

Cognome e nome: .....  
Numero di matricola: .....  
Corso e Aula: .....  
Firma: .....  
E-mail (per eventuali comunicazioni): .....

**Giustificare le risposte**

**Esercizio 1.** Siano  $A, B, C$  insiemi. Riempire i buchi in modo da rendere vere le seguenti affermazioni:

1.  $A \setminus B = \emptyset \iff \forall x(x \in A \dots x \notin B)$
2.  $(A \setminus B) \subseteq C \iff \forall x((x \in A \dots x \in B) \dots x \in C)$
3.  $A \subsetneq (B \cup C) \iff \exists x(x \dots A \dots x \dots B \dots x \dots C).$

**Esercizio 2.** Consideriamo la formula

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{an + b}{2n}$$

Proporre dei valori dei parametri  $a, b \in \mathbb{Z}$  per cui questa formula è vera per ogni  $n \geq 2$  e dimostrare in tale caso la formula per induzione. La scelta di tali valori è unica ?

**Esercizio 3.**

- Determinare l'insieme  $A \subset \mathbb{N}$  dato da tutti gli  $n \in \mathbb{N}$  tali che  $(43)^n \equiv 1 \pmod{5}$ .
- Calcolare la cardinalità di

$$A \cap \{x \in \mathbb{N} \mid x < 100\}$$

**Esercizio 4.** Si consideri il numero

$$2^3 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11^6 = 281253024360$$

- Quanti sono i suoi divisori in  $\mathbb{N}$  ?
- Quanti sono i suoi divisori che sono divisibili per 2 o per 3 ?

**Esercizio 5.** Sia  $X = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a \geq b\}$  e sia  $f : X \rightarrow \mathbb{Z}^2$  la funzione definita da

$$f(a, b) = (a + b, ab).$$

Determinare se  $f$  è iniettiva, surgettiva, biunivoca.