Informatica – LMM
A.A. 2007/08 - Primo Compitino, 7 Novembre 2007

COGNOME: NOME:

NUMERO DI MATRICOLA: CORSO:

- hai a disposizione 2 ore; NON puoi consultare libri e appunti; il punteggio pieno è dato solo se l'esercizio è svolto completamente, in modo chiaro, e se sono chiari i passaggi;
- se un esercizio non viene svolto, scrivi chiaramente sul foglio: "esercizio n non svolto".

Esercizio 1.

(a) Si trovi una formula equivalente a $A \to B$ che usi solamente la congiunzione $\wedge$ e la negazione $\neg$ ma non l'implicazione $\to$.

SOLUZIONE: $\neg(A \wedge \neg B)$.

(b) Sia $P(x)$ un predicato e Q una proposizione (non dipendente da x). Stabilire per ciascuna delle delle seguenti formule se essa è equivalente a qualcuna delle altre.

1. $(\exists x P(x)) \to Q$;
2. $\forall x(P(x) \to Q)$;
3. $\exists x(P(x) \to Q)$;
4. $(\exists x \neg P(x)) \vee Q$.

SOLUZIONE: La 1 equivale alla 2. La 3 equivale alla 4. Non vi sono altre equivalenze che valgano per ogni scelta di $P(x)$ e Q.

GIUSTIFICAZIONE: Le 1 equivale a $(\neg\exists x P(x)) \vee Q$, che equivale a $(\forall x \neg P(x)) \vee Q$. Ora visto che Q non dipende da x otteniamo una formula equivalente risistemando le parentesi nella forma $\forall x((\neg P(x)) \vee Q)$. Questa a sua volta equivale a $\forall x(P(x) \to Q)$, cioè alla 2.

La 3 equivale a $\exists x(\neg P(x) \vee Q)$, che equivale (in quanto Q non dipende da x) a $(\exists x \neg P(x)) \vee Q$, cioè alla 4.

Non vi sono altre equivalenze valide. Ad esempio se come $P(x)$ prendiamo il predicato "x è pari, come Q prendiamo una proposizione falsa, e facciamo variare x tra gli interi, allora la 2 risulta falsa e la 4 vera (cercate di capire perché). Quindi la 2 non equivale alla 4.

Esercizio 2.
Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{Z}$:

$$A = \{m \in \mathbb{Z} \mid m \text{ è un multiplo di } 3\}$$

$$B = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 < 144\}$$

$$C = \{2z + 2 \mid z \in A\}$$

1. Quanti elementi hanno gli insiemi $A \cap B$, $B \cap C$ e $A \cap B \cap C$?

   SOLUZIONE: $7, 4, 0$.

   GIUSTIFICAZIONE:

   A contiene i multipli di tre, positivi e negativi, incluso lo zero.

B contiene i numeri interi nell'intervallo $[-11, 11]$, e ha quindi 23 elementi (undici positivi, undici negativi, e lo zero). $(A \cap B)$ contiene gli elementi dell'intervallo $[11, -11]$ che sono multipli di tre. Quindi

$$A \cap B = \{-9, -6, -3, 0, 3, 6, 9\},$$

che ha 7 elementi.

C contiene gli elementi della forma $2z + 2$ dove z varia tra gli elementi di A, ovvero z è un multiplo di 3. Posso allora scrivere z nella forma $3k$ con k in $\mathbb{Z}$, e sostituendo ottengo $C = \{2(3k) + 2 \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{6k + 2 \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{2, 8, 14, \ldots, -4, -10, -16, \ldots\}$. Di questi andiamo a considerare quelli in comune con B e otteniamo

$$B \cap C = \{-10, -4, 2, 8\}.$$

Quindi $B \cap C$ ha 4 elementi.

Intersecando $A \cap B = \{-9, -6, -3, 0, 3, 6, 9\}$ con $C = \{2, 8, 14, \ldots, -4, -10, -16, \ldots\}$, otteniamo

$$A \cap B \cap C = \emptyset,$$

ovvero l'insieme vuoto, con zero elementi. (Questo si può vedere anche in altro modo: C contiene solo elementi della forma $6k + 2$. Siccome $6k$ è un multiplo di 3 ma 2 non lo è, la loro somma non può essere un multiplo di 3. Quindi quando andiamo a intersecare con A otteniamo l'insieme vuoto.)

2. Si elenchino gli elementi dell'insieme

$$D = \{(x, y) \in (A \cap B) \times (B \cap C) \mid x \cdot y \leq 0\}$$

SOLUZIONE: Sostituendo otteniamo $(A \cap B) \times (B \cap C) = \{-9, -6, -3, 0, 3, 6, 9\} \times \{-10, -4, 2, 8\}$. Svolgendo il prodotto cartesiano otteniamo 28 coppie (x, y) con x preso dal primo insieme e y dal secondo. A noi però di queste interessano solo quelle che verificano la condizione $xy \leq 0$, e dobbiamo quindi scartare quelle con x, y entrambi positivi o entrambi negativi. Quindi D contiene le sequenti coppie: $(-9, 2), (-9, 8), (-6, 2), (-6, 8), (-3, 2), (-3, 8), (0, -10), (0, -4), (0, 2), (0, 8), (3, -10), (3, -4), (6, -10), (6, -4), (9, -10), (9, -4)\}$.

3. Consideriamo la funzione $f : C \to A$ tale che $f(c) = c + 1$ per ogni $c \in C$. Dire se tale funzione è iniettiva, surgettiva, bigettiva.

SOLUZIONE: è iniettiva perché se $c + 1 = d + 1$ cancellando 1 otteniamo $c = d$. Ricordiamo che il dominio C di f è l'insieme degli interi della forma $6k + 2$. Per la surgettività dobbiamo controllare se l'immagine della funzione coincide con il codominio A. L'immagine di f si ottiene sommando uno a ciascun degli elementi del dominio (in quanto $f(c) = c + 1$). Si ottenendo in tal modo tutti i valori della forma $6k + 3$. Tra questi valori c'e' $3, 9, 15, \ldots$ ma non c'è ad esempio il 6, che tuttavia è nel codominio A di f. Quindi f non è surgettiva.

Esercizio 3. Trovare il più piccolo intero positivo n_0 tale che la disuguaglianza

$$2^n \geq 2^{n-2} + n^2$$

sia valida per tutti gli interi $n \geq n_0$ e dimostrare questo fatto per induzione.

PASSO INDUTTIVO. Supponiamo per ipotesi induttiva che

$$2^n \geq 2^{n-2} + n^2 \qquad (*).$$

Consideriamo il caso successivo, ovvero cerchiamo di dimostrare che

$$2^{n+1} \geq 2^{n-1} + (n+1)^2 \qquad (**).$$

Abbiamo

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2(2^{n-2} + n^2) = 2^{n-1} + 2n^2$$

dove nella disuguaglianza centrale abbiamo usato la (*). Per ottenere la (**) basta dimostrare che

$$2n^2 \geq (n+1)^2,$$

che affrontiamo come esercizio a parte. Ricordando che $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$, cancellando un n^2 otteniamo la disuguglianza equivalente

$$n^2 \geq 2n + 1.$$

Equivalentemente:

$$n \geq 2 + 1/n.$$

Questa disuguaglianza, e quindi il passo induttivo, è vera per ogni $n \geq 3$.

BASE: Svolgendo i calcoli si vede che $n_0 = 6$ è il minimo intero positivo che verifica la disuguaglianza. D'altra parte per $n \geq 3$ vale il passo induttivo, e possiamo quindi concludere che la disugualianza è vera per ogni $n \geq 6$.