la semantica non sia ambigua.

Esercizio: dimostrare che la grammatica definita da 1) e 2) non è ambigua.

5 Esercizio: trovare una grammatica non ambigua che minimizzi il numero di parentesi.

## Semantica

T insieme di formule, $\varphi$ formula.

Strutture = valutazioni booleane.

$v : L \to \{0,1\}$

$v$: formule $\to \{0,1\}$

$v(\varphi \wedge \psi) = ((\varphi \wedge \psi))^v = \min(\varphi^v, \psi^v)$

$((\varphi \vee \psi))^v = \max(\varphi^v, \psi^v)$

$(\neg\varphi)^v = 1 - \varphi^v$

Tautologie $\subseteq$ Formule

$\varphi$ è una tautologia se è vera in tutti i modelli cioè $\forall v (\varphi^v = 1)$, oppure $\models \varphi$).

Conseguenza logica: $\models$

$T \models \varphi \iff \forall v \; T^v = 1 \Rightarrow \varphi^v = 1$.

T insieme di formule $T^v = 1 \underset{def}{\iff} \forall \psi \in T \; \psi^v = 1$.

L'assassino è il professore o l'assessore ma non è il professore quindi è l'assessore.

$\{A \vee B, \neg A\} \models B$ oppure $\models ((A \vee B) \wedge \neg A) \to B$

28 settembre 2007

L insieme di variabili proposizionali

Esercizio. $L \subset L'$ $T \models_L \varphi \iff T \models_{L'} \varphi$

$\neg A, A \vee B \models B$ è vero sia in $L = \{A, B\}$ che in $L' = \{A, B$ ... perché C non vi è coinvolto.

# Metodo dei tableaux

## (Regole semantiche)

Modo per stabilire se una formula ha un modello oppure no (in un primo caso proposizionale e poi predicativo).

Regole: 1) $\Sigma, \varphi \vee \psi$   $\Sigma$ insieme di formule

$$\Sigma, \varphi \qquad \Sigma, \psi$$

Se $\varphi \vee \psi$ ha un modello allora o $\varphi$ o $\psi$ ha un modello

2) $\Sigma, \varphi \wedge \psi$   ha un modello se e solo se $\Sigma, \varphi, \psi$ ha un modello!

$$\Sigma, \varphi, \psi$$

3) $\Sigma, \neg\neg\varphi$

$$\Sigma, \varphi$$

4) $\Sigma, \neg(\varphi \vee \psi)$

$$\Sigma, \neg\varphi, \neg\psi$$

5) $\Sigma, \neg(\varphi \wedge \psi)$

$$\Sigma, \neg\varphi \qquad \Sigma, \neg\psi$$

$\Sigma$ insieme di formule $\varphi, \psi$ singole formule

$\Sigma, \varphi = \Sigma \cup \{\varphi\}$ Le virgole rappresentano delle "e".

6) $\Sigma, \varphi \to \psi$

$$\Sigma, \neg\varphi \qquad \Sigma, \psi$$

7) $\Sigma, \neg(\varphi \to \psi)$

$\Sigma, \varphi, \neg\psi$

Ci si ferma quando si trova una formula e la sua negazione.

Esempio: $\neg\{[(A \wedge B \to B \vee C) \wedge (B \to A) \wedge (C \to B)] \vee \neg\neg A\}$ (*)
Questa formula è di tipo α.

$\neg[(A \wedge B \to B \vee C) \wedge (B \to A) \wedge (C \to B)], \neg\neg A$

$\neg[(A \wedge B \to B \vee C) \wedge (B \to A) \wedge (C \to B)], A$

$\neg((A \wedge B \to B \vee C) \wedge (B \to A)), A \qquad \neg(C \to B), A$

$\neg(A \wedge B \to B \vee C), A \qquad \neg(B \to A), A \qquad \underline{C, \neg B, A}$

$A \wedge B, A \qquad \neg(B \vee C), A \qquad \underline{B, \neg A, A}$

$A \wedge B, \neg B, \neg C, A$

$A, B, \underline{\neg B}, \neg C, A$

(*) ha un modello perché esiste almeno un ramo non contraddittorio
$A = 1, \; B = 0, \; C = 1$
Con questi valori la (*) è vera.
Abbiamo quindi dimostrato che
(*) $\Longleftrightarrow C \vee \neg B \vee A$

In ogni foglia ci può essere soltanto una formula o il suo contrario.

Con il metodo dei tableaux si possono usare solo le regole 1 ... 7 indipendentemente dalle tavole di verità.

(8)

Forme normali disgiuntive:

$(\ldots \wedge \ldots \wedge \ldots) \vee (\ldots \wedge \ldots \wedge \ldots) \vee (\ldots \wedge \ldots)$

al posto dei puntini appaiono A e B ecc lettere e sue negazioni.

Teorema. $\Gamma$ insieme finito di formule
$\Gamma$ non ha modelli $\Leftrightarrow$
$\exists$ tableaux chiuso con radice $\Gamma$

$\Leftarrow$ induzione sul numero dei passaggi $n$

$\Gamma$ è chiuso
(chiuso vuol
dire che
tutte le foglie
non hanno
modelli)

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & & \Gamma \\ | & & \wedge \\ \Gamma' & & \Gamma_1 \quad \Gamma_2 \\ | & & | \qquad | \\ & & \text{chiuso} \quad \text{chiuso} \end{array} \Bigg\} n$$

$\Rightarrow$ induzione sul numero di $\wedge$ o $\vee$
ogni passo che otteniamo ha un numero di $\wedge$ o $\vee$ minore di quello sopra.

In formule il teorema può essere scritto:

$\Gamma \vDash \bot \Leftrightarrow \Gamma \vdash_{\text{tableaux}} \bot$ (teorema di completezza)

Questo metodo però serve solo per dimostrare contraddizioni.

Definiamo $\Gamma \vdash \varphi \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \Gamma, \neg\varphi \vdash \bot$,

tutte le dimostrazioni con i tableaux sono dimostrazioni per assurdo.

Osservazione $\Gamma \vDash \varphi \Leftrightarrow \Gamma, \neg\varphi \vDash \bot$

$\Gamma \vDash \varphi \Leftrightarrow \Gamma \vdash_{\text{tableaux}} \varphi$

(9)

Teorema (Cut elimination)

Se aggiungo la regola del cut

$$\frac{\Gamma}{\Gamma, \varphi \qquad \Gamma, \neg\varphi}$$

dove $\varphi$ è una nuova formula, si ha

$$\Gamma \vdash_{cut} \bot \iff \Gamma \vdash \bot$$

$\Leftarrow$ banale $(\Gamma \vdash \bot \Rightarrow \Gamma \vdash_{cut} \bot)$

$\Rightarrow$

Questa regola accorcia notevolmente le dimostrazioni.

Modus ponens: $T \vdash A,\ T \vdash A \to B \Rightarrow T \vdash B$

$\vdash$ = dimostra.

Il modus ponens è un esempio di regola di cut.

Sia $T$ un sistema infinito di formule.

Def. $T \vdash_{tab} \bot \iff \exists \Gamma \underset{finito}{\subset} T \quad \Gamma \vdash_{tab} \bot$

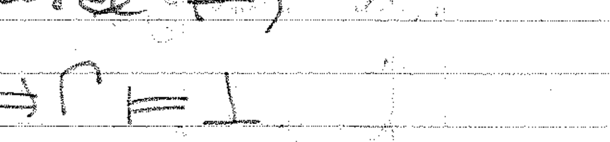
Teorema di compattezza proposizionale

$$T \models \bot \iff \exists \Gamma \underset{finito}{\subset} T \quad \Gamma \models \bot$$

(è l'equivalente della definizione in cui $\models$ sostituisce $\vdash$)

Completezza. $\Gamma \vdash \bot \iff \Gamma \models \bot$

Esempio. Hao Wang.



Numero finito di tipi, e infinite per ogni tipo

È possibile piastrellare tutto il piano? In questo caso ino

Esercizio. Supponiamo che con alcune piastrelle di forma ricoprire 1/4 di ~~detto~~ piano, allora si può ricoprire tutto il piano. Si usa il teorema di compattezza.

Teorema. Bastano quattro colori per colorare il mappamondo

Lemma di Koenig. Un grafo infinito a ramificazione finita ha un ramo infinito.

3 ottobre 2007

Teorema compattezza 2ª versione
Se $\forall T' \subseteq_{\text{finito}} T$ $\exists$ modello $M_{T'}$ di $T' \Rightarrow T$ ha un modello

1ª versione

$$T \underset{\vdash}{\models} \varphi \Leftrightarrow \exists T' \subseteq_{\text{finito}} T \quad T' \underset{\vdash}{\models} \varphi$$

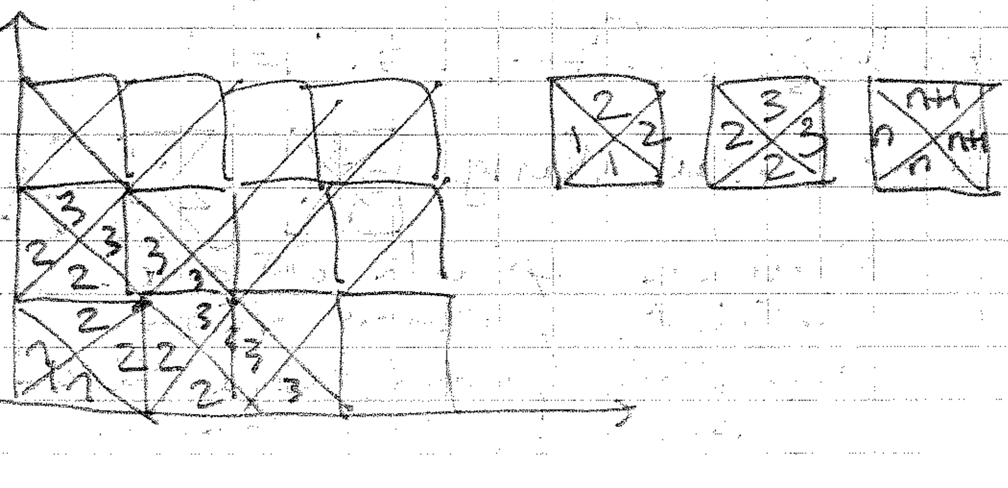
$1 \Rightarrow 2$: basta prendere $\varphi = \bot$

$2 \Rightarrow 1$: $T \models \varphi \qquad T' \models \varphi$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$T, \neg\varphi \models \bot$$

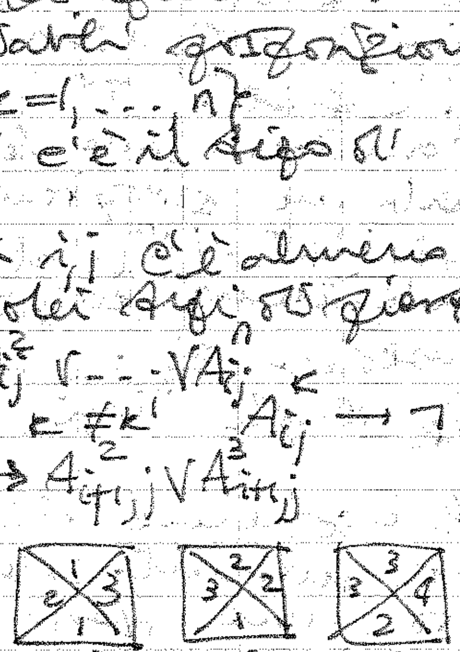
Hao Wang:



Teorema. Se ho un numero finito di tipi di piastrelle e posso ricoprire un quadrante allora posso ricoprire il piano.

Dimostrazione con la compattezza
Trovare una teoria proposizionale T tale che Modelli (T) $\underset{\text{biunivoca}}{\cong}$ Ricoprimenti del piano

Dove la teoria T dipende dai tipi.
Bisogna assiomatizzare l'insieme dei ricoprimenti del piano:
L insieme di variabili proposizionali
$L = \{A^k_{ij} \mid i,j \in \mathbb{Z} \quad k = 1, \dots, n\}$
in posizione $i,j$ c'è il tipo di piastrella $k$
Assiomi di T: 1) data $i,j$ c'è almeno uno dei tipi di piastrelle
$$A^1_{ij} \vee A^2_{ij} \vee \dots \vee A^k_{ij}$$
2) data $k \neq k'$ $\quad A^k_{ij} \to \neg A^{k'}_{ij}$
3) $A^1_{ij} \to A^2_{i+1,j} \vee A^3_{i+1,j}$



1° 2° 3°

$$A^k_{ij} \to \bigvee A^s_{i,j-1} \quad s \in I$$

l'assioma dipende dai tipi di piastrelle.

Struttura $= f:$ Variabili $\to \{0,1\}$
Una struttura che verifica 1) 2) 3) si dice modello
Dato un ricoprimento sia $f:$ Variabili $\to \{0,1\}$
$$f(A^k_{ij}) = \begin{cases} 1 & \text{se nel ricoprimento in posizione } i,j \text{ c'è la piastrella } k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(12) Pertanto dato un ricoprimento si può trovare un modello
Viceversa dato un modello R in cui la posizione $i,j$ c'è il tipo $k$ se e solo se $f(A_{ij}^k) = 1$
R è un ricoprimento quindi soddisfa gli assiomi

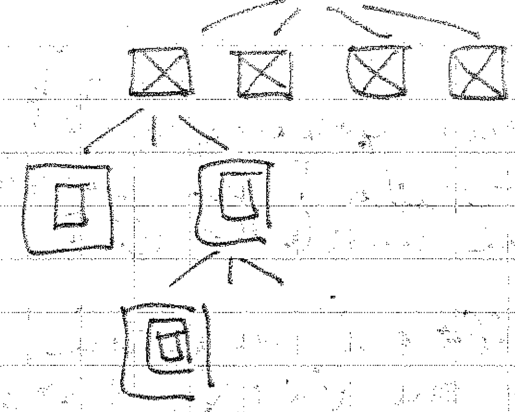
Supponiamo che possa ricoprire un quadrante con i tipi dati.
Basta mostrare che T ha un modello.
Per la compattezza (ancora da dimostrare) basta dimostrare che $\forall T' \subset$ finito $T$ $T'$ ha un modello.
$T'$ contiene solo le $A_{ij}^k$ con $-N < i, j < N$.
Dato un ricoprimento del quadrato $[-N, N] \times [-N, N]$ (che esiste perché sappiamo ricoprire un quadrante)
considero $f_R : \{A_{ij}^k \mid |i|, |j| < N\} \to \{0,1\}$,
$f_R$ rende veri tutti gli assiomi di $T'$.

Il teorema di compattezza non vale per infiniti elementi perché non possiamo fare una disgiunzione infinita.

Esercizio un grafo non necessariamente planare, infinito può essere colorato con 5 colori se e solo se tutti i suoi sottoinsiemi finiti possono essere colorati con 5 colori.

Seconda soluzione del teorema di Hao Wang usando il teorema di Koenig.
Supponiamo che con le date piastrelle posso ricoprire un quadrante.
Costruiamo un albero fatto così:

13



ricoprimento 1x1

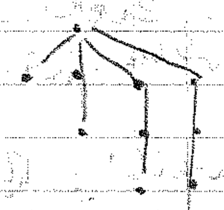
Albero dei tentativi di ricoprire il piano

3x3

5x5

Questo albero ha infiniti livelli.
Ogni nodo ha un numero finito di figli.
Allora esiste una successione infinita per Koenig: $a_0 a_1 a_2 \ldots$ con $a_{i+1}$ figlio di $a_i$.
Questo ramo infinito dà un ricoprimento del piano basta prendere l'unione del ramo.

Il lemma di Koenig è falso se si toglie l'ipotesi di un numero finito di figli



etc.

Dimostrazione del lemma di Koenig
Il capostipite ha una discendenza infinita quindi almeno uno dei figli ha una discendenza infinita.
Costruisco il ramo infinito
$a_0$ = radice
$a_{i+1}$ = uno dei figli di $a_i$ con discendenza infinita.
(non si è usato AC)

Il lemma di Koenig dimostra la compattezza se L è numerabile
(dimostrare per esercizio)

(14) Dimostrazione compattezza con $L$ numerabile.

$L = \{A_i \mid i \in \mathbb{N}, i \neq 0\}$

Sia $T$ una $L$-teoria proposizionale
tale che ogni $T' \subset$ finito $T$ ha modello
Voglio trovare un modello di $T$.

Definizione: un albero è un ordine parziale
$(V, \leq)$ tale che $\forall v \in V$ ($v$ vertice)
$\{x \mid x \leq v\}$ è linearmente
ordinato e finito.

Costruisco un albero $A_T$ associato alla teoria $T$
a livello $n$ ci metto le funzioni
$f : \{A_1, \dots, A_n\} \to \{0,1\}$ tale che $f$ rende
veri gli assiomi di $T$ coinvolgenti solo
le prime $n$ variabili.
$f : \{A_1 \dots A_n\} \to \{0,1\}$ è figlia di $g : \{A_1 \dots A_{n-1}\} \to \{0,1\}$
se $g \subset f$.
Devo verificare che $A_T$ verifica le
ipotesi di Koenig, cioè ha infiniti
livelli e ogni livello ha un numero
finito di figli.
$A_T$ ha infiniti livelli. Dato $n$ gli assiomi
di $T$ nelle prime $n$ variabili possono essere
infiniti però a meno di equivalenze
sono finiti ($\leq 2^{n}$).
Scelgo $T' \subset T$ finito che le contiene tutte.
Sia $M \models T'$ ($M$ modello di $T'$)
$M = f$ (funzione) $: \{A_1 \dots A_n\} \to \{0,1\}$
$f \in A_T$ a livello $n$.
$f$ ha $\leq 2^{n+1}$ figli.
Koenig $\exists\, f_0 \subset f_1 \subset f_2 \subset \dots$
$f_{i+1}$ figlia di $f_i$ $\quad f_i : \{A_1 \dots A_i\} \to \{0,1\}$
$F = \bigcup_i f_i$
Allora $F \models T$ ($F$ verifica $T$ teoria
verifica tutti i
suoi assiomi)

(15)

Caso $L$ non numerabile
$T$ $L$-teoria tale che ogni sottoteoria finita ha un modello (cioè è finitamente soddisfacibile)
Vogliamo mostrare che $T$ ha un modello.

Caso facile: supponiamo che $\forall$ formula $\varphi$ $\varphi \in T$ o $\neg\varphi \in T$. Se ci stessero entrambe $\{\varphi$ e $\neg\varphi\}$ sarebbe un sottoinsieme finito senza modello
Definisco $f$ così: data $A \in L$ $f(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } A \in T \\ 0 & \text{se } A \notin T \end{cases}$
Gli atomi e le negazioni degli atomi che stanno in $T$ vengono resi veri da $f$.
Dimostro per induzione che $\varphi \in T \Rightarrow \varphi^f = 1$
$\varphi \notin T \Rightarrow \varphi^f = 0$
induzione sul numero dei connettivi di $\varphi$.
base: $\varphi = A, \neg A$
$\varphi = (\alpha \vee \beta) \in T \Rightarrow \alpha \in T$ o $\beta \in T$ se no $\neg\alpha \in T, \neg\beta \in T$ e $\{\alpha\vee\beta, \neg\alpha, \neg\beta\} \subset T$ non ha modello.
Per ipotesi induttiva $\alpha^f = 1$ o $\beta^f = 1 \Rightarrow (\alpha\vee\beta)^f = 1$

$\varphi = (\alpha \vee \beta) \notin T \Rightarrow \neg(\alpha\vee\beta) \in T \Rightarrow \neg\alpha \in T$ e $\neg\beta \in T$
Altrimenti $\alpha \in T$ $\beta \in T$ e $\{\alpha, \beta, \neg(\alpha\vee\beta)\} \subset T$ sarebbe un sottoinsieme di $T$ senza modello.
$\Rightarrow \alpha^f = 0, \beta^f = 0 \Rightarrow (\alpha\vee\beta)^f = 0$

Se $\varphi = \neg\alpha \in T \Rightarrow \alpha \notin T \Rightarrow \alpha^f = 0 \Rightarrow (\neg\alpha)^f = 1$

05 ottobre 2007

Teorema di compattezza: $T$ finitamente soddisfacibile $\Rightarrow$ $T$ soddisfacibile
Caso $L$ numerabile: fatto con il lemma di König

(16) Caso L non numerabile.

Sotto caso: T L-teoria finitamente soddisfacibile tale che per ogni formula $\varphi$ $\varphi \in T$ o $\neg\varphi \in T$.

Sia $f: L \to \{0,1\}$ $f(A) = \begin{cases} 1 & A \in T \\ 0 & A \notin T \end{cases}$, verifico che $\forall \varphi \in T$ $\varphi^f = 1$ $A \in L$.

Verifico $\varphi \in T \Leftrightarrow \varphi^f = 1$ (*)

$\varphi \notin T \Leftrightarrow \varphi^f = 0$

Se $\varphi$ è atomica è vero per definizione

$\alpha \vee \beta \in T \Rightarrow \alpha \in T$ o $\beta \in T$ (se no $\{\neg\alpha, \neg\beta, \alpha \vee \beta\} \subset T$ assurdo perché sarebbe un sottinsieme finito senza modello).

per ipotesi induttiva $\alpha \in T$ è vera nel modello (*) o $\beta \in T$ è vera nel modello (*).

$\neg(\alpha \vee \beta) \in T \Rightarrow (\alpha \vee \beta) \notin T \Rightarrow \alpha \notin T$, $\beta \notin T$ (se $\alpha \in T$ $\{\neg(\alpha \vee \beta), \alpha\} \subset T$)

$\Rightarrow \alpha^f = 0$ $\beta^f = 0 \Rightarrow (\alpha \vee \beta)^f = 0$

Teorema. T finitamente soddisfacibile $\Rightarrow$ T soddisfacibile

Dimostrazione. Basta T finitamente soddisfacibile $\Rightarrow \exists T' \supseteq T$ finitamente soddisfacibile dicotomica ($\varphi \in T$ o $\neg\varphi \in T$) $L(T') = L(T)$

Teoria per definizione è una coppie ordinata un assioma e linguaggio

(17) Lemma. $\varphi$ formula $T$ finitamente soddisfacibile ($\varphi$ non necessariamente in $T$) allora $T\cup\{\varphi\}$ è finitamente soddisfacibile o $T\cup\{\neg\varphi\}$ è finitamente soddisfacibile

Questo stesso lemma è vero senza le parole soddisfacibile ed è ovvio.

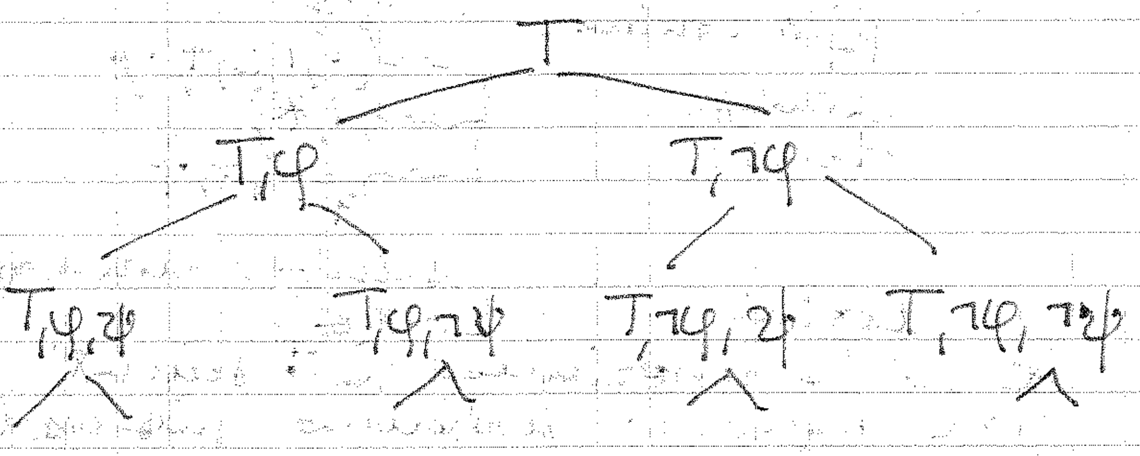
Con "finitamente": se per assurdo nessuna delle due è finitamente soddisfacibile $\Rightarrow \exists T' \subseteq_{\text{finito}} T$

$T'\cup\{\varphi\}$ non ha modello

$T'\cup\{\neg\varphi\}$ non ha modello

$\Rightarrow T'$ non ha modello.

$$T \underset{\text{otteniamo}}{\rightsquigarrow} \bar{T} = \begin{cases} T\cup\{\varphi\} & \text{se finitamente soddisfacibile} \\ T\cup\{\neg\varphi\} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$




Perché il lemma di König alla fine ci sarà un ramo di formule finitamente soddisfacibili.

$L$ numerabile   $L$-formule numerabile

$T_0 = T$

$$T_{n+1} = \begin{cases} T_n\cup\{\varphi_n\} & \text{se finitamente soddisfacibile} \\ T_n\cup\{\neg\varphi_n\} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$T^* = \bigcup_n T_n$ è finitamente soddisfacibile o che formule e quindi ha un modello che è modello anche per $T$

(18)

L non numerabile:
sia $P = \{L\text{-teorie GDT fin-sodd.}\}$
ordiniamo P per inclusione $(P, \subseteq)$
Applico il lemma di Zorn:
ogni catena in P ha un maggiorante
cioè la sua unione
$\{G_i \mid i \in I\} \subset P$; $G_i \subset G_j$ o $G_j \subset G_i$
$\Rightarrow \bigcup G_i \in P$
Quindi esiste un massimale

Possiamo fare la stessa dimostrazione usando induz. ordinale.

## Quantificatori

Esempi di teorie:

| | | linguaggio |
|---|---|---|
| 1) | ZF | $L = \{\in\}$ |
| | PA (1° ordine) | $L = \{0, 1, S, +, \cdot\}$ |
| | Gruppi | $L = \{1, *\}$ |
| | Anelli | $L = \{0, 1, +, \cdot\}$ |

simboli non logici

| | |
|---|---|
| Ordini | $L = \{\leq\}$ |

Se $=$ lo inseriamo nei simboli non logici lo possiamo interpretare come vogliamo.
Se lo inseriamo tra i simboli logici il suo valore resta stabilito una volta per sempre.

Arietà: $L \to \mathbb{N}$

| | | |
|---|---|---|
| $0$ | $0$ | funzione |
| $1$ | $0$ | " |
| $+$ | $2$ | " |
| $S$ | $1$ | " |
| $\leq$ | $2$ | relazione |
| $\in$ | $2$ | " |
| $=$ | $2$ | " |

(19) Il linguaggio è una tripla: arietà simbolo tipo di simbolo.

La arietà dice se un linguaggio è unario o binario

L-formule : V variabili individuali

$\varphi ::=$ Atomiche $| (\varphi \vee \varphi') | (\varphi \wedge \varphi') | \neg\varphi | \forall x \varphi' | \exists x \varphi'$

Le variabili proposizionali le penso come cose vere o false.

$(x+(x+(x+x))) = (x+x)$
termine termine.

Una formula atomica è o una formula del tipo (termine = termine) o del tipo $R(t_1, \dots, t_k)$ R è simbolo di relazione di arietà $k$ $x \leq y$

I termini sono variabili, costante (= funzione di arietà 0) oppure funzione applicate ad altri termini.

Questa è la sintassi.

10 ottobre 2007

L = linguaggio primo ordine = insieme di simboli di costante relazione, funzione.

Se un linguaggio contiene solo costanti e relazioni viene chiamato linguaggio relazionale.

Per evitare di scrivere = per esempio possiamo usare un predicato

$x+y=z \longrightarrow$ somma$(x,y,z)$

$(x+y)+z=a \to \exists w[\text{somma}(x,y,w) \wedge \text{somma}(w,z,a)]$

Questa formula non è più atomica

In maniera equivalente:

$$\forall w[\text{somma}(x,y,w) \to \text{somma}(w,z,a)]$$

Questa funziona perché $\forall x,y\, \exists!\, w(\text{somma}(x,y,w))$

Esempi di formule:

1) Assiomi dei campi $\forall x(\overset{\neg(x=0)}{x\neq 0} \to \exists y\ \overset{\cdot(x,y)}{xy}=1)$
questa è una L-formula

L-termini: $x$, $x\cdot y$, $1$
in generale: $f(t_1,\dots,t_n)$, $c$, $x$

formule: $\forall x\varphi$, $\exists x\psi$, ...

Albero di derivazione,

$\forall x(x\neq 0 \to \exists y\ xy=1)$

$x\neq 0 \to \exists y\ xy=1$

$x\neq 0$ $\quad\quad$ $\exists y\ xy=1$

$xy=1$

$xy$ $\quad\quad$ $1$

$x$ $\quad$ $y$

Questo albero è unico.

(21) Notazione polacca: $(A \wedge B) \vee C = \vee \wedge A B C$

$$\underbrace{\wedge AB}\ \ \underbrace{C}$$

Questo linguaggio non è ambiguo.

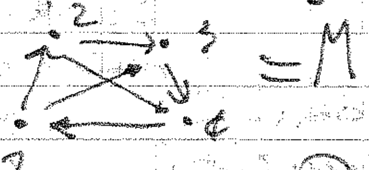
L-struttura: M è un insieme $\neq \emptyset$ chiamato dominio della struttura ed è definita una funzione interpretazione tale che
$c \mapsto c^M \in dom(M)$
$f \mapsto f^M : dom(M)^n \to dom(M)$
$R \mapsto R^M \subseteq dom(M)^n$ (R relazione)

Esempio: sia $L = \{*, 1\}$ una struttura binaria e una costante
Si possono formare due strutture su questo linguaggio:

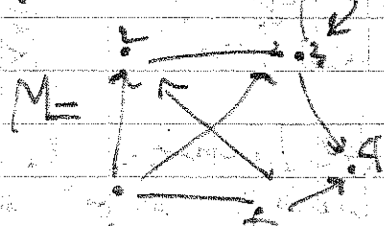
$(\mathbb{Q}, *^M, 1^M) = M$ $\quad *^M : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$
usuale moltiplicazione
$1^M \in \mathbb{Q} = 1$

$(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ indica una struttura dove al primo posto c'è il dominio.

Un grafo può essere interpretato come linguaggio $L = \{E\}$ (E struttura binaria. dom $M = \{$vertici$\} = \{1,2,3,4\}$
$E^M \subseteq$ vertici$^2$ $= \{(12)(13)(34)(14)(23)\}$



Sia M un multigrafo



(22) $\mathbb{R} \models \forall x (x \neq 0\ \exists y\ xy = 1)$ è vero in $\mathbb{R}$
$\mathbb{Z} \not\models \forall x (x \neq 0\ \exists y\ xy = 1)$

Per la semantica di Tarski ho:

$$\mathbb{R} \models \forall x (x \neq 0\ \exists y\ xy = 1) \overset{\text{def}}{\iff} \forall x \in \mathbb{R}\ \ \mathbb{R} \models (x \neq 0 \to \exists y (xy = 1))$$

$$(\mathbb{R} \models x \neq 0) \Rightarrow (\mathbb{R} \models \exists y\ (xy = 1))$$
$$\exists y \in \mathbb{R}\ \ xy = 1$$

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \ x \neq 0 \to \exists y \in \mathbb{R} : x \cdot^{\mathbb{R}} y = 1^{\mathbb{R}}$$

La semantica di Tarski dice che
$\forall$ vuol dire per ogni elemento del
dominio e $\exists$ vuol dire esiste un
elemento del dominio

$\pi \neq 0$ non è una formula perché
in $\mathbb{R}$ c'è $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$.

Prima si fissa un linguaggio $L$
poi si definisce una $L$-struttura $M$
poi si definisce $L[M] = L \cup \{ \underline{a} \mid a \in \text{dom} M \}$

Esempio: $L = \{0, 1, +, \cdot\}$
$M = (\mathbb{R}, 0^{\mathbb{R}}, 1^{\mathbb{R}}, +^{\mathbb{R}}, \cdot^{\mathbb{R}})$ $L$ struttura
$L[M] = \{0, 1, +, \cdot, \underline{\pi}, \underline{\sqrt{2}}, \underline{1}, \underline{0}, \dots\}$
questo è un nuovo
tipo di linguaggio (esteso)
Creiamo una nuova struttura $M_M$
tale che: $\text{dom}(M_M) = \text{dom}(M)$

| | | | |
|---|---|---|---|
| costanti | $c$ | $c^{M_M}$ | $c^M$ |
| funzioni | $f \in L$ | $f^{M_M}$ | $= f^M$ |
| relazioni: | $R$ | $R^{M_M}$ | $R^M$ |

Definisco la verità di una $L[M]$-formula
chiusa (cioè senza variabili libere) in $M_M$

$$M_M \models \forall x \varphi \iff \forall a \in \text{dom} M\ \ M \models \varphi(\underline{a}/x)$$

(23) $a/x$ noi sostituiamo $\underline{a}$ $\quad (M_M(\underline{c}) = c)$

$M \models \exists x\varphi \Leftrightarrow \exists a \in \text{dom } M \;\; M \models \varphi(\underline{a}/x)$

Per questa semantica interpretiamo i connettivi con le tavole di verità:

$M \models (\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow (M \models \psi) \text{ e } (M \models \varphi)$

$M \models \neg\varphi \Leftrightarrow \text{non } (M \models \varphi)$

L-formule atomiche (senza $\neg \vee \wedge \exists \forall$) cioè una relazione applicata a costanti o variabili: $R(t_1, \dots, t_n)$

$M \models R(c_1, \dots, c_n) \Leftrightarrow (c_1^M, \dots, c_n^M) \in R^M$

Esempio $\mathbb{R} \models \underline{\pi} < 1 \Leftrightarrow \pi = (\underline{\pi})^{\mathbb{R}} <^{\mathbb{R}} 1^{\mathbb{R}}$

$(\pi, 1) \in (<)^{\mathbb{R}}$

L'insieme delle L-formule è non vuoto se e solo se o c'è $=$ o almeno esiste una relazione.

L'insieme delle formule atomiche chiuse è non vuoto se esiste almeno una relazione e una costante.

$$L \to M \to L[M] \to M_M$$

chiamiamo $M_M = M$ per semplicità di notazione.

$(M \models \varphi) \quad \varphi^M = 1$
$(M \not\models \varphi) \quad \varphi^M = 0$

Vogliamo dimostrare queste due formule senza usare per ogni volta l'esatto.

(24) Caso atomico: $R(e_1,\dots,e_n)^M = (e_1^M \dots e_n^M) \in R^M$

Caso generale:

$$(\forall x\varphi)^M = \min_{a \in dom(M)} \varphi(\underline{a}/x)^M$$

$$(\exists x\varphi)^M = \max_{a \in dom(M)} \varphi(\underline{a}/x)^M$$

$$(\varphi \wedge \psi)^M = \min(\varphi^M, \psi^M)$$

$$(\varphi \vee \psi)^M = \max(\varphi^M, \psi^M)$$

$$(\neg\varphi)^M = 1 - \varphi^M$$

Abbiamo definito per induzione

$f : L[M]$ formule chiuse $\to \{0,1\}$

$f(\varphi) = \varphi^M$

Definizione induttiva di sostituzione:

$$(\varphi \wedge \psi)(\underline{a}/x) = \varphi(\underline{a}/x) \wedge \psi(\underline{a}/x)$$

$\vee$ $\vee$

$$(\neg\varphi)(\underline{a}/x) = \neg\varphi(\underline{a}/x)$$

$$(\forall y\varphi)(\underline{a}/x) = \forall y(\varphi(\underline{a}/x))$$

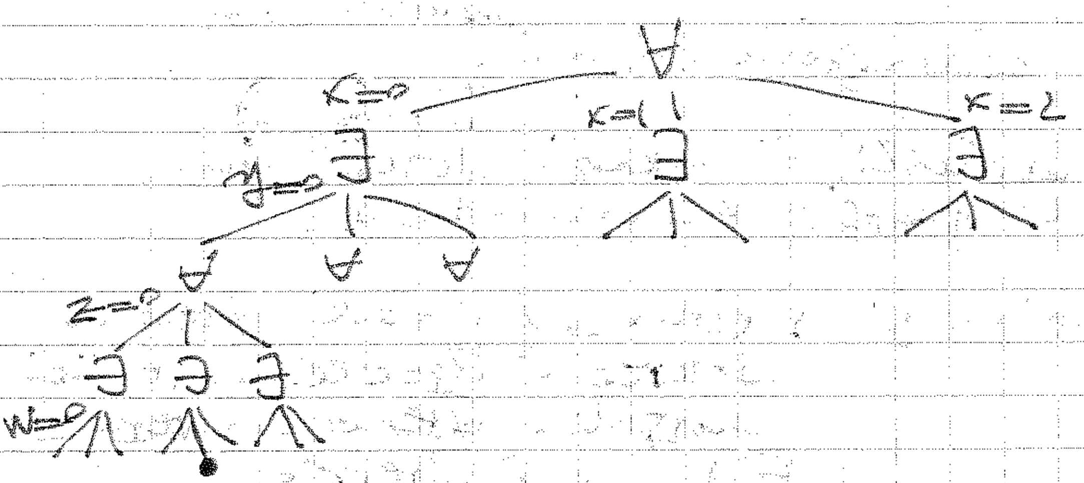
$$(\forall x\varphi)(\underline{a}/x) = \forall x\varphi$$

$\exists$ analogo.

$\varphi$ è chiusa se per ogni variabile $x$ e per ogni costante $c$ $\varphi(c/x) = \varphi$.

Osservazione. Se $dom(M)$ è finito la definizione di verità è costruttiva.

25 Esercizio 4.12 $\models \forall x \forall y \forall z \exists w \; xyyz = wx+zy+1$




$0001 = 1\cdot0+1\cdot0+1$ vera, formula atomica

Nel caso finito otteniamo un algoritmo nel caso infinito non possiamo controllare tutti i casi.

Una L-teoria è una coppia (T,L) dove T è un insieme di L formule chiamate assiomi.

$\mathrm{Mod}(T) = \{M \mid M\text{-struttura } \forall \varphi \in T \ \varphi^M = 1\}$

$(T,L) \models \varphi \Leftrightarrow \mathrm{Modelli}(T) \subset \mathrm{Mod}(\varphi)$

Rispetto al caso proposizionale c'è la differenza che lì venivano definite le valutazioni booleane.

Una classe K di strutture si dice elementare se esiste (T,L) tale che $K = \mathrm{Mod}(T,L)$

Esempi: gruppi, campi, anelli, spazi vettoriali, grafi simmetrici

Non esempi: gruppi finiti, grafi connessi

(26) Assiomi per i grafi: $L = \{E\}$

Assiomi $= \emptyset$

E relazione binaria

$T = \{\emptyset, L\}$

Quindi i grafi sono un linguaggio elementare.

Multigrafi: dom $=$ {vertici, frecce}

source : frecce $\to$ vertici

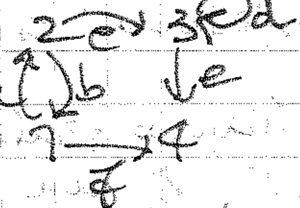
target : frecce $\to$ vertici

$F(x)$ $x$ è freccia

$V(x)$ $x$ è un vertice

($F$ e $V$ sono predicati)

12 ottobre 2007

Multigrafi $M =$ 

$\text{dom}(M) = \{\underbrace{1,2,3,4}_{\text{vertici}}, \underbrace{a,b,c,d,e,f}_{\text{frecce}}\}$

$L = \{V, F, C\}$ $V, F$ predicati unari; $C$ predicato ternario

$V \subseteq M$ vertici

$F \subseteq M$ frecce

$C(x,y,z) \Leftrightarrow y$ è una freccia da $x$ a $z$.

Assiomi: $\forall x\, (V(x) \vee F(x))$

$\forall x\, (V(x) \to \neg F(x))$

$\forall x,y,z\ \ C(x,y,z) \to V(x) \wedge F(y) \wedge V(z)$

$\forall y\, (F(y) \to \exists (x,z\ \ V(x) \wedge V(z) \wedge C(x,y,z)))$

I multigrafi sono una classe elementare, assiomatizzata con i modelli di T.

(27) L linguaggio M L-struttura, $\varphi$ L formula chiusa

$\varphi$ è vera in M $\varphi^M = 1$ $M \models \varphi$.

Si definisce il concetto di verità non solo per L-formule ma anche per L[M]-formule

Esempio. $L = \{0, 1, +, \cdot\}$ su $\mathbb{N}$ L struttura

Congettura di Goldbach:

$\varphi = \forall x (\exists v \; x = v + v \wedge x > 1+1 \to \exists p, q \; P(p) \wedge P(q) \wedge \wedge x = p + q)$

$\mathbb{N} \models \varphi \Leftrightarrow$ Goldbach

Sia T un insieme di alcune L-formule vere in N

$T \models \varphi \; (\Leftrightarrow T \vdash \varphi) \overset{?}{\Longleftrightarrow} Mod(T) \subseteq Mod(\varphi)$

$PA^{(1)}$, $L = \{0, 1, +, \cdot, s\}$
$$\begin{cases} sx \neq 0 \\ sx = sy \to x = y \\ y \neq 0 \to \exists x \; sx = y \end{cases} \qquad M \xrightarrow{\sim} M \setminus \{0\}$$

$$\begin{cases} x + 0 = x \\ x + sy = s(x+y) \end{cases} \qquad \begin{matrix} x \cdot 0 = 0 \\ x \cdot sy = xy + x \end{matrix}$$

$\forall P (P_0 \wedge (\forall x \; Px \to P(x+1)) \to \forall y \; Py$
non è una formula perché quantifica su predicati

Data $\varphi$ ho l'assioma $\varphi(0) \wedge \forall x (\varphi(x) \to \varphi(x+1)) \to \forall y \varphi(y)$
$\forall \vec{v}$, cioè per ogni scelta di parametri.

$\forall \vec{v} \left( \varphi(0/x) \wedge \forall x (\varphi(x) \to \varphi(x+1/x)) \to \forall y \; \varphi(y/x) \right)$

(28) Per il primo ordine si ha:

$$PA^{(1)} \vdash \varphi \Leftrightarrow PA^{(1)} \models \varphi$$

2° ordine. $PA^{(2)} \models \varphi \Leftrightarrow \mathbb{N} \models \varphi$.

L= linguaggi relazionali e/ costanti, relazioni }

Come nel caso proposizionale si ha il teorema di compattezza
T è finitamente soddisfacibile $\rightarrow$ T soddisfacibile

Corollario. $\exists M \models PA^{(1)}$ $(M \not\cong \mathbb{N})$.

Per assurdo $M \models PA^{(1)} \Leftrightarrow M \cong \mathbb{N}$
Ottieniamo una teoria $L(T) = \{0, 1, S, +, \cdot, c\}$
$Ax(T) = PA^{(1)} \cup \{c \neq 0, c \neq 1, c \neq 1+1, c \neq 1+1+1 \ldots\}$
T è finitamente soddisfacibile!
$\Rightarrow$ (per il teorema di compattezza
T ha un modello M.
L'interpretazione del simbolo c in M è diversa dall'interpretazione

$c^M \in M$ $c^M \neq (1+1+1)^M$, $M_L \not\cong \mathbb{N}$

Restringere il linguaggio dà luogo ad una L-struttura
$M_L \models PA^{(1)}$
Ci sono modelli di $PA^{(1)}$ non isomorfi a $\mathbb{N}$ come sono fatti?

$M \models T$ $M = \{0, 1, 2, 3, \}$

$x, x, x$

$\mathbb{Z}[X] = \{a_n x^n + \ldots + a_0, a_0\} \cup \{0\} \not\models PA^{(1)}$ non è un modello di Peano 2.

(29) $\varphi(x) \equiv 2 \mid x \vee 2 \mid x+1$

$\exists v\,(2v = x \vee, \ 2v = x+1)$ $\quad 2 = 1+1$

$M \models \quad \varphi(0)$
$\quad\quad \forall x(\varphi(x) \to \varphi(x+1))$
$\quad\quad \neg \forall x\, \varphi(x)$

$\Rightarrow M \not\models PA$ M non è modello di PA al primo ordine.

$M \models PA^{(1)} \Rightarrow (M, \leq)$ è un ordine totale

$x \leq y \Leftrightarrow \exists z : x+z = y \quad , \forall y \leq x \wedge y \leq x$

Quindi $M \not\models PA^{(1)}$

$(M, \leq) = \mathbb{N}$ + copie di $\mathbb{Z} = \mathbb{N} + (\mathbb{Z} \times I)$

$I = (I, <)$ è un insieme denso

$N = (\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$ $\quad (z, q) + (z', q') = \ldots$

$PA^{(1)} \subseteq Th(\mathbb{N}) = \{\varphi \mid \mathbb{N} \models \varphi\}$

teoria completa

ha modelli $\not\cong \mathbb{N}$

$T' = Th(\mathbb{N}) \cup \{c \neq 0, c \neq 1, c \neq 1+1, \ldots\}$
$T'$ è non standard però verifica tutte le congetture al 1° ordine.

Una teoria che ha un solo modello a meno di isomorfismo si chiama categorica

Una teoria può essere completa, incompleta o categorica.

(30) Esercizio. $\nexists T$ la classe dei grafi finiti non è elementare cioè
grafi finiti $\neq Mod(T)$

Per assurdo (grafi finiti) $= Mod(T)$
$L = \{E\}$

$T' = T \cup \{\exists^{\geq 1}, \exists^{\geq 2}, \exists^{\geq 3}, \ldots\}$

$\exists^{\geq 2} = \exists x \exists y\, (x \neq y)$

T' è finitamente soddisfacibile
$\Rightarrow$ è soddisfacibile per compattezza
Assurdo.

Se ho modelli finiti di cardinalità arbitrariamente grande ho un modello infinito. Possiamo sostituire sopra a grafi finiti campi finiti.

Proprietà che non usa l'$=$:
$(\exists z\, E(x,z) \wedge \neg E(y,z)) \longrightarrow x \neq y$
$\uparrow$
x è in relazione con z.

Esercizio. Grafo connesso non orientato
$E(x,y) \leftrightarrow E(y,x)$

Un grafo è $M = (V, E)$ $E \subset V^2$ insieme di due vertici
$= \text{archi}$

Al secondo ordine $\neg\exists A, B$ predicati unari tali che $\forall x\, Ax \vee Bx$
$\forall x\, Ax \rightarrow \neg Bx$
$\exists x\, Ax \wedge \exists x\, Bx$
$\forall xy\, Ax \wedge By \rightarrow \neg E(x,y)$

cioè al secondo ordine possiamo possiamo dare la definizione di grafi connessi.

③ $\forall T$ al primo ordine grafi connessi $\neq Mod(T)$.

Per assurdo $Mod(T) = $ (grafi connessi)

$T' = T \cup \{d>0, d>1, d>2, \ldots\}$

$L(T') = \{E, a, b\}$, $d(a,b)>1 \iff \neg E(a,b)$

$d(a,b)\geq 2 \iff \neg E(a,b) \wedge$
$\wedge \neg\exists z (E(a,z) \wedge E(b,z))$

$d(a,b)>3 \iff d\geq 2 \wedge \neg \exists z,w$
$E(a,z) \wedge E(z,w) \wedge E(w,b)$

etc.

$T'$ è finitamente soddisfacibile $a \cdots b$
ma non è soddisfacibile.

Esercizio. $\forall k$ cardinale $Th(N)$ ha modelli di cardinalità $\geq k$.

sia $T = Th(N) \cup \{\underline{e} \neq \underline{e}' \mid e, e' \in L' \text{ distinti}\}$

$L = \{\underline{e} \mid e \in I\}$ $|I| = k$

$T$ è finitamente soddisfacibile
$\Rightarrow$ per compattezza è soddisfacibile

Esercizio. In ZF l'assioma di fondazione
$\neg\exists f \ \ dom(f) = \omega \ \ \forall n \ f(n+1) \in f(n)$
da questo discende che non esiste un insieme con $x = \{x\}$.

Se ZF è coerente $\exists (M, E) \models ZF$
tale che $\exists (a_n \mid n \in N)$ $a_i \in M$
$a_0 \ni a_1 \ni a_2 \ldots$

Esercizio. La classe dei buoni ordini non è elementare

17 ottobre 2007

Non esiste nessuna teoria del primo ordine che assiomatizza i buoni ordini cioè

Buoni ordini $\neq$ modelli(T)

e

$$L(T) = \{\leq\}$$

Per assurdo $\exists T$, Buoni ordini $=$ Mod(T)

$T' = T \cup \{c_{n+1} < c_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ dove nel linguaggio consideriamo un insieme infinito di elementi

$$L(T') = \{\leq, c_0, c_1, \dots\}$$

$T'$ è al tempo stesso coerente e non coerente cioè ha un modello e non lo ha.

Infatti: $M' \models T'$

$$\underbrace{(\text{dove } M', <^{M'}, c_n^{M'})}_{M'|_L}$$

Quindi $T'$ non ha modelli ma ogni suo sottoinsieme ~~qual~~ finito ha modelli, ma per compattezza se ogni sottoinsieme finito ha un modello tutto ha un modello.

Esistono modelli di ZF in cui $\mathbb{N}$ non sono ben ordinati.

(33) Teorema di compattezza.
Sia T una L-teoria finitamente soddisfacibile (cioè ogni sottoinsieme finito ha un modello) allora T è soddisfacibile.

Dimostrazione. Come nel caso proposizionale posso ricondurmi al caso $\exists T' \supset T$ $L(T') = L(T)$ $\forall$ L-formule chiuse $\varphi$: $\varphi \in T'$ o $\neg\varphi \in T'$

Definizione. Una L-teoria T è di Henkin se per ogni L-formula chiusa ~~chiusa~~ $\exists x \varphi(x)$ ($VL(\varphi) \subset \{x\}$) esiste una costante $c \in L$ tale che $[\exists x \varphi(x) \to \varphi(c)] \in T$, cioè è un assioma.

Esempio. $\underset{\shortparallel}{Th}(\mathbb{R})$ $L = \{0, 1, +, \cdot\}$
$\{\varphi \mid \varphi^{\mathbb{R}} = 1\}$ completa, però

Definizione. T è completa se $\forall \varphi \in L$ chiusa $T \models \varphi$ o $T \models \neg\varphi$

Th($\mathbb{R}$) non è di Henkin
Infatti consideriamo una formula $\exists x (x^2 = 2)$: non esiste $\sqrt{2}$ nel linguaggio, dove $\sqrt{2}$ non è costante né chiusa cioè non può essere ottenuta come $1+1+1+\ldots$

Esempio Th($\mathbb{N}$) $L = \{0, 1, +, \cdot\}$ è di Henkin rispetto ai termini chiusi.
Sia $\exists x \varphi(x)$ una formula chi è t tale che $[\exists x \varphi(x) \to \varphi(t)] \in Th(\mathbb{N})$.
Se è falsa come t prendo uno qualunque, o per esempio.

(34) $\exists x \varphi(x)^{\mathbb{N}} = 0$ (cioè se è falso in $\mathbb{N}$)
quindo $t = 0$
$\exists x \varphi(x)^{\mathbb{N}} = 1$ (cioè se è vero in $\mathbb{N}$)
esiste $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(\underline{n})^{\mathbb{N}} = 1 \Rightarrow \varphi(t)^{\mathbb{N}} = 1$

sia $t = \underbrace{1 + \dots + 1}_{n \text{ volte}}$ $t^{\mathbb{N}} = \underline{n}^{\mathbb{N}} = n$

Lemma. Se $T$ è una $L$-teoria soddisfacibile allora $\exists L' \supseteq L$ $\exists L'$-teoria $T' \supseteq T$ soddisfacibile di Henkin.

Sottolemma. Sia $\exists x \varphi(x) \in L$ chiusa e sia $c$ una nuova costante $\notin L$
$L' = L \cup \{c\}$. Sia $T' = T \cup \{\exists x \varphi(x) \to \varphi(c)\}$
$T$ soddisfacibile $\to \exists T'$ soddisfacibile
$\exists M \models T \to \exists M' \models T'$
$L$ $\qquad L \cup \{c\}$

$\operatorname{dom} M' = \operatorname{dom} M$
$R^{M'} = R^{M}$ $R \in L$
$c^{M'}$ = un elemento qualunque $a \in \operatorname{dom} M$ tale che $M \models \varphi(\underline{a})$ se c'è
= un qualunque elemento arbitrario se non c'è.

$M = (\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$, $M' = (\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, \sqrt{2})$
interpretazione di $c$.

$M' \models T$ ($M'$ verifica $T$) $\Leftrightarrow M \models T$

$M' \models \exists x \varphi(x) \Leftrightarrow M \models \exists x \varphi(x)$
$c^{M'} = \underline{a}^{M} = a \Rightarrow M' \models \varphi(c) \Leftrightarrow M \models \varphi(\underline{a})$

35

$c = c_\varphi$ costante associata alla formula $\varphi$.

$$T^* = T'' = T \cup \{\exists x \varphi(x) \to \varphi(c_\varphi) \mid \varphi \in L\} \quad (*)$$

$$L^* = L'' = L \cup \{c_\varphi \mid \exists x \varphi(x) \in L \text{ chiusa}\}$$

Come prima: $M \models T \Rightarrow \exists M'' \models T''$

$$c_\varphi^{M''} = \begin{cases} a \in M & \text{tale che } M \models \varphi(\underline{a}) \text{ se c'è} \\ \text{arbitrario} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(*) non è di Henkin o per lo meno non è detto in quanto $\varphi$ dovrebbe appartenere a $L''$.

$T \longmapsto T^*$

$$T_0 = T$$
$$T_{n+1} = T_n^*$$
$$\hat{T} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n \text{ è di Henkin ed è soddisfacibile}$$

$$\exists x \varphi(x) \in L(\hat{T}) = \bigcup_n L(T_n)$$

$\exists n$ $\exists x \varphi(x) \in L_n$-formule

$c_\varphi \in L_{n+1}$ $[\exists x \varphi(x) \to \varphi(c_\varphi)] \in T_{n+1}$

cioè è di Henkin

Continua ad essere soddisfacibile perché una costante viene interpretata $M \models \hat{T}$ interpreta $c_\varphi \in L_n$ come $M^{*n}$.

Abbiamo dimostrato,

Teorema $T$ soddisfacibile $\Rightarrow \exists T' \supseteq T$ soddisfacibile di Henkin completa $L(T') \supset L(T)$ ($\varphi \in T$ o $\neg\varphi \in T$)

La dimostrazione funziona ugualmente se al posto di soddisfacibile metto finitamente soddisfacibile.

36

Infatti stiamo Henkinizzando poi completo e questa definizione anche nel caso finito.

L'operazione $T \mapsto \hat{T}$ è ben definita anche se $T$ non verifica le ipotesi

$M \mapsto \hat{M}$ non è più definita se non assumo che $M$ è finitamente soddisfacibile.

Se $G \subset \hat{T}$ è un sottoinsieme finito $\exists H \subset T$ finito tale che $\hat{H} \supset G$.

$\exists T' \supset T$ finitamente soddisfacibile di Henkin completa. Dobbiamo trovare un modello: $M' \models T'$.

Caso senza simbolo $=$.

$$\operatorname{dom} M' = \{a_c \mid c \in L' \text{ costante}\}$$

$$c^{M'} = a_c$$

Questo modello è in corrispondenza biunivoca con le costanti contrariamente a quanto accade infatti in genere per esempio

$(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ $\quad (0+1), \; 1$ non è iniettiva

$1$

$?$ non è surgettiva

$\sqrt{2}$

$R \in L$ relazione $n$-aria

$R^{M'} \subset (M')^n$

$$(a_{c_1}, \dots, a_{c_n}) \in R^{M'} \iff R(c_1, \dots, c_n) \in T'$$

37

Esempio. $L = \{R, a, b\}$
$T = \{R(a,b), \neg R(a,b), \exists x R(x,b), \dots\}$

$dom(M) = \{a, b\}$ $R^M = \{(a,b)\}$

Se in T ci fosse stato $\exists x R(b,x)$ nel modello avrei dovuto inserire qualcos'altro.

Dobbiamo verificare che $M' \models T'$

$\varphi \in T' \Rightarrow \varphi^{M'} = 1$ Possiamo supporre che
$\varphi \notin T' \Rightarrow \varphi^{M'} = 0$ $\forall x \varphi = \neg \exists x \neg \varphi$

Procediamo per induzione sui connettivi.

$\varphi^{M'} = 1 \Leftrightarrow \varphi \in T$

se $\varphi$ è $R(c_1, \dots, c_n)$ è ovvio.

se $\varphi$ è $\neg \alpha$ oppure $(\alpha \wedge \beta)$ o $(\alpha \vee \beta)$ si procede come nel caso proposizionale

$(\alpha \vee \beta) \in T' \Rightarrow \alpha \in T'$ o $\beta \in T'$
(se no $\neg \alpha \in T'$ e $\neg \beta \in T'$
$\{(\alpha \vee \beta), \neg \alpha, \neg \beta\} \subset T'$ insoddisfacibile.

$\Rightarrow \alpha^{M'} = 1$ o $\beta^{M'} = 1 \Rightarrow (\alpha \vee \beta)^{M'} = 1$

Caso esistenziale. $\exists x \varphi(x) \in T'$
Poiché $T'$ è di Henkin,
$\exists x \varphi(x) \to \varphi(c_\varphi) \in T'$
$\Rightarrow \varphi(c) \in T'$ (se no $\neg \varphi(c) \in T'$
$\{\exists x \varphi(x), \exists x \varphi(x) \to \varphi(c), \neg \varphi(c)\} \subset T'$ insoddisfacibile.
allora per induzione $\varphi(c)^M = 1$
$\Rightarrow \exists x \varphi(x)^M = 1$.

(38) L'assioma di Henkin ci permette di eliminare gli $\exists$ e una volta fatto questo possiamo arrivare al caso proposizionale.

caso formule negate: $\neg\varphi \in T'$

$\neg\exists x\varphi(x) \in T'$ Usiamo il fatto che nel dominio ci sono solo le costanti

Dobbiamo mostrare che $\neg\exists x\varphi(x)^{M'} = 1$ cioè non esiste $a \in dom(M')$ $\varphi(a) = 1$, cioè $\varphi(c) = 1$

Necessariamente $a = \underline{a_c}$ $c \in L$.

$$(\underline{a_c})^{M'} = a_c = c^{M'}$$

Se esistesse $a \in dom(M')$, allora esisterebbe $c \in L$ $\varphi(c)^{M'} = 1$ cioè per induzione $\varphi(c) \in T'$ ma $\{\neg\exists x\varphi(x), \varphi(c)\} \subset T'$ è insoddisfacibile. Assurdo.

19 ottobre 2007

Teorema. Ci sono modelli di ZFC in cui i numeri naturali non sono ben ordinati (visti dal di fuori del modello).

ZFC è una L-teoria del primo ordine con $L = \{\in\}$

Un modello di ZFC è una coppia $(M, \in^M)$ dove $\in^M$ relazione binaria su M che verifica gli assiomi.

 2 Esempio di ZFC ¬{infinito}

(1) $(V_\omega, \in)$ $\quad V_0 = \phi$
$$V_{n+1} = \mathcal{P}(V_n)$$
$$V_\omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$$

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow V_\omega$$
$$0 \longmapsto \phi$$

$$n = 2^{a_1} + \dots + 2^{a_k} \longmapsto \{f a_1, \dots, f a_k\}, \quad a_i \in \mathbb{N}$$

$$5 = 2^2 + 2^0 \longmapsto \{f2, f0\} \qquad 2 \in 5 \text{ e } 0 \in 5$$
$\Rightarrow 5 = \{2, 0\}$ in questo modello.

(2) $(\mathbb{N}, \in^{\mathbb{N}})$

Come scritte sopra (1) e (2) sono equivalenti cioè sono in corrispondenza biunivoca, in quanto si può fare l'inversa g di f:

$$g : V_\omega \to \mathbb{N}$$

$$g(\{a_1, \dots, a_n\}) = 2^{g(a_1)} + \dots + 2^{g(a_n)}$$

Si definisce g per induzione su $p(x) = \min n \ (x \in V_n)$

Osservazione. In ZF abbiamo definito $\mathbb{N}, +, \cdot, 2^x$.
Definendo $\in^{\mathbb{N}}$ si ha (*) $ZF \underset{\text{dimostra}}{\vdash} [(\mathbb{N}, \in^{\mathbb{N}}) \underset{\text{è un modello}}{\models} ZF \neg\text{infinito}]$

Per esempio per l'assioma di estensionalità

$$ZF \vdash \forall x y \in \mathbb{N} \ \ x = y \Leftrightarrow \forall v \ \ v \in_{\mathbb{N}} x \leftrightarrow v \in_{\mathbb{N}} y$$

Da notare che per definire (*) ci è servito l'assioma dell'infinito per definire $\mathbb{N}$.

40 $(M, \in^M) \models ZFC \qquad a \in M$

$\underset{\uparrow}{Est}(a) \doteq \{x \mid x \in^M a\} \subset M$

estensione di a.

$(\mathbb{N}, \in^{\mathbb{N}}) \qquad Est(5) = \{2, 0\} \subset \mathbb{N}$

Un sottoinsieme $A \subset \mathbb{N}$ è interno se esiste $a \in M$ tale che $A = est(a)$.

Un qualunque sottoinsieme infinito di $\mathbb{N}$ non è interno.

La distinzione fra interno ed esterno è come la distinzione fra insiemi e classi.

ON = ordinali

$\{x \in M \mid M \underset{\uparrow}{\models} x \text{ è un ordinale}\} \subset M$

pensa

~~Bisogna vedere bene ...~~

$$x \overset{M}{\in} \omega \overset{def}{\iff} \forall y \left[ \left( y \overset{M}{\ni} 0 \wedge \forall u (u \overset{M}{\in} y \to su \overset{M}{\in} y) \right) \to x \overset{M}{\in} y \right]$$

$su = u \cup \{u\}$

$\in^M$ = appartenenza nel particolare modello.

Con queste definizioni $(\mathbb{N}, \in^{\mathbb{N}}) \underset{\uparrow}{\models} \forall k (k \in \omega)$

pensa

$0 = \phi = 0$

$1 = \{\phi\} = 1$

$2 = \{0, 1\} = 2^0 + 2^1 = 3$

$3 = \{0, 1, 2\} = 2^0 + 2^1 + 2^2 = 7$ cioè $(sss0)^{\mathbb{N}} = 7$

(41) Nuova definizione dei numeri naturali:

$x\in\omega \Leftrightarrow \forall F(x\in F \wedge F$ chiuso per predecessore$) \rightarrow 0\in F$

$F$ chiuso per predecessore $\Leftrightarrow \forall v,z\,(v\in F \wedge v = z\cup\{z\}) \rightarrow z\in F$

Perché 4 non è successore
$(Sx = x\cup\{x\} \quad x+2^{x})$ ~~a~~ $F=4$ non funziona per la definizione.

---

Consideriamo: $L(T)=\{c_0, c_1, \ldots, \in\}$
$T = ZFC + \{c_1\in c_0, c_2\in c_1, c_3\in c_2, \ldots, c_0\in\omega, c_1\in\omega, c_2\in\omega, \ldots\}$
dove $\omega$ è un'abbreviazione

Questa teoria è finitamente soddisfacibile

$N, \in^N$ ~~soddisfa ogni sottoinsieme finito~~

$\Rightarrow \exists (M, \in^M) \models T$.

Non sappiamo se ZFC + infinito ha un modello. Se ce l'ha ce l'ha anche $T = ZFC + \{\ldots\}$
Quindi $T$ è finitamente soddisfacibile se ZFC ha un modello.

ZFC $\vdash$ non esistono successioni infinite decrescenti, cioè $\neg\exists f$
$f:\omega\rightarrow\omega \wedge \forall x,y \quad x<y \rightarrow f(x)>f(y)$ ma

$(M, \in^M) \models (\neg\exists f : f(\omega)\rightarrow\omega \wedge \forall x,y \quad x<y \rightarrow f(x)>f(y))$

Non esiste $f\in M \quad M\models f\ldots$

$\{c_0^M, c_1^M, c_2^M, \ldots\} \quad f: N\rightarrow M. \quad f(i) = c_i^M$

è una successione decrescente ma esterna

(42) $Est(\omega) = \{e_0^M\ e_1^M \ldots\}$
e dall'esterno $\ f: \mathbb{N} \to Est(\omega)$

Un insieme ben fondato dall'interno
può non esserlo dall'esterno
I concetti assoluti sono quelli
che si assomigliano dall'interno
e dall'esterno.

$(M, \underset{\text{vera appartenenza}}{\in}) \models ZF - \{\text{infinito}\}$

$(V_{\omega+1}, \in) \not\models \forall x \exists y\ y = \{x\}$ in quanto $V_\omega \in V_{\omega+1}$ ma $\{V_\omega\} \notin V\ V_{\omega+1}$ e quindi $\notin V_{\omega+1}$.

Per avere speranza di avere un modello si deve arrivare a $V_{\omega+\omega}$.
L'unico assioma che sballa è il rimpiazzamento

$$\omega = \{0, 1, 2, \ldots\} \in V_{\omega+\omega}$$
$$\{\omega\ \omega+1\ \omega+2\ \ldots\}$$
$$\{\omega+n \mid n \in \omega\} \notin V_{\omega+\omega}$$

Quindi $ZF \vdash (ZF - \text{rimpiazzamento})$
dimostra.

$(V_\alpha, \in)$ insieme $\quad (V, \in)$ classe $\quad V = \bigcup_{\alpha \in ON} V_\alpha$

Dentro il modello $M \models ZF$, $\alpha \in ON^M$

$Est(V_\alpha^M) = \{x \in M \mid M \models x \in V_\alpha\}$
è un insieme interno
ma
$V^M = \{x \in M \mid M \models x \in V\} = M$ è un insieme esterno.

(43) Una formula $\varphi$ esprime una proprietà assoluta rispetto alla coppia $V, V_\alpha$ se e solo se $V \models \varphi \Leftrightarrow V_\alpha \models \varphi$
($\varphi$ con parametri da $V_\alpha$).

Esempio. $\varphi = (f : A \to B)$ è un concetto assoluto. $f, A, B \in V_\alpha$, $\alpha$ limite

$$V_\alpha \models (f : A \to B) \leftrightarrow f : A \to B$$

Il concetto numerabile non è assoluto è vero all'esterno ma non all'interno.

Unicità di $\mathbb{N}$

$ZF \vdash \exists$ unico modello a meno di isomorfismi di $PA^{(2)}$.

$PA^{(2)}$ ① $Sx = Sy \to x = y$
② $0 \neq Sx$
③ $x \neq 0 \to \exists y \; Sy = x$

$(M, S, 0) \models PA^{(2)} \overset{def}{\Longleftrightarrow} S : M \to M$ verifica
①②③ e $\forall X \subset M \, (0 \in X \wedge \forall u (u \in X \to Su \in X) \to X = M)$.

Questa è una formula con parametri del primo ordine di $L = \{\in\}$.
E' una formula di 3 variabili $M, S, 0$.

$ZF \vdash \forall M, S, 0 \;\; \forall M', 0', S' \;\; \varphi(M, S, 0) \wedge \varphi(M', S', 0')$
$\to \exists f \;\; (M, S, 0) \cong (M', S', 0')$

$ZF \vdash \exists M, S, 0 \;\; \varphi(M, S, 0)$ Questo è vero perché siamo nel solito modello.

$V_\alpha \models ZF \overset{ZF}{\Leftarrow} (\alpha$ è cardinale inaccessibile$)$

$\alpha$ cardinale inaccessibile se è un cardinale limite e $\forall i \in I$, $\beta_i < \alpha$, $|I| < \alpha$, $\sum \beta_i < \alpha$
e $\beta < \alpha \to 2^\beta < \alpha$

(44) ω non è un insieme numerabile.

24 ottobre 2007

$V_0 = \emptyset$
$V_{n+1} = \mathcal{P}(V_n)$
$V_\omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$

$g : V_\omega \to \mathbb{N}$ $\quad g(\emptyset) = \emptyset$
$g(\{a_1, \dots, a_n\}) = 2^{g(a_1)} + \dots + 2^{g(a_n)}$ $\quad a_i \neq a_j$

$f : \mathbb{N} \to V_\omega$ $\quad f(0) = \emptyset$

$n = 2^{a_1} + \dots + 2^{a_n}$ $\quad f(n) = \{f(a_1), \dots, f(a_n)\}$

$\Rightarrow (V_\omega, \in) \cong (\mathbb{N}, \in^{\mathbb{N}})$ $\quad a_i \overset{\mathbb{N}}{\in} n$

$V_\omega$ $\quad (\mathbb{N}, \in_{\mathbb{N}}) = M$

$\emptyset = 0$ $\quad 0$

$S0 = 1 = \{0\}$ $\quad (S0)^M = S^M 0^M$
$SS0 = 2 = \{0, 1\}$
$SSS0 = 3 = \{0, 1, 2\}$ $\quad S^M x = x + 2^x$

$S^{V_\omega} x = x \cup \{x\}$

$0$
$\downarrow S^M$
$1$
$\downarrow S^M$
$3$
$\downarrow S^M$
$(SSS0)^M = 11$

$(\mathbb{N}, \in^{\mathbb{N}}) \models ZF -$ infinito, deve essere verificato per tutti gli assiomi

(45) Prendiamo per esempio l'assioma delle coppie

$\forall a,b \; \exists x \quad x=\{a,b\}$

Dati $a,b \in \mathbb{N}$ chi è $x$ in $(\mathbb{N},\in^{\mathbb{N}})$?

$$x=\{a,b\}^{\mathbb{N}} = \begin{cases} 2^a+2^b & \text{se } a\neq b \\ 2^a & \text{se } a=b \end{cases}$$

Si può arrivare alle stesse conclusioni sfruttando l'isomorfismo

$$(\mathbb{N},\in^{\mathbb{N}}) \cong (V_\omega,\in)$$

## Concetti assoluti

$(*)\; ZF \vdash \exists \mathbf{N} \; \mathbf{N} \models PA^{(2)}$ (per esempio $\mathbf{N}$ è $\omega$)

dimostra modello verifica

$\mathbf{N}=(N,S,0)$

Poiché $(*)$ è vera $(M,E)\models ZF$

$$(M,E) \models \exists (N,S,0) \models PA^{(2)}$$

$$\exists\, N,S,0 \in M \quad M \models [(N,S,0) \models PA^{(2)}]$$

Siano $a,b \in (N,\in^N)$

$a: b \to b$ può essere pensata come $a : est(b) \to est(b)$ $\quad est(b)=\{x \mid x \in^M b\}$

Visto dal suo fuori $(N,S,0)$ è isomorfo ai numeri naturali?
No perché vi si possono trovare successioni decrescenti infinite.
Per esempio:

$$e_0 \xleftarrow{S} e_1 \xleftarrow{S} e_2 \xleftarrow{S} e_3$$

$$L=\{\in, e_0, e_1, \dots\}$$

46

$T = ZF \cup \{ e_0 = S e_1,\ e_1 = S e_2,\ e_2 = S e_3, \ldots \}$
$Sx = x \cup \{x\} \quad e_i \in \omega$

## Linguaggi con uguaglianza

Su $L = \{0, S, +, \cdot\}$, il linguaggio dell'aritmetica c'è già compreso il simbolo di $=$ perché è sono delle funzioni

Una L-struttura M interpreta $=$ come $\{(x,x) \mid x \in M\}$ $\quad R \subset M^2$.

Diamo degli assiomi per l'uguaglianza:

1. $x = x$
2. $x = y \to y = x$
3. $x = y \wedge y = z \to x = z$
4. $x = x' \to Sx = Sx'$
5. $t = t' \to [\varphi(t/x) \leftrightarrow \varphi(t'/x)]$

Sostanzialmente bastano 1 e 5

Se L è un linguaggio senza $=$ ma con $\equiv$ e come assiomi considero $x \equiv x$ e $t \equiv t' \to [\varphi(t) \leftrightarrow \varphi(t')]$
Consideriamo una L teoria T che ha come assiomi $x \equiv x$
$t \equiv t' \to [\varphi(t) \leftrightarrow \varphi(t')]$
Sia $M \models T$ (M modello della teoria)

$(\equiv)^M \overset{?}{=} \{(x,x) \mid x \in M\}$ cioè la congruenza è la vera uguaglianza? NO
per esempio le vere congruenze

(47)

Se $M \models T$ $(\equiv)^M$ è una relazione di equivalenza

$$x \equiv y \land y \equiv z \to x \equiv z$$

$$x \equiv y \to [y \equiv z \leftrightarrow x \equiv z]$$

$$\varphi(y/_u) = \varphi(x/_u)$$

$$\varphi \equiv (u \equiv z)$$

In $L = \{+, \cdot, \exp\}$ $(\mathbb{Z}, +, \cdot, \exp(x,y) = x^y)$ è un sistema ma non un modello.

Esempio $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. $6 \equiv 1 \pmod 5$

ma

$2 \not\equiv 2^6 \pmod 5$

Se $M \models$ (verifica) assiomi delle congruenze in $L = \{\equiv, \dots\}$ $(M/_{\equiv_M})$ è una $L$ struttura.

$R$ relazione binaria in $L$

$$R \subset (M/_{\equiv_M}) \times (M/_{\equiv_M})$$

$$([a], [b]) \in R^{M^*} \leftrightarrow (a,b) \in R^M$$

Questa definizione è ben posta: $a \equiv a'$, $b \equiv b' \to R(a,b) \leftrightarrow R(a',b')$ segue dagli assiomi delle congruenze e quindi si può passare al quoziente.

$(\equiv)^{M^*} = \{([x], [x]) \mid x \in M\}$ cioè interpretato in $M^*$ $\equiv$ è una vera uguaglianza

48

Esercizio $M \models \varphi \Leftrightarrow (M/\equiv_M) \models \varphi$

(con $M \models$ (verifica) gli assiomi delle congruenze)

$M \models \exists x \varphi(x, a)$ da queste vogliamo dedurre dopo una serie di passaggi

$(M/\equiv_M) \models \exists x(\varphi(x, [a]))$

$M \models \exists x \varphi(x, a)$

$\exists b \in M \quad M \models \varphi(b, a)$

$(M/\equiv_M) \models \varphi([b], [a])$

$\to (M/\equiv_M) \models \exists x \varphi(x, [a])$

Sia $L = \{\equiv, \ldots\}$

$T \supset$ Assiomi congruenze

Definiamo $T \models \varphi$ come sempre e

$T \models_{\equiv} \varphi \Leftrightarrow$ in tutti i modelli di $T$ in cui $\equiv$ è $=$ interpretato come è vero $\varphi$.

Queste due definizioni sono equivalenti

$Mod_=(T)$ è l'insieme dei modelli in cui il simbolo $\equiv$ viene interpretato $=$.

$T \models_= \varphi \leftrightarrow Mod_=(T) \subset Mod(\varphi)$

$T \models \varphi \leftrightarrow Mod(T) \subset Mod(\varphi)$ Questo dimostra

$T \models \varphi \Rightarrow T \models_{\equiv} \varphi$

Dimostriamo $\Leftarrow$ :

$T \not\models \varphi \Rightarrow \exists M \models T \quad M \models \neg\varphi \quad (M/\equiv_T) \models \neg\varphi$

$(M/\equiv_T) \models T$ Quindi abbiamo trovato

$T \not\models_{\equiv} \varphi$

(49) Tutto ciò che possiamo dedurre con l'= lo possiamo anche dedurre con l'$\equiv$.

Teorema di compattezza
T finitamente soddisfacibile $\Rightarrow$ T è soddisfacibile.

T insoddisfacibile $\Rightarrow$ (oppure) $\exists T' \subset T$ T' insoddisfacibile

$$T \models \perp \xrightarrow{\text{oppure}} \exists T' \subset T \quad T' \models \perp$$

$$(*)\ T \models_{\equiv} \perp \xrightarrow{\text{oppure}} \exists T' \subset T \quad T' \models_{\equiv} \perp$$

$$T \models_{\equiv} \varphi \leftrightarrow T \cup \{Ass \equiv\} \models \varphi$$

(*) è il teorema di compattezza per linguaggi con uguaglianza.

ZF ha un modello classe $\Rightarrow$ ZF $\not\vdash \perp \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (per il teorema di completezza)

ZF ha un modello insieme $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ (LSD) ZF ha un modello numerabile.

26 ottobre 2007

Tableaux predicativi

Supponiamo che tutte le formule siano chiuse.

Regole: 1)
$$\frac{\Sigma, \varphi \wedge \psi}{\Sigma, \varphi, \psi} \qquad \Sigma, \varphi = \Sigma \cup \{\varphi\}$$

Il padre ha un modello se almeno uno dei figli ha un modello.

2) $\Sigma, \varphi \vee \psi$

$\Sigma, \varphi \qquad \Sigma, \psi$

3) $\Sigma, \neg(\varphi \wedge \psi)$

$\Sigma, \neg\varphi \qquad \Sigma, \neg\psi$

4) $\Sigma, \neg(\varphi \vee \psi)$

$\Sigma, \neg\varphi, \neg\psi$

5) $\Sigma, \neg\neg\varphi$

$\Sigma, \varphi$

6) $\Sigma, \varphi, \neg\varphi$

$\times$

La formule di partenza in cima all'albero è in un certo linguaggio (consideriamo $\Sigma$ finito di formule). Alla fine avremo ottenuto un linguaggio $L \cup \{c_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ $c_n$ = costanti.

7) $\Sigma, \exists x\, \varphi(x)$

$\Sigma, \varphi(c_i)$

$c_i$ non in $\Sigma\ \varphi(x)$ altrimenti non posso interpretare $c_i$ se era già interpretato in un altro modo.

8) $\Sigma, \neg\forall x\, \varphi(x)$

$\Sigma, \neg\varphi(c_i)$

$c_i$ non in $\Sigma\ \varphi(x)$

(51)

9) $\Sigma, \forall x\varphi(x)$

$$\Sigma, \varphi(t), \forall x\varphi(x)$$

con $t$ termine chiuso.

Questi due insiemi di formule sono equivalenti.

10) $\Sigma, \neg\exists x\varphi(x)$

$\Sigma, \neg\varphi(t), \exists x\varphi(x)$ sono equivalenti.

Equisoddisfacibilità: $\Sigma \sim \Sigma'$
se $\Sigma$ ha un modello ce l'ha anche $\Sigma'$ ma i modelli possono anche essere diversi.
Il caso $\exists$ non è equisoddisfacibile.

11) $\Sigma, t_1 = t_2, \varphi(t_1)$

$\Sigma, t_1 = t_2, \varphi(t_1), \varphi(t_2)$ sono equivalenti per le regole dell'uguaglianza

12) $\Sigma$

$\Sigma, t=t$

Possiamo introdurre quando vogliamo questa sostituzione.

Il metodo dei tableaux serve per determinare se qualcosa ha un modello oppure no.
La scelta delle formule non è rilevante perché sono in numero finito. Quelle dei termini sì perché i termini sono molti.

13) $\Sigma, A \to B$ $\qquad$ $\Sigma, \neg(A \to B)$

$\Sigma, \neg A \quad \Sigma, B$ $\qquad$ $\Sigma, A, \neg B$

52

Una formula vera in tutti i modelli si chiama logicamente vera $\models \varphi$

$$\models (P(a) \vee P(b) \to \exists x P(x))$$

Dimostriamo questo con i tableaux.

(*) $\neg (P(a) \vee P(b) \to \exists x Px)$

Applichiamo 13/b.

$$(Pa \vee Pb), \neg \exists x P(x) \qquad \Sigma = \neg \exists x Px$$

$$Pa, \neg \exists x Px \qquad Pb, \neg \exists x Px$$

$$Pa, \neg Pa \qquad Pb, \neg Pb$$

$$\times \qquad \times$$

Quindi la formula (*) è assurda, e la sua negazione è vera.

$\Sigma$ è tableaux inconsistente se esiste un tableaux chiuso con radice $\Sigma$.

$T \vdash_{tab} \varphi$ (T dimostra $\varphi$ nel sistema dei tableaux)

$\Updownarrow$

$T, \neg\varphi$ è tab-inconsistente

I termini che sostituiamo di volta in volta nei tableaux appartengono a $L \cup \{c_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Esercizio $\models \exists x (P(x) \to \forall y P(y))$

Esiste una persona che se vince la lotteria tutti vincono la lotteria.

(53) Se $P(x)$ non vale $P(x) \to \forall y P(y)$ è vera perché $P(x)$ è falsa.

$$\neg\exists x (P(x) \to \forall y P(y))$$

$$\neg\exists \; \neg[P(c) \to \forall y P(y)]$$

$$\neg\exists (P(c), \neg \forall y P(y))$$

$$\neg\exists (P(c), \neg P(b))$$

$$\neg\exists \neg(P(b) \to \forall y P(y))$$

$$P(b), \neg \forall y Py$$

$$\times$$

Esempio. $\exists x (P(x) \vee Q(x)), \forall x \neg Q(x)$ ha un modello)

$$P(c) \vee Q(c) \quad \forall x \neg Q(x)$$

$$Pc \qquad\qquad Qc \quad \forall x \neg Q(x)$$

$$* \boxed{\neg Q(c), P(c)} \qquad Q(c), \forall \neg Q(c)$$

questo ramo resta aperto $\qquad \times$

Se ci mettiamo nella variante in cui nel $\forall x$ possiamo sostituire solo una costante già esistente anche nel ramo aperto ci dobbiamo fermare.

$M = \{c\}$ $\neg Q^M(c)$ $P^M(c)$ è un modello di $(*)$.

Il metodo dei tableaux serve per trovare contraddizioni e per trovare modelli.

(54)

Esistono casi in cui il tableau va avanti all'infinito.

Se parto da $\Sigma$ e arrivo a $\Gamma$, $\Gamma$ deve rispettare le seguenti caratteristiche:

$\Sigma$ / $\Gamma$ aperta

$\varphi \in \Gamma \Rightarrow \neg\varphi \notin \Gamma$

$\neg\neg\varphi \in \Gamma \Rightarrow \varphi \in \Gamma$

$\varphi \wedge \psi \in \Gamma \Rightarrow \varphi \in \Gamma$ e $\psi \in \Gamma$

$\varphi \vee \psi \in \Gamma \Rightarrow \varphi \in \Gamma$ o $\psi \in \Gamma$

$\neg(\varphi \wedge \psi) \in \Gamma \Rightarrow \neg\varphi \in \Gamma$ o $\neg\psi \in \Gamma$

$\neg(\varphi \vee \psi) \in \Gamma \Rightarrow \neg\varphi \in \Gamma$ e $\neg\psi \in \Gamma$

$\exists x \varphi(x) \in \Gamma \Rightarrow \varphi(t) \in \Gamma$ per qualche $t \in \Gamma$, $t$ costante

$\forall x \varphi(x) \in \Gamma \Rightarrow \varphi(t) \in \Gamma$ per ogni $t$ chiuso

Un insieme si dice di Hintikka (eventualmente con un insieme infinito di formule) se soddisfa le condizioni sopra.

$\neg\exists x \varphi(x) \in \Gamma \Rightarrow \neg\varphi(t) \in \Gamma$ per ogni $t$

$\neg\forall x \varphi(x) \in \Gamma \Rightarrow \neg\varphi(t) \in \Gamma$ per qualche $t$

$(t=t) \in \Gamma$

$(t=t') \in \Gamma,\ \varphi(t) \in \Gamma \Rightarrow \varphi(t') \in \Gamma$.

Teorema. Ogni insieme di Hintikka ha un modello.

<u>Variante efficiente del tableau</u>

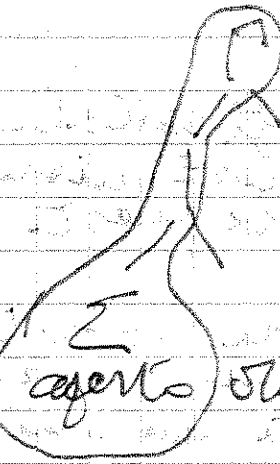
1) nel $\forall x$ sostituisco $t$ vecchi se esistono

? 2) non faccio mai due volte le stesse cose

3) espando solo il necessario $\forall x$, $\neg\exists x$, $=$

1bis) uso $t=t$ solo se $t$ vecchio

(55) Esempio di insieme di Hintikka senza =




→ è di Hintikka

Supponiamo che $\varphi \vee \psi \in$ Ramo allora $\varphi \in$ Ramo o $\psi \in$ Ramo

aperto dopo un numero finito di passi.

Per costruire un modello di un insieme di Hintikka andiamo un modello che rende vere le formule atomiche alle fine dei tableaux. Questo è sufficiente perché questo fa un modello di tutto.

Esercizio: trovare un Γ che nello sviluppo dei tableaux vade avanti all'infinito

$\forall x \exists y\, P(x,y)$

$\exists y\, P(a,y)$

$\forall x \exists y P(x,y) \quad \exists y\, P(a,b)$

$\exists y\, P(b,y)$

$P(b,c)$

... fino all'infinito

(56) Istruiamo un calcolatore a fare le dimostrazioni.

$\forall x \exists y\, P(x,y)$, $A \wedge \neg A$ il calcolatore deve riconoscere che questo è errato.

Fare il passo di maggiore priorità perché la priorità è un numero naturale non esiste un numero naturale che ha un numero infinito di predecessori.

Teorema. $\Sigma$ non ha un modello se e solo se esiste un tableaux chiuso con radice $\Sigma$.

Dimostrazione. Sia $\tau$ il tableaux con radice $\Sigma$ con regole delle priorità.

1° caso. $\tau$ è finito e chiuso e quindi non c'è un modello

2° caso. $\tau$ è finito aperto.

3° caso. $\tau$ è infinito

I casi 2 e 3 hanno un modello.

Il tableaux da scrivere è quello con le priorità.