Corso di Laurea in Informatica
Linguaggio e Metodi della Matematica
Prova scritta del 19 Dicembre 2002

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: ....

Corso e Aula: ....

Firma: ....

Esercizio 1. Sia $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 18\}$.

1. Determinare quante sono le funzioni $f : A \to A$ iniettive. SOLUZIONE: $18!$.

2. Determinare quante sono le funzioni $f : A \to A$ tali che l'immagine di f contiene *almeno* un numero dispari. SOLUZIONE: $18^{18} - 9^{18}$. Conto tutte le funzioni, che sono 18^{18}, meno quelle che assumono solo valori pari, che sono 9^{18}.

3. Determinare quante sono le funzioni $f : A \to A$ tali che l'immagine di f contiene *al massimo* un numero pari. SOLUZIONE: $9^{18}+9(10^{18}-9^{18})$. Quelle la cui immagine non contiene numeri pari sono 9^{18} (ci sono 9 numeri dispari, e devo scegliere una successione di 18 numeri dispari). A queste devo aggiungere quelle la cui immagine contiene esattamente un numero pari. Queste sono $9(10^{18} - 9^{18})$. Il fattore 9 davanti alle parentesi si giustifica con il fatto che il numero pari lo posso scegliere in 9 modi. Una volta scelto il numero pari, ci sono 10 valori possibili per la funzione (i 9 dispari più il pari scelto) e questo mi dà 10^{18} funzioni. Devo però togliere da queste quelle che non assumono il valore pari scelto, che sono 9^{18}.

4. Determinare quante sono le funzioni $f : A \to A$ tali che esistano *almeno* due elementi a e b di A in modo che valga $f(a) = f(b)$. SOLUZIONE: $18^{18} - 18!$, ovvero tutte le funzioni meno quelle iniettive.

NOTA: Si possono indicare le soluzioni tramite una espressione senza svolgere i calcoli. Le risposte **devono** essere giustificate.

Esercizio 2. Si consideri la successione di Fibonacci definita da $f_0 = 0, f_1 = 1,\ f_2 = 1,\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Dimostrare che:

1. $f_{5n} = 5f_{5n-4} + 3f_{5n-5}$ per ogni $n \geq 1$. SOLUZIONE: per sostituzione $f_{5n} = f_{5n-1}+f_{5n-2} = (f_{5n-2}-f_{5n-3})+(f_{5n-3}+f_{5n-4})$. Ora sostituisco f_{5n-3} con $f_{5n-4} + f_{5n-5}$, e f_{5n-2} con $f_{5n-3} + f_{5n-4}$, che è uguale a $f_{5n-4}+f_{5n-5}+f_{5n-4}$. Effettuando le sostituzioni e sommando ottengo la formula.

2. Per ogni $n \geq 1$, f_{5n} è multiplo di 5. SOLUZIONE: Per induzione forte usando la formula del punto precedente. Abbiamo $f_0 = 0, f_1 = 1, f_2 = 1, f_3 = 2, f_4 = 3, f_5 = 5$, da cui si vede che la base dell'induzione (il caso $n = 1$) è verificata (in effetti funziona anche per $n = 0$). Per il passo induttivo osserviamo che f_{5n} è la somma di $5f_{5n-4}$, che è senz'altro un multiplo di 5, e di $f_{5n-5} = f_{5(n-1)}$, che per ipotesi induttiva è un multiplo di 5. Concludiamo osservando che la somma di due multipli di 5 è un multiplo di 5.

Esercizio 3. Trovare tutte le soluzioni $x \in \mathbb{Z}$ della congruenza

$$30x \equiv 70 \pmod{55}$$

SOLUZIONE. Dividendo tutto per 5 ottengo la congruenza equivalente $6x \equiv 14 \pmod{11}$, che si può anche scrivere come $3x \equiv 7 \pmod{11}$ dividendo per 2 i due termini della congruenza (è lecito perché $(2, 11) = 1$). Ora osservo che 4 è un inverso di 3 modulo 11 in quanto $4 \cdot 3 = 12$, che è congruo a 1 modulo 11 (tale inverso si può anche trovare con l'algoritmo per il teorema di Bezout). Moltiplicando per 4 i due termini della congruenza ottengo $4 \cdot 3x \equiv 4 \cdot 7 \pmod{11}$, e semplificando $x \equiv 6 \pmod{11}$. Una soluzione è $x = 6$. Le altre sono gli interi della forma $6 + k11$.

Esercizio 4. Determinare nella seguente lista se vi siano due espressioni che denotano lo stesso insieme, qualunque sia la scelta degli insiemi A, B, C. La risposta **deve** essere giustificata.

1. $(A \times C) \cup (B \times C)$
2. $(A \cup C) \times (B \cup C)$
3. $(A \cup B) \times C$
4. $(A \times B) \cup C$

SOLUZIONE: La prima e la terza denotano lo stesso insieme. Infatti la terza è uguale a $\{(x, c) \mid x \in A \cup B \wedge c \in C\}$, che usando la definizione di unione si riscrive come $\{(x, c) \mid (x \in A \vee x \in B) \wedge c \in C\}$. Ora uso la distributività di $\wedge$ su $\vee$ per ottenere $\{(x, c) \mid (x \in A \wedge c \in C) \vee (x \in B \wedge c \in C)\}$, che è uguale a $\{(x, c) \mid x \in A \wedge c \in C\} \cup \{(x, c) \mid x \in B \wedge c \in C\}$, che coincide con l'insieme dato dalla prima espressione.

Corso di Laurea in Informatica
Linguaggio e Metodi della Matematica
Prova scritta del 19 Dicembre 2002

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: ....

Corso e Aula: ....

Firma: ....

Esercizio 1. Sia $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 22\}$.

1. Determinare quante sono le funzioni $f : A \to A$ iniettive. SOLUZIONE. $22!$.
2. Determinare quante sono le funzioni $f : A \to A$ tali che l'immagine di f contiene *al massimo* un numero dispari. SOLUZIONE. $11^{22} + 11(12^{22} + 11^{22})$.
3. Determinare quante sono le funzioni $f : A \to A$ tali che l'immagine di f contiene *almeno* un numero pari. SOLUZIONE: $22^{22} - 11^{22}$.
4. Determinare quante sono le funzioni $f : A \to A$ tali che esistano *al più* due elementi a e b di A in modo che valga $f(a) = f(b)$. $22! + \binom{22}{2} \cdot 22 \cdot 21!$.

NOTA: Si possono indicare le soluzioni tramite una espressione senza svolgere i calcoli. Le risposte **devono** essere giustificate.

Esercizio 2. Si consideri la successione di Fibonacci definita da $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Dimostrare che:

1. $f_{3n} = 2f_{3n-2} + f_{3n-3}$ per ogni $n \geq 1$.
2. Per ogni $n \geq 1$, f_{3n} è pari.

Esercizio 3. Trovare tutte le soluzioni $x \in \mathbb{Z}$ della congruenza

$$12x \equiv 32 \pmod{52}$$

SOLUZIONE $x \equiv 7 \pmod{7}$.

Esercizio 4. Determinare nella seguente lista se vi siano due espressioni che denotano lo stesso insieme, qualunque sia la scelta degli insiemi X, Y, Z. La risposta **deve** essere giustificata.

1. $(X \cap Y) \times Z$
2. $(X \times Z) \cap (Y \times Z)$
3. $(X \cap Z) \times (Y \cap Z)$
4. $X \cap (Y \times Z)$

SOLUZIONE. La prima e la seconda.

Corso di Laurea in Informatica
Linguaggio e Metodi della Matematica
Prova scritta del 19 Dicembre 2002

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: ....

Corso e Aula: ....

Firma: ....

Esercizio 1. Sia $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 19\}$.

1. Determinare quante sono le funzioni $f : A \to A$ iniettive. SOLUZIONE. $19!$.
2. Determinare quante sono le funzioni $f : A \to A$ tali che l'immagine di f contiene *esattamente* un numero dispari. SOLUZIONE. $10(10^{19} - 9^{19})$.
3. Determinare quante sono le funzioni $f : A \to A$ tali che l'immagine di f contiene *al massimo* un numero pari. SOLUZIONE. $10^{19} + 9(11^{19} - 10^{19})$.
4. Determinare quante sono le funzioni $f : A \to A$ tali che esistano *al più* due elementi a e b di A in modo che valga $f(a) = f(b)$. SOLUZIONE. $19! + \binom{19}{2} 19 \cdot 18!$.

NOTA: Si possono indicare le soluzioni tramite una espressione senza svolgere i calcoli. Le risposte **devono** essere giustificate.

Esercizio 2. Si consideri la successione di Fibonacci definita da $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Dimostrare che:

1. $f_{4n} = 3f_{4n-3} + 2f_{4n-4}$ per ogni $n \geq 1$.
2. Per ogni $n \geq 1$, f_{4n} è multiplo 3.

Esercizio 3. Trovare tutte le soluzioni $x \in \mathbb{Z}$ della congruenza

$$18x \equiv 36 \pmod{42}$$

SOLUZIONE. $x \equiv 2 \pmod{7}$.

Esercizio 4. Determinare nella seguente lista se vi siano due espressioni che denotano lo stesso insieme, qualunque sia la scelta degli insiemi X, Y, Z. La risposta **deve** essere giustificata.

1. $A \times (B \cap C)$
2. $A \cap (B \times C)$
3. $(A \cap B) \times (A \cap C)$
4. $(A \times B) \cap (A \times C)$

SOLUZIONE: La 1 e la 4.

Corso di Laurea in Informatica
Linguaggio e Metodi della Matematica
Prova scritta del 19 Dicembre 2002

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: ....

Corso e Aula: ....

Firma: ....

Esercizio 1. Sia $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 21\}$.

1. Determinare quante sono le funzioni $f : A \to A$ iniettive. SOLUZIONE. $21!$.
2. Determinare quante sono le funzioni $f : A \to A$ tali che l'immagine di f contiene *al massimo* un numero dispari. SOLUZIONE. $10^{21} + 11(11^{21} - 10^{21})$.
3. Determinare quante sono le funzioni $f : A \to A$ tali che l'immagine di f contiene *esattamente* un numero pari. SOLUZIONE. $10(12^{21} - 11^{21})$.
4. Determinare quante sono le funzioni $f : A \to A$ tali che esistano *almeno* due elementi a e b di A in modo che valga $f(a) = f(b)$. SOLUZIONE. $21^{21} - 21!$.

NOTA: Si possono indicare le soluzioni tramite una espressione senza svolgere i calcoli. Le risposte **devono** essere giustificate.

Esercizio 2. Si consideri la successione di Fibonacci definita da $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Dimostrare che:

1. $f_{6n} = 8f_{6n-5} + 5f_{6n-6}$ per ogni $n \geq 1$.
2. Per ogni $n \geq 1$, f_{6n} è multiplo 4.

Esercizio 3. Trovare tutte le soluzioni $x \in \mathbb{Z}$ della congruenza

$$24x \equiv 30 \pmod{78}$$

SOLUZIONE $x \equiv 11 \pmod{13}$.

Esercizio 4. Determinare nella seguente lista se vi siano due espressioni che denotano lo stesso insieme, qualunque sia la scelta degli insiemi X, Y, Z. La risposta **deve** essere giustificata.

1. $(X \times Y) \cup Z$
2. $(X \times Y) \cup (X \times Z)$
3. $X \times (Y \cup Z)$
4. $(X \cup Z) \times (Y \cup Z)$

SOLUZIONE. La 2 e la 3.