Corso di Laurea in Informatica
Primo Appello del 14 Gennaio 2004 – Versione A
(Soluzioni a cura di M. Di Nasso)

Esercizio 1. Nell'universo dei numeri naturali, sia $P(x)$ il predicato: "x è un numero pari", e sia $D(x)$ il predicato: "x è un numero dispari".

- Quale delle seguenti formule esprime l'enunciato: "Per ogni numero pari x, $f(x) \geq 0$" ?
- Quali delle seguenti formule sono una la negazione dell'altra ?

1. $\forall x\ (P(x) \to f(x) < 0)$; 2. $\exists x\ (D(x) \wedge f(x) < 0)$; 3. $\exists x\ (D(x) \to f(x) < 0)$;
4. $\forall x\ (f(x) \geq 0 \to P(x))$; 5. $\forall x\ (P(x) \to f(x) \geq 0)$; 6. $\exists x\ (P(x) \wedge f(x) \geq 0)$.

Soluzione. (1) La risposta alla prima domanda è: la formula 5.
(2) Soltanto le formule 1 e 6 sono una equivalente alla negazione dell'altra. Infatti la negazione della formula 1 è equivalente a $\exists x\ \neg(P(x) \to f(x) < 0)$, e la negazione $\neg(P(x) \to f(x) < 0)$ equivale a $P(x) \wedge f(x) \geq 0$.

Esercizio 2. Siano

$$\begin{aligned}
A &= \mathbb{Q} \setminus \{1\} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \neq 1\},\\
B &= \mathbb{Q} \setminus \{-1\} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \neq -1\},\\
C &= \mathbb{Q} \setminus \{1, -1, 0\} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \neq 1 \wedge x \neq -1 \wedge x \neq 0\},\\
D &= C \cap \mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \neq 1 \wedge x \neq -1 \wedge x \neq 0\}.
\end{aligned}$$

Si consideri la formula $f(x) = \frac{x+1}{-x+1}$.

1. Stabilire in quali dei seguenti casi la formula $f(x)$ definisce una funzione con il dominio e codominio specificati:

$$a)\ f : A \to A; \quad b)\ f : B \to B; \quad c)\ f : C \to C; \quad d)\ f : D \to D.$$

2. Dopo aver verificato che $f : C \to C$ è ben definita, determinare una espressione algebrica che definisce $(f \circ f)(x)$.
3. Determinare inoltre se la funzione $f : C \to C$ è iniettiva, surgettiva, biunivoca.
4. Stabilire se $f : C \to C$ è una funzione invertibile e in tal caso trovare una espressione algebrica che definisce la funzione inversa $f^{-1} : C \to C$.

Soluzione. (1) Soltanto nel caso c) la formula $f(x)$ definisce una funzione con il dominio e codominio specificati. Precisamente, nel caso a), f *non* è definita per $x = 0$ perché il valore $f(0) = 1 \notin A$; nel caso b), $f(1)$ *non* è definita perchè si annulla il denominatore; nel caso d), ad esempio f *non* è definita per $x = 4$ perché il valore $f(4) = -\frac{5}{3} \notin D$.

(2) Per calcolare l'espressione algebrica per la composizione $f \circ f$, basta rimpiazzare ogni "x" con l'espressione $\frac{x+1}{-x+1}$. Si ottiene:

$$(f \circ f)(x) = \frac{\frac{x+1}{-x+1} + 1}{\frac{-x-1}{-x+1} + 1} = \frac{\frac{x+1-x+1}{-x+1}}{\frac{-x-1-x+1}{-x+1}} = \frac{\frac{2}{-x+1}}{\frac{-2x}{-x+1}} = \frac{2}{-2x} = -\frac{1}{x}.$$

(3) Per determinare l'espressione algebrica per l'inversa di $f : C \to C$, è necessario risolvere rispetto ad x l'espressione: $y = \frac{x+1}{-x+1}$. Precisamente

$$y = \frac{x+1}{-x+1} \Leftrightarrow -xy + y = x + 1 \Leftrightarrow -xy - x = -y + 1 \Leftrightarrow x(-y-1) = -y+1 \Leftrightarrow x = \frac{-y+1}{-y-1}.$$

Ridenominando le variabili x e y, si ottiene così che l'espressione cercata è $f^{-1}(x) = \frac{-x+1}{-x-1} = \frac{x-1}{x+1}$.

Esercizio 3. Indichiamo con $X_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ l'insieme dei numeri naturali da 1 ad n.

1. Determinare quanti elementi di X_{180} sono multipli sia di 5 che di 11;
2. Determinare quanti elementi di X_{180} non sono nè multipli di 5 nè multipli di 11;
3. Determinare quanti sottoinsiemi di X_{180} contengono almeno un multiplo di 5;
4. Determinare quanti sottoinsiemi di X_{180} non contengono multipli di 5 ma contengono almeno un multiplo di 11.

Soluzione. Anzitutto, denotiamo con A l'insieme degli elementi di X_{180} che sono multipli di 5, e con B l'insieme degli elementi di X_{180} che sono multipli di 11. Osserviamo che l'intersezione $A \cap B$, cioè l'insieme degli elementi di X_{180} che sono multipli sia di 5 che di 11, contiene tutti e soli i multipli di 55 (che è il minimo comune multiplo di 5 e 11). Dividendo, si ottiene che $180 = 36 \cdot 5$, $180 = 16 \cdot 11 + 4$ e $180 = 3 \cdot 55 + 15$. Dunque gli insiemi di sopra hanno le seguenti cardinalità:

$$|A| = 36 \ ; \quad |B| = 16 \ ; \quad |A \cap B| = 3.$$

Inoltre, l'unione $A \cup B$, cioè l'insieme degli elementi di X_{180} che sono multipli di 5 o di 11, ha la seguente cardinalità, che si calcola usando il principio di inclusione-esclusione:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 36 + 16 - 3 = 49.$$

Passiamo adesso alle domande.

(1) Dobbiamo contare gli elementi dell'insieme $A \cap B$. Quindi la risposta è 3.

(2) L'insieme degli elementi di X_{180} che non sono nè multipli di 5 nè multipli di 11 è dato dall'insieme intersezione $\overline{A} \cap \overline{B}$, dove $\overline{A}$ e $\overline{B}$ sono i complementari di A e B rispetto all'insieme universo X_{180}. Per De Morgan, l'insieme in questione $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$ è il complementare dell'unione $A \cup B$. Come abbiamo visto sopra, tale unione contiene 49 elementi e quindi, passando al complementare, si ottiene che il numero cercato è $180 - 49 = 131$.

(3) Contiamo prima il numero dei sottoinsiemi di X_{180} che *non* sono del tipo richiesto, cioè il numero dei sottoinsiemi di X_{180} *senza* multipli di 5, cioè in altre parole il numero dei sottoinsiemi del complementare $\overline{A}$. Visto che $\overline{A}$ contiene $180 - 36 = 144$ elementi, il numero dei sottoinsiemi di X_{180} che *non* sono del tipo richiesto è 2^{144}. Il numero cercato è dunque $2^{180} - 2^{144}$.

(4) Il numero dei sottoinsiemi di X_{180} che *non* contengono multipli di 5, cioè il numero dei sottoinsiemi del complementare $\overline{A}$, è 2^{144}. Tra questi 2^{144} sottoinsiemi, quelli che *non* sono del tipo richiesto sono quelli che *non* contengono multipli di 11. In altre parole, dobbiamo togliere da 2^{144} il numero dei sottoinsiemi di X_{180} che non contengono né multipli di 5 né multipli di 11, cioè dobbiamo togliere il numero dei sottoinsiemi di $\overline{A} \cap \overline{B}$. Abbiamo già visto sopra alla risposta (2) che quest'ultimo insieme $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$ contiene 131 elementi. Dunque la risposta finale è $2^{144} - 2^{131}$.

Esercizio 4. Sia $u_0 = 4$; $u_1 = 9$; $u_2 = 16$; $u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n$. Dimostrare per induzione che $u_n = (n+2)^2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Soluzione. La definizione induttiva della successione u_n si basa sui tre valori precedenti. Quindi, come base induttiva, è necessario considerare i tre valori consecutivi u_0, u_1 e u_2. La verifica è immediata: $u_0 = 4 = (0+2)^2$; $u_1 = 9 = (1+2)^2$; e $u_2 = 16 = (2+2)^2$. Consideriamo ora il passo induttivo. Per ipotesi induttiva, sappiamo che ogni termine della successione è uguale al proprio indice aumentato di due ed elevato al quadrato. Dobbiamo dimostrare che $u_{n+3} = (n+3+2)^2 = (n+5)^2$. Abbiamo: $u_{n+3} =$ (per definiz.) $= 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n =$ (per ip. indutt.) $= 3(n+4)^2 - 3(n+3)^2 + (n+2)^2 = 3n^2 + 24n + 48 - 3n^2 - 18n - 27 + n^2 + 4n + 4 = n^2 + 10n + 25 = (n+5)^2$, cioè quanto voluto.

Esercizio 5. Determinare tutte le soluzioni intere x della congruenza:

$$153x \equiv 18 \pmod{99}$$

Soluzione. Dividendo tutti i coefficienti per 9, si ottiene la congruenza equivalente: $17x \equiv 2 \pmod{11}$. Quest'ultima ammette ed unica soluzione modulo 11, poichè il massimo comune divisore $(11, 17) = 1$. Moltiplicando per 2 tutti gli addendi della identità di Bezout: $17 \cdot 2 + 11 \cdot (-3) = 1$, si ottiene $17 \cdot 4 + 11 \cdot (-6) = 2$, da cui $17 \cdot 4 \equiv 2 \pmod{11}$. Dunque $x = 4$ è l'unica soluzione modulo 11 dell'equazione $17x \equiv 2 \pmod{11}$. In altri termini, l'insieme delle soluzioni della congruenza assegnata è: $\{4 + 11k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Corso di Laurea in Informatica
Primo Appello del 14 Gennaio 2004 – Versione B
(Soluzioni a cura di M. Di Nasso)

Esercizio 1. Nell'universo dei numeri naturali, sia $P(x)$ il predicato: "x è un numero pari", e sia $D(x)$ il predicato: "x è un numero dispari".

- Quale delle seguenti formule esprime l'enunciato: "Per ogni numero dispari x, $f(x) > 0$" ?
- Quali delle seguenti formule sono una la negazione dell'altra ?

1. $\exists x\ (P(x) \to f(x) \leq 0)$; 2. $\forall x\ (D(x) \to f(x) > 0)$; 3. $\forall x\ (f(x) > 0 \to D(x))$;
4. $\exists x\ (P(x) \wedge f(x) > 0)$; 5. $\forall x\ (D(x) \to f(x) \leq 0)$; 6. $\exists x\ (P(x) \wedge f(x) \leq 0)$.

Soluzione. (1) La risposta alla prima domanda è: la formula 2.
(2) Soltanto le formule 3 e 4 sono una equivalente alla negazione dell'altra. Infatti la negazione della formula 3 è equivalente a $\exists x\ \neg(f(x) > 0 \to D(x))$, e la negazione $\neg(f(x) > 0 \to D(x))$ equivale a $f(x) > 0 \wedge \neg D(x)$, cioè a $P(x) \wedge f(x) > 0$.

Esercizio 2. Siano

$$\begin{aligned}
A &= \mathbb{Q} \setminus \{1\} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \neq 1\},\\
B &= \mathbb{Q} \setminus \{-1\} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \neq -1\},\\
C &= \mathbb{Q} \setminus \{1, -1, 0\} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \neq 1 \wedge x \neq -1 \wedge x \neq 0\},\\
D &= C \cap \mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \neq 1 \wedge x \neq -1 \wedge x \neq 0\}.
\end{aligned}$$

Si consideri la formula $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$.

1. Stabilire in quali dei seguenti casi la formula $f(x)$ definisce una funzione con il dominio e codominio specificati:

$$a)\ f : A \to A; \quad b)\ f : B \to B; \quad c)\ f : C \to C; \quad d)\ f : D \to D.$$

2. Dopo aver verificato che $f\colon C \to C$ è ben definita, determinare una espressione algebrica che definisce $(f \circ f)(x)$.
3. Determinare inoltre se la funzione $f\colon C \to C$ è iniettiva, surgettiva, biunivoca.
4. Stabilire se $f : C \to C$ è una funzione invertibile e in tal caso trovare una espressione algebrica che definisce la funzione inversa $f^{-1} : C \to C$.

Soluzione. (1) Soltanto nel caso c) la formula $f(x)$ definisce una funzione con il dominio e codominio specificati. Precisamente, nel caso a), $f(-1)$ *non* è definita perchè si annulla il denominatore; nel caso b) f *non* è definita per $x = 0$ perché il valore $f(0) = -1 \notin B$; nel caso d), ad esempio f *non* è definita per $x = 2$ perché il valore $f(2) = \frac{1}{3} \notin D$.

(2) Per calcolare l'espressione algebrica per la composizione $f \circ f$, basta rimpiazzare ogni "x" con l'espressione $\frac{x-1}{x+1}$. Si ottiene:

$$(f \circ f)(x) = \frac{\frac{x-1}{x+1} - 1}{\frac{x-1}{x+1} + 1} = \frac{\frac{x-1-x-1}{x+1}}{\frac{x-1+x+1}{x+1}} = \frac{\frac{-2}{x+1}}{\frac{2x}{x+1}} = \frac{-2}{2x} = -\frac{1}{x}.$$

(3) Per determinare l'espressione algebrica per l'inversa di $f : C \to C$, è necessario risolvere rispetto ad x l'espressione: $y = \frac{x-1}{x+1}$. Precisamente

$$y = \frac{x-1}{x+1} \Leftrightarrow xy + y = x - 1 \Leftrightarrow xy - x = -y - 1 \Leftrightarrow x(y-1) = -y - 1 \Leftrightarrow x = \frac{-y-1}{y-1}.$$

Ridenominando le variabili x e y, si ottiene così che l'espressione cercata è $f^{-1}(x) = \frac{-x-1}{x-1} = \frac{x+1}{-x+1}$.

Esercizio 3. Indichiamo con $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ l'insieme dei numeri naturali da 1 ad n.

1. Determinare quanti elementi di X_{140} sono multipli sia di 3 che di 11;
2. Determinare quanti elementi di X_{140} non sono nè multipli di 3 nè multipli di 11;
3. Determinare quanti sottoinsiemi di X_{140} contengono almeno un multiplo di 11;
4. Determinare quanti sottoinsiemi di X_{140} non contengono multipli di 3 ma contengono almeno un multiplo di 11.

Soluzione. Anzitutto, denotiamo con A l'insieme degli elementi di X_{140} che sono multipli di 3, e con B l'insieme degli elementi di X_{140} che sono multipli di 11. Osserviamo che l'intersezione $A \cap B$, cioè l'insieme degli elementi di X_{140} che sono multipli sia di 3 che di 11, contiene tutti e soli i multipli di 33 (che è il minimo comune multiplo di 3 e 11). Dividendo, si ottiene che $140 = 46 \cdot 3 + 2$, $140 = 12 \cdot 11 + 8$ e $140 = 4 \cdot 33 + 8$. Dunque gli insiemi di sopra hanno le seguenti cardinalità:

$$|A| = 46 \ ; \quad |B| = 12 \ ; \quad |A \cap B| = 4.$$

Inoltre, l'unione $A \cup B$, cioè l'insieme degli elementi di X_{180} che sono multipli di 5 o di 11, ha la seguente cardinalità, che si calcola usando il principio di inclusione-esclusione:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 46 + 12 - 4 = 54.$$

Passiamo adesso alle domande.

(1) Dobbiamo contare gli elementi dell'insieme $A \cap B$. Quindi la risposta è 4.

(2) L'insieme degli elementi di X_{140} che non sono nè multipli di 3 nè multipli di 11 è dato dall'insieme intersezione $\overline{A} \cap \overline{B}$, dove $\overline{A}$ e $\overline{B}$ sono i complementari di A e B rispetto all'insieme universo X_{140}. Per De Morgan, l'insieme in questione $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$ è il complementare dell'unione $A \cup B$. Come abbiamo visto sopra, tale unione contiene 54 elementi e quindi, passando al complementare, si ottiene che il numero cercato è $140 - 54 = 86$.

(3) Contiamo prima il numero dei sottoinsiemi di X_{140} che *non* sono del tipo richiesto, cioè il numero dei sottoinsiemi di X_{140} *senza* multipli di 11, cioè in altre parole il numero dei sottoinsiemi del complementare $\overline{B}$. Visto che $\overline{B}$ contiene $140 - 12 = 128$ elementi, il numero dei sottoinsiemi di X_{140} che *non* sono del tipo richiesto è 2^{128}. Il numero cercato è dunque $2^{140} - 2^{128}$.

(4) Il numero dei sottoinsiemi di X_{140} che *non* contengono multipli di 3, cioè il numero dei sottoinsiemi del complementare $\overline{A}$, è 2^{94} (infatti $|\overline{A}| = 140 - 46 = 94$). Tra questi 2^{94} sottoinsiemi, quelli che *non* sono del tipo richiesto sono quelli che *non* contengono multipli di 11. In altre parole, dobbiamo togliere da 2^{94} il numero dei sottoinsiemi di X_{140} che non contengono né multipli di 3 né multipli di 11, cioè dobbiamo togliere il numero dei sottoinsiemi di $\overline{A} \cap \overline{B}$. Abbiamo già visto sopra alla risposta (2) che quest'ultimo insieme $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$ contiene 86 elementi. Dunque la risposta finale è $2^{94} - 2^{86}$.

Esercizio 4. Sia $u_0 = 1$; $u_1 = 0$; $u_2 = 1$; $u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n$. Dimostrare per induzione che $u_n = (n-1)^2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Soluzione. La definizione induttiva della successione u_n si basa sui tre valori precedenti. Quindi, come base induttiva, è necessario considerare i tre valori consecutivi u_0, u_1 e u_2. La verifica è immediata: $u_0 = 1 = (0-1)^2$; $u_1 = 0 = (1-1)^2$; e $u_2 = 1 = (2-1)^2$. Consideriamo ora il passo induttivo. Per ipotesi induttiva, sappiamo che ogni termine della successione è uguale al proprio indice diminuito di uno ed elevato al quadrato. Dobbiamo dimostrare che $u_{n+3} = (n+3-1)^2 = (n+2)^2$. Abbiamo: $u_{n+3} =$ (per definiz.) $= 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n =$ (per ip. indutt.) $= 3(n+1)^2 - 3n^2 + (n-1)^2 = 3n^2 + 6n + 3 - 3n^2 + n^2 - 2n + 1 = n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2$, cioè quanto voluto.

Esercizio 5. Determinare tutte le soluzioni intere x della congruenza:

$$162x \equiv 36 \pmod{117}$$

Soluzione. Dividendo tutti i coefficienti per 9, si ottiene la congruenza equivalente: $18x \equiv 4 \pmod{13}$. Quest'ultima ammette ed unica soluzione modulo 13, poichè il massimo comune divisore $(13, 18) = 1$. Moltiplicando per 4 tutti gli addendi della identità di Bezout: $18 \cdot (-5) + 13 \cdot 7 = 1$, si ottiene $18 \cdot (-20) + 13 \cdot 28 = 4$, da cui $18 \cdot (-20) \equiv 4 \pmod{13}$. Dunque $x = -20 \equiv 6$ è l'unica soluzione modulo 13 dell'equazione $18x \equiv 4 \pmod{13}$. In altri termini, l'insieme delle soluzioni della congruenza assegnata è: $\{6 + 13k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Corso di Laurea in Informatica
Primo Appello del 14 Gennaio 2004 – Versione C
(Soluzioni a cura di M. Di Nasso)

Esercizio 1. Nell'universo dei numeri naturali, sia $P(x)$ il predicato: "x è un numero pari", e sia $D(x)$ il predicato: "x è un numero dispari".

- Quale delle seguenti formule esprime l'enunciato: "Per ogni numero pari x, $f(x) \leq 0$"?
- Quali delle seguenti formule sono una la negazione dell'altra ?

1. $\exists x\ (D(x) \wedge f(x) > 0)$; 2. $\exists x\ (D(x) \to f(x) > 0)$; 3. $\exists x\ (P(x) \wedge f(x) \leq 0)$
4. $\forall x\ (P(x) \to f(x) \leq 0)$; 5. $\forall x\ (f(x) \leq 0 \to P(x))$; 6. $\forall x\ (P(x) \to f(x) > 0)$.

Soluzione. (1) La risposta alla prima domanda è: la formula 4.
(2) Soltanto le formule 3 e 6 sono una equivalente alla negazione dell'altra. Infatti la negazione della formula 6 è equivalente a $\exists x\ \neg(P(x) \to f(x) > 0)$, e la negazione $\neg(P(x) \to f(x) > 0)$ equivale a $P(x) \wedge f(x) \leq 0$.

Esercizio 2. Siano

$$\begin{aligned}
&A = \mathbb{Q} \setminus \{1\} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \neq 1\}, \\
&B = \mathbb{Q} \setminus \{-1\} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \neq -1\}, \\
&C = \mathbb{Q} \setminus \{1, -1, 0\} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \neq 1 \wedge x \neq -1 \wedge x \neq 0\}, \\
&D = C \cap \mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \neq 1 \wedge x \neq -1 \wedge x \neq 0\}.
\end{aligned}$$

Si consideri la formula $f(x) = \frac{-x-1}{x-1}$.

1. Stabilire in quali dei seguenti casi la formula $f(x)$ definisce una funzione con il dominio e codominio specificati:

$$a)\ f : A \to A; \quad b)\ f : B \to B; \quad c)\ f : C \to C; \quad d)\ f : D \to D.$$

2. Dopo aver verificato che $f : C \to C$ è ben definita, determinare una espressione algebrica che definisce $(f \circ f)(x)$.
3. Determinare inoltre se la funzione $f : C \to C$ è iniettiva, surgettiva, biunivoca.
4. Stabilire se $f : C \to C$ è una funzione invertibile e in tal caso trovare una espressione algebrica che definisce la funzione inversa $f^{-1} : C \to C$.

Soluzione. (1) Soltanto nel caso c) la formula $f(x)$ definisce una funzione con il dominio e codominio specificati. Precisamente, nel caso a), f *non* è definita per $x = 0$ perché il valore $f(0) = 1 \notin A$; nel caso b) $f(1)$ *non* è definita perchè si annulla il denominatore; nel caso d), ad esempio f *non* è definita per $x = 4$ perché il valore $f(4) = -\frac{5}{3} \notin D$.

(2) Per calcolare l'espressione algebrica per la composizione $f \circ f$, basta rimpiazzare ogni "x" con l'espressione $\frac{-x-1}{x-1}$. Si ottiene:

$$(f \circ f)(x) = \frac{-\frac{-x-1}{x-1} - 1}{\frac{-x-1}{x-1} - 1} = \frac{\frac{x+1-x+1}{x-1}}{\frac{-x-1-x+1}{x-1}} = \frac{\frac{2}{x-1}}{\frac{-2x}{x-1}} = \frac{2}{-2x} = -\frac{1}{x}.$$

(3) Per determinare l'espressione algebrica per l'inversa di $f : C \to C$, è necessario risolvere rispetto ad x l'espressione: $y = \frac{-x-1}{x-1}$. Precisamente

$$y = \frac{-x-1}{x-1} \Leftrightarrow xy - y = -x - 1 \Leftrightarrow xy + x = y - 1 \Leftrightarrow x(y+1) = y - 1 \Leftrightarrow x = \frac{y-1}{y+1}.$$

Ridenominando le variabili x e y, si ottiene così che l'espressione cercata è $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{x+1}$.

Esercizio 3. Indichiamo con $X_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ l'insieme dei numeri naturali da 1 ad n.

1. Determinare quanti elementi di X_{160} sono multipli sia di 7 che di 11;
2. Determinare quanti elementi di X_{160} non sono nè multipli di 7 nè multipli di 11;
3. Determinare quanti sottoinsiemi di X_{160} contengono almeno un multiplo di 7;
4. Determinare quanti sottoinsiemi di X_{160} non contengono multipli di 7 ma contengono almeno un multiplo di 11.

Soluzione. Anzitutto, denotiamo con A l'insieme degli elementi di X_{160} che sono multipli di 7, e con B l'insieme degli elementi di X_{160} che sono multipli di 11. Osserviamo che l'intersezione $A \cap B$, cioè l'insieme degli elementi di X_{160} che sono multipli sia di 7 che di 11, contiene tutti e soli i multipli di 77 (che è il minimo comune multiplo di 7 e 11). Dividendo, si ottiene che $160 = 22 \cdot 7 + 6$, $160 = 14 \cdot 11 + 6$ e $160 = 2 \cdot 77 + 6$. Dunque gli insiemi di sopra hanno le seguenti cardinalità:

$$|A| = 22\ ; \quad |B| = 14\ ; \quad |A \cap B| = 2.$$

Inoltre, l'unione $A \cup B$, cioè l'insieme degli elementi di X_{160} che sono multipli di 7 o di 11, ha la seguente cardinalità, che si calcola usando il principio di inclusione-esclusione:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 22 + 14 - 2 = 34.$$

Passiamo adesso alle domande.

(1) Dobbiamo contare gli elementi dell'insieme $A \cap B$. Quindi la risposta è 2.

(2) L'insieme degli elementi di X_{160} che non sono nè multipli di 7 nè multipli di 11 è dato dall'insieme intersezione $\overline{A} \cap \overline{B}$, dove $\overline{A}$ e $\overline{B}$ sono i complementari di A e B rispetto all'insieme universo X_{160}. Per De Morgan, l'insieme in questione $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$ è il complementare dell'unione $A \cup B$. Come abbiamo visto sopra, tale unione contiene 34 elementi e quindi, passando al complementare, si ottiene che il numero cercato è $160 - 34 = 126$.

(3) Contiamo prima il numero dei sottoinsiemi di X_{160} che *non* sono del tipo richiesto, cioè il numero dei sottoinsiemi di X_{160} *senza* multipli di 7, cioè in altre parole il numero dei sottoinsiemi del complementare $\overline{A}$. Visto che $\overline{A}$ contiene $160 - 22 = 138$ elementi, il numero dei sottoinsiemi di X_{160} che *non* sono del tipo richiesto è 2^{138}. Il numero cercato è dunque $2^{160} - 2^{138}$.

(4) Il numero dei sottoinsiemi di X_{160} che *non* contengono multipli di 7, cioè il numero dei sottoinsiemi del complementare $\overline{A}$, è 2^{138}. Tra questi 2^{138} sottoinsiemi, quelli che *non* sono del tipo richiesto sono quelli che *non* contengono multipli di 11. In altre parole, dobbiamo togliere da 2^{138} il numero dei sottoinsiemi di X_{160} che non contengono né multipli di 7 né multipli di 11, cioè dobbiamo togliere il numero dei sottoinsiemi di $\overline{A} \cap \overline{B}$. Abbiamo già visto sopra alla risposta (2) che quest'ultimo insieme $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$ contiene 126 elementi. Dunque la risposta finale è $2^{138} - 2^{126}$.

Esercizio 4. Sia $u_0 = 1$; $u_1 = 4$; $u_2 = 9$; $u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n$. Dimostrare per induzione che $u_n = (n+1)^2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Soluzione. La definizione induttiva della successione u_n si basa sui tre valori precedenti. Quindi, come base induttiva, è necessario considerare i tre valori consecutivi u_0, u_1 e u_2. La verifica è immediata: $u_0 = 1 = (0+1)^2$; $u_1 = 4 = (1+1)^2$; e $u_2 = 9 = (2+1)^2$. Consideriamo ora il passo induttivo. Per ipotesi induttiva, sappiamo che ogni termine della successione è uguale al proprio indice aumentato di uno ed elevato al quadrato. Dobbiamo dimostrare che $u_{n+3} = (n+3+1)^2 = (n+4)^2$. Abbiamo: $u_{n+3} =$ (per definiz.) $= 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n =$ (per ip. indutt.) $= 3(n+3)^2 - 3(n+2)^2 + (n+1)^2 = 3n^2 + 18n + 27 - 3n^2 - 12n - 12 + n^2 + 2n + 1 = n^2 + 8n + 16 = (n+4)^2$, cioè quanto voluto.

Esercizio 5. Determinare tutte le soluzioni intere x della congruenza:

$$156x \equiv 52 \pmod{91}$$

Soluzione. Dividendo tutti i coefficienti per 13, si ottiene la congruenza equivalente: $12x \equiv 4 \pmod{7}$. Quest'ultima ammette ed unica soluzione modulo 7, poichè il massimo comune divisore $(12, 7) = 1$. Moltiplicando per 4 tutti gli addendi della identità di Bezout: $12 \cdot 3 + 7 \cdot (-5) = 1$, si ottiene $12 \cdot 12 + 7 \cdot (-20) = 4$, da cui $12 \cdot 12 \equiv 4 \pmod{7}$. Dunque $x = 12 \equiv 5$ è l'unica soluzione modulo 7 dell'equazione $12x \equiv 4 \pmod{7}$. In altri termini, l'insieme delle soluzioni della congruenza assegnata è: $\{5 + 7k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Corso di Laurea in Informatica
Primo Appello del 14 Gennaio 2004 – Versione D
(Soluzioni a cura di M. Di Nasso)

Esercizio 1. Nell'universo dei numeri naturali, sia $P(x)$ il predicato: "x è un numero pari", e sia $D(x)$ il predicato: "x è un numero dispari".

- Quale delle seguenti formule esprime l'enunciato: "Per ogni numero dispari x, $f(x) \leq 0$" ?
- Quali delle seguenti formule sono una la negazione dell'altra ?

1. $\forall x\ (\, f(x) \leq 0 \to D(x)\,)$; 2. $\exists x\ (\, D(x) \wedge f(x) \leq 0\,)$; 3. $\forall x\ (\, D(x) \to f(x) > 0\,)$;
4. $\exists x\ (\, P(x) \to f(x) > 0\,)$; 5. $\exists x\ (\, P(x) \wedge f(x) > 0\,)$; 6. $\forall x\ (\, D(x) \to f(x) \leq 0\,)$.

Soluzione. (1) La risposta alla prima domanda è: la formula 6.
(2) Soltanto le formule 2 e 3 sono una equivalente alla negazione dell'altra. Infatti la negazione della formula 3 è equivalente a $\exists x\ \neg(\, D(x) \to f(x) > 0\,)$, e la negazione $\neg(\, D(x) \to f(x) > 0\,)$ equivale a $D(x) \wedge f(x) \leq 0$.

Esercizio 2. Siano

$$\begin{aligned}
&A = \mathbb{Q} \setminus \{1\} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \neq 1\},\\
&B = \mathbb{Q} \setminus \{-1\} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \neq -1\},\\
&C = \mathbb{Q} \setminus \{1, -1, 0\} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \neq 1 \wedge x \neq -1 \wedge x \neq 0\},\\
&D = C \cap \mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \neq 1 \wedge x \neq -1 \wedge x \neq 0\}.
\end{aligned}$$

Si consideri la formula $f(x) = \frac{-x+1}{-x-1}$.

1. Stabilire in quali dei seguenti casi la formula $f(x)$ definisce una funzione con il dominio e codominio specificati:

$$a)\ f : A \to A; \quad b)\ f : B \to B; \quad c)\ f : C \to C; \quad d)\ f : D \to D.$$

2. Dopo aver verificato che $f\colon C \to C$ è ben definita, determinare una espressione algebrica che definisce $(f \circ f)(x)$.
3. Determinare inoltre se la funzione $f\colon C \to C$ è iniettiva, surgettiva, biunivoca.
4. Stabilire se $f : C \to C$ è una funzione invertibile e in tal caso trovare una espressione algebrica che definisce la funzione inversa $f^{-1} : C \to C$.

Soluzione. (1) Soltanto nel caso c) la formula $f(x)$ definisce una funzione con il dominio e codominio specificati. Precisamente, nel caso a), $f(-1)$ *non* è definita perché si annulla il denominatore; nel caso b) f *non* è definita per $x = 0$ perché il valore $f(0) = -1 \notin B$; nel caso d), ad esempio f *non* è definita per $x = 2$ perché il valore $f(2) = \frac{1}{3} \notin D$.

(2) Per calcolare l'espressione algebrica per la composizione $f \circ f$, basta rimpiazzare ogni "x" con l'espressione $\frac{-x+1}{-x-1}$. Si ottiene:

$$(f \circ f)(x) = \frac{-\frac{-x+1}{-x-1} + 1}{-\frac{-x+1}{-x-1} - 1} = \frac{\frac{x-1-x-1}{-x-1}}{\frac{x-1+x+1}{-x-1}} = \frac{\frac{-2}{-x-1}}{\frac{2x}{-x-1}} = \frac{-2}{2x} = -\frac{1}{x}.$$

(3) Per determinare l'espressione algebrica per l'inversa di $f : C \to C$, è necessario risolvere rispetto ad x l'espressione: $y = \frac{-x+1}{-x-1}$. Precisamente

$$y = \frac{-x+1}{-x-1} \Leftrightarrow -xy - y = -x + 1 \Leftrightarrow -xy + x = y + 1 \Leftrightarrow x(-y+1) = y + 1 \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{-y+1}.$$

Ridenominando le variabili x e y, si ottiene così che l'espressione cercata è $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{-x+1}$.

Esercizio 3. Indichiamo con $X_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ l'insieme dei numeri naturali da 1 ad n.

1. Determinare quanti elementi di X_{120} sono multipli sia di 5 che di 7;
2. Determinare quanti elementi di X_{120} non sono nè multipli di 5 nè multipli di 7;
3. Determinare quanti sottoinsiemi di X_{120} contengono almeno un multiplo di 5;
4. Determinare quanti sottoinsiemi di X_{120} non contengono multipli di 5 ma contengono almeno un multiplo di 7.

Soluzione. Anzitutto, denotiamo con A l'insieme degli elementi di X_{120} che sono multipli di 5, e con B l'insieme degli elementi di X_{120} che sono multipli di 7. Osserviamo che l'intersezione $A \cap B$, cioè l'insieme degli elementi di X_{120} che sono multipli sia di 5 che di 7, contiene tutti e soli i multipli di 35 (che è il minimo comune multiplo di 5 e 7). Dividendo, si ottiene che $120 = 24 \cdot 5$, $120 = 16 \cdot 7 + 8$ e $120 = 3 \cdot 35 + 15$. Dunque gli insiemi di sopra hanno le seguenti cardinalità:

$$|A| = 24 \ ; \quad |B| = 16 \ ; \quad |A \cap B| = 3.$$

Inoltre, l'unione $A \cup B$, cioè l'insieme degli elementi di X_{120} che sono multipli di 5 o di 7, ha la seguente cardinalità, che si calcola usando il principio di inclusione-esclusione:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 24 + 16 - 3 = 37.$$

Passiamo adesso alle domande.

(1) Dobbiamo contare gli elementi dell'insieme $A \cap B$. Quindi la risposta è 3.

(2) L'insieme degli elementi di X_{120} che non sono nè multipli di 5 nè multipli di 7 è dato dall'insieme intersezione $\overline{A} \cap \overline{B}$, dove $\overline{A}$ e $\overline{B}$ sono i complementari di A e B rispetto all'insieme universo X_{120}. Per De Morgan, l'insieme in questione $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$ è il complementare dell'unione $A \cup B$. Come abbiamo visto sopra, tale unione contiene 37 elementi e quindi, passando al complementare, si ottiene che il numero cercato è $120 - 37 = 83$.

(3) Contiamo prima il numero dei sottoinsiemi di X_{120} che *non* sono del tipo richiesto, cioè il numero dei sottoinsiemi di X_{120} *senza* multipli di 5, cioè in altre parole il numero dei sottoinsiemi del complementare $\overline{A}$. Visto che $\overline{A}$ contiene $120 - 24 = 96$ elementi, il numero dei sottoinsiemi di X_{120} che *non* sono del tipo richiesto è 2^{96}. Il numero cercato è dunque $2^{120} - 2^{96}$.

(4) Il numero dei sottoinsiemi di X_{120} che *non* contengono multipli di 5, cioè il numero dei sottoinsiemi del complementare $\overline{A}$, è 2^{96}. Tra questi 2^{96} sottoinsiemi, quelli che *non* sono del tipo richiesto sono quelli che *non* contengono multipli di 7. In altre parole, dobbiamo togliere da 2^{96} il numero dei sottoinsiemi di X_{120} che non contengono né multipli di 5 né multipli di 7, cioè dobbiamo togliere il numero dei sottoinsiemi di $\overline{A} \cap \overline{B}$. Abbiamo già visto sopra alla risposta (2) che quest'ultimo insieme $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$ contiene 83 elementi. Dunque la risposta finale è $2^{96} - 2^{83}$.

Esercizio 4. Sia $u_1 = 1$; $u_2 = 0$; $u_3 = 1$; $u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n$. Dimostrare per induzione che $u_n = (n-2)^2$ per ogni $n \geq 1$ in $\mathbb{N}$.

Soluzione. La definizione induttiva della successione u_n si basa sui tre valori precedenti. Quindi, come base induttiva, è necessario considerare i tre valori consecutivi u_1, u_2 e u_3. La verifica è immediata: $u_1 = 1 = (1-2)^2$; $u_2 = 0 = (1-1)^2$; e $u_3 = 1 = (3-2)^2$. Consideriamo ora il passo induttivo. Per ipotesi induttiva, sappiamo che ogni termine della successione è uguale al proprio indice diminuito di due ed elevato al quadrato. Dobbiamo dimostrare che $u_{n+3} = (n+3-2)^2 = (n+1)^2$. Abbiamo: $u_{n+3} =$ (per definiz.) $= 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n =$ (per ip. indutt.) $= 3n^2 - 3(n-1)^2 + (n-2)^2 = 3n^2 - 3n^2 + 6n - 3 + n^2 - 4n + 4 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$, cioè quanto voluto.

Esercizio 5. Determinare tutte le soluzioni intere x della congruenza:

$$182x \equiv 52 \pmod{143}$$

Soluzione. Dividendo tutti i coefficienti per 13, si ottiene la congruenza equivalente: $14x \equiv 4 \pmod{11}$. Quest'ultima ammette ed unica soluzione modulo 11, poichè il massimo comune divisore $(14, 11) = 1$. Moltiplicando per 4 tutti gli addendi della identità di Bezout: $14 \cdot 4 + 11 \cdot (-5) = 1$, si ottiene $14 \cdot 16 + 11 \cdot (-20) = 4$, da cui $14 \cdot 16 \equiv 4 \pmod{11}$. Dunque $x = 16 \equiv 5$ è l'unica soluzione modulo 11 dell'equazione $14x \equiv 4 \pmod{11}$. In altri termini, l'insieme delle soluzioni della congruenza assegnata è: $\{5 + 11k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.