Corso di Laurea in Informatica
Seconda prova intermedia del 17 Dicembre 2003 – Versione A
(Soluzioni a cura di M. Di Nasso)

Esercizio 1. Sia f la successione definita per ricorrenza ponendo $f_0 = 1$, $f_1 = -3$, $f_{n+1} = -f_n + f_{n-1}$.

1. Calcolare il valore di f_6;
2. Dimostrare che se n è pari allora $f_n > 0$ e se n è dispari allora $f_n < 0$;
3. Dimostrare che la successione $g_n = |f_n|$ è crescente.

Soluzione. (1) Applicando la definizione, si ricava che $f_2 = -f_1 + f_0 = -(-3) + 1 = 4$; $f_3 = -4 + (-3) = -7$; $f_4 = -(-7) + 4 = 11$; $f_5 = -11 + (-7) = -18$ e $f_6 = -(-18) + 11 = 29$.

(2) Visto che $f_0 > 0$ e $f_1 < 0$, per $n = 0$ e $n = 1$ la base induttiva è verificata. Consideriamo adesso il passo induttivo f_{n+1}. Supponiamo prima $n + 1$ pari. In questo caso n è dispari e per ipotesi induttiva $f_n < 0$, quindi $-f_n > 0$. Inoltre, $n - 1$ è pari, dunque per ipotesi induttiva $f_{n-1} > 0$. Si conclude che $f_{n+1} = -f_n + f_{n-1} > 0$ perché somma di due numeri positivi. Se invece $n + 1$ è dispari, il ragionamento è analogo. Infatti in questo caso n è pari e per ipotesi induttiva $f_n > 0$, dunque $-f_n > 0$. Inoltre, ancora per ipotesi induttiva, $f_{n-1} > 0$ perché $n - 1$ è dispari. Si conclude che $f_{n+1} = -f_n + f_{n-1} < 0$ perché somma di due numeri negativi.

(3) Per dimostrare questa proprietà, è sufficiente usare la proprietà (2) appena vista, e non c'è bisogno di usare di nuovo l'induzione. Infatti, se $n + 1$ è pari, allora $g_{n+1} = |f_{n+1}| =$ (poiché f_{n+1} è positivo) $= f_{n+1} = -f_n + f_{n-1} \geq$ (poichè f_{n-1} è positivo) $\geq -f_n =$ (poiché f_n è negativo) $= |f_n| = g_n$. In modo del tutto simile, anche nel caso $n + 1$ dispari, si dimostra che $g_{n+1} \geq g_n$.

Non è necessario ai fini della risoluzione di questo esercizio, ma con ragionamenti analoghi a sopra, si può mostrare che $g_{n+1} = g_n + g_{n-1}$ è in realtà una successione di Fibonacci, con valori iniziali $g_0 = 1$ e $g_1 = 3$. In particolare è crescente.

Esercizio 2.

1. Sia $X = \mathcal{P}(Y)$ l'insieme delle parti di $Y = \{1, 2, 3\}$.
   - Quanti elementi appartengono ad X?
   - Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
     (a) $1 \in X$;
     (b) $1 \subseteq X$;
     (c) $\{1\} \in X$;
     (d) $\{1\} \subseteq X$
2. Stabilire se la seguente implicazione è sempre vera, dandone una dimostrazione in caso affermativo, o trovando un controesempio in caso contrario:

$$(A \subseteq B \wedge B \in C) \rightarrow A \subseteq C.$$

Soluzione. (1) In generale, un insieme finito con n elementi ha esattamente 2^n sottoinsiemi (questo è stato dimostrato a lezione). Poiché Y contiene 3 elementi, il suo insieme delle parti $X = \mathcal{P}(Y)$ contiene esattamente $2^3 = 8$ elementi. Precisamente:

$$X = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Si osservi che gli elementi dell'insieme $X = \mathcal{P}(X)$ sono a loro volta insiemi (questo fatto accade spesso in matematica). Per rispondere correttamente alle domande che seguono, è indispensabile notare che $1 \neq \{1\}$. Infatti 1 è un numero, mentre $\{1\}$ è un insieme, precisamente l'insieme che contiene il numero 1 come suo unico elemento. A questo punto, si può verificare immediatamente che $1 \notin X$ (dunque (a) è *falsa*), e che $\{1\} \in X$ (dunque (c) è *vera*). La (d) è evidentemente *falsa*. Infatti $\{1\} \subseteq X$ significa che ogni elemento di $\{1\}$ è anche elemento di X. Ma questo è falso perché $1 \in \{1\}$ mentre $1 \notin X$. Infine anche la (b) è banalmente *falsa* perché 1 non è un insieme.

(2) Questa implicazione *non* è vera in generale. Ad esempio, se $A = \{1\}$, $B = \{1,2\}$ e $C = \{\{1,2\},\{2\}\}$, allora $A \subseteq B$ e $B \in C$, ma $A \nsubseteq C$ perché $1 \notin C$.

Esercizio 3. Indichiamo con $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ l'insieme dei numeri naturali da 1 ad n.

1. Determinare il numero delle funzioni *iniettive* $f : X_8 \to X_{16}$;
2. Determinare il numero delle funzioni $f : X_8 \to X_{16}$ tali che per almeno un elemento $x \in X_8$, $f(x)$ è pari;
3. Determinare il numero delle funzioni $f : X_8 \to X_{16}$ per le quali esistono esattamente 5 elementi $x \in X_8$ tali che $f(x) = 3$.
4. Determinare il numero delle funzioni *iniettive* $f : X_8 \to X_{16}$ tali che se x è pari, allora $f(x)$ sia pari.

Soluzione. (1) Si tratta di contare le *disposizioni* $D_{16,8} = 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9$. Infatti ci sono 16 possibili scelte per il valore $f(1)$; per ognuna di queste scelte, ci sono 15 possibili scelte per il valore $f(2)$ (uno qualunque dei 16 numeri in X_{16} *tranne* $f(0)$, altrimenti f non è iniettiva); etc.

(2) Le funzioni che dobbiamo contare sono tutte *tranne* quelle che assumono solo valori dispari. Queste ultime sono tante quante le funzioni $f : X_8 \to \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$, cioè 8^8. Visto che tutte le funzioni $f : X_8 \to X_{16}$ sono 16^8, il numero cercato è $16^8 - 8^8$.

(3) Le possibili scelte dei 5 elementi $x \in X_8$ tali che $f(x) = 5$ sono tante quanti i sottoinsiemi di 5 elementi presi da un insieme di 8 elementi, e cioè $\binom{8}{5}$. Per ognuna di queste scelte, restano da attribuire i valori $f(x)$ ai rimanenti 3 elementi. Per ciascuno di questi 3 elementi ci sono 15 possibili scelte (uno qualunque tra i 16 numeri di X_{16}, *tranne* il 5). Il calcolo finale è dunque: $\binom{8}{5} \cdot 15^3$.

(4) Per ciascuno dei 4 numeri pari $x \in X_8$, posso scegliere come sua immagine $f(x)$ uno qualunque tra gli 8 numeri pari di X_{16}. Visto che f deve essere iniettiva, ho in tutto $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$ possibilità. Per ognuna di queste scelte, restano da attribuire i valori $f(x)$ ai 4 numeri dispari x di X_8. Poiché f deve essere iniettiva, ho 12 possibili scelte per $f(1)$ (uno qualunque degli elementi di X_{16} *tranne* i 4 valori già assegnati $f(2)$, $f(4)$, $f(6)$ e $f(8)$); 11 possibili scelte per $f(3)$, 10 possibili scelte per $f(5)$ e 9 possibili scelte per $f(7)$. (Si osservi che se x è pari, allora $f(x)$ deve essere pari, ma se x è dispari, non ci sono restrizioni su $f(x)$, che può essere sia pari che dispari). Il numero delle funzioni cercate è dunque $(8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5) \cdot (12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9)$.

Esercizio 4. Determinare la minima soluzione positiva dell'equazione

$$4250x \equiv 390 \pmod{174}$$

Determinare inoltre il numero delle soluzioni x comprese tra 1 e 1500.

Soluzione. (1) Intanto possiamo dividere tutto per 2 ed ottenere: $2125x \equiv 195 \pmod{87}$. Poi possiamo ridurre i coefficienti modulo 87. Visto che $2125 = 24 \cdot 87 + 37$ (dunque $2125 \equiv 37 \pmod{87}$), e che $195 = 2 \cdot 87 + 21$ (dunque $195 \equiv 21 \pmod{87}$), l'equazione di sopra è equivalente a

$$37x \equiv 21 \pmod{87}.$$

Si osservi che 37 è un numero primo, mentre $87 = 3 \cdot 29$ dove 29 è primo. Dunque il massimo comun divisore $(37, 87) = 1$ e perciò l'equazione $37x \equiv 21 \pmod{87}$ ammette ed unica soluzione modulo 87. Con successive divisioni euclidee, si ricava l'identità di Bezout: $1 = 37 \cdot 40 - 87 \cdot 17$. Moltiplicando tutto per 21 si ottiene: $21 = 37 \cdot (40 \cdot 21) - 87 \cdot (17 \cdot 21)$. Allora $x = 40 \cdot 21 = 840$ è una soluzione della nostra equazione. Visto che $840 = 9 \cdot 87 + 57$, e quindi $840 \equiv 57 \pmod{87}$, si conclude che $x = 57$ è la minima soluzione positiva della congruenza proposta.

(2) Tutte le soluzioni positive della congruenza sono della forma $x = 57 + 87k$ dove $k = 0, 1, 2, \ldots$. Visto che per $k = 16$ si ha $x = 57 + 87 \cdot 16 = 1449 < 1500$ mentre per $k = 17$ si ha $x = 57 + 87 \cdot 17 = 1536 > 1500$, si conclude che ci sono esattamente 17 soluzioni positive comprese tra 1 e 1500 (tante quanti i valori di $k = 0, 1, \ldots, 16$).

Corso di Laurea in Informatica
Seconda prova intermedia del 17 Dicembre 2003 – Versione B
(Soluzioni a cura di M. Di Nasso)

Esercizio 1. Determinare la minima soluzione positiva dell'equazione

$$4174x \equiv 406 \pmod{186}$$

Determinare inoltre il numero delle soluzioni x comprese tra 1 e 1400.

Soluzione. (1) Intanto possiamo dividere tutto per 2 ed ottenere: $2087x \equiv 203 \pmod{93}$. Poi possiamo ridurre i coefficienti modulo 93. Visto che $2087 = 22 \cdot 93 + 41$ (dunque $2087 \equiv 41 \pmod{93}$), e che $203 = 2 \cdot 93 + 17$ (dunque $203 \equiv 17 \pmod{93}$), l'equazione di sopra è equivalente a

$$41x \equiv 17 \pmod{93}.$$

Si osservi che 41 è un numero primo, mentre $93 = 3 \cdot 31$ dove 31 è primo. Dunque il massimo comun divisore $(41, 93) = 1$ e perciò l'equazione $41x \equiv 17 \pmod{93}$ ammette ed unica soluzione modulo 93. Con successive divisioni euclidee, si ricava l'identità di Bezout: $1 = 41 \cdot (-34) + 93 \cdot 15$. Moltiplicando tutto per 17 si ottiene: $17 = 41 \cdot (-34 \cdot 17) + 93 \cdot (15 \cdot 17)$. Allora $x = -34 \cdot 17 = -578$ è una soluzione della nostra equazione. Visto che $-578 = -7 \cdot 93 + 73$, e quindi $-578 \equiv 73 \pmod{93}$, si conclude che $x = 73$ è la minima soluzione positiva della congruenza proposta.

(2) Tutte le soluzioni positive della congruenza sono della forma $x = 73 + 93k$ dove $k = 0, 1, 2, \ldots$. Visto che per $k = 14$ si ha $x = 73 + 93 \cdot 14 = 1375 < 1400$ mentre per $k = 15$ si ha $x = 73 + 93 \cdot 15 = 1468 > 1400$, si conclude che ci sono esattamente 15 soluzioni positive comprese tra 1 e 1400 (tante quanti i valori di $k = 0, 1, \ldots, 14$).

Esercizio 2. Indichiamo con $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ l'insieme dei numeri naturali da 1 ad n.

1. Determinare il numero delle funzioni *iniettive* $f : A_{10} \to A_{14}$;
2. Determinare il numero delle funzioni $f : A_{10} \to A_{14}$ tali che per almeno un elemento $x \in A_{10}$, $f(x)$ è dispari;
3. Determinare il numero delle funzioni $f : A_{10} \to A_{14}$ per le quali esistono esattamente 3 elementi $x \in A_{10}$ tali che $f(x) = 7$.
4. Determinare il numero delle funzioni *iniettive* $f : A_{10} \to A_{14}$ tali che se x è pari, allora $f(x)$ sia dispari.

Soluzione. Per le motivazioni, si rimanda all'analogo esercizio della versione A.
(1) $D_{14,10} = 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$.
(2) $14^{10} - 7^{10}$.
(3) $\binom{10}{3} \cdot 13^7$.
(4) $(7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3) \cdot (9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5)$.

Esercizio 3.

1. Sia $Y = \mathcal{P}(X)$ l'insieme delle parti di $X = \{a, b, c, d\}$.
   - Quanti elementi appartengono ad Y?

- Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
  (a) $a \subseteq Y$;
  (b) $\{a\} \subseteq Y$;
  (c) $\{a\} \in Y$;
  (d) $a \in Y$.

2. Stabilire se la seguente implicazione è sempre vera, dandone una dimostrazione in caso affermativo, o trovando un controesempio in caso contrario:

$$(D \subseteq E \wedge E \in F) \to D \subseteq F.$$

Soluzione. Per le motivazioni, si rimanda all'analogo esercizio della versione A.

(1) Y contiene $2^4 = 16$ elementi. Precisamente Y è l'insieme:

$$\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}, \{a,b,c,d\}\}.$$

(c) è *vera*. Le altre sono *false*.

(2) Questa implicazione *non* è vera in generale. Ad esempio, se $D = \{1\}$, $E = \{1,2\}$ e $F = \{\{1,2\},\{2\}\}$, allora $D \subseteq E$ e $E \in F$, ma $D \not\subseteq F$ perché $1 \notin F$.

Esercizio 4. Sia g la successione definita per ricorrenza ponendo $g_0 = 2$, $g_1 = -3$, $g_{n+1} = -g_n + g_{n-1}$.

1. Calcolare il valore di g_6;
2. Dimostrare che se n è pari allora $g_n > 0$ e se n è dispari allora $g_n < 0$;
3. Dimostrare che la successione $f_n = |g_n|$ è crescente.

Soluzione. (1) Applicando la definizione, si ricava che $g_2 = -g_1 + g_0 = -(-3) + 2 = 5$; $g_3 = -5 + (-3) = -8$; $g_4 = -(-8) + 5 = 13$; $g_5 = -13 + (-8) = -21$ e $g_6 = -(-21) + 13 = 34$.

(2) e (3). Le Le dimostrazioni sono le stesse degli analoghi esercizi della versione A.

Corso di Laurea in Informatica
Seconda prova intermedia del 17 Dicembre 2003 – Versione C
(Soluzioni a cura di M. Di Nasso)

Esercizio 1. Indichiamo con $X_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ l'insieme dei numeri naturali da 1 ad n.

1. Determinare il numero delle funzioni *iniettive* $f : X_{12} \to X_{18}$;
2. Determinare il numero delle funzioni $f : X_{12} \to X_{18}$ tali che per almeno un elemento $x \in X_{12}$, $f(x)$ è pari;
3. Determinare il numero delle funzioni *iniettive* $f : X_{12} \to X_{18}$ tali che se x è dispari, allora $f(x)$ sia dispari.
4. Determinare il numero delle funzioni $f : X_{12} \to X_{18}$ per le quali esistono esattamente 6 elementi $x \in X_{12}$ tali che $f(x) = 5$.

Soluzione. Per le motivazioni, si rimanda all'analogo esercizio della versione A.
(1) $D_{18,12} = 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$.
(2) $18^{12} - 9^{12}$.
(3) $(9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4) \cdot (12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7)$.
(4) $\binom{12}{6} \cdot 17^6$.

Esercizio 2. Determinare la minima soluzione positiva dell'equazione

$$3826x \equiv 378 \pmod{170}$$

Determinare inoltre il numero delle soluzioni x comprese tra 1 e 1600.

Soluzione. (1) Intanto possiamo dividere tutto per 2 ed ottenere: $1913x \equiv 189 \pmod{85}$. Poi possiamo ridurre i coefficienti modulo 85. Visto che $1913 = 22 \cdot 85 + 43$ (dunque $1913 \equiv 43 \pmod{85}$), e che $189 = 2 \cdot 85 + 19$ (dunque $189 \equiv 19 \pmod{85}$), l'equazione di sopra è equivalente a

$$43x \equiv 19 \pmod{85}.$$

Si osservi che 43 è un numero primo, mentre $85 = 5 \cdot 17$ dove 17 è primo. Dunque il massimo comun divisore $(43, 85) = 1$ e perciò l'equazione $43x \equiv 19 \pmod{85}$ ammette ed unica soluzione modulo 85. Con successive divisioni euclidee, si ricava l'identità di Bezout: $1 = 43 \cdot 2 - 85 \cdot 1$. Moltiplicando tutto per 19 si ottiene: $19 = 43 \cdot (2 \cdot 19) - 85 \cdot (1 \cdot 19)$. Allora $x = 2 \cdot 19 = 38$ è una soluzione ed è chiaramente la minima soluzione positiva della congruenza proposta.

(2) Tutte le soluzioni positive della congruenza sono della forma $x = 38 + 85k$ dove $k = 0, 1, 2, \ldots$. Visto che per $k = 18$ si ha $x = 38 + 85 \cdot 18 = 1568 < 1600$ mentre per $k = 19$ si ha $x = 38 + 85 \cdot 19 = 1653 > 1600$, si conclude che ci sono esattamente 19 soluzioni positive comprese tra 1 e 1600 (tante quanti i valori di $k = 0, 1, \ldots, 18$).

Esercizio 3. Sia g la successione definita per ricorrenza ponendo $g_0 = -2$, $g_1 = 3$, $g_{n+1} = -g_n + g_{n-1}$.

1. Calcolare il valore di g_6;
2. Dimostrare che se n è pari allora $g_n < 0$ e se n è dispari allora $g_n > 0$;

3. Dimostrare che la successione $f_n = |g_n|$ è crescente.

Soluzione. (1) Applicando la definizione, si ricava che $g_2 = -g_1 + g_0 = -3 + (-2) = -5$; $g_3 = -(-5) + 3 = 8$; $g_4 = -8 + (-5) = -13$; $g_5 = -(-13) + 8 = 21$ e $g_6 = -21 + (-13) = -34$.

(2) e (3). Le Le dimostrazioni sono pressoché le stesse degli analoghi esercizi della versione A (basta scambiare i casi "pari" e "dispari").

Esercizio 4.

1. Sia $A = \mathcal{P}(B)$ l'insieme delle parti di $B = \{1, 2, 3, 4\}$.
   - Quanti elementi appartengono ad A?
   - Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
     (a) $\{4\} \in A$;
     (b) $4 \in A$;
     (c) $\{4\} \subseteq A$;
     (d) $4 \subseteq A$.
2. Stabilire se la seguente implicazione è sempre vera, dandone una dimostrazione in caso affermativo, o trovando un controesempio in caso contrario:

$$(X \subseteq Y \wedge Y \in Z) \to X \subseteq Z.$$

Soluzione. Per le motivazioni, si rimanda all'analogo esercizio della versione A.

(1) A contiene $2^4 = 16$ elementi. Precisamente A è l'insieme:

$$\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}.$$

(a) è *vera*. Le altre sono *false*.

(2) Questa implicazione *non* è vera in generale. Ad esempio, se $X = \{1\}$, $Y = \{1, 2\}$ e $Z = \{\{1, 2\}, \{2\}\}$, allora $X \subseteq Y$ e $Y \in Z$, ma $X \not\subseteq Z$ perché $1 \notin Z$.

Corso di Laurea in Informatica
Seconda prova intermedia del 17 Dicembre 2003 – Versione D
(Soluzioni a cura di M. Di Nasso)

Esercizio 1.

1. Sia $Y = \mathcal{P}(X)$ l'insieme delle parti di $X = \{a, b, c\}$.
   - Quanti elementi appartengono ad Y?
   - Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
     (a) $\{c\} \subseteq Y$;
     (b) $c \subseteq Y$;
     (c) $\{c\} \in Y$;
     (d) $c \in Y$.

2. Stabilire se la seguente implicazione è sempre vera, dandone una dimostrazione in caso affermativo, o trovando un controesempio in caso contrario:

$$(G \subseteq H \wedge H \in K) \rightarrow G \subseteq K.$$

Soluzione. Per le motivazioni, si rimanda all'analogo esercizio della versione A.

(1) Y contiene $2^3 = 8$ elementi. Precisamente:

$$Y = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

(c) è *vera*. Le altre sono *false*.

(2) Questa implicazione *non* è vera in generale. Ad esempio, se $G = \{1\}$, $H = \{1, 2\}$ e $K = \{\{1, 2\}, \{2\}\}$, allora $G \subseteq H$ e $H \in K$, ma $G \not\subseteq K$ perché $1 \notin K$.

Esercizio 2. Sia f la successione definita per ricorrenza ponendo $f_0 = -1$, $f_1 = 3$, $f_{n+1} = -f_n + f_{n-1}$.

1. Calcolare il valore di f_6;
2. Dimostrare che se n è pari allora $f_n < 0$ e se n è dispari allora $f_n > 0$;
3. Dimostrare che la successione $g_n = |f_n|$ è crescente.

Soluzione. (1) Applicando la definizione, si ricava che $f_2 = -f_1 + f_0 = -3 + (-1) = -4$; $f_3 = -(-4) + 3 = 7$; $f_4 = -7 + (-4) = -11$; $f_5 = -(-11) + 7 = 18$ e $f_6 = -18 + (-11) = -29$.

(2) e (3). Le Le dimostrazioni sono pressoché le stesse degli analoghi esercizi della versione A (basta scambiare i casi "pari" e "dispari").

Esercizio 3. Determinare la minima soluzione positiva dell'equazione

$$4254x \equiv 406 \pmod{190}$$

Determinare inoltre il numero delle soluzioni x comprese tra 1 e 1300.

4254x=406 (190) 37x=13 (95) 18*37-7*95=1 x=44 (95)

Soluzione. (1) Intanto possiamo dividere tutto per 2 ed ottenere: $2127x \equiv 203 \pmod{95}$. Poi possiamo ridurre i coefficienti modulo 95. Visto che $2127 = 22 \cdot 95 + 37$ (dunque $2127 \equiv 37 \pmod{95}$), e che $203 = 2 \cdot 95 + 13$ (dunque $203 \equiv 13 \pmod{95}$), l'equazione di sopra è equivalente a

$$37x \equiv 13 \pmod{95}.$$

Si osservi che 37 è un numero primo, mentre $95 = 5 \cdot 19$ dove 19 è primo. Dunque il massimo comun divisore $(37, 95) = 1$ e perciò l'equazione $37x \equiv 13 \pmod{95}$ ammette ed unica soluzione modulo 95. Con successive divisioni euclidee, si ricava l'identità di Bezout: $1 = 37 \cdot 18 - 95 \cdot 7$. Moltiplicando tutto per 13 si ottiene: $13 = 37 \cdot (18 \cdot 13) - 95 \cdot (7 \cdot 13)$. Allora $x = 18 \cdot 13 = 234$ è una soluzione della nostra equazione. Visto che $234 = 2 \cdot 95 + 44$, e quindi $234 \equiv 44 \pmod{95}$, si conclude che $x = 44$ è la minima soluzione positiva della congruenza proposta.

(2) Tutte le soluzioni positive della congruenza sono della forma $x = 44 + 95k$ dove $k = 0, 1, 2, \ldots$. Visto che per $k = 13$ si ha $x = 44 + 95 \cdot 13 = 1279 < 1300$ mentre per $k = 14$ si ha $x = 44 + 95 \cdot 14 = 1374 > 1300$, si conclude che ci sono esattamente 14 soluzioni positive comprese tra 1 e 1300 (tante quanti i valori di $k = 0, 1, \ldots, 13$).

Esercizio 4. Indichiamo con $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ l'insieme dei numeri naturali da 1 ad n.

1. Determinare il numero delle funzioni *iniettive* $f : A_8 \to A_{18}$;
2. Determinare il numero delle funzioni $f : A_8 \to A_{18}$ tali che per almeno un elemento $x \in A_8$, $f(x)$ è dispari;
3. Determinare il numero delle funzioni *iniettive* $f : A_8 \to A_{18}$ tali che se x è dispari, allora $f(x)$ sia pari.
4. Determinare il numero delle funzioni $f : A_8 \to A_{18}$ per le quali esistono esattamente 4 elementi $x \in A_8$ tali che $f(x) = 9$.

Soluzione. Per le motivazioni, si rimanda all'analogo esercizio della versione A.

(1) $D_{18,8} = 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11$.

(2) $18^8 - 9^8$.

(3) $(9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6) \cdot (14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11)$.

(4) $\binom{8}{4} \cdot 17^4$.