Corso di Laurea in Informatica – Linguaggio e Metodi della Matematica
Prima prova intermedia – 17 Novembre 2004
Soluzioni a cura di M. Di Nasso

Esercizio 1.

Consideriamo gli insiemi $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $C = \{(a, b) \in A \times B \mid a + b \leq 4\}$.

1. Contare gli elementi di C;
2. Elencare gli elementi dell'insieme $X = \{a \in A \mid \exists b \in B\ (a, b) \in C\}$;
3. Stabilire se $\exists a \in A\ \forall b \in B\ (a, b) \in C$;
4. Stabilire se esiste una funzione $f\colon A \to B$ il cui grafico sia l'insieme C.

Soluzione. (1) L'insieme C consiste di tutte le coppie ordinate (a, b) dove $a \in A$ e $b \in B$, con la proprietà che la somma delle due componenti non supera 4. Tra le coppie che appartengono a C, quelle del tipo $(0, b)$ sono 5, perché b può essere uno dei numeri $0, 1, 2, 3, 4$. Le coppie di C del tipo $(1, b)$ sono 4 perché b può essere $0, 1, 2, 3$, e così via, fino all'unica coppia ordinata $(4, 0)$ che ha 4 come prima componente. In tutto si hanno $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ elementi. Precisamente:

$$C = \{\ (0, 0); (0, 1); (0, 2); (0, 3); (0, 4); (1, 0); (1, 1); (1, 2); (1, 3); (2, 0); (2, 1); (2, 2); (3, 0); (3, 1); (4, 0)\ \}$$

(2) Gli elementi dell'insieme X sono tutti e soli quegli elementi di A che sono la prima componente in almeno una coppia dell'insieme C. Ad esempio, 2 appartiene ad X perché intanto $2 \in A$, ed inoltre ci sono coppie ordinate in C che hanno 2 come prima componente (ad esempio $(2, 0), (2, 1)$ ecc.) Invece 5 *non* appartiene ad X, perchè nessuna coppia in C ha 5 come prima componente. Si verifica direttamente che $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
(3) Qui si chiede di stabilire se c'è un elemento $a \in A$ con la proprietà speciale che tutte le possibili coppie ordinate di $A \times B$ aventi a come prima componente – e cioè $(a, 0), (a, 1), (a, 2), (a, 3), (a, 4)$ – appartengono a C. Chiaramente l'elemento $a = 0$ ha questa proprietà perché $(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4)$ appartengono tutti a C. Dunque la formula considerata è vera.
(4) Per definizione, il grafico G_f di una qualunque funzione $f : A \to B$ è una *relazione univoca* tra l'insieme A e l'insieme B, cioè è un insieme di coppie ordinate dove ogni elemento $a \in A$ è la prima componente di una e una sola coppia $(a, b) \in G_f$. Questa proprietà *non* è soddisfatta da C perchè, ad esempio, esistono diverse coppie $(a, b) \in C$ la cui prima componente è $a = 0$ (ce ne sono addirittura cinque). Dunque C *non* è il grafico G_f di alcuna funzione $f : A \to B$.

Esercizio 2. Dimostrare che per ogni intero $n \geq 4$ vale l'uguaglianza

$$\sum_{k=4}^{n}(3k^2 + k) = n^3 + 2n^2 + n - 48.$$

Soluzione. La base induttiva $n = 4$ è presto verificata. Infatti $\sum_{k=4}^{4}(3k^2 + k) = 3 \cdot 4^2 + 4 = 52$ è uguale a $4^3 + 2 \cdot 4^2 + 4 - 48 = 64 + 32 + 4 - 48 = 52$. Consideriamo adesso il passo induttivo. Supponiamo che la formula considerata sia vera per un $n \geq 4$ fissato, cioè supponiamo che valga $\sum_{k=4}^{n}(3k^2 + k) = n^3 + 2n^2 + n - 48$ (questa è l'ipotesi induttiva). Dobbiamo dimostrare che la formula vale anche per $n+1$, cioè che $\sum_{k=4}^{n+1}(3k^2 + k) = (n + 1)^3 + 2(n + 1)^2 + (n + 1) - 48$ (questa è la tesi induttiva). Adesso:

$$\sum_{k=4}^{n+1}(3k^2+k) = \Big(\sum_{k=4}^{n}(3k^2+k)\Big)+3(n+1)^2+(n+1) = \text{ (per ip. ind.) } (n^3+2n^2+n-48)+3(n+1)^2+(n+1).$$

Svolgendo i calcoli, si ottiene l'uguaglianza

$$(n^3 + 2n^2 + n - 48) + 3(n + 1)^2 + (n + 1) = (n + 1)^3 + 2(n + 1)^2 + (n + 1) - 48$$

e questo conclude la dimostrazione della tesi induttiva, come volevamo.

Esercizio 3. Siano $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ le funzioni definite da

$$\begin{aligned} f(m, n) &= 2m + n^3 \qquad \forall (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \\ g(m, n) &= 3m + n^2 \qquad \forall (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Stabilire se f e g sono iniettive e/o surgettive.

Soluzioni. Le funzioni f e g *non* sono iniettive perché ci sono coppie diverse che hanno la stessa immagine. Ad esempio, $f(0, 2) = f(4, 0) = 8$ e $g(0, 3) = g(3, 0) = 9$. La funzione f è suriettiva. Infatti se a è un numero pari, allora $f(a/2, 0) = a$ (ad esempio, per ottenere 10 si considera $f(5, 0)$). Inoltre se a è dispari, allora si può scrivere $a = 2k + 1$ per un opportuno k, e si ha $f(k, 1) = 2k + 1 = a$ (ad esempio, per ottenere $13 = 2 \cdot 6 + 1$, si considera $f(6, 1)$). La funzione g invece *non* è suriettiva. Ad esempio g non assume mai il valore 2. Infatti se m non è 0, cioè se $m \geq 1$, allora $g(m, n) \geq 3 + n^2 \geq 3$ e non può essere uguale a 2. Ma anche quando $m = 0$, $g(0, n) = n^2 \neq 2$, perchè 2 non è un quadrato.

Esercizio 4. Dati tre insiemi A, B, C in un universo Ω, consideriamo i seguenti insiemi:

$$X = A \cup B \cup C^c \ ; \quad Y = [(A^c \cap B^c) \cap (B \cup C)]^c \ ; \quad Z = (A \cup B) \cap (A \cup C) \ .$$

Dire se – qualunque sia la scelta di A, B, C – ci sono delle relazioni di inclusione fra gli insiemi X, Y, Z e anche se, in particolare, ci sono relazioni di uguaglianza.

Soluzione. Applicando le identità di de Morgan – secondo cui il complementare di una intersezione è uguale alla unione dei complementari, e il complementare di una unione è uguale alla intersezione dei complementari – si ottengono le uguaglianze:

$$Y = [(A^c \cap B^c) \cap (B \cup C)]^c = (A^c \cap B^c)^c \cup (B \cup C)^c = ((A^c)^c \cup (B^c)^c) \cup (B^c \cap C^c) = (A \cup B) \cup (B^c \cap C^c).$$

Adesso, per la proprietà distributiva dell'unione rispetto alla intersezione:

$$(A \cup B) \cup (B^c \cap C^c) = (A \cup B \cup B^c) \cap (A \cup B \cup C^c) = \Omega \cap X = X.$$

Si osservi infatti che $B \cup B^c$ (e a maggior ragione $A \cup B \cup B^c$) è uguale all'intero universo Ω. Dunque $Y = X$. Inoltre Z è incluso in X. Per dimostrare questo basta ad esempio notare che Z è l'intersezione di $A \cup B$ con un altro insieme, dunque $Z \subseteq A \cup B$, mentre X è l'unione di $A \cup B$ con un altro insieme, dunque $X \supseteq A \cup B$. Si ha pertanto $Z \subseteq A \cup B \subseteq X$, da cui $Z \subseteq X$. Ci sono esempi in cui $Z \neq X$. Ad esempio nel caso banale in cui $A = B = C = \emptyset$, si ha che $X = \emptyset \cup \emptyset \cup \Omega = \Omega$, mentre $Z = (\emptyset \cup \emptyset) \cap (\emptyset \cup \emptyset) = \emptyset$.

Le soluzioni delle altre versioni del compito sono analoghe.