Informatica – LMM

A.A. 2006/07 - Quarto appello, 27 Giugno, 2007. Soluzioni

COGNOME: NOME:

NUMERO DI MATRICOLA: CORSO:

- hai a disposizione 3 ore; puoi consultare libri e appunti; il punteggio pieno è dato solo se l'esercizio è svolto completamente, in modo chiaro, e se sono chiari i passaggi;
- se un esercizio non viene svolto, scrivi chiaramente sul foglio: "esercizio n non svolto".

Esercizio 1. Trovare il più piccolo intero positivo n_0 tale che la seguente disuguaglianza sia vera, e la si dimostri per induzione per ogni intero $n \geq n_0$:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3 \geq 2 \cdot (1 + 2^2 + \cdots + n^2)$$

Soluzione:

Base: $n_0 = 6$.

Passo induttivo: Sia $n \geq 6$ e supponiamo $\sum_{i=1}^{n-1} i^3 \geq 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} i^2$. Dobbiamo dimostrare $\sum_{i=1}^{n} i^3 \geq 2 \cdot \sum_{i=1}^{n+1} i^2$. Isolando l'ultimo termine delle sommatorie, questo si può riscrivere come $\sum_{i=1}^{n-1} i^3 + n^3 \geq 2(\cdot \sum_{i=1}^{n} i^2 + (n+1)^2)$. Siccome già sappiamo che $\sum_{i=1}^{n-1} i^3 \geq 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} i^2$, basta dimostrare che $n^3 \geq 2 \cdot (n+1)^2$ per $n \geq 6$. Quest'ultima è una facile verifica.

Esercizio 2. Stabilire quali dei seguenti enunciati siano veri e quali siano falsi in $\mathbb{Z}$. Stabilire inoltre quali siano veri e quali siano falsi in $\mathbb{N}$.

(1) $\exists x \,\exists y \,\exists z \; x > y + z$	(2) $\exists x \,\exists y \,\forall z \; x > y + z$	(3) $\forall x \,\forall y \,\exists z \; x > y + z$	(4) $\exists x \,\forall y \,\exists z \; x > y + z$
(5) $\exists x \,\forall y \,\forall z \; x > y + z$	(6) $\forall x \,\exists y \,\exists z \; x > y + z$	(7) $\forall x \,\forall y \,\forall z \; x > y + z$	(8) $\forall x \,\exists y \,\forall z \; x > y + z$

Soluzione:

(1) vera in $\mathbb{N}$ e in $\mathbb{Z}$. (2) falsa. (3) vera solo in $\mathbb{Z}$. (4) vera solo in $\mathbb{Z}$. (5) falsa. (6) vera in $\mathbb{Z}$. (7) falsa. (8) falsa.

Esercizio 3.

a) Trovare tutti gli interi x che soddisfano la congruenza:

$$1386x \equiv 1890 \quad (294)$$

b) Trovare tutti gli interi y che soddisfano la congruenza:

$$1386y^2 \equiv 1890 \quad (294)$$

- Facoltativo/sfida: Indicare tutti gli n (se esistono) tali che l'equazione $1386y^n \equiv 1890 \quad (294)$ *non* ammette soluzione.

Soluzione punto (a): $x \equiv 2 \quad (7)$

Infatti divido tutto per 42 e ottengo la congruenza equivalente:

$$5x \equiv 3 \quad (7)$$

Moltiplico i due membri della congruenza per 3 e siccome $(3, 7) = 1$ ottengo la congruenza equivalente:

$$15x \equiv 9 \quad (7)$$

Riduco i coefficienti modulo 7 e ottengo:

$$x \equiv 2 \quad (7)$$

Soluzione punto (b): $y \equiv 3 \quad (7)$ o $y \equiv 4 \quad (7)$.

Esercizio 4. Dobbiamo distribuire i numeri naturali che appartengono a $\mathbb{N}_{64} = \{1, 2, 3, \ldots, 64\}$ su una scacchiera 8×8.

a) In quanti modi diversi possiamo farlo ?

b) In quanti modi diversi possiamo farlo se vogliamo che i numeri dispari stiano tutti su caselle dello stesso colore ?

c) In quanti modi diversi possiamo farlo se vogliamo che tutti i multipli di 4 stiano su caselle nere ?

d) In quanti modi diversi possiamo farlo se vogliamo che ogni colonna contenga esattamente 4 dispari ?

Soluzioni:
a) $64!$; b) $2 \cdot 32! \cdot 32!$; c) $\binom{32}{16} \cdot 16! \cdot 48!$; d) $\binom{8}{4}^8 \cdot 32! \cdot 32!$.