Corso di Laurea in Informatica
Prova scritta del 14 Gennaio 2004

Cognome e nome: . . . .

Numero di matricola: . . . .

Corso e Aula: . . . .

Firma: . . . .

E-mail (per eventuali comunicazioni): . . . .

Esercizio 1. Nell'universo dei numeri naturali, sia $P(x)$ il predicato: "x è un numero pari", e sia $D(x)$ il predicato: "x è un numero dispari".

- Quale delle seguenti formule esprime l'enunciato: "Per ogni numero pari x, $f(x) \geq 0$" ?
- Quali delle seguenti formule sono una la negazione dell'altra ?

1. $\forall x\ (P(x) \rightarrow f(x) < 0)$; 2. $\exists x\ (D(x) \wedge f(x) < 0)$; 3. $\exists x\ (D(x) \rightarrow f(x) < 0)$;
4. $\forall x\ (f(x) \geq 0 \rightarrow P(x))$; 5. $\forall x\ (P(x) \rightarrow f(x) \geq 0)$; 6. $\exists x\ (P(x) \wedge f(x) \geq 0)$.

Esercizio 2. Siano

$$\begin{aligned}
A &= \mathbb{Q} \setminus \{1\} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \neq 1\},\\
B &= \mathbb{Q} \setminus \{-1\} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \neq -1\},\\
C &= \mathbb{Q} \setminus \{1,-1,0\} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \neq 1 \wedge x \neq -1 \wedge x \neq 0\},\\
D &= C \cap \mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \neq 1 \wedge x \neq -1 \wedge x \neq 0\}.
\end{aligned}$$

Si consideri la formula $f(x) = \frac{x+1}{-x+1}$.

1. Stabilire in quali dei seguenti casi la formula $f(x)$ definisce una funzione con il dominio e codominio specificati:

$$a)\ f: A \rightarrow A; \quad b)\ f: B \rightarrow B; \quad c)\ f: C \rightarrow C; \quad d)\ f: D \rightarrow D.$$

2. Dopo aver verificato che $f: C \rightarrow C$ è ben definita, determinare una espressione algebrica che definisce $(f \circ f)(x)$.
3. Determinare inoltre se la funzione $f: C \rightarrow C$ è iniettiva, surgettiva, biunivoca.
4. Stabilire se $f: C \rightarrow C$ è una funzione invertibile e in tal caso trovare una espressione algebrica che definisce la funzione inversa $f^{-1}: C \rightarrow C$.

Esercizio 3. Indichiamo con $X_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ l'insieme dei numeri naturali da 1 ad n.

1. Determinare quanti elementi di X_{180} sono multipli sia di 5 che di 11;
2. Determinare quanti elementi di X_{180} non sono nè multipli di 5 nè multipli di 11;
3. Determinare quanti sottoinsiemi di X_{180} contengono almeno un multiplo di 5;

Esercizio 4. Sia $u_0 = 4$; $u_1 = 9$; $u_2 = 16$; $u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n$. Dimostrare per induzione che $u_n = (n+2)^2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 5. Determinare tutte le soluzioni intere x della congruenza:

$$153x \equiv 18 \pmod{99}$$

Corso di Laurea in Informatica
Prova scritta del 14 Gennaio 2004

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: ....

Corso e Aula: ....

Firma: ....

E-mail (per eventuali comunicazioni): ....

Esercizio 1. Nell'universo dei numeri naturali, sia $P(x)$ il predicato: "x è un numero pari", e sia $D(x)$ il predicato: "x è un numero dispari".

- Quale delle seguenti formule esprime l'enunciato: "Per ogni numero dispari x, $f(x) > 0$" ?
- Quali delle seguenti formule sono una la negazione dell'altra ?

1. $\exists x\ (P(x) \to f(x) \leq 0)$; 2. $\forall x\ (D(x) \to f(x) > 0)$; 3. $\forall x\ (f(x) > 0 \to D(x))$;
4. $\exists x\ (P(x) \wedge f(x) > 0)$; 5. $\forall x\ (D(x) \to f(x) \leq 0)$; 6. $\exists x\ (P(x) \wedge f(x) \leq 0)$.

Esercizio 2. Siano

$$\begin{aligned}
A &= \mathbb{Q} \setminus \{1\} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \neq 1\},\\
B &= \mathbb{Q} \setminus \{-1\} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \neq -1\},\\
C &= \mathbb{Q} \setminus \{1, -1, 0\} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \neq 1 \wedge x \neq -1 \wedge x \neq 0\},\\
D &= C \cap \mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \neq 1 \wedge x \neq -1 \wedge x \neq 0\}.
\end{aligned}$$

Si consideri la formula $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$.

1. Stabilire in quali dei seguenti casi la formula $f(x)$ definisce una funzione con il dominio e codominio specificati:

$$a)\ f : A \to A; \quad b)\ f : B \to B; \quad c)\ f : C \to C; \quad d)\ f : D \to D.$$

2. Dopo aver verificato che $f : C \to C$ è ben definita, determinare una espressione algebrica che definisce $(f \circ f)(x)$.
3. Determinare inoltre se la funzione $f : C \to C$ è iniettiva, surgettiva, biunivoca.
4. Stabilire se $f : C \to C$ è una funzione invertibile e in tal caso trovare una espressione algebrica che definisce la funzione inversa $f^{-1} : C \to C$.

Esercizio 3. Indichiamo con $X_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ l'insieme dei numeri naturali da 1 ad n.

1. Determinare quanti elementi di X_{140} sono multipli sia di 3 che di 11;
2. Determinare quanti elementi di X_{140} non sono nè multipli di 3 nè multipli di 11;
3. Determinare quanti sottoinsiemi di X_{140} contengono almeno un multiplo di 11;
4. Determinare quanti sottoinsiemi di X_{140} non contengono multipli di 3 ma contengono almeno un multiplo di 11.

Esercizio 4. Sia $u_0 = 1$; $u_1 = 0$; $u_2 = 1$; $u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n$. Dimostrare per induzione che $u_n = (n-1)^2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 5. Determinare tutte le soluzioni intere x della congruenza:

$$162x \equiv 36 \pmod{117}$$

Corso di Laurea in Informatica
Prova scritta del 14 Gennaio 2004

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: ....

Corso e Aula: ....

Firma: ....

E-mail (per eventuali comunicazioni): ....

Esercizio 1. Nell'universo dei numeri naturali, sia $P(x)$ il predicato: "x è un numero pari", e sia $D(x)$ il predicato: "x è un numero dispari".

- Quale delle seguenti formule esprime l'enunciato: "Per ogni numero pari x, $f(x) \leq 0$"?
- Quali delle seguenti formule sono una la negazione dell'altra ?

1. $\exists x\ (D(x) \wedge f(x) > 0)$; 2. $\exists x\ (D(x) \to f(x) > 0)$; 3. $\exists x\ (P(x) \wedge f(x) \leq 0)$
4. $\forall x\ (P(x) \to f(x) \leq 0)$; 5. $\forall x\ (f(x) \leq 0 \to P(x))$; 6. $\forall x\ (P(x) \to f(x) > 0)$.

Esercizio 2. Siano

$$\begin{aligned}
A &= \mathbb{Q} \setminus \{1\} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \neq 1\},\\
B &= \mathbb{Q} \setminus \{-1\} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \neq -1\},\\
C &= \mathbb{Q} \setminus \{1, -1, 0\} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \neq 1 \wedge x \neq -1 \wedge x \neq 0\},\\
D &= C \cap \mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \neq 1 \wedge x \neq -1 \wedge x \neq 0\}.
\end{aligned}$$

Si consideri la formula $f(x) = \frac{-x-1}{x-1}$.

1. Stabilire in quali dei seguenti casi la formula $f(x)$ definisce una funzione con il dominio e codominio specificati:

$$a)\ f : A \to A; \quad b)\ f : B \to B; \quad c)\ f : C \to C; \quad d)\ f : D \to D.$$

2. Dopo aver verificato che $f : C \to C$ è ben definita, determinare una espressione algebrica che definisce $(f \circ f)(x)$.
3. Determinare inoltre se la funzione $f : C \to C$ è iniettiva, surgettiva, biunivoca.
4. Stabilire se $f : C \to C$ è una funzione invertibile e in tal caso trovare una espressione algebrica che definisce la funzione inversa $f^{-1} : C \to C$.

Esercizio 3. Indichiamo con $X_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ l'insieme dei numeri naturali da 1 ad n.

1. Determinare quanti elementi di X_{160} sono multipli sia di 7 che di 11;
2. Determinare quanti elementi di X_{160} non sono nè multipli di 7 nè multipli di 11;
3. Determinare quanti sottoinsiemi di X_{160} contengono almeno un multiplo di 7;
4. Determinare quanti sottoinsiemi di X_{160} non contengono multipli di 7 ma contengono almeno un multiplo di 11.

Esercizio 4. Sia $u_0 = 1$; $u_1 = 4$; $u_2 = 9$; $u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n$. Dimostrare per induzione che $u_n = (n+1)^2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 5. Determinare tutte le soluzioni intere x della congruenza:

$$156x \equiv 52 \pmod{91}$$

Corso di Laurea in Informatica
Prova scritta del 14 Gennaio 2004

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: ....

Corso e Aula: ....

Firma: ....

E-mail (per eventuali comunicazioni): ....

Esercizio 1. Nell'universo dei numeri naturali, sia $P(x)$ il predicato: "x è un numero pari", e sia $D(x)$ il predicato: "x è un numero dispari".

- Quale delle seguenti formule esprime l'enunciato: "Per ogni numero dispari x, $f(x) \leq 0$" ?
- Quali delle seguenti formule sono una la negazione dell'altra ?

1. $\forall x\ (f(x) \leq 0 \to D(x))$; 2. $\exists x\ (D(x) \wedge f(x) \leq 0)$; 3. $\forall x\ (D(x) \to f(x) > 0)$;
4. $\exists x\ (P(x) \to f(x) > 0)$; 5. $\exists x\ (P(x) \wedge f(x) > 0)$; 6. $\forall x\ (D(x) \to f(x) \leq 0)$.

Esercizio 2. Siano

$$\begin{aligned} A &= \mathbb{Q} \setminus \{1\} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \neq 1\}, \\ B &= \mathbb{Q} \setminus \{-1\} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \neq -1\}, \\ C &= \mathbb{Q} \setminus \{1, -1, 0\} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \neq 1 \wedge x \neq -1 \wedge x \neq 0\}, \\ D &= C \cap \mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \neq 1 \wedge x \neq -1 \wedge x \neq 0\}. \end{aligned}$$

Si consideri la formula $f(x) = \frac{-x+1}{-x-1}$.

1. Stabilire in quali dei seguenti casi la formula $f(x)$ definisce una funzione con il dominio e codominio specificati:

$$a)\ f : A \to A; \quad b)\ f : B \to B; \quad c)\ f : C \to C; \quad d)\ f : D \to D.$$

2. Dopo aver verificato che $f : C \to C$ è ben definita, determinare una espressione algebrica che definisce $(f \circ f)(x)$.
3. Determinare inoltre se la funzione $f : C \to C$ è iniettiva, surgettiva, biunivoca.
4. Stabilire se $f : C \to C$ è una funzione invertibile e in tal caso trovare una espressione algebrica che definisce la funzione inversa $f^{-1} : C \to C$.

Esercizio 3. Indichiamo con $X_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ l'insieme dei numeri naturali da 1 ad n.

1. Determinare quanti elementi di X_{120} sono multipli sia di 5 che di 7;
2. Determinare quanti elementi di X_{120} non sono nè multipli di 5 nè multipli di 7;
3. Determinare quanti sottoinsiemi di X_{120} contengono almeno un multiplo di 5;
4. Determinare quanti sottoinsiemi di X_{120} non contengono multipli di 5 ma contengono almeno un multiplo di 7.

Esercizio 4. Sia $u_1 = 1$; $u_2 = 0$; $u_3 = 1$; $u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n$. Dimostrare per induzione che $u_n = (n-2)^2$ per ogni $n \geq 1$ in $\mathbb{N}$.

Esercizio 5. Determinare tutte le soluzioni intere x della congruenza:

$$182x \equiv 52 \pmod{143}$$