Corso di Laurea in Informatica
Prova Scritta del Primo Appello – 12 Gennaio 2005

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: ....

Corso e Aula: ....

Firma: ....

E-mail (per eventuali comunicazioni): ....

Tutte le risposte devono essere giustificate.
Una risposta esatta senza giustificazione può valere al massimo 1 punto. Buon lavoro!

Esercizio 1. Siano A, B, C tre insiemi, e si consideri l'enunciato:

$$(A \cap B) \cap (C \cup D) = \emptyset.$$

1. Tra le formule sotto elencate indicare, se ve ne sono, quelle equivalenti all'enunciato dato.
   (a) $\forall x\big(x \in A \wedge x \in B \to (x \notin C \wedge x \notin D)\big)$.
   (b) $\forall x\big(x \in A \wedge x \in B \to (x \notin C \vee x \notin D)\big)$.
   (c) $\neg\exists x\big(x \in A \wedge x \in B \to (x \in C \vee x \in D)\big)$.
   (d) $\exists x\neg\big(x \in A \wedge x \in B \wedge (x \in C \vee x \in D)\big)$.
   (e) $\forall x\big(x \notin A \vee x \notin B \vee (x \notin C \wedge x \notin D)\big)$.
2. Scrivere una formula che equivale alla negazione dell'enunciato dato senza usare i simboli di negazione, intersezione, unione.

Esercizio 2. Sia $A = \{k \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq k \leq 14\}$ l'insieme dei primi 15 numeri interi non negativi.

1. Sia $f : A \to A$ la funzione definita da $f(x) = 3x \mod 15$ (cioè $f(x)$ è quell'unico elemento di A congruo a $3x$ modulo 15). Stabilire se f è iniettiva, suriettiva, biunivoca.
2. Sia $b \in \mathbb{Z}$ un generico numero intero, e sia $g : A \to A$ la funzione definita ponendo $g(x) = 7x + b \mod 15$. (cioè $g(x)$ è quell'unico elemento di A congruo a $7x + b$ modulo 15).
   (a) Stabilire per quali valori del parametro b la funzione g è biunivoca.
   (b) Nel caso g risulti biunivoca, determinare esplicitamente un'espressione della forma $h(x) = Cx + D$ per la sua funzione inversa (dove le espressioni numeriche C, D possono contenere il parametro b).

Esercizio 3. Sia $X = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 11\}$ l'insieme dei primi tredici numeri interi positivi.

1. Quante sono le funzioni $g : X \to X$ che *non* sono iniettive?
2. Quante sono le funzioni $g : X \to X$ tali che la controimmagine $g^{-1}(3) = \{x \in X \mid g(x) = 3\}$ contenga esattamente quattro elementi?
3. Quante sono le funzioni $g : X \to X$ tali che la controimmagine $g^{-1}(5) = \{x \in X \mid g(x) = 5\}$ contenga *al massimo* nove elementi?

Esercizio 4. Sia $\{a_n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ la successione definita da $a_0 = 1$; $a_{n+1} = 2a_n + n + 1 \ \ \forall n \geq 0$. Dimostrare che $\forall n \geq 1$ vale $a_n > 2^{n+1} - n - 1$.

Esercizio 5. Determinare tutte le soluzioni $(x, y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ dell'equazione diofantea $3047x+1265y = 11$. È vero che per ogni soluzione $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ vale $x \equiv y \pmod 5$?

Corso di Laurea in Informatica
Prova Scritta del Primo Appello – 12 Gennaio 2005

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: ....

Corso e Aula: ....

Firma: ....

E-mail (per eventuali comunicazioni): ....

Tutte le risposte devono essere giustificate.
Una risposta esatta senza giustificazione può valere al massimo 1 punto. Buon lavoro!

Esercizio 1. Siano X, Y, Z tre insiemi, e si consideri l'enunciato:

$$(X \cap Y) \cap (Z \cup W) = \emptyset.$$

1. Tra le formule sotto elencate indicare, se ve ne sono, quelle equivalenti all'enunciato dato.
   (a) $\forall x\big(x \notin X \vee x \notin Y \vee (x \notin Z \wedge x \notin W)\big)$.
   (b) $\neg\exists x\big(x \in X \wedge x \in Y \to (x \in Z \vee x \in W)\big)$.
   (c) $\forall x\big(x \in X \wedge x \in Y \to (x \notin Z \vee x \notin W)\big)$.
   (d) $\exists x \neg\big(x \in X \wedge x \in Y \wedge (x \in Z \vee x \in W)\big)$.
   (e) $\forall x\big(x \in X \wedge x \in Y \to (x \notin Z \wedge x \notin W)\big)$.
2. Scrivere una formula che equivale alla negazione dell'enunciato dato senza usare i simboli di negazione, intersezione, unione.

Esercizio 2. Sia $X = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq x \leq 13\}$ l'insieme dei primi 14 numeri interi non negativi.

1. Sia $g : X \to X$ la funzione definita da $g(x) = 2x \mod 14$ (cioè $g(x)$ è quell'unico elemento di X congruo a $2x$ modulo 14). Stabilire se f è iniettiva, suriettiva, biunivoca.
2. Sia $b \in \mathbb{Z}$ un generico numero intero, e sia $h : X \to X$ la funzione definita ponendo $h(x) = 5x + b \mod 14$. (cioè $h(x)$ è quell'unico elemento di X congruo a $5x + b$ modulo 14).
   (a) Stabilire per quali valori del parametro b la funzione h è biunivoca.
   (b) Nel caso h risulti biunivoca, determinare esplicitamente un'espressione della forma $f(x) = Cx + D$ per la sua funzione inversa (dove le espressioni numeriche C, D possono contenere il parametro b).

Esercizio 3. Sia $A = \{k \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq k \leq 13\}$ l'insieme dei primi tredici numeri interi positivi.

1. Quante sono le funzioni $f : A \to A$ che *non* sono iniettive?
2. Quante sono le funzioni $f : A \to A$ tali che la controimmagine $f^{-1}(2) = \{a \in A \mid f(a) = 2\}$ contenga esattamente tre elementi?
3. Quante sono le funzioni $f : A \to A$ tali che la controimmagine $f^{-1}(3) = \{a \in A \mid f(a) = 3\}$ contenga *almeno* due elementi?

Esercizio 4. Sia $\{a_n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ la successione definita da $a_0 = 2$; $a_{n+1} = 3a_n + 2n + 2 \quad \forall n \geq 0$. Dimostrare che $\forall n \geq 1$ vale $a_n > 3^{n+1} - n - 1$.

Esercizio 5. Determinare tutte le soluzioni $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dell'equazione diofantea $4060x + 1953y = 7$. È vero che per ogni soluzione $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ vale $x \equiv y \pmod 3$?