Corso di Laurea in Informatica
Linguaggio e Metodi della Matematica:
Prova scritta del 9 settembre 2002

COGNOME E NOME

MATRICOLA **CORSO** **AULA**

Firma

NOTA: Le risposte vanno giustificate.

Esercizio 1. Trascrivere la seguente formula in linguaggio naturale e scriverne una sua forma normale prenessa:

$$[\exists a \exists b(ax + by = z)] \to \{\forall d[(\exists a(da = x)) \wedge (\exists a(da = y)) \to (\exists a(da = z))]\}.$$

Soluzione: Se z è somma di un multiplo di x ed un multiplo di y, allora ogni divisore comune di x ed y divide anche z.
$\forall a, b \forall d, a_1, a_2 \exists a_3 (ax + by = z \to (da_1 = x \wedge da_2 = y \to da_3 = z))$

Esercizio 2. Formalizzare, usando le notazioni logiche e la notazione $x \in A$, l'espressione:
"Se A è sottoinsieme di B allora $C - B$ è sottoinsieme di $C - A$".
Soluzione: $\forall x(x \in A \to x \in B) \to \forall y(y \in C \wedge y \notin B \to y \in C \wedge y \notin A)$.

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = x^3 + x^2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e sia $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la funzione definita da $g(x) = x^3 + x^2$ per ogni $x \in \mathbb{Z}$ (pur avendo la stessa formula, le funzioni f e g si distinguono per avere dominio e codominio diversi). Stabilire se le funzioni f e g sono iniettive e/o surgettive.

Soluzione: f non è iniettiva perché $f(0) = 0 = f(1)$. g non è iniettiva per lo stesso motivo. f è surgettiva perchè è una funzione continua sui reali che assume valori arbitrariamente grandi sia positivi che negativi. g non è surgettiva in quanto ad esempio non assume mai il valore 3. Se infatti $g(x) = x^3 + x^2 = x^2(x+1) = 3$, con x intero, x dovrebbe dividere 3, e pertanto le uniche possibilità sarebbero $x = 1, x = -1, x = 3, x = -3$, ma nessuno di questi valori dà $g(x) = 3$.

Esercizio 4. Consideriamo le parole di lunghezza 8 composte da lettere dell'alfabeto italiano (21 lettere).

1. Quante sono le parole che non contengono né la lettera a né la lettera b?
2. Quante sono le parole che contengono la lettera a ma non la lettera b?
3. Quante sono le parole che contengono sia la lettera a che la lettera b?

Soluzione: (1) 19^8.
(2) $20^8 - 19^8$ (conto quelle che non contengono la b e sottraggo il numero di quelle che non contengono nemmeno la a).
(3) $21^8 - 2 \cdot 20^8 + 19^8$. Il numero totale delle parole è 21^8. Da queste sottraggo l'unione di quelle che non contengono la a, che sono 20^8, e di quelle che non contengono la b che sono altrettante. Applicando la formula per la cardinalità dell'unione (formula di inclusione-esclusione) si ottiene il risultato desiderato osservando che 19^8 è il numero della parole che non contengono nè la a nè la b.

Esercizio 5. Determinare per quali valori di a esiste una soluzione al seguente sistema:

$$\begin{cases} x \equiv 5 \pmod{77} \\ y \equiv 4 \pmod{91} \\ x + y = a \end{cases}$$

e determinare una soluzione per $a = 23$.

Soluzione: Le soluzioni sono della forma $x = 5 + 77k, y = 4 + 91s, x + y = 9 + 77k + 91s = a$. I numeri della forma $77k + 91s$ sono esattamente i multipli di 7, essendo $7 = 6 \cdot 77 - 5 \cdot 91$ il massimo comun divisore tra 77 e 91. Quindi il sistema ha soluzione per a della forma $9 + m7$. Per $a = 23 = 9 + 2 \cdot 7 = 9 + 12 \cdot 77 - 10 \cdot 91$, otteniamo la soluzione $x = 5 + 77 \cdot 12, y = 4 - 10 \cdot 91$.

Esercizio 6. Definiamo per ricorrenza la successione f_n ponendo $f_0 = 0$, $f_{n+1} = f_n^2 - n$; determinare N tale che la seguente formula

$$\forall n (n \geq N \to f_n > 2^n)$$

sia vera per i numeri naturali, e dimostrarla.

Soluzione: $f_0 = 0, f_1 = 0, f_2 = -1, f_3 = -1, f_4 = -2, f_5 = 0, f_6 = -5, f_7 = 19, f_8 = 19^2 - 7 > 2^8$. Per $n = N = 8$ vale dunque la formula $f_{n+1} > 2^n$. Per verificare che la formula continua a valere per ogni $n \geq N$ consideriamo un tale n e supponiamo per ipotesi induttiva che $f_n > 2^n$. Si ha allora $f_{n+1} = f_n^2 - n > (2^n)^2 - n \geq 2^{n+1}$, da cui la tesi.

Corso di Laurea in Informatica
Linguaggio e Metodi della Matematica:
Prova scritta del 9 settembre 2002

COGNOME E NOME

MATRICOLA **CORSO** **AULA**

Firma

NOTA: Le risposte vanno giustificate.

Esercizio 1. Trascrivere la seguente formula in linguaggio naturale e scriverne una sua forma normale prenessa:

$$\{\forall d[(\exists a(da = x)) \wedge (\exists a(da = y)) \rightarrow (\exists a(da = z))]\} \rightarrow [\exists a \exists b(ax + by = z)].$$

Esercizio 2. Formalizzare, usando le notazioni logiche e la notazione $x \in A$, l'espressione:
"Se A è sottoinsieme di B allora $C - B$ è sottoinsieme di $C - A$".

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = x^3 + x^2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e sia $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la funzione definita da $f(x) = x^3 + x^2$ per ogni $x \in \mathbb{Z}$ (pur avendo la stessa formula, le funzioni f e g si distinguono per avere dominio e codominio diversi). Stabilire se le funzioni f e g sono iniettive e/o surgettive. La funzione $2x^3 - x^2$ iniettiva-surgettiva come funzione $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$? Come funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

Esercizio 4. Consideriamo le parole di lunghezza 7 composte da lettere dell'alfabeto inglese (26 lettere).

1. Quante sono le parole che non contengono né la lettera a né la lettera b?
2. Quante sono le parole che contengono la lettera a ma non la lettera b?
3. Quante sono le parole che contengono sia la lettera a che la lettera b?

Esercizio 5. Determinare per quali valori di a esiste una soluzione al seguente sistema:

$$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{55} \\ y \equiv 6 \pmod{121} \\ x + y = a \end{cases}$$

e determinare una soluzione per $a = 31$.

Esercizio 6. Definiamo per ricorrenza la successione f_n ponendo $f_0 = 1$, $f_{n+1} = f_n^2 - n$; determinare N tale che la seguente formula

$$\forall n(n \geq N \rightarrow f_n > 2^n)$$

sia vera per i numeri naturali, e dimostrarla.

Corso di Laurea in Informatica
Linguaggio e Metodi della Matematica:
Prova scritta del 9 settembre 2002

COGNOME E NOME

MATRICOLA **CORSO** **AULA**

Firma

NOTA: Le risposte vanno giustificate.

Esercizio 1. Trascrivere la seguente formula in linguaggio naturale e scriverne una sua forma normale prenessa:

$$[\exists a \exists b(ax + by = z)] \to \{\forall d[(\exists a(da = x)) \wedge (\exists a(da = y)) \to (\exists a(da = z))]\}.$$

Esercizio 2. Formalizzare, usando le notazioni logiche e la notazione $x \in A$, l'espressione:
"Se A è sottoinsieme di B allora $C - B$ è sottoinsieme di $C - A$".

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = x^3 + x^2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e sia $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la funzione definita da $f(x) = x^3 + x^2$ per ogni $x \in \mathbb{Z}$ (pur avendo la stessa formula, le funzioni f e g si distinguono per avere dominio e codominio diversi). Stabilire se le funzioni f e g sono iniettive e/o surgettive.

Esercizio 4. Consideriamo le parole di lunghezza 9 composte da lettere dell'alfabeto italiano (21 lettere).

1. Quante sono le parole che non contengono né la lettera a né la lettera b?
2. Quante sono le parole che contengono la lettera a ma non la lettera b?
3. Quante sono le parole che contengono sia la lettera a che la lettera b?

Esercizio 5. Determinare per quali valori di a esiste una soluzione al seguente sistema:

$$\begin{cases} x \equiv 8 \pmod{65} \\ y \equiv 2 \pmod{104} \\ x + y = a \end{cases}$$

e determinare una soluzione per $a = 36$.

Esercizio 6. Definiamo per ricorrenza la successione f_n ponendo $f_0 = 0$, $f_{n+1} = f_n^2 - 2n$; determinare N tale che la seguente formula

$$\forall n(n \geq N \to f_n > 2^n)$$

sia vera per i numeri naturali, e dimostrarla.

Corso di Laurea in Informatica
Linguaggio e Metodi della Matematica:
Prova scritta del 9 settembre 2002

COGNOME E NOME

MATRICOLA **CORSO** **AULA**

Firma

NOTA: Le risposte vanno giustificate.

Esercizio 1. Trascrivere la seguente formula in linguaggio naturale e scriverne una sua forma normale prenessa:

$$\{\forall d[(\exists a(da = x)) \wedge (\exists a(da = y)) \to (\exists a(da = z))]\} \to [\exists a \exists b(ax + by = z)].$$

Esercizio 2. Formalizzare, usando le notazioni logiche e la notazione $x \in A$, l'espressione:
"Se A è sottoinsieme di B allora $C - B$ è sottoinsieme di $C - A$".

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = x^3 + x^2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e sia $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la funzione definita da $f(x) = x^3 + x^2$ per ogni $x \in \mathbb{Z}$ (pur avendo la stessa formula, le funzioni f e g si distinguono per avere dominio e codominio diversi). Stabilire se le funzioni f e g sono iniettive e/o surgettive.

Esercizio 4. Consideriamo le parole di lunghezza 8 composte da lettere dell'alfabeto inglese (26 lettere).

1. Quante sono le parole che non contengono né la lettera a né la lettera b?
2. Quante sono le parole che contengono la lettera a ma non la lettera b?
3. Quante sono le parole che contengono sia la lettera a che la lettera b?

Esercizio 5. Determinare per quali valori di a esiste una soluzione al seguente sistema:

$$\begin{cases} x \equiv 7 \pmod{63} \\ y \equiv 6 \pmod{98} \\ x + y = a \end{cases}$$

e determinare una soluzione per $a = 83$.

Esercizio 6. Definiamo per ricorrenza la successione f_n ponendo $f_0 = 1$, $f_{n+1} = f_n^2 - 3n$; determinare N tale che la seguente formula

$$\forall n(n \geq N \to f_n > 2^n)$$

sia vera per i numeri naturali, e dimostrarla.