Corso di Laurea in Informatica
Linguaggio e Metodi della Matematica
Seconda Prova Intermedia – 20 Dicembre 2006

Soluzioni a cura di M. Di Nasso

Esercizio 1

(a) Trovare l'insieme $S_1 \subseteq \mathbb{Z}$ delle soluzioni della congruenza lineare: $3315\,x \equiv 816 \mod (952)$.

(b) Trovare l'insieme $S_2 \subseteq \mathbb{Z}$ delle soluzioni della congruenza lineare: $126\,x \equiv 42 \mod (77)$.

(c) Descrivere $S_1 \cap S_2$ e calcolare quanti elementi di questa intersezione cadono nell'intervallo $[0, 10000]$.

Soluzione. (a). Anzitutto notiamo che $3315 \equiv 459 \mod (952)$, dunque l'equazione assegnata si può riscrivere come $459\,x \equiv 816 \mod (952)$. I tre numeri 459, 816 e 952 sono tutti divisibili per 17, e ci possiamo dunque ridurre alla forma equivalente (ma più semplice) $27\,x \equiv 48 \mod (56)$, ed infine a

$$27\,x \equiv -8 \mod (56).$$

Questa congruenza ammette ed unica soluzione modulo 56, visto che il Massimo Comune Divisore $(27, 56) = 1$. Effettuando successive divisioni euclidee, otteniamo che $2 = 56 - 2 \cdot 27$ e $1 = 27 - 13 \cdot 2$. Da queste uguaglianze, si ricava la seguente "tabellina":

	27	56
27	1	0
56	0	1
2	-2	1
1	27	-13

In particolare, visto che $1 = 27 - 13 \cdot 2$, l'ultima riga si ottiene sottraendo dalla prima riga tredici volte la terza riga. Otteniamo così l'identità di Bezout

$$27 \cdot 27 + 56 \cdot (-13) = 1.$$

Moltiplicando ciascun termine per il termine noto -8, si ottiene l'identità

$$27 \cdot 27 \cdot (-8) + 56 \cdot (-13) \cdot (-8) = -8.$$

Ponendo $x = 27 \cdot (-8)$, abbiamo dunque che $27\,x + 56 \cdot (-13) \cdot (-8) = -8$, cioè $27\,x \equiv -8 \mod (56)$. La soluzione $x = 27 \cdot (-8) = -216 \equiv -48 \equiv 8 \mod (56)$ è *unica* modulo 56. Dunque:

$$S_1 = \{8 + 56 \cdot k \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

(b). Procedendo come sopra, prima si riduce l'equazione data a $49\,x \equiv 42 \mod (77)$, poi si divide tutto per 7 ottenendo l'equazione equivalente:

$$7\,x \equiv 6 \mod (11).$$

La soluzione esiste ed unica modulo 11 perché il Massimo Comune Divisore $(7, 11) = 1$. Moltiplicando ciascun termine dell'identità di Bezout $7 \cdot (-3) + 11 \cdot 2 = 1$ per il termine noto 6, si ottiene che $x = (-3) \cdot 6 = -18 \equiv 4 \mod (11)$ è la soluzione cercata modulo 11. Dunque:

$$S_2 = \{4 + 11 \cdot k \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

(c). Dobbiamo cercare i numeri $x \in S_1 \cap S_2$. Poichè $x \in S_1$, allora x si può scrivere nella forma $x = 8+56\cdot k$. Per quanto visto sopra, $x \in S_2$ se e solo se è soluzione della congruenza $7\,x \equiv 6 \mod (11)$. Sostituendo si ottiene: $7 \cdot (8+56k) \equiv 6 \bmod (11)$. Ma $56 \equiv 1 \bmod (11)$, dunque:

$$7 \cdot (8+56k) \equiv 7 \cdot (8+k) = 56 + 7k \equiv 1 + 7k \equiv 6 \mod (11) \;\Leftrightarrow\; 7k \equiv 5 \mod (11).$$

È facile verificare che un intero k soddisfa quest'ultima equazione se e solo se $k \equiv 7 \mod (11)$, cioè se e solo se k è della forma $k = 7 + 11 \cdot h$. Concludiamo allora che $x = 8 + 56k = 8 + 56 \cdot (7 + 11h) = 8 + 392 + 616h = 400 + 616h$, cioè:

$$S_1 \cap S_2 = \{200 + 616 \cdot h \mid h \in \mathbb{Z}\}.$$

Infine, visto che $10000 = 616 \cdot 16 + 144$, gli elementi di $S_1 \cap S_2$ che appartengono all'intervallo $[0, 10000]$ sono 16, e precisamente:

$$200,\; 616 + 200,\; 616 \cdot 2 + 200,\; 616 \cdot 3 + 200,\; \dots\;,\; 616 \cdot 15 + 200.$$

Esercizio 2

Sia $\mathbb{N}_{30} = \{1, 2, 3, 4, \dots, 28, 29, 30\}$.

(a) Quanti sono i sottoinsiemi di $\mathbb{N}_{30}$ che contengono esattamente tre numeri pari ed esattamente quattro numeri dispari ?

(b) Quanti sono i sottoinsiemi di $\mathbb{N}_{30}$ che contengono almeno tre numeri pari e almeno due numeri dispari ?

(c) Quanti sono i sottoinsiemi di $\mathbb{N}_{30}$ di 8 elementi che contengono almeno tre numeri pari e almeno due numeri dispari?

(d) Quanti sono i sottoinsiemi di $\mathbb{N}_{30}$ che contengono più numeri pari che numeri dispari?

Soluzione. (a). Visto che i numeri pari disponibili sono 15, ci sono esattamente $\binom{15}{3}$ modi diversi di scegliere tre numeri pari. In corrispondenza di ciascuna di queste scelte per i numeri pari, ci sono $\binom{15}{4}$ modi di scegliere quattro numeri dispari per completare il sottoinsieme. Dunque il numero cercato è dato dal prodotto $\binom{15}{3} \cdot \binom{15}{4}$.

(b). Calcoliamo prima quanti sono i modi di scegliere un sottoinsieme di numeri pari di $\mathbb{N}_{30}$ che contiene *almeno* tre elementi. I sottoinsiemi che *non* dobbiamo contare sono quelli con zero elementi, cioè l'insieme vuoto $\emptyset$; i sottoinsiemi con un elemento, che sono $\binom{15}{1} = 15$; e i sottoinsiemi con 2 elementi, che sono $\binom{15}{2}$. Visto che tutti i sottoinsiemi di numeri pari sono 2^{15}, i sottoinsiemi di numeri pari con almeno tre elementi si ottengono per differenza: $2^{15} - 1 - 15 - \binom{15}{2}$. Analogamente, i modi di scegliere un sottoinsieme di numeri dispari di $\mathbb{N}_{30}$ con *almeno* due elementi sono $2^{15} - 1 - 15$. Il numero cercato è dunque dato dal prodotto

$$\left(2^{15} - 1 - 15 - \binom{15}{2}\right) \cdot \left(2^{15} - 1 - 15\right).$$

(c). I sottoinsiemi di 8 elementi che dobbiamo contare, si possono suddividere nelle seguenti specie:

- Sottoinsiemi con tre pari e cinque dispari, che sono $\binom{15}{3} \cdot \binom{15}{5}$;
- Sottoinsiemi con quattro pari e quattro dispari, che sono $\binom{15}{4} \cdot \binom{15}{4}$;
- Sottoinsiemi con cinque pari e tre dispari, che sono $\binom{15}{5} \cdot \binom{15}{3}$;

- Sottoinsiemi con sei pari e due dispari, che sono $\binom{15}{6} \cdot \binom{15}{2}$.

Dunque il numero cercato si ottiene sommando:

$$\binom{15}{3} \cdot \binom{15}{5} + \binom{15}{4} \cdot \binom{15}{4} + \binom{15}{5} \cdot \binom{15}{3} + \binom{15}{6} \cdot \binom{15}{2}.$$

(d). I sottoinsiemi di $\mathbb{N}_{30}$ si suddividono in tre specie:

1. Sottoinsiemi che hanno più numeri pari che numeri dispari;
2. Sottoinsiemi che hanno più numeri dispari che numeri pari;
3. Sottoinsiemi che hanno tanti numeri pari quanti numeri dispari.

Denotiamo con N_1, N_2, N_3 rispettivamente il numero dei sottoinsiemi della prima, della seconda, e della terza specie elencate sopra. Notiamo che $N_1 + N_2 + N_3 = 2^{30}$, perché è il numero totale dei sottoinsiemi di $\mathbb{N}_{30}$. Inoltre, per evidenti motivi di simmetria, $N_1 = N_2$. Di conseguenza, se riuscissimo a calcolare N_3, potremmo poi ricavare anche il numero cercato $N = N_1$. I sottoinsiemi con *zero* numeri pari e *zero* numeri dispari sono soltanto uno (l'insieme vuoto); i sottoinsiemi con *un* numero pari e *un* numero dispari sono $15 \cdot 15$; i sottoinsiemi con *due* numeri pari e *due* numeri dispari sono $\binom{15}{2} \cdot \binom{15}{2}$; e così via. In generale, fissato un numero i con $0 \leq i \leq 15$, la quantità dei sottoinsiemi di $\mathbb{N}_{30}$ contenenti esattamente i numeri pari e i numeri dispari è data da $\binom{15}{i}^2$. Dunque:

$$N_3 = \sum_{i=0}^{15} \binom{15}{i}^2.$$

Ricaviamo infine il numero cercato $N = N_1$ come segue:

$$N + N + \sum_{i=0}^{15} \binom{15}{i}^2 = 2^{30} \implies N = \frac{2^{30} - \sum_{i=0}^{15} \binom{15}{i}^2}{2}.$$

Esercizio 3

Dimostrare che per ogni $n \geq 1$ si ha

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}$$

Soluzione. La base induttiva $n = 1$ è presto verificata perché $\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1 \geq \sqrt{1}$. Consideriamo ora il passo induttivo, e supponiamo per ipotesi che $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}$. Abbiamo che:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} = \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) + \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \right) + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Per ottenere la tesi, basta dunque dimostrare che $\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n+1}$, e questo può essere verificato con un semplice calcolo algebrico, moltiplicando tutti i termini per $\sqrt{n+1}$:

$$\left(\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \cdot \sqrt{n+1} \geq \sqrt{n+1} \cdot \sqrt{n+1} \iff \sqrt{n \cdot (n+1)} + 1 \geq n+1 \iff \sqrt{n^2+n} \geq n,$$

e quest'ultima disuguaglianza è banalmente vera perché $\sqrt{n^2+n} \geq \sqrt{n^2} = n$.