

Cognome e nome:.....
Numero di matricola:.....
Corso e Aula:
Firma:.....
E-mail (per eventuali comunicazioni):

Tutte le risposte devono essere giustificate.
Una risposta esatta senza giustificazione può valere al massimo 1 punto.
Buon lavoro!

Esercizio 1. Si consideri la seguente uguaglianza insiemistica:

$$(*) \quad (A \cap B) \times C = A \times (B \cap C)$$

1. Stabilire se si possono scegliere gli insiemi A, B, C in modo che l'uguaglianza $(*)$ sia vera.
2. Stabilire se si possono scegliere gli insiemi A, B, C in modo che l'uguaglianza $(*)$ sia falsa.
3. Stabilire se $(*)$ è sempre vera nel caso in cui $B \subseteq A$ e $C \subseteq A$.
4. Stabilire se $(*)$ è sempre vera nel caso in cui $A \cup C \subseteq B$.

Esercizio 2. Dimostrare per induzione che per ogni intero $n \geq 14$ esistono interi non negativi $x, y \in \mathbb{N}$ tali che $n = 3x + 8y$.

Esercizio 3. Si consideri la congruenza $525x \equiv 225 \pmod{55k}$ dove k è un numero intero.

- (a) Risolvere la congruenza per $k = 3$.
- (b) Determinare tutti i valori di k per cui la congruenza è risolubile.

Esercizio 4.

- (a) Sia $f : \mathbb{Q} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Q}$ la funzione definita da

$$f(x) = \frac{x-1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}.$$

La funzione f è iniettiva? La funzione f è surgettiva?

- (b) Sia $g : \mathbb{Q} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{Q} \setminus \{0, 1\}$ la funzione definita da

$$g(t) = \frac{t-1}{t} \quad \forall t \in \mathbb{Q} \setminus \{0, 1\}.$$

Dimostrare che g è bigettiva e determinare le funzioni $g \circ g$, g^{-1} .

Esercizio 5. Si consideri l'insieme dei primi venti numeri interi positivi $A = \{1, 2, \dots, 19, 20\}$. Diciamo che un sottoinsieme di A è misto se fra i suoi elementi ci sono almeno un numero pari e almeno un numero dispari.

- (a) Quanti sono i sottoinsiemi di A che NON sono misti ?
- (b) Quanti sono i sottoinsiemi misti che contengono esattamente 2 numeri pari ?
- (c) Quanti sono i sottoinsiemi misti di cardinalità 7 ?

Cognome e nome:.....
Numero di matricola:.....
Corso e Aula:
Firma:.....
E-mail (per eventuali comunicazioni):

Tutte le risposte devono essere giustificate.
Una risposta esatta senza giustificazione può valere al massimo 1 punto.
Buon lavoro!

Esercizio 1. Si consideri la seguente uguaglianza insiemistica:

$$(*) \quad X \times (Y \cap Z) = (X \cap Y) \times Z$$

1. Stabilire se si possono scegliere gli insiemi X, Y, Z in modo che l'uguaglianza $(*)$ sia falsa.
2. Stabilire se si possono scegliere gli insiemi X, Y, Z in modo che l'uguaglianza $(*)$ sia vera.
3. Stabilire se $(*)$ è sempre vera nel caso in cui $Z \subseteq X$ e $Y \subseteq X$.
4. Stabilire se $(*)$ è sempre vera nel caso in cui $Z \cup X \subseteq Y$.

Esercizio 2. Dimostrare per induzione che per ogni intero $n \geq 12$ esistono interi non negativi $x, y \in \mathbb{N}$ tali che $n = 3x + 7y$.

Esercizio 3. Si consideri la congruenza $315x \equiv 441 \pmod{39k}$ dove k è un numero intero.

- (a) Risolvere la congruenza per $k = 7$.
- (b) Determinare tutti i valori di k per cui la congruenza è risolubile.

Esercizio 4.

- (a) Sia $f : \mathbb{Q} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{Q}$ la funzione definita da

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \quad \forall x \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}.$$

La funzione f è iniettiva? La funzione f è surgettiva?

- (b) Sia $g : \mathbb{Q} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{Q} \setminus \{0, 1\}$ la funzione definita da

$$g(t) = \frac{1}{1-t} \quad \forall t \in \mathbb{Q} \setminus \{0, 1\}.$$

Dimostrare che g è bigettiva e determinare le funzioni $g \circ g, g^{-1}$.

Esercizio 5. Si consideri l'insieme dei primi trenta numeri interi positivi $A = \{1, 2, \dots, 29, 30\}$. Diciamo che un sottoinsieme di A è misto se fra i suoi elementi ci sono almeno un numero pari e almeno un numero dispari.

- (a) Quanti sono i sottoinsiemi di A che NON sono misti ?
- (b) Quanti sono i sottoinsiemi misti che contengono esattamente 4 numeri dispari ?
- (c) Quanti sono i sottoinsiemi misti di cardinalità 6 ?