Informatica – LMM
A.A. 2006/07 - Secondo appello, 1 Febbraio 2007

COGNOME: NOME:

NUMERO DI MATRICOLA: CORSO:

- hai a disposizione 3 ore; puoi consultare libri e appunti; il punteggio pieno è dato solo se l'esercizio è svolto completamente, in modo chiaro, e se sono chiari i passaggi;
- **Consegnare il testo dell'esame e un solo foglio protocollo con un esercizio su ogni facciata (esercizio 1 facciata 1, esercizio 2 facciata 2, etc.); se un esercizio non viene svolto lasciare la corrispondente facciata vuota con su scritto il numero dell'esercizio non svolto".**

Esercizio 1

1. Determinare se esistono insiemi $A, B, C, D \subseteq \mathbb{N}$ di numeri naturali che soddisfano tutte e tre le seguenti condizioni:[1]
$$(1)\ \ A \subseteq \overline{B} \cup C\,; \quad (2)\ \ B \cap C \subseteq D\,; \quad (3)\ \ A \cap B \not\subseteq D.$$
2. Determinare se esistono insiemi $X, Y, Z, W \subseteq \mathbb{N}$ di numeri naturali che soddisfano tutte e tre le seguenti condizioni:
$$(1)\ \ X \subseteq \overline{Y} \cup Z\,; \quad (2)\ \ Y \cap Z \subseteq W\,; \quad (3)\ \ X \cap Z \not\subseteq W.$$

Esercizio 2.

1. Trovare tutte le soluzioni della seguente congruenza: $204x \equiv 203 \bmod 303$.
2. Trovare tutte le coppie di soluzioni (x, y) della congruenza $204x \equiv 204y + 203 \bmod 303$.
3. Stabilire se esistono due interi x, y tali che $6x \equiv 6y + 5 \bmod 9$.

Esercizio 3. Una stringa ternaria è una stringa di $0, 1, 2$.

1. Quante sono le stringhe ternarie di lunghezza n in cui 1 compare esattamente tre volte ?
2. Quante sono le stringhe ternarie di lunghezza n in cui 1 compare almeno tre volte ?
3. Quante sono le stringhe ternarie di lunghezza n non decrescenti? (cioè le stringhe in cui dopo ciascuno 0 può comparire solo un'altro 0 o un 1 o un 2, dopo ciascun 1 può comparire solo 1 o 2, e dopo ciascun 2 può comparire solo un 2).

Esercizio 4 a) Dimostrare che per ogni numero intero positivo $n \geq 4$ vale:
$$1! + 2! + 3! + \cdots + n! \geq n(n+1)$$
b) Dimostrare che per ogni numero intero positivo n vale la seguente uguaglianza:
$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$$

Esercizio 4

[1] Come consuetudine, con $\overline{E}$ indichiamo il *complementare* di E, cioè l'insieme $\mathbb{N} \setminus E$.

(a) Dimostrare che per ogni intero $n \geq 1$ vale

$$2n^n \leq (n+1)^n$$

(b) Dimostrare che per ogni $n \geq 6$ vale

$$2^n n! \leq n^n$$

[Nota: Per il punto (a) si può usare il teorema del binomio di Newton, e il punto (b) si può dimostrare per induzione usando il punto (a)].