Informatica – LMM
A.A. 2006/07 - Quinto appello, 17 Luglio 2007

COGNOME: NOME:

NUMERO DI MATRICOLA: CORSO:

- hai a disposizione 3 ore; puoi consultare libri e appunti; il punteggio pieno è dato solo se l'esercizio è svolto completamente, in modo chiaro, e se sono chiari i passaggi;
- se un esercizio non viene svolto, scrivi chiaramente sul foglio: "esercizio n non svolto".

Esercizio 1.

- Applicando la formula di Newton per gli sviluppi binomiali, determinare il coefficiente di x^5 nello sviluppo di $(2+\frac{x}{3})^{10}$.
- Dimostrare che vale la disuguaglianza $(2+\frac{x}{3})^{10} > 250 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 x^5$ per ogni numero positivo x.

Esercizio 2. Si consideri la seguente relazione binaria R:

$$R = \{(1,5),(2,2),(2,5),(3,1),(3,2),(3,5),(4,5),(5,2),(5,4),(5,5)\}$$

1. Stabilire se R è transitiva, ovvero se $\forall x,y,z\,[((x,y)\in R \wedge (y,z)\in R) \rightarrow (x,z)\in R]$.
2. Stabilire se $\forall x((x,x)\in R \rightarrow \exists y((x,y)\in R \wedge x \neq y))$.
3. Elencare gli elementi dell'insieme $\{z \mid \exists a,b \text{ tali che } a \neq b \wedge (a,z)\in R \wedge (z,b)\in R\}$.
4. Contare il numero delle funzioni $f : \{1,2,3,4,5\} \rightarrow \{1,2,3,4,5\}$ tali che $(x,f(x)) \in R$ per ogni $x \in \{1,2,3,4,5\}$.

Esercizio 3. Spiegare perché due sole fra le scritture seguenti sono definizioni corrette di funzione:

- Sia $f : \mathbb{Z} \rightarrow \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leq x < 350\}$ tale che per ogni $x \in \mathbb{Z}$
$$f(x) \equiv 3x \bmod 350$$
- Sia $g : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tale che per ogni $y \in \mathbb{Q}$
$$g(y) = (p,q)\ \text{, con } p \text{ e } q \text{ tali che } \frac{p}{q} = y$$
- Sia $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$
$$g(n) = \binom{2n}{n}$$

Scelte le due definizioni giuste, dire se le funzioni in questione sono surgettive, iniettive, bigettive.

Esercizio 4.

1. Dato un intero pari x deteminare quali valori può assumere il massimo comun divisore tra $x-1$ ed $x+1$.
2. Dato un intero n trovare un intero a tale che valga $(2^{2^n}-1)(2^{2^n}+1) = 2^a - 1$
3. Dimostrare per induzione che, per ogni n intero positivo, esistono almeno n numeri primi distinti che dividono il numero $2^{2^n}-1$.